

О.М.Самборська, Б.Г.Шелестовський

ЧИСЛОВІ МЕТОДИ

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК
для студентів вищих навчальних закладів

Тернопіль
2008

УДК 519.6

О.М.Самборська, Б.Г.Шелестовський **Числові методи.** Навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів. – Тернопіль: ТДТУ імені Івана Пулюя, 2008. – 140с.

Посібник містить теоретичний матеріал з розділів: дії з наближеними числами, методи розв'язання алгебраїчних і трансцендентних рівнянь, методи розв'язання систем лінійних та нелінійних рівнянь, апроксимація функцій, числове диференціювання та інтегрування, наближене розв'язування диференціальних рівнянь, методи оптимізації. Наведено приклади розв'язання типових задач, проведено порівняльний аналіз числових методів щодо точності, доцільності застосування та обсягу обчислювальної роботи.

Розрахований на студентів та аспірантів технічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

Автори: *Самборська Олександра Миколаївна,
Шелестовський Борис Григорович*

Рецензенти:

Ленюк М.П. – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри інформаційних систем Чернівецького факультету НТУ “Харківський політехнічний університет”

Недашковський М.О. – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри автоматизованих систем і програмування Тернопільського національного економічного університету

Рудницький В.Б. – Заслужений діяч науки і техніки України, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики та комп'ютерних застосувань Хмельницького національного університету

Рекомендовано

*Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник*

(лист Міністерства освіти і науки України № _____)

ВСТУП

Інтенсивний розвиток техніки й подальше впровадження сучасних розділів математики в інженерні дослідження істотно підвищили вимоги до математичної підготовки фахівців інженерних спеціальностей. За допомогою математичного моделювання вирішення науково-технічної задачі зводиться до розв'язання математичної задачі, яка моделює даний процес. Для розв'язання математичних задач застосовують такі основні групи методів: графічні, аналітичні та числові.

Суть графічних методів полягає в тому, що розв'язок задачі шукається шляхом геометричних побудов.

При використанні аналітичних методів розв'язок задачі записується у вигляді точної формули. Проте в багатьох випадках неможливо знайти точний розв'язок поставленої задачі.

Тому великого значення набули числові методи, які дозволяють звести розв'язання математичної задачі до виконання скінченної кількості арифметичних дій над числами, при цьому потрібні результати одержуються в конкретній числовій формі. З появою швидкодіючих електронних обчислювальних машин почався період бурхливого розвитку числових методів та їх упровадження в практику.

Майбутні інженерні фахівці повинні ґрунтовно оволодіти основними поняттями та методами обчислювальної математики, оскільки одним із найважливіших завдань вищої школи є навчити майбутніх спеціалістів застосовувати набуті знання до розв'язання прикладних задач.

Мета даного навчального посібника – допомогти студентам засвоїти основні числові методи розв'язання математичних задач та особливості їх застосування.

В кожному розділі, крім теоретичних відомостей, подано розв'язання типових задач з поясненням і аналізом методу розв'язання. Це дає можливість студентам як стаціонарної, так і заочної форм навчання самостійно працювати з посібником, опрацьовувати відповідний матеріал та успішно розв'язувати задачі розрахункових і контрольних робіт.

При написанні цього посібника використано джерела, вказані у списку літератури.

РОЗДІЛ 1

НАБЛИЖЕНІ ЧИСЛА ТА ДІЇ З НИМИ

1.1. Числа з плаваючою крапкою

ЕОМ оперують з дійсними числами, які записані у формах із фіксованою крапкою та з плаваючою крапкою. Десяткові числа з фіксованою крапкою - це звична форма запису чисел: 16.085, 943.5, 0.0147 і т. д.; тут замість десяткової коми ставиться крапка.

Десяткове число D у формі запису з плаваючою крапкою має вигляд:

$$D = \pm m \cdot 10^n,$$

де m і n – відповідно мантиса числа і його порядок. Наприклад, число -547.8 можна записати у вигляді: $-5478 \cdot 10^{-1}$, $-54.78 \cdot 10^1$, $-5.478 \cdot 10^2$, $-0.5478 \cdot 10^3$. Останній запис – це нормалізована форма числа з плаваючою крапкою. Отже, якщо мантису числа подати у вигляді

$$m = 0.d_1d_2\dots d_k, \quad (1.1)$$

то при $d_1 \neq 0$ отримаємо нормалізовану форму числа з плаваючою крапкою. Надалі, кажучи про числа з плаваючою крапкою, будемо мати на увазі саме нормалізовану форму.

Ця форма поширюється також на числа, записані в інших системах числення. Число M у системі числення з основою α можна записати у вигляді:

$$M = \pm 0.a_1a_2\dots a_k \cdot \alpha^n, \quad a_1 \neq 0. \quad (1.2)$$

З цього запису випливає, що підмножина дійсних чисел, з якою оперує конкретна ЕОМ, є скінченною й визначається розрядністю k і межами порядку n_1, n_2 ($n_1 \leq n \leq n_2$).

Можна довести, що ця підмножина містить $2(\alpha - 1)(n_2 - n_1 + 1)\alpha^{k-1} + 1$ чисел.

Межі порядку n_1, n_2 визначають обмеженість дійсних чисел за величиною, а розрядність k – дискретність розподілу їх на відрізьку числової осі. Наприклад, у випадку десяткових чисел при шестирозрядному представленні усі значення, які містяться в інтервалі між числами $0,753426$ і $0,753427$ представляються числом $0,753426$ (при відкиданні інших розрядів без заокруглення). Різниця між двома сусідніми значеннями дорівнює одиниці останнього розряду. Числа, які менші від цієї різниці, сприймаються як машинний нуль. Таким чином, ЕОМ оперують із наближеними значеннями дійсних чисел.

1.2. Абсолютна та відносна похибки

Нехай a – точне значення деякої величини, a^* - її наближене значення, одержане в результаті обчислення або вимірювання.

Абсолютною похибкою $\Delta(a^*)$ наближеного числа a^* називається абсолютна величина різниці між відповідним точним числом a і даним наближеним значенням a^* .

$$\Delta(a^*) = |a - a^*|. \quad (1.3)$$

Оскільки точне значення величини зазвичай невідоме, то ми не можемо визначити абсолютну похибку $\Delta(a^*)$ за формулою (1.3). Тому розглядають оцінку зверху абсолютної похибки – граничну абсолютну похибку $\bar{\Delta}(a^*)$. Граничною абсолютною похибкою називається будь-яке число $\bar{\Delta}(a^*)$, яке задовольняє нерівність

$$\Delta(a^*) \leq \bar{\Delta}(a^*). \quad (1.4)$$

На практиці для $\bar{\Delta}(a^*)$ вибирають по можливості якнайменше число, яке задовольняє нерівність (1.4).

Отже, якщо $\bar{\Delta}(a^*)$ – гранична абсолютна похибка наближеного числа a^* , то

$$|a - a^*| \leq \bar{\Delta}(a^*), \quad (1.5)$$

$$a^* - \bar{\Delta}(a^*) \leq a \leq a^* + \bar{\Delta}(a^*), \quad (1.6)$$

тобто точне число a міститься на відрізку $[a^* - \bar{\Delta}(a^*); a^* + \bar{\Delta}(a^*)]$. Записуючи наближене число, отримане в результаті вимірювання, зазвичай вказують його граничну абсолютну похибку. Наприклад, якщо наближене значення довжини відрізка $l^* = 124$ см з точністю до 0,5 см, то пишуть $l^* = 124 \text{ см} \pm 0,5$ см. Тут гранична абсолютна похибка $\bar{\Delta}(l^*) = 0,5$ см, а точне значення довжини l відрізка міститься в межах $123,5 \text{ см} \leq l \leq 124,5 \text{ см}$.

Відносною похибкою $\delta(a^*)$ наближеного числа a^* називається відношення абсолютної похибки $\Delta(a^*)$ до модуля відповідного точного числа a ($a \neq 0$), тобто:

$$\delta(a^*) = \frac{\Delta(a^*)}{|a|} = \left| \frac{a - a^*}{a} \right|. \quad (1.7)$$

Оскільки точне число a часто невідоме і $a \approx a^*$, то замість формули (1.7) користуємося формулою:

$$\delta(a^*) = \frac{\Delta(a^*)}{|a^*|} = \left| \frac{a - a^*}{a^*} \right|. \quad (1.8)$$

Звідси отримуємо

$$\Delta(a^*) = |a^*| \delta(a^*). \quad (1.9)$$

Граничною відносною похибкою даного наближеного числа a^* називається будь-яке число $\bar{\delta}(a^*)$, яке задовольняє нерівність:

$$\delta(a^*) \leq \bar{\delta}(a^*). \quad (1.10)$$

Тоді $\Delta(a^*) \leq |a^*| \bar{\delta}(a^*)$, і за граничну абсолютну похибку наближеного числа a^* можна взяти число

$$\bar{\Delta}(a^*) = |a^*| \bar{\delta}(a^*).$$

Звідси одержуємо

$$\bar{\delta}(a^*) = \frac{\bar{\Delta}(a^*)}{|a^*|}. \quad (1.11)$$

1.3. Значущі цифри. Кількість вірних знаків

Значущими цифрами наближеного числа називаються усі цифри даного числа, починаючи з першої ненульової цифри. Наприклад, в числі 0.0058 дві значущі цифри, в числі 23.70 усі чотири цифри значущі. При зміні форми запису числа кількість значущих цифр не повинна змінюватися, тобто потрібно зберігати рівносильність перетворень. Наприклад, записи $3700 = 0.3700 \cdot 10^4$ і $0.320 \cdot 10^2 = 32.0$ рівносильні, а записи $3700 = 0.37 \cdot 10^4$ і $0.320 \cdot 10^2 = 32$ нерівносильні.

Кажуть, що n перших значущих цифр наближеного числа є вірними у вузькому змісті, якщо абсолютна похибка цього числа не перевищує половини одиниці розряду, який виражається n -ою значущою цифрою, рахуючи зліва направо.

Наприклад, для точного числа $a = 45,96$, число $a^* = 46,00$ є наближеним значенням із трьома вірними цифрами у вузькому змісті, оскільки $|a - a^*| = 0,04 < \frac{1}{2} \cdot 0,1$.

Зауважимо, що в математичних таблицях усі значущі цифри є вірними. Наприклад, у п'ятизначних таблицях логарифмів абсолютна похибка мантиси не перевищує $\frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$.

Термін “ n вірних знаків” не потрібно розуміти буквально, тобто так, що в даному наближеному числі з n вірними знаками n перших його значущих цифр співпадають із відповідними цифрами точного числа a .

Наприклад, наближене число $a^* = 9,995$, яке замінює точне число $a = 10$, має три вірних знаки, оскільки $|a - a^*| = 0,005 \leq \frac{1}{2} \cdot 0,01$, але усі цифри цих чисел різні.

Зауваження. Кажуть, що число a^* є наближеним значенням точного числа a з n вірними знаками у широкому змісті, якщо абсолютна похибка

$\Delta(a^*)$ не перевищує одиниці розряду, який виражається n -ою значущою цифрою наближеного числа a^* .

Наприклад, для точного числа $a = 231,2467$ число $a^* = 231,246$ є наближеним значенням із шістьма вірними знаками у широкому змісті, оскільки $|a - a^*| = 0,0007 < 0,001$. Надалі вірні знаки наближеного числа ми будемо розуміти у вузькому змісті, якщо не зроблено застереження про протилежне.

1.4. Заокруглення чисел

Розглянемо деяке наближене або точне число a . Часто виникає необхідність заокруглити це число, тобто замінити його іншим числом a_1 з меншою кількістю значущих цифр. Число a_1 вибирають так, щоб абсолютна похибка заокруглення $|a - a_1|$ була мінімальною.

Щоб заокруглити число до n значущих цифр, відкидають усі його цифри, які розміщені справа від n -ої значущої цифри.

При цьому:

1. якщо перша з відкинутих цифр менша від 5, то залишені цифри не змінюються;
2. якщо перша з відкинутих цифр більша від 5, то до останньої залишеної цифри додається одиниця;
3. якщо перша з відкинутих цифр дорівнює 5 і серед інших відкинутих цифр є ненульові, то остання залишена цифра збільшується на одиницю; якщо перша з відкинутих цифр дорівнює 5 і всі інші відкинуті цифри дорівнюють нулю, то остання залишена цифра не змінюється, якщо вона парна, і збільшується на одиницю, якщо вона непарна (правило парної цифри).

Похибка, яка виникає при заокругленні чисел, не перевищує половини одиниці десяткового розряду, який визначається останньою залишеною значущою цифрою.

Приклад 1.1. Заокруглюючи число $\pi = 3,1415926535\dots$ до п'яти, чотирьох і трьох значущих цифр, одержимо наближені числа: 3,1416; 3,142;

3,14 з абсолютними похибками, які менші відповідно від $\frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$; $\frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$;

$\frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$.

Приклад 1.2. Заокруглити до чотирьох знаків після коми числа:

- а) $-1,00045$; б) $37,009974$; в) $5,403825$; г) $-19,5832506$.

Розв'язання.

- а) $-1,0004$; б) $37,0100$; в) $5,4038$; г) $-19,5833$.

1.5. Похибка суми та різниці

Нехай $a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*$ – наближені числа.

Розглянемо їх алгебраїчну суму

$$a^* = a_1^* \pm a_2^* \pm \dots \pm a_n^*.$$

Очевидно, що абсолютна похибка

$$\Delta(a^*) \leq \Delta(a_1^*) + \Delta(a_2^*) + \dots + \Delta(a_n^*). \quad (1.12)$$

За граничну абсолютну похибку алгебраїчної суми наближених чисел можна взяти суму граничних абсолютних похибок доданків:

$$\bar{\Delta}(a^*) = \bar{\Delta}(a_1^*) + \bar{\Delta}(a_2^*) + \dots + \bar{\Delta}(a_n^*). \quad (1.13)$$

Отже, при додаванні та відніманні наближених чисел їх граничні абсолютні похибки додаються. Із формули (1.13) випливає, що гранична абсолютна похибка суми не може бути меншою від граничної абсолютної похибки найменш точного (у розумінні абсолютної похибки) із доданків. Тому, як би точно не були визначені інші доданки, неможливо за їх рахунок збільшити точність суми. Звідси випливає практичне правило додавання наближених чисел.

Щоб додати числа з різними абсолютними похибками, потрібно:

- 1) виділити числа, які мають найбільшу абсолютну похибку й залишити їх без зміни;
- 2) усі інші числа заокруглити за зразком виділених, зберігаючи 1 або 2 запасних десяткових знаки;
- 3) виконати додавання даних чисел, враховуючи всі збережені знаки;
- 4) одержаний результат заокруглити на 1 або 2 знаки.

Розглянемо суму наближених чисел $a^* = a_1^* + a_2^* + \dots + a_n^*$, причому усі доданки мають однаковий знак. Нехай, наприклад, $a_i^* > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Гранична відносна похибка цієї суми обчислюється за формулою:

$$\bar{\delta}(a^*) = \frac{\bar{\Delta}(a^*)}{a^*} = \frac{\bar{\Delta}(a_1^*) + \bar{\Delta}(a_2^*) + \dots + \bar{\Delta}(a_n^*)}{a_1^* + a_2^* + \dots + a_n^*}. \quad (1.14)$$

Оскільки $\bar{\delta}(a_i^*) = \frac{\bar{\Delta}(a_i^*)}{a_i^*}$, то $\bar{\Delta}(a_i^*) = a_i^* \cdot \bar{\delta}(a_i^*)$. Підставивши ці вирази у формулу (1.14), отримаємо:

$$\bar{\delta}(a^*) = \frac{a_1^* \bar{\delta}(a_1^*) + a_2^* \bar{\delta}(a_2^*) + \dots + a_n^* \bar{\delta}(a_n^*)}{a_1^* + a_2^* + \dots + a_n^*}. \quad (1.15)$$

Нехай $\bar{\delta}$ є найбільшою з граничних відносних похибок

$$\bar{\delta}(a_1^*), \bar{\delta}(a_2^*), \dots, \bar{\delta}(a_n^*),$$

тобто $\bar{\delta}(a_i^*) \leq \bar{\delta}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Тоді з формули (1.15) одержуємо

$$\bar{\delta}(a^*) \leq \bar{\delta}. \quad (1.16)$$

Отже, якщо усі доданки мають однаковий знак, то гранична відносна похибка їх суми не перевищує найбільшої з граничних відносних похибок доданків.

Розглянемо різницю двох наближених чисел $a_1^* - a_2^*$. Гранична відносна похибка різниці обчислюється за формулою:

$$\bar{\delta}(a_1^* - a_2^*) = \frac{\bar{\Delta}(a_1^* - a_2^*)}{|a_1^* - a_2^*|} = \frac{\bar{\Delta}(a_1^*) + \bar{\Delta}(a_2^*)}{|a_1^* - a_2^*|}. \quad (1.17)$$

Якщо наближені числа a_1^* та a_2^* мало відрізняються одне від одного, тобто $a_1^* \approx a_2^*$, то гранична відносна похибка $\bar{\delta}(a_1^* - a_2^*)$ може бути досить великою.

Обчислимо, наприклад, різницю двох чисел $a_1^* = 48,132$ і $a_2^* = 48,111$, кожне з яких має п'ять вірних значущих цифр. Віднімаючи, отримаємо $a^* = 48,132 - 48,111 = 0,021$. Таким чином, різниця a^* має лише дві значущі цифри, з яких остання сумнівна, оскільки гранична абсолютна похибка різниці

$$\bar{\Delta}(a^*) = \frac{1}{2} \cdot 0,001 + \frac{1}{2} \cdot 0,001 = 0,001.$$

Граничні відносні похибки зменшуваного, від'ємника та різниці відповідно дорівнюють:

$$\bar{\delta}(a_1^*) = \frac{0,0005}{48,132} \approx 0,00001,$$

$$\bar{\delta}(a_2^*) = \frac{0,0005}{48,111} \approx 0,00001,$$

$$\bar{\delta}(a^*) = \frac{0,001}{0,021} \approx 0,05.$$

Отже, в даному випадку гранична відносна похибка різниці приблизно в 5000 разів більша від граничних відносних похибок вихідних даних.

Тому при організації обчислювальних алгоритмів потрібно уникати віднімання близьких чисел; якщо можливо, то алгоритм потрібно змінити так, щоб уникнути втрати точності на деякому етапі обчислень. А якщо уникнути віднімання близьких чисел неможливо, то потрібно зменшуване і від'ємник брати з достатньою кількістю запасних вірних знаків (якщо є така можливість). Наприклад, якщо відомо, що при відніманні чисел a_1^* і a_2^* перші m значущих цифр зникнуть, а результат необхідно мати з n вірними значущими цифрами, то a_1^* і a_2^* потрібно взяти з $m + n$ вірними значущими цифрами.

Приклад 1.3. Обчислити різницю $a^* = \sqrt{2,01} - \sqrt{2}$ з трьома вірними значущими цифрами.

Розв'язання. Оскільки $\sqrt{2,01} = 1,41774469$ і $\sqrt{2} = 1,41421356$, то шуканий результат $a^* = 0,00353 = 3,53 \cdot 10^{-3}$.

Цей результат можна одержати іншим способом

$$a^* = \frac{0,01}{\sqrt{2,01} + \sqrt{2}} = \frac{0,01}{1,418 + 1,414} = 3,53 \cdot 10^{-3}.$$

1.6. Похибка добутку та частки

Нехай $u = ab$ – точне значення добутку двох чисел, $u^* = a^* b^*$ – його наближене значення. Абсолютна похибка добутку

$$\begin{aligned} \Delta(u^*) &= |u - u^*| = |ab - a^* b^*| = |ab - a^* b + a^* b - a^* b^*| = \\ &= |b(a - a^*) + a^*(b - b^*)| \leq |b| \Delta(a^*) + |a^*| \Delta(b^*) \leq (|b^*| + \Delta(b^*)) \Delta(a^*) + |a^*| \Delta(b^*). \end{aligned}$$

Отже,

$$\Delta(u^*) \leq |b^*| \Delta(a^*) + |a^*| \Delta(b^*) + \Delta(a^*) \Delta(b^*). \quad (1.18)$$

Для відносної похибки $\delta(u^*)$ одержуємо:

$$\delta(u^*) \leq \frac{\Delta(u^*)}{|a^* b^*|} \leq \delta(a^*) + \delta(b^*) + \delta(a^*) \delta(b^*). \quad (1.19)$$

За граничну абсолютну похибку і граничну відносну похибку добутку можна взяти такі величини:

$$\bar{\Delta}(a^* b^*) = |b^*| \bar{\Delta}(a^*) + |a^*| \bar{\Delta}(b^*) + \bar{\Delta}(a^*) \cdot \bar{\Delta}(b^*), \quad (1.20)$$

$$\bar{\delta}(a^* b^*) = \bar{\delta}(a^*) + \bar{\delta}(b^*) + \bar{\delta}(a^*) \bar{\delta}(b^*), \quad (1.21)$$

де $\bar{\Delta}(a^*)$, $\bar{\Delta}(b^*)$ – граничні абсолютні похибки чисел a^* і b^* ; $\bar{\delta}(a^*)$, $\bar{\delta}(b^*)$ – їх граничні відносні похибки.

Розглянемо частку $v = \frac{a}{b}$. Нехай $v^* = \frac{a^*}{b^*}$ – її наближене значення.

Абсолютна похибка частки

$$\Delta(v^*) = \left| \frac{a}{b} - \frac{a^*}{b^*} \right| = \left| \frac{ab^* - ba^*}{bb^*} \right| = \left| \frac{ab^* - a^* b^* + a^* b^* - ba^*}{bb^*} \right| = \left| \frac{b^* \Delta(a^*) + a^* \Delta(b^*)}{bb^*} \right|.$$

Після деяких перетворень отримаємо:

$$\Delta(v^*) \leq \frac{|b^*| \Delta(a^*) + |a^*| \Delta(b^*)}{(1 - \delta(b^*)) |b^*|^2}. \quad (1.22)$$

Для відносної похибки одержимо:

$$\delta(v^*) \leq \frac{\delta(a^*) + \delta(b^*)}{1 - \delta(b^*)}. \quad (1.23)$$

За граничну абсолютну похибку й граничну відносну похибку частки можна взяти такі величини:

$$\bar{\Delta}\left(\frac{a^*}{b^*}\right) = \frac{|b^*| \bar{\Delta}(a^*) + |a^*| \bar{\Delta}(b^*)}{(1 - \bar{\delta}(b^*)) |b^*|^2}, \quad (1.24)$$

$$\bar{\delta}\left(\frac{a^*}{b^*}\right) = \frac{\bar{\delta}(a^*) + \bar{\delta}(b^*)}{1 - \bar{\delta}(b^*)}. \quad (1.25)$$

Оскільки граничні абсолютні та відносні похибки чисел a^* , b^* малі в порівнянні з цими числами й граничні відносні похибки значно менші від одиниці, то замість формул (1.20), (1.21), (1.24), (1.25) використовують наближені формули:

$$\bar{\Delta}(a^* b^*) \approx |b^*| \bar{\Delta}(a^*) + |a^*| \bar{\Delta}(b^*), \quad (1.26)$$

$$\bar{\delta}(a^* b^*) \approx \bar{\delta}(a^*) + \bar{\delta}(b^*), \quad (1.27)$$

$$\bar{\Delta}\left(\frac{a^*}{b^*}\right) \approx \frac{|b^*| \bar{\Delta}(a^*) + |a^*| \bar{\Delta}(b^*)}{|b^*|^2}, \quad (1.28)$$

$$\bar{\delta}\left(\frac{a^*}{b^*}\right) \approx \bar{\delta}(a^*) + \bar{\delta}(b^*). \quad (1.29)$$

Отже, при множенні та діленні наближених чисел їх граничні відносні похибки додаються.

Зауваження. Часто на практиці спочатку обчислюють граничні відносні похибки добутку й частки за формулами (1.27), (1.29), а потім визначають граничні абсолютні похибки добутку й частки:

$$\bar{\Delta}(a^* b^*) = |a^* b^*| \bar{\delta}(a^* b^*), \quad (1.30)$$

$$\bar{\Delta}\left(\frac{a^*}{b^*}\right) = \left|\frac{a^*}{b^*}\right| \bar{\delta}\left(\frac{a^*}{b^*}\right). \quad (1.31)$$

Приклад 1.4. Дано наближені числа $a_1^* = -0,723$; $a_2^* = 4,3572$; $a_3^* = 0,89745$, усі написані знаки яких вірні. Знайти число $\frac{a_1^* \cdot a_2^*}{a_3^*}$ та визначити кількість вірних знаків у ньому.

Розв'язання. $b^* = -\frac{0,723 \cdot 4,3572}{0,89745} = -3,51023$.

Знайдемо граничну абсолютну похибку $\bar{\Delta}(b^*)$. Для цього обчислимо спочатку граничну відносну похибку $\bar{\delta}(b^*)$.

$$\bar{\delta}(b^*) = \bar{\delta}(a_1^*) + \bar{\delta}(a_2^*) + \bar{\delta}(a_3^*).$$

Оскільки $\bar{\Delta}(a_1^*) = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3}$, $\bar{\Delta}(a_2^*) = \frac{1}{2} \cdot 10^{-4}$, $\bar{\Delta}(a_3^*) = \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$, то

$$\bar{\delta}(a_1^*) = \frac{0,0005}{0,723} = 0,000692, \quad \bar{\delta}(a_2^*) = \frac{0,00005}{4,3572} = 0,000011,$$

$$\bar{\delta}(a_3^*) = \frac{0,000005}{0,89745} = 0,000006, \quad \bar{\delta}(b^*) = 0,000709 \approx 0,0007.$$

Отже, $\bar{\Delta}(b^*) = |b^*| \cdot \bar{\delta}(b^*) \approx 0,0025 < 0,003$.

Оскільки гранична абсолютна похибка наближеного числа b^* не перевищує 0,005, то це число має три вірні знаки, тобто $b^* = -3,51$ або, точніше, $b^* = -3,510 \pm 0,003$.

1.7. Похибка функції

Нехай відомі похибки деякої системи величин. Потрібно знайти похибку даної функції від цих величин. Розглянемо, наприклад, функцію двох змінних $u = f(x, y)$, яка диференційовна в деякій області G .

Нехай числа x_0^* , y_0^* є наближеними значеннями координат деякої точки $M_0(x_0, y_0) \in G$, причому замкнений прямокутник

$$\bar{R} = \{(x, y) : |x - x_0^*| \leq \bar{\Delta}(x_0^*); |y - y_0^*| \leq \bar{\Delta}(y_0^*)\},$$

в якому містяться обидві точки $M_0(x_0, y_0)$ і $M_1(x_0^*, y_0^*)$, належить області G .

Зазвичай на практиці граничні абсолютні похибки $\bar{\Delta}(x_0^*)$ і $\bar{\Delta}(y_0^*)$ – малі величини. Тому абсолютну похибку функції Δu можна замінити модулем її повного диференціала du .

$$\Delta u \approx |du| = |f'_x(x, y) \Delta x + f'_y(x, y) \Delta y|, \quad (1.32)$$

де Δx і Δy – прирости аргументів.

Використовуючи властивості модуля дійсного числа, отримаємо:

$$\Delta u \approx |du| \leq |f'_x(x, y)| |\Delta x| + |f'_y(x, y)| |\Delta y|. \quad (1.33)$$

Нехай в даному прямокутнику \bar{R}

$$|f'_x(x, y)| \leq C_1, \quad |f'_y(x, y)| \leq C_2.$$

За граничну абсолютну похибку значення функції $u_0^* = f(x_0^*, y_0^*)$ можна взяти величину

$$\bar{\Delta}(u_0^*) = C_1 \cdot \bar{\Delta}(x_0^*) + C_2 \cdot \bar{\Delta}(y_0^*). \quad (1.34)$$

На практиці застосовують наближену формулу

$$\bar{\Delta}(u_0^*) \approx |f'_x(x_0^*, y_0^*)| \bar{\Delta}(x_0^*) + |f'_y(x_0^*, y_0^*)| \bar{\Delta}(y_0^*). \quad (1.35)$$

Поділивши обидві частини нерівності (1.33) на $|u|$, одержимо

$$\delta u \leq \left| \frac{f'_x(x, y)}{f(x, y)} \right| |\Delta x| + \left| \frac{f'_y(x, y)}{f(x, y)} \right| |\Delta y|,$$

тобто

$$\delta u \leq \left| \frac{\partial}{\partial x} \ln f(x, y) \right| |\Delta x| + \left| \frac{\partial}{\partial y} \ln f(x, y) \right| |\Delta y|. \quad (1.36)$$

Якщо в прямокутнику \bar{R}

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \ln f(x, y) \right| \leq C_3, \quad \left| \frac{\partial}{\partial y} \ln f(x, y) \right| \leq C_4,$$

то за граничну відносну похибку значення функції u_0^* можна взяти величину

$$\bar{\delta}(u_0^*) = C_3 \bar{\Delta}(x_0^*) + C_4 \bar{\Delta}(y_0^*). \quad (1.37)$$

На практиці застосовують наближену формулу:

$$\bar{\delta}(u_0^*) \approx \left| \left(\frac{\partial \ln f(x, y)}{\partial x} \right)_{\substack{x=x_0^* \\ y=y_0^*}} \right| \bar{\Delta}(x_0^*) + \left| \left(\frac{\partial \ln f(x, y)}{\partial y} \right)_{\substack{x=x_0^* \\ y=y_0^*}} \right| \bar{\Delta}(y_0^*). \quad (1.38)$$

Зауваження.

1. Нехай $u = x^n$. Знайдемо граничну відносну похибку значення $u_0^* = (x_0^*)^n$. $\ln u = n \ln x$; $(\ln u)' = \frac{n}{x}$; $\bar{\delta}(x_0^*)^n = \frac{n}{|x_0^*|} \cdot \bar{\Delta}(x_0^*) = n \bar{\delta}(x_0^*)$.

Отже, гранична відносна похибка n -го степеня наближеного числа в n разів більша від граничної відносної похибки цього числа.

2. Нехай $u = \sqrt[n]{x}$. Знайдемо граничну відносну похибку значення $u_0^* = \sqrt[n]{x_0^*}$. $\ln u = \frac{1}{n} \ln x$; $(\ln u)' = \frac{1}{nx}$; $\bar{\delta}(\sqrt[n]{x_0^*}) = \frac{1}{n|x_0^*|} \cdot \bar{\Delta}(x_0^*) = \frac{\bar{\delta}(x_0^*)}{n}$.

Тобто, гранична відносна похибка кореня n -го степеня з наближеного числа в n разів менша від граничної відносної похибки цього числа.

Приклад 1.5. Катети прямокутного трикутника дорівнюють $12,10 \pm 0,01$ і $25,21 \pm 0,01$. Визначити кут α , прилеглий до першого катета, й оцінити абсолютну та відносну похибки результату.

Розв'язання. Позначимо наближені значення катетів a та b через a^* та b^* . За умовою задачі $a^* = 12,10$, $b^* = 25,21$, $\bar{\Delta}(a^*) = \bar{\Delta}(b^*) = 0,01$.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{b}{a}, & \alpha &= \operatorname{arctg} \frac{b}{a}; \\ \frac{\partial \alpha}{\partial a} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \cdot \left(-\frac{b}{a^2}\right) = -\frac{b}{a^2 + b^2}; & \frac{\partial \alpha}{\partial b} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{a}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Обчислимо граничну абсолютну похибку $\bar{\Delta}(\alpha^*)$, застосувавши формулу (1.35).

$$\bar{\Delta}(\alpha^*) = \left(\frac{25,21}{25,21^2 + 12,10^2} + \frac{12,10}{25,21^2 + 12,10^2} \right) 0,01 = 0,00048 < 0,0005;$$

$$\alpha^* = \operatorname{arctg} \frac{b^*}{a^*} = \operatorname{arctg} \frac{25,21}{12,10} = \operatorname{arctg} 2,0835 = 1,1233.$$

Отже, $\alpha = 1,1233 \pm 0,0005$.

Гранична відносна похибка

$$\bar{\delta}(\alpha^*) = \frac{\bar{\Delta}(\alpha^*)}{\alpha^*} = \frac{0,00048}{1,1233} \approx 0,00043, \text{ тобто } \bar{\delta}(\alpha^*) \approx 0,04\%.$$

1.8. Обернена задача теорії похибок

На практиці важливою є також обернена задача: які повинні бути абсолютні похибки аргументів, щоб абсолютна похибка функції не перевищувала заданої величини.

Ця задача математично невизначена, оскільки задану граничну абсолютну похибку $\bar{\Delta}(u)$ функції $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можна забезпечити, встановлюючи різними способами граничні абсолютні похибки її аргументів. Найпростіше розв'язання оберненої задачі одержується за допомогою так званого принципу однакових впливів.

Нехай при наближених значеннях аргументів $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ одержимо наближене значення функції $u^* = f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$. Тоді гранична абсолютна похибка

$$\bar{\Delta}(u^*) = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)}{\partial x_i} \right| \bar{\Delta}(x_i^*). \quad (1.39)$$

Будемо вважати, що всі доданки однаково впливають на утворення граничної абсолютної похибки $\bar{\Delta}(u^*)$, тобто

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)}{\partial x_1} \right| \bar{\Delta}(x_1^*) &= \left| \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)}{\partial x_2} \right| \bar{\Delta}(x_2^*) = \dots \\ \dots &= \left| \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)}{\partial x_n} \right| \bar{\Delta}(x_n^*) = \frac{\bar{\Delta}(u^*)}{n}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Із (1.40) отримуємо формули для граничних абсолютних похибок аргументів:

$$\bar{\Delta}(x_i^*) = \frac{\bar{\Delta}(u^*)}{n \left| \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)}{\partial x_i} \right|} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.41)$$

Іноколи при розв'язанні оберненої задачі за принципом однакових впливів виявляється, що знайдені граничні абсолютні похибки деяких змінних настільки малі, що досягнути відповідної точності при вимірюванні цих величин практично неможливо. В таких випадках слід відступити від принципу рівних впливів і за рахунок деякого зменшення похибок однієї частини змінних збільшити похибки іншої частини змінних. Аналогічно розв'язується інша обернена задача теорії похибок, коли задана гранична відносна похибка функції й потрібно знайти граничні абсолютні або відносні похибки аргументів.

Приклад 1.6. Потрібно обчислити з граничною відносною похибкою 1% площу бічної поверхні зрізаного конуса, радіуси основ і твірну якого виміряні наближено й дорівнюють $R^* \approx 3\text{м}$, $r^* \approx 1\text{м}$, $l^* \approx 5\text{м}$. З якою точністю слід виміряти радіуси та твірну й зі скількома знаками потрібно взяти число π ?

Розв'язання. Бічну поверхню S_s зрізаного конуса обчислюємо за формулою:

$$S_\delta = \pi (R + r) l;$$

$$\ln S_\delta = \ln \pi + \ln(R + r) + \ln l;$$

$$\frac{\partial}{\partial \pi} (\ln S_\delta) = \frac{1}{\pi}; \quad \frac{\partial}{\partial R} (\ln S_\delta) = \frac{\partial}{\partial r} (\ln S_\delta) = \frac{1}{R + r}; \quad \frac{\partial}{\partial l} (\ln S_\delta) = \frac{1}{l}.$$

Гранична відносна похибка

$$\bar{\delta}(S^*) = \frac{1}{\pi^*} \bar{\Delta}(\pi^*) + \frac{1}{R^* + r^*} \bar{\Delta}(R^*) + \frac{1}{R^* + r^*} \bar{\Delta}(r^*) + \frac{1}{l^*} \bar{\Delta}(l^*) = 0,01.$$

За принципом рівних впливів одержуємо

$$\frac{\bar{\Delta}(\pi^*)}{\pi^*} = \frac{\bar{\Delta}(R^*)}{R^* + r^*} = \frac{\bar{\Delta}(r^*)}{R^* + r^*} = \frac{\bar{\Delta}(l^*)}{l^*} = 0,0025.$$

Звідси отримуємо: $\bar{\Delta}(\pi^*) = 3,14 \cdot 0,0025 = 0,00785$;

$$\bar{\Delta}(R^*) = 4 \cdot 0,0025 = 0,01; \quad \bar{\Delta}(r^*) = 0,01; \quad \bar{\Delta}(l^*) = 5 \cdot 0,0025 = 0,0125.$$

Отже, число π потрібно взяти з двома знаками після коми, радіуси виміряти з точністю до 1 см, а твірну – з точністю до 1,25 см.

1.9. Обчислення значень многочлена. Схеми Горнера

Дано многочлен степеня n з дійсними коефіцієнтами

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n. \quad (1.42)$$

Нехай потрібно обчислити значення цього многочлена при $x = x_1$:

$$P(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n. \quad (1.43)$$

Якщо проводити обчислення безпосередньо за формулою (1.43), то потрібно виконати $2n - 1$ множень та n додавань, тобто при великих значеннях n потрібно виконати досить велику кількість операцій. Крім того, це може призвести до втрати точності за рахунок похибок заокруглення.

Метод обчислення значень многочлена, який називається схемою Горнера, вимагає n множень та n додавань. Тому використання схеми Горнера зменшує об'єм обчислювальної роботи й підвищує точність обчислень за рахунок зменшення похибок заокруглення.

Запишемо вираз (1.43) у такому вигляді:

$$P(x_1) = a_0 + x_1(a_1 + x_1(a_2 + x_1(a_3 + \dots + x_1(a_{n-2} + x_1(a_{n-1} + x_1a_n) \dots))).$$

Послідовно обчислюємо числа:

$$b_n = a_n, \quad b_{n-1} = a_{n-1} + x_1b_n, \quad b_{n-2} = a_{n-2} + x_1b_{n-1}, \dots, \\ b_1 = a_1 + x_1b_2, \quad b_0 = a_0 + x_1b_1 = P(x_1). \quad (1.44)$$

Обчислення (1.44) зручно проводити за схемою:

$$\begin{array}{cccccccc} a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 & \boxed{x_1} \\ + & & & & & & & \\ \hline & x_1b_n & x_1b_{n-1} & \dots & x_1b_3 & x_1b_2 & x_1b_1 & \\ \hline b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_2 & b_1 & b_0 = P(x_1) & \end{array}$$

Можна довести, що числа $b_n, b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_1$ є коефіцієнтами многочлена $Q(x)$, який одержується у частці при діленні даного многочлена $P(x)$ на двочлен $x - x_1$, тобто $P(x) = Q(x)(x - x_1) + P(x_1)$, де

$$Q(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \dots + b_2 x + b_1.$$

Приклад 1.7. Дано многочлен $P(x) = x^5 + 4x^3 + 5x^2 - 7x + 8$. Потрібно знайти:

а) значення $P(x)$ при $x = 2$;

б) частку від ділення $P(x)$ на двочлен $x - 2$.

Розв'язання. Застосуємо схему Горнера.

$$\begin{array}{r} 1 \quad 0 \quad 4 \quad 5 \quad -7 \quad 8 \quad \quad \quad | \quad 2 \\ + \quad \quad 2 \quad 4 \quad 16 \quad 42 \quad 70 \\ \hline 1 \quad 2 \quad 8 \quad 21 \quad 35 \quad 78 = P(2) \end{array}$$

Отже, $P(2) = 78$; частка $Q(x) = x^4 + 2x^3 + 8x^2 + 21x + 35$.

Відомо, що коли многочлен $P(x)$ послідовно n разів ділити на двочлен $x - x_1$, то в остачі будемо одержувати: після першого ділення $P(x_1)$, після другого ділення $P'(x_1)$, після третього $\frac{P''(x_1)}{2!}$, ..., після n -го ділення $\frac{P^{(n-1)}(x_1)}{(n-1)!}$.

Приклад 1.8. Дано многочлен $P(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 4x - 1$. Потрібно обчислити $P(3)$, $P'(3)$, $P''(3)$, користуючись схемою Горнера.

$$\begin{array}{r} 1 \quad -2 \quad 3 \quad 4 \quad -1 \quad \quad \quad | \quad 3 \\ + \quad \quad 3 \quad 3 \quad 18 \quad 66 \\ \hline 1 \quad 1 \quad 6 \quad 22 \quad 65 = P(3) \\ + \quad \quad 3 \quad 12 \quad 54 \\ \hline 1 \quad 4 \quad 18 \quad 76 = P'(3) \\ \quad \quad 3 \quad 21 \\ \hline 1 \quad 7 \quad 39 = \frac{P''(3)}{2!} \end{array}$$

Отже, $P(3) = 65$, $P'(3) = 76$, $P''(3) = 78$.

Нехай для коефіцієнтів многочлена $P(x)$ та числа x_1 задані їх наближені значення й граничні абсолютні похибки.

Наприклад, нехай $x_1^* = 1,25$, $\bar{\Delta}(x_1^*) = 0,003$. Тоді згідно з формулою (1.6) $1,247 \leq x_1 \leq 1,253$, тобто $x_1 \in [1,247; 1,253]$. Аналогічно одержимо відповідні відрізки для кожного коефіцієнта многочлена $P(x)$. Застосовуючи схему Горнера й арифметику меж, можна визначити відрізок, на якому міститься

значення многочлена $P(x_1)$. При цьому обчислення за схемою Горнера модифікуються: всі числа замінюються відрізками.

Приклад 1.9. Дано многочлен $P(x) = 3,4x^3 + 1,2x^2 + 2,58x - 1,33$, коефіцієнти якого є наближеними числами з граничними абсолютними похибками

$$\bar{\Delta}(a_3) = 0,02; \quad \bar{\Delta}(a_2) = 0,03; \quad \bar{\Delta}(a_1) = 0,007; \quad \bar{\Delta}(a_0) = 0,005.$$

Визначити відрізок, на якому міститься значення $P(x_1)$, якщо для числа x_1 його наближене значення дорівнює $x_1^* = -0,98$ і $\bar{\Delta}(x_1^*) = 0,004$. Обчислення виконати з чотирма знаками після коми.

Розв'язання. Згідно з умовою задачі

$$a_3 \in [3,38; 3,42]; \quad a_2 \in [1,17; 1,23]; \quad a_1 \in [2,573; 2,587]; \\ a_0 \in [-1,335; -1,325]; \quad x_1 \in [-0,984; -0,976].$$

Застосуємо схему Горнера

[3,38;3,42]	[1,17;1,23]	[2,573;2,587]	[-1,335; -1,325]	[-0,984;-0,976]
[-3,3653;-3,2989]	[2,0192;2,1602]	[-4,6712;-4,4820]		
[3,38;3,42]	[-2,1953;-2,0689]	[4,5922;4,7472]	[-6,0062;-5,8070]	

Отже, $P(x_1) \in [-6,0062; -5,8070]$.

1.10. Завдання для самостійної роботи

1. В одержаних наближених числах a_1^* , a_2^* , a_3^* усі знаки вірні. Визначити кількість значущих цифр та вірних цифр після коми і граничну абсолютну похибку. Записати ці числа у нормалізованому вигляді. Заокруглити a_1^* до сотих, a_2^* - до тисячних, a_3^* - до десятитисячних. Знайти число $b^* = a_1^* + a_2^* - a_3^*$ та оцінити відносну похибку результату. Знайти числа $a_1^* \cdot a_2^* = c_1^*$; $c_2^* = \frac{a_1^*}{a_3^*}$. Оцінити відносну похибку та записати одержані числа c_1^* , c_2^* в нормалізованому вигляді.

1.1. $a_1^* = 10,2346$; $a_2^* = 0,4038$; $a_3^* = 0,05419$;

1.2. $a_1^* = 2,5306$; $a_2^* = 10,4867$; $a_3^* = 0,18312$;

1.3. $a_1^* = 15,4831$; $a_2^* = 8,0015$; $a_3^* = 0,00843$;

1.4. $a_1^* = 10,0541$; $a_2^* = -15,8136$; $a_3^* = 105,41186$;

1.5. $a_1^* = -1,0432$; $a_2^* = 0,00518$; $a_3^* = 0,54128$.

2. Обчислити: а) значення многочлена $P(x)$ для значення x^* , яке є заокругленням до сотих числа a_1^* ; б) значення многочлена $P(x)$ і похідної $P'(x)$, якщо граничні абсолютні похибки для коефіцієнтів многочлена і значення x^* дорівнюють відповідно $\bar{\Delta}_0, \bar{\Delta}_1, \bar{\Delta}_2, \bar{\Delta}_3, \bar{\Delta}(x^*)$.

2.1. $P(x) = 1,2x^3 - 2,3x^2 - 1,64x - 0,25$;

$\bar{\Delta}_0 = 0,004$; $\bar{\Delta}_1 = 0,001$; $\bar{\Delta}_2 = 0,03$; $\bar{\Delta}_3 = 0,02$; $\bar{\Delta}(x^*) = 0,006$;

2.2. $P(x) = 1,4x^3 + 3,4x^2 + 2,34x - 1,89$;

$\bar{\Delta}_0 = 0,005$; $\bar{\Delta}_1 = 0,003$; $\bar{\Delta}_2 = 0,04$; $\bar{\Delta}_3 = 0,01$; $\bar{\Delta}(x^*) = 0,002$;

2.3. $P(x) = 0,2x^3 - 3,8x^2 + 2,72x - 15,31$;

$\bar{\Delta}_0 = 0,003$; $\bar{\Delta}_1 = 0,008$; $\bar{\Delta}_2 = 0,06$; $\bar{\Delta}_3 = 0,01$; $\bar{\Delta}(x^*) = 0,008$;

2.4. $P(x) = 0,2x^3 - 1,3x^2 + 1,11x - 8,38$;

$\bar{\Delta}_0 = 0,002$; $\bar{\Delta}_1 = 0,007$; $\bar{\Delta}_2 = 0,08$; $\bar{\Delta}_3 = 0,02$; $\bar{\Delta}(x^*) = 0,005$;

2.5. $P(x) = 3,2x^3 + 2,3x^2 + 1,58x - 1,84$;

$\bar{\Delta}_0 = 0,007$; $\bar{\Delta}_1 = 0,004$; $\bar{\Delta}_2 = 0,04$; $\bar{\Delta}_3 = 0,04$; $\bar{\Delta}(x^*) = 0,005$.

3. Обчислити вираз, уникаючи віднімання близьких наближених чисел.

3.1. $\sqrt{10,23672} - \sqrt{10,12672}$;

3.2. $\sqrt{12,5418} - \sqrt{12,6518}$;

3.3. $\sqrt{15,8458} - \sqrt{15,7458}$;

3.4. $\sqrt{342,54} - \sqrt{340,54}$;

3.5. $\sqrt{10,734} - \sqrt{10,634}$.

4. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює $c^* \pm 0,1$; один з катетів $a^* \pm 0,1$. З якою точністю може бути визначений другий катет і прилеглий до нього гострий кут? Знайти їх значення.

4.1. $c^* = 16,8$; $a^* = 10,4$;

4.2. $c^* = 11,3$; $a^* = 6,4$;

4.3. $c^* = 28,3$; $a^* = 13,8$;

4.4. $c^* = 74,3$; $a^* = 40,6$;

4.5. $c^* = 26,7$; $a^* = 15,8$.

5. Радіуси основ і твірна зрізаного конуса дорівнюють $R^* \pm 0,01$; $r^* \pm 0,01$; $l^* \pm 0,01$; число $\pi = 3,14$. Обчислити за цими даними бічну поверхню зрізаного конуса. Оцінити абсолютну та відносну похибки результату.

5.1. $R^* = 18,65$; $r^* = 12,13$; $l^* = 8,71$;

5.2. $R^* = 25,18$; $r^* = 16,75$; $l^* = 12,37$;

5.3. $R^* = 18,31$; $r^* = 9,24$; $l^* = 10,35$;

5.4. $R^* = 21,97$; $r^* = 19,84$; $l^* = 11,27$;

5.5. $R^* = 17,63$; $r^* = 8,72$; $l^* = 10,73$.

6. Радіус основи циліндра дорівнює $R^* \pm 0,01$; висота циліндра $h^* \pm 0,01$; число $\pi = 3,14$. Обчислити за цими даними об'єм циліндра. Оцінити абсолютну та відносну похибки результату.
- 6.1. $R^* = 21,64$; $h^* = 10,13$;
 - 6.2. $R^* = 18,67$; $h^* = 10,15$;
 - 6.3. $R^* = 24,36$; $h^* = 12,47$;
 - 6.4. $R^* = 28,16$; $h^* = 15,38$;
 - 6.5. $R^* = 19,65$; $h^* = 9,34$.
7. Потрібно виміряти з відносною похибкою 1% площу бічної поверхні зрізаного конуса, радіуси основ якого дорівнюють наближено R^* і r^* , а твірна l^* . З якою точністю потрібно виміряти радіуси та твірну і з скількома знаками необхідно взяти число π ?
- 7.1. $R^* = 21$; $r^* = 12$; $l^* = 15$;
 - 7.2. $R^* = 15$; $r^* = 10$; $l^* = 26$;
 - 7.3. $R^* = 18$; $r^* = 7$; $l^* = 23$;
 - 7.4. $R^* = 54$; $r^* = 23$; $l^* = 41$;
 - 7.5. $R^* = 15$; $r^* = 8$; $l^* = 20$.
8. Потрібно визначити з відносною похибкою до 1% площу круга, радіус якого наближено дорівнює R^* . З якою точністю потрібно виміряти радіус круга та із скількома знаками необхідно взяти число π ?
- 8.1. $R^* = 13,5$;
 - 8.2. $R^* = 23,5$;
 - 8.3. $R^* = 28$;
 - 8.4. $R^* = 35,3$;
 - 8.5. $R^* = 26,5$.
9. Потрібно визначити з відносною похибкою 1% площу бічної поверхні конуса, радіус основи і твірна якого дорівнюють наближено R^* і l^* . З якою точністю потрібно виміряти радіус та твірну і з скількома знаками необхідно взяти число π ?
- 9.1. $R^* = 14$; $l^* = 27$;
 - 9.2. $R^* = 12$; $l^* = 23$;
 - 9.3. $R^* = 15$; $l^* = 24$;
 - 9.4. $R^* = 10$; $l^* = 25$;
 - 9.5. $R^* = 17$; $l^* = 28$.

РОЗДІЛ 2

ЧИСЛОВІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ АЛГЕБРАЇЧНИХ І ТРАНСЦЕНДЕНТНИХ РІВНЯНЬ

2.1. Відокремлення коренів

Розглянемо рівняння

$$f(x) = 0, \quad (2.1)$$

де функція $f(x)$ визначена й неперервна в деякому скінченному або нескінченному інтервалі. Якщо функція $f(x)$ є многочленом n -го степеня, то рівняння (2.1) називається алгебраїчним рівнянням n -го степеня. Для алгебраїчних рівнянь першого, другого, третього та четвертого степенів існують формули, які виражають корені цих рівнянь через їх коефіцієнти за допомогою скінченної кількості операцій додавання, віднімання, множення, ділення й добування коренів. Для рівнянь, степінь яких вищий від четвертого, таких формул у загальному випадку не існує. Проте навіть у тих випадках, коли корені алгебраїчних рівнянь виражаються формулами, на практиці доцільно застосовувати наближені методи розв'язання. Зокрема, це стосується алгебраїчних рівнянь третього та четвертого степенів.

Якщо ліва частина рівняння (2.1) є трансцендентною функцією, то рівняння називається трансцендентним. Прикладами таких рівнянь є показникові, логарифмічні, тригонометричні рівняння, окремі типи яких вивчаються в шкільному курсі математики.

Будемо припускати, що рівняння (2.1) має тільки ізольовані корені, тобто для кожного кореня рівняння (2.1) існує деякий окіл, який не містить інших коренів цього рівняння. Наближене обчислення ізольованих дійсних коренів рівняння (2.1) складається з двох етапів: 1) відокремлення коренів, тобто знаходження відрізків якомога меншої довжини, в кожному з яких міститься тільки один корінь цього рівняння; 2) уточнення коренів, тобто обчислення їх із заданою точністю.

Для відокремлення коренів застосовують відому теорему з математичного аналізу.

Теорема. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і на кінцях цього відрізка приймає значення різних знаків, то всередині цього відрізка міститься принаймні один корінь ξ рівняння (2.1).

Цей корінь ξ буде єдиним, якщо на цьому відрізку $[a, b]$ існує та зберігає сталий знак похідна $f'(x)$, тобто якщо функція $f(x)$ буде монотонною (зростаючою або спадною) на цьому відрізку.

Приклад 2.1. Відокремити корені рівняння: $x^3 - 3x + 1 = 0$.

Розв'язання. Тут $f(x) = x^3 - 3x + 1$, тому $f'(x) = 3x^2 - 3$. Знайдемо критичні точки та інтервали монотонності даної функції:

$$f'(x) = 0; \quad 3(x^2 - 1) = 0; \quad x_1 = -1; \quad x_2 = 1.$$

В інтервалах $(-\infty, -1)$ та $(1, +\infty)$ функція ξ_1 зростає, а в інтервалі $(-1, 1)$ спадає. Оскільки $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $f(-1) = 3$, $f(1) = -1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, то рівняння $x^3 - 3x + 1 = 0$ має три дійсних корені ξ_1, ξ_2, ξ_3 , які містяться в інтервалах $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$.

Ці інтервали можна звужити. Оскільки $f(-2) = -1$, $f(0) = 1$, $f(2) = 3$, то отримаємо

$$-2 < \xi_1 < -1; \quad 0 < \xi_2 < 1; \quad 1 < \xi_3 < 2.$$

Корені рівняння $f(x) = 0$ можна відокремити графічним способом, оскільки корені цього рівняння є абсцисами точок перетину графіка функції $y = f(x)$ з віссю Ox . Якщо побудова графіка функції $y = f(x)$ утруднена, то можна звести вихідне рівняння до рівносильного рівняння

$$f_1(x) = f_2(x), \quad (2.2)$$

де функції $f_1(x)$, $f_2(x)$ мають простіші аналітичні вирази, ніж функція $f(x)$. Побудувавши графіки функцій $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, одержимо шукані корені як абсциси точок перетину цих графіків.

Приклад 2.2. Відокремити корені рівняння $\sin x - x^2 + 1 = 0$.

Розв'язання. Запишемо це рівняння у вигляді $\sin x = x^2 - 1$ і побудуємо графіки функцій $y = \sin x$ та $y = x^2 - 1$.

Ці графіки перетинаються у точках А та В, тому дане рівняння має два дійсних корені ξ_1 та ξ_2 , які є абсцисами цих точок. З рисунка 1 видно, що

$$-1 < \xi_1 < -0,4; \quad 1 < \xi_2 < 1,5.$$

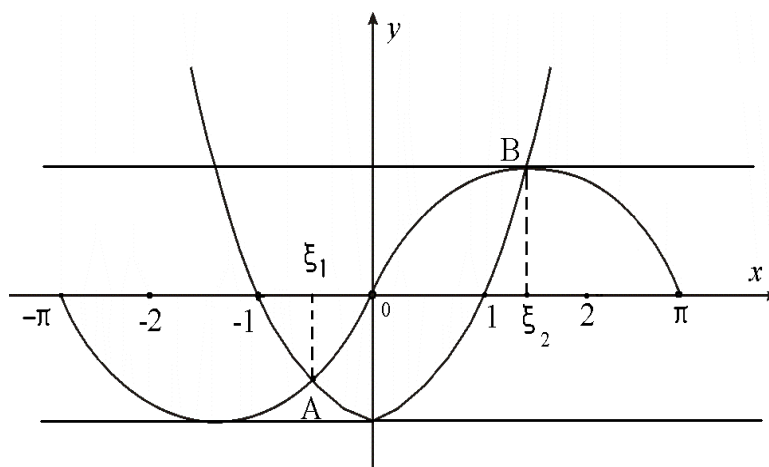


Рисунок 1

2.2. Метод половинного поділу

Нехай дано рівняння

$$f(x) = 0, \quad (2.1)$$

де функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і $f(a) \cdot f(b) < 0$. Припустимо, що на відрізку $[a, b]$ міститься один корінь ξ рівняння (2.1). Отже, $a < \xi < b$.

Поділимо відрізок $[a, b]$ навпіл. Позначимо $c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$, де $a_0 = a$, $b_0 = b$. Якщо $f(c_0) = 0$, то $\xi = c_0$ є коренем рівняння (2.1). Якщо $f(c_0) \neq 0$, то вибираємо той з відрізків $[a_0, c_0]$, $[c_0, b_0]$ на кінцях якого функція $f(x)$ приймає значення різних знаків. Позначимо вибраний відрізок $[a_1, b_1]$, тобто

$$a_1 = \begin{cases} c_0, & \text{якщо } \operatorname{sgn} f(a_0) = \operatorname{sgn} f(c_0); \\ a_0, & \text{якщо } \operatorname{sgn} f(a_0) \neq \operatorname{sgn} f(c_0); \end{cases} \quad (2.3)$$

$$b_1 = \begin{cases} c_0, & \text{якщо } \operatorname{sgn} f(b_0) = \operatorname{sgn} f(c_0); \\ b_0, & \text{якщо } \operatorname{sgn} f(b_0) \neq \operatorname{sgn} f(c_0). \end{cases}$$

Відрізок $[a_1, b_1]$ знову поділимо навпіл, позначимо $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$, виберемо один із відрізків $[a_1, c_1]$, $[c_1, b_1]$ таким чином, як у попередньому випадку, позначимо його через $[a_2, b_2]$ і т.д.

Цей процес може бути скінченним, якщо середина відрізка, одержаного на деякому кроці, співпаде з шуканим коренем ξ , або цей процес нескінченний і ми отримаємо нескінченну послідовність вкладених один в одного відрізків $[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$ таких, що

$$f(a_n) \cdot f(b_n) < 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.4)$$

$$\text{і } b_n - a_n = \frac{1}{2^n} (b - a). \quad (2.5)$$

Оскільки ліві кінці $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ утворюють монотонну неспадну обмежену послідовність, а праві кінці $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ – монотонну незростаючу обмежену послідовність, то ці послідовності мають границі й на основі рівності (2.5) ці границі рівні.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \xi.$$

Перейдемо до границі при $n \rightarrow \infty$ в нерівності (2.4).

Оскільки функція $f(x)$ неперервна, то одержимо $[f(\xi)]^2 \leq 0$. Звідси випливає, що $f(\xi) = 0$, тобто ξ є коренем рівняння (2.1).

Якщо обчислення виконані до n -го кроку, тобто отримано відрізок $[a_n, b_n]$, то за наближене значення кореня ξ можна взяти $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$.

При цьому для абсолютної похибки справедлива така оцінка:

$$|\xi - c_n| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}. \quad (2.6)$$

Метод половинного поділу збігається повільно і при збільшенні точності, з якою потрібно знайти корінь, значно зростає об'єм обчислювальної роботи. Проте цей метод легко реалізується на ЕОМ і якщо кожне обчислення значення функції $f(x)$ нескладне, то він може успішно застосовуватись на практиці.

2.3. Метод хорд

Нехай на відрізку $[a, b]$ міститься один корінь ξ рівняння (2.1).

Припустимо, що функція $f(x)$ та її похідні $f'(x)$, $f''(x)$ неперервні на відрізку $[a, b]$ і похідні $f'(x)$, $f''(x)$ не змінюють знаку на цьому відрізку. Припустимо для визначеності, що $f''(x) > 0$ при $a \leq x \leq b$ (випадок $f''(x) < 0$ зводиться до попереднього, якщо рівняння (2.1) записати у вигляді $-f(x) = 0$). Тоді графік функції $y = f(x)$ буде вгнутим на $[a, b]$. Можливі два випадки:

- 1) $f(a) > 0$; 2) $f(a) < 0$.

Розглянемо ці випадки.

- 1) $f(a) > 0$.

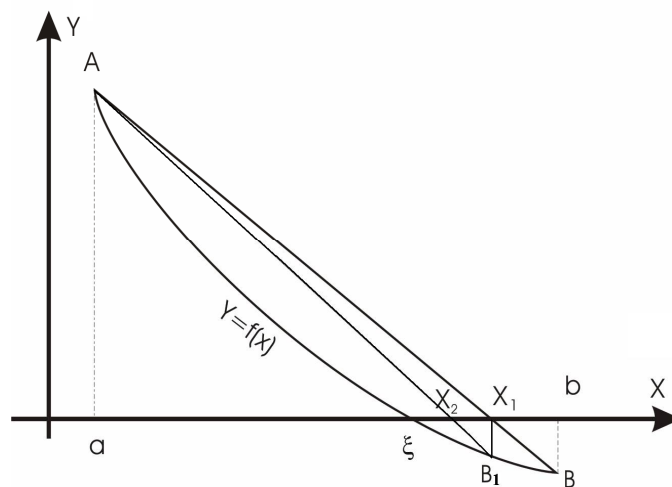


Рисунок 2

Складемо рівняння хорди AB і знайдемо абсцису x_1 точки перетину цієї хорди з віссю Ox .

$$\frac{y - f(b)}{f(a) - f(b)} = \frac{x - b}{a - b},$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f(x_0) - f(a)}(x_0 - a). \quad (2.7)$$

Тут позначено $x_0 = b$.

Складемо рівняння хорди AB_1 і знайдемо абсцису x_2 точки перетину цієї хорди з віссю Ox .

$$\frac{y - f(x_1)}{f(a) - f(x_1)} = \frac{x - x_1}{a - x_1},$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(x_1) - f(a)}(x_1 - a). \quad (2.8)$$

і т.д.

Можна написати формулу для довільного n :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(a)}(x_n - a), \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots). \quad (2.9)$$

У цьому випадку кінець a нерухомий.

Послідовність $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ є обмеженою монотонно спадною послідовністю. Отже, вона має границю $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, ($a < \xi < b$).

Перейшовши до границі при $n \rightarrow \infty$ у рівності (2.9), отримаємо

$$\xi = \xi + \frac{f(\xi)}{f(a) - f(\xi)}(\xi - a).$$

Звідси випливає, що $f(\xi) = 0$, тобто ξ є коренем рівняння (2.1).

2) $f(a) < 0$.

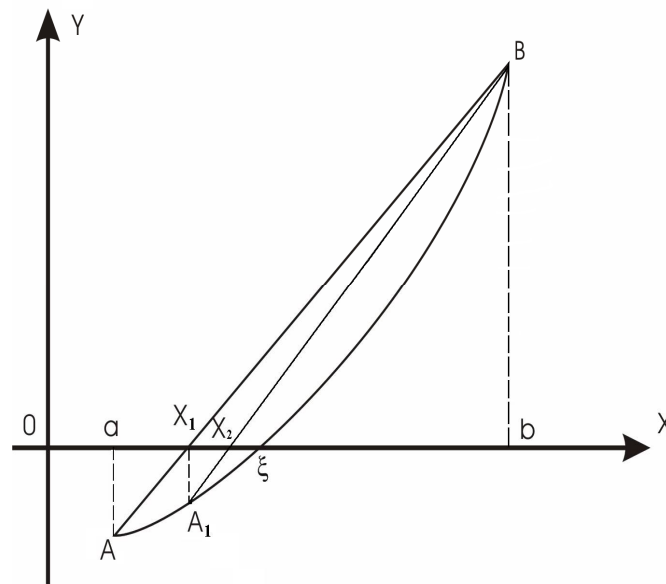


Рисунок 3

У другому випадку нерухомим є кінець b . Знайдемо, як і в першому випадку, абсциси точок перетину хорд AB, A_1B, \dots з віссю Ox . Отримаємо формули:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f(b) - f(x_0)}(b - x_0), \quad (2.10)$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(b) - f(x_1)}(b - x_1) \quad (2.11)$$

і т.д.

У рівності (2.10) позначено $x_0 = a$. Отже,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}(b - x_n) \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots). \quad (2.12)$$

Послідовність $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ є обмеженою монотонно зростаючою послідовністю. Тому вона має границю $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, причому ξ є коренем рівняння $f(x) = 0$ (доведення проводиться так само, як і у першому випадку).

За наближене значення кореня ξ можна взяти x_n , обчислене за формулою (2.9) або (2.12). Для оцінки точності цього наближення користуються формулою:

$$|\xi - x_n| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1}, \quad (2.13)$$

де m_1 - найменше значення $|f'(x)|$ на відрізку $[a, b]$, тобто $|f'(x)| \geq m_1 > 0$ при $a \leq x \leq b$.

Наведемо ще формулу для оцінки абсолютної похибки наближеного значення x_n , якщо відомі два послідовних наближення x_{n-1} та x_n .

$$|\xi - x_n| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} |x_n - x_{n-1}|, \quad (2.14)$$

де m_1 та M_1 - відповідно найменше та найбільше значення $|f'(x)|$ на відрізку $[a, b]$. Якщо відрізок $[a, b]$ настільки малий, що $M_1 \leq 2m_1$, то з формули (2.14) отримуємо:

$$|\xi - x_n| \leq |x_n - x_{n-1}|. \quad (2.15)$$

Таким чином, у цьому випадку як тільки $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$, де ε - задана гранична абсолютна похибка, то зразу з формули (2.15) випливає, що $|\xi - x_n| < \varepsilon$.

Приклад 2.3. Методом хорд знайти додатний корінь рівняння $x^4 - 2x - 4 = 0$ з точністю до 0,01.

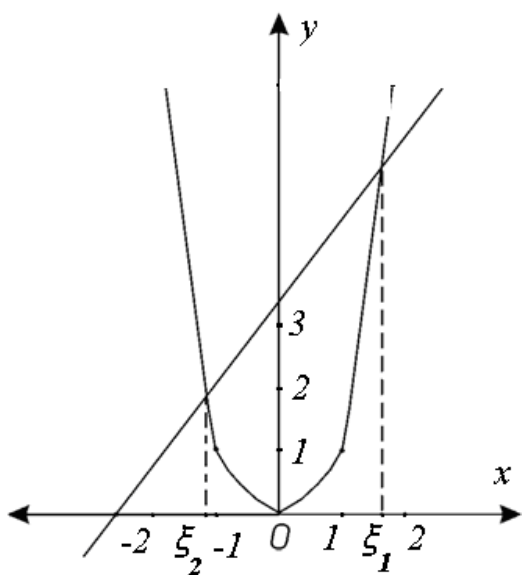


Рисунок 4

Розв'язання. Відокремимо корені цього рівняння. Запишемо його у вигляді $x^4 = 2x + 4$ і побудуємо графіки функцій $y = x^4$ та $y = 2x + 4$ (рис. 4).

Дане рівняння має два дійсних корені ξ_1 та ξ_2 . Додатний корінь ξ_1 міститься на відрізку $[1, 2]$.

Звузимо цей відрізок методом половинного поділу. Оскільки $f(x) = x^4 - 2x - 4$ і $f(1,5) = -1,938 < 0$, то корінь міститься на відрізку $[1,5; 2]$. Оскільки $f(1,7) = 0,952 > 0$, то корінь ξ_1 розміщений на відрізку $[1,5; 1,7]$.

$$f'(x) = 4x^3 - 2; \quad f''(x) = 12x^2; \quad R \pm 001, r \pm 001, \text{ при всіх } x.$$

Застосуємо формули (2.10) – (2.12):

$$x_1 = 1,5 - \frac{f(1,5)}{f(1,7) - f(1,5)}(1,7 - 1,5) = 1,634, \quad f(1,634) = -0,139.$$

$$x_2 = 1,634 - \frac{f(1,634)}{f(1,7) - f(1,634)}(1,7 - 1,634) = 1,642, \quad f(1,642) = -0,015.$$

$$x_3 = 1,642 - \frac{f(1,642)}{f(1,7) - f(1,642)}(1,7 - 1,642) = 1,643, \quad f(1,643) = 0,001.$$

Оскільки $f(1,642) < 0$, $f(1,643) > 0$, то з точністю до 0,01 шуканий корінь ξ дорівнює 1,64.

2.4. Метод дотичних (метод Ньютона)

Нехай корінь ξ рівняння (2.4) відокремлений на відрізку $[a, b]$, причому похідні $f'(x)$, $f''(x)$ неперервні й зберігають певні знаки при $a \leq x \leq b$.

Позначимо через x_0 той кінець відрізка $[a, b]$, в якому $f(x) \cdot f''(x) > 0$, тобто $f(x_0)$ і $f''(x_0)$ мають однакові знаки.

На рисунку 5 зображено випадок: $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f'(x) > 0$, $f''(x) < 0$ при $a \leq x \leq b$. Тому точку a приймаємо за x_0 . Складемо рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці $A(x_0, f(x_0))$ і знайдемо абсцису x_1 точки перетину цієї дотичної з віссю Ox .

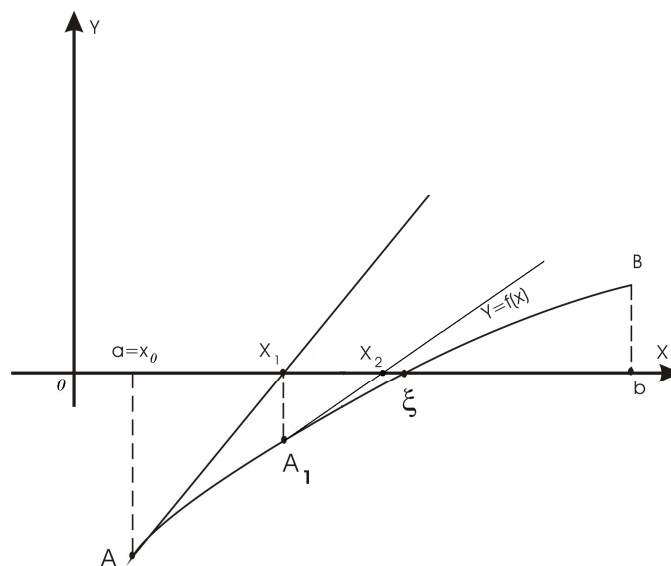


Рисунок 5

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0);$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \quad (2.16)$$

За перше наближення кореня ξ рівняння (2.1) приймемо x_1 . Через точку $A_1(x_1, f(x_1))$ знову проведемо дотичну, знайдемо абсцису x_2 точки перетину цієї дотичної з віссю Ox і приймемо x_2 за друге наближення кореня ξ .

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}. \quad (2.17)$$

Продовжуючи аналогічно, отримаємо наступні наближення кореня ξ .

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots). \quad (2.18)$$

Можна довести, що при зроблених припущеннях послідовні наближення $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ утворюють обмежену монотонно зростаючу послідовність. Отже, існує $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$. Перейшовши до границі при $n \rightarrow \infty$ у рівності (2.18), отримаємо $f(\xi) = 0$, тобто ξ є коренем рівняння (2.1).

Для оцінки абсолютної похибки n -го наближення x_n можна користуватися формулою (2.13).

Запишемо також формулу для оцінки абсолютної похибки n -го наближення x_n за відомими двома послідовними наближеннями x_{n-1} та x_n :

$$|\xi - x_n| \leq \frac{M_2}{2m_1} (x_n - x_{n-1})^2, \quad (2.19)$$

де M_2 – найбільше значення $|f''(x)|$ на відрізку $[a, b]$.

Приклад 2.4. Методом дотичних знайти найменший додатний корінь ξ рівняння $\sin x - x \cos x = 0$ з точністю до 0,0001.

Розв'язання. Легко встановити, що найменший додатний корінь цього рівняння розміщений на відрізку $\left[4; \frac{3\pi}{2}\right]$.

$$f(x) \cdot f''(x) > 0 \quad f(4) = 1.85777; \quad f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1.$$

$$f'(x) = x \sin x; \quad f''(x) = \sin x + x \cos x.$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{і} \quad f''(x) < 0 \quad \text{на відрізку} \left[4; \frac{3\pi}{2}\right].$$

Оскільки $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) \cdot f''\left(\frac{3\pi}{2}\right) > 0$, то за початкове наближення візьмемо

$$x_0 = \frac{3\pi}{2} = 4,71239.$$

Формулу (2.18) запишемо у вигляді:

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n, \quad \text{де} \quad \Delta x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (2.20)$$

Обчислення проведемо за схемою:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	Δx_n
0	4.71239	-1	-4.71239	-0.21221
1	4.50018	-0.02974	-4.39923	-0.00676
2	4.49342	-0.00004		

Для оцінки абсолютної похибки наближеного значення x_2 застосуємо формулу (2.13). Оскільки при $x \in \left[4; \frac{3\pi}{2}\right]$ $f'(x)$ спадає і $f'(x) < 0$, то $m_1 = |f'(4)| = 3,02721 > 3$. Тому $|\xi - x_2| \leq \frac{|f(x_2)|}{m_1} < \frac{0.00004}{3}$; звідси $|\xi - x_2| < 0,000013 < 0,00002$.

Отже, наближене значення кореня ξ з точністю до 0,0001 $\xi^* = 4.4934$.

2.5. Комбінований метод хорд та дотичних

Нехай $f(a) \cdot f(b) < 0$ і $f'(x)$ та $f''(x)$ зберігають сталі знаки на відрізку $[a, b]$. Поєднуючи методи хорд та дотичних, отримаємо метод, на кожному етапі якого знаходимо наближені значення з недостачею й надлишком кореня ξ рівняння $f(x) = 0$.

Можливі два випадки.

1. $f(a) \cdot f''(a) > 0$. У цьому випадку дотичну до графіка функції $y = f(x)$ проводимо в точці $A(a; f(a))$, позначивши $a_0 = a$. За методом дотичних одержимо формулу для обчислення наближень кореня ξ .

$$a_{n+1} = a_n + \Delta a_n, \quad (2.21)$$

$$\text{де } \Delta a_n = -\frac{f(a_n)}{f'(a_n)}, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Застосувавши метод хорд на відрізку $[a, b]$, також одержимо формулу для обчислення наближених значень кореня ξ .

$$b_{n+1} = b_n + \Delta b_n; \quad (2.22)$$

$$\text{де } \Delta b_n = -\frac{f(b_n)}{f(b_n) - f(a_n)}(b_n - a_n), \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

2. $f(b) \cdot f''(b) > 0$. Аналогічно одержуємо наступні формули:

$$a_{n+1} = a_n + \Delta a_n, \quad (2.23)$$

$$\text{де } \Delta a_n = -\frac{f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}(b_n - a_n);$$

$$b_{n+1} = b_n + \Delta b_n, \quad (2.24)$$

$$\text{де } \Delta b_n = -\frac{f(b_n)}{f'(b_n)}, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

За формулами (2.21) та (2.23) обчислюємо наближені значення кореня ξ з недостачею, а за формулами (2.22) та (2.24) – з надлишком. Тому $a_n < \xi < b_n$.

Якщо абсолютна похибка наближеного значення кореня ξ задана наперед і дорівнює ε , то обчислення припиняємо тоді, коли буде виконуватись умова

$b_n - a_n < \varepsilon$. За наближене значення ξ^* кореня ξ доцільно взяти середнє арифметичне одержаних останніх значень: $\xi^* = \frac{a_n + b_n}{2}$.

Приклад 2.5. Обчислити з точністю до 0,0001 корені рівняння $e^x - 2(x-1)^2 = 0$, застосувавши комбінований метод хорд та дотичних.

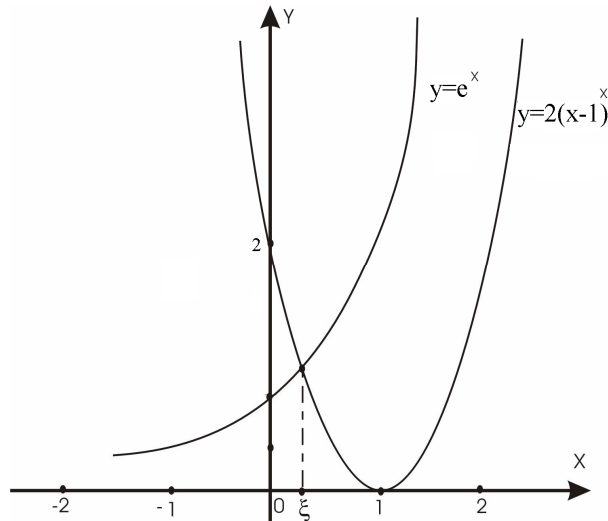


Рисунок 6

Розв'язання. Запишемо дане рівняння у вигляді $e^x = 2(x-1)^2$ і побудуємо графіки функцій $y = e^x$ та $y = 2(x-1)^2$ (рис. 6).

Отже, дане рівняння має один корінь ξ , який розміщений на відрізку $[0; 0,5]$.

$$f(x) = e^x - 2(x-1)^2,$$

$$f(0) = -1; \quad f(0,5) = 1,14872.$$

$$f'(x) = e^x - 4(x-1),$$

$$f''(x) = e^x - 4.$$

$$f'(x) > 0, \quad f''(x) < 0 \text{ на відрізку } [0; 0,5].$$

Оскільки $f(0) \cdot f''(0) > 0$, то застосовуємо формули (2.21), (2.22).

$$a_0 = 0; \quad b_0 = 0,5; \quad f(a_0) = -1; \quad f(b_0) = 1,14872;$$

$$f'(a_0) = 5; \quad \Delta a_0 = \frac{1}{5} = 0,20;$$

$$\Delta b_0 = -\frac{1,14872}{1,14872 + 1}(0,5 - 0) = -0,26;$$

$$a_1 = 0,20; \quad b_1 = 0,24;$$

$$f(a_1) = -0,05860; \quad f(b_1) = 0,11605;$$

$$f'(a_1) = 4,42140; \quad \Delta a_1 = \frac{0,05860}{4,42140} = 0,0133;$$

$$\Delta b_1 = -\frac{0,11605}{0,11605 + 0,05860}(0,24 - 0,20) = -0,0266;$$

$$a_2 = 0,2133; \quad b_2 = 0,2134; \quad f(a_2) = -0,0003; \quad f(b_2) = 0,0004.$$

Оскільки $b_2 - a_2 = 0,0001$, то обчислення можна припинити і за наближене значення кореня ξ взяти число $\xi^* = \frac{a_2 + b_2}{2}$.

Отже, за наближене значення кореня ξ даного рівняння з точністю до 0,0001 приймаємо значення $\xi^* = 0,21335$.

2.6. Метод ітерацій

Одним із найважливіших способів наближеного розв'язання рівняння $f(x) = 0$ є метод ітерацій, який часто називають методом послідовних наближень.

Нехай функція $f(x)$ та її похідні $f'(x)$, $f''(x)$ неперервні на відрізку $[a, b]$, де міститься тільки один корінь рівняння $f(x) = 0$.

Запишемо це рівняння у вигляді

$$x = \varphi(x). \quad (2.25)$$

Виберемо на відрізку $[a, b]$ деяким способом наближене значення x_0 кореня ξ рівняння (2.25) і побудуємо числову послідовність $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ за формулою

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots). \quad (2.26)$$

Справедлива наступна **теорема**.

Нехай функція $\varphi(x)$ визначена та диференційовна на відрізку $[a, b]$, причому усі її значення належать цьому відрізку. Тоді, якщо існує таке додатне число $q < 1$, що $|\varphi'(x)| \leq q < 1$ при $a \leq x \leq b$, то:

1. послідовність $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ збігається незалежно від початкового значення $x_0 \in [a, b]$;
2. границя цієї послідовності $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ є коренем рівняння (2.25) на відрізку $[a, b]$.

Похибка наближеного значення x_n кореня ξ , знайденого методом ітерацій, оцінюється нерівністю:

$$|\xi - x_n| \leq \frac{q}{1 - q} |x_n - x_{n-1}|. \quad (2.27)$$

Для того, щоб знайти наближене значення кореня з абсолютною похибкою, яка не перевищує заданого числа ε , достатньо визначити n так, щоб виконувалася нерівність

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{1-q}{q} \varepsilon. \quad (2.28)$$

Дане рівняння $f(x)=0$ можна записати у вигляді $x=\varphi(x)$ різними способами. З наведеної теореми випливає, що повинна виконуватись умова

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1 \quad (2.29)$$

у деякому околі шуканого кореня ξ .

Чим менше число q , тим швидше послідовні наближення збігаються до кореня ξ .

Наведемо один досить загальний спосіб зведення рівняння $f(x)=0$ до вигляду (2.25). Замінімо рівняння $f(x)=0$ еквівалентним йому рівнянням

$$x = x - \lambda f(x), \quad (2.30)$$

де число $\lambda \neq 0$.

Позначимо $\varphi(x) = x - \lambda f(x)$.

Підберемо параметр λ так, щоб похідна $\varphi'(x) = 1 - \lambda f'(x)$ була малою по абсолютній величині на відрізку $[a, b]$. Наприклад, можна припустити, що $\varphi'(x_0) = 1 - \lambda f'(x_0) = 0$, або $\varphi'(a) = 1 - \lambda f'(a) = 0$, або $\varphi'(b) = 1 - \lambda f'(b) = 0$.

Зауважимо, що при виконанні умов наведеної теореми метод ітерацій збігається при будь-якому виборі початкового значення $x_0 \in [a, b]$.

Завдяки цьому окрема помилка в обчисленнях, яка не виводить за межі відрізка $[a, b]$, не впливає на остаточний результат, оскільки помилкове значення можна розглядати як нове початкове наближення x_0 . Можливо тільки, що збільшиться обсяг обчислювальної роботи. Властивість самовиправлення робить метод ітерацій одним із найпоширеніших методів обчислень.

Приклад 2.6. Обчислити корені рівняння $x \ln x - 1 = 0$ методом ітерацій з точністю $\varepsilon = 0,00001$.

Розв'язання. Запишемо дане рівняння у вигляді $\ln x = \frac{1}{x}$. Побудувавши

графіки функцій $y = \ln x$ та $y = \frac{1}{x}$, визначимо, що дане рівняння має єдиний корінь ξ , який міститься на відрізку $[1,5; 2]$.

Представимо дане рівняння у вигляді $x = \varphi(x)$. Це можна зробити кількома способами.

1. Якщо записати рівняння $x \ln x - 1 = 0$ у вигляді $x = \frac{1}{\ln x}$, то

$$\varphi(x) = \frac{1}{\ln x}, \quad \varphi'(x) = -\frac{1}{x \ln^2 x} \quad \text{і} \quad |\varphi'(x)| > 1 \quad \text{на відрізку} [1,5; 2].$$

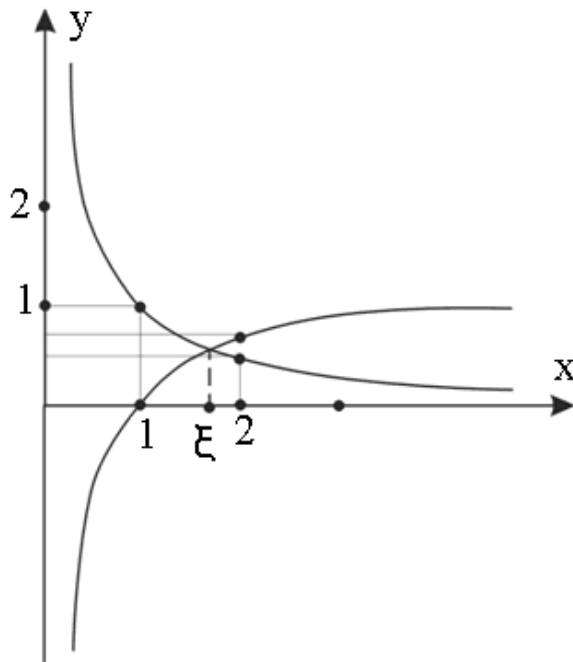


Рисунок 7

2. Якщо дане рівняння записати у вигляді $x = e^{\frac{1}{x}}$, то $\varphi(x) = e^{\frac{1}{x}}$, $\varphi'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \right)$, $\varphi'(1,5) = -0,87$, $\varphi'(2) = -0,41$ і $|\varphi'(x)| \leq q < 1$, де $q = 0,87$ (оскільки похідна $\varphi'(x)$ неперервна на відрізку $[1,5; 2]$).

3. Запишемо дане рівняння у вигляді $x = x + \lambda(x \ln x - 1)$.

$$\varphi(x) = x + \lambda(x \ln x - 1), \quad \varphi'(x) = 1 + \lambda(\ln x + 1).$$

Нехай $\varphi'(1,5) = 0$. Для визначення параметра одержуємо рівняння

$$1 + \lambda(\ln 1,5 + 1) = 0.$$

Звідси одержуємо $\lambda = -0,71$. Тоді $\varphi'(2) = 1 - 0,71(\ln 2 + 1) = -0,202$. Отже, $|\varphi'(x)| \leq q_1 < 1$ на відрізку $[1,5; 2]$, де $q_1 = 0,21$.

Із двох останніх способів вибираємо третій, оскільки $q_1 < q$.

Таким чином, задане рівняння $x \ln x - 1 = 0$ ми записали у вигляді:

$$x = x - 0,71(x \ln x - 1), \quad \text{тобто} \quad \varphi(x) = x - 0,71(x \ln x - 1).$$

За початкове наближення кореня ξ приймемо середину відрізка $[1,5; 2]$, тобто $x_0 = 1,75$.

Послідовні наближення $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ обчислюємо за формулою:

$$x_{n+1} = x_n - 0,71(x_n \ln x_n - 1), \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Отримаємо:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1,75 - 0,71(1,75 \ln 1,75 - 1) = 1,765, \\ x_2 &= 1,765 - 0,71(1,765 \ln 1,765 - 1) = 1,7630, \\ x_3 &= 1,7630 - 0,71(1,7630 \ln 1,7630 - 1) = 1,76325, \\ x_4 &= 1,76325 - 0,71(1,76325 \ln 1,76325 - 1) = 1,76322. \end{aligned}$$

Оскільки повинна виконуватися нерівність (2.28)

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \frac{1-0,21}{0,21} \cdot 0,00001, \text{ тобто } |x_n - x_{n-1}| \leq 3,77 \cdot 10^{-5},$$

то обчислення припиняємо.

Отже, наближене значення кореня $\xi^* = 1,76322$ з точністю до 10^{-5} .

Зауважимо, що при підстановці ξ^* у ліву частину даного рівняння $x \ln x - 1 = 0$ отримуємо $\xi^* \ln \xi^* - 1 = 4,5 \cdot 10^{-6}$.

2.7. Завдання для самостійної роботи

1. Визначити кількість дійсних коренів рівняння та обчислити найбільший з них з точністю до 0,001: а) методом половинного поділу; б) методом хорд та дотичних; в) методом ітерацій.

1.1. $4 \lg x - x + 2 = 0;$

1.2. $e^{-x} - 2x + 3 = 0;$

1.3. $\ln x + 2x - 3 = 0;$

1.4. $e^x + x^2 - 2 = 0;$

1.5. $4x - \cos x = 0;$

1.6. $x^3 - 6x + 3 = 0;$

1.7. $e^{2x} + x - 2 = 0;$

1.8. $2 - x - \lg x = 0;$

1.9. $\sin x + x - 1 = 0;$

1.10. $2 - x - \ln x = 0.$

РОЗДІЛ 3

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$AX = B, \quad (3.1)$$

де A – квадратна матриця порядку n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix};$$

$B = (b_1, b_2, \dots, b_n)^T$ – вектор-стовпець правих частин рівнянь;

$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – вектор-стовпець невідомих.

Якщо визначник матриці A не дорівнює нулю, то система (3.1) має єдиний розв'язок. У цьому випадку систему (3.1) можна розв'язати за формулами Крамера. Проте для великих значень n цей метод важко реалізувати, оскільки він потребує кількості арифметичних дій порядку $n!$. Тому застосовують інші методи розв'язання, зокрема метод Гаусса, який потребує кількості арифметичних дій порядку n^3 .

Методи розв'язання системи (3.1) поділяють на дві групи: прямі та ітераційні.

У прямих (або точних) методах розв'язок X системи (3.1) виражається у вигляді точних формул через коефіцієнти системи й знаходиться за скінченну наперед відому кількість арифметичних дій. Але внаслідок похибок заокруглення прямі методи насправді не приводять до точного розв'язку системи (3.1) і назвати їх точними можливо лише, залишаючи осторонь похибки заокруглення. До точних методів належать формули Крамера, метод Гаусса, метод головних елементів та інші.

Ітераційні методи (їх називають також методами послідовних наближень) полягають у тому, що розв'язок X системи (3.1) шукають як границю при $k \rightarrow \infty$ послідовних наближень $X^{(k)}$, де k – номер ітерації. Ітерації проводять до одержання розв'язку із заданою точністю. До ітераційних методів належать метод простих ітерацій, метод Зейделя та інші.

матрицею цієї системи. Запишемо загальні формули, за допомогою яких розширена матриця системи (3.2)

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

зводиться в результаті виконання прямого ходу методу Гаусса до розширеної матриці системи (3.8)

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n} & d_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & d_n \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Нехай вже виконані перші $k-1$ кроки, тобто із системи (3.2) вилучені змінні x_1, x_2, \dots, x_{k-1} . Отримаємо систему:

$$\begin{aligned} x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1,k-1}x_{k-1} + c_{1k}x_k + \dots + c_{1n}x_n &= d_1, \\ x_2 + \dots + c_{2,k-1}x_{k-1} + c_{2k}x_k + \dots + c_{2n}x_n &= d_2, \\ \dots & \dots \\ x_{k-1} + c_{k-1,k}x_k + \dots + c_{k-1,n}x_n &= d_{k-1}, \\ a_{kk}^{(k-1)}x_k + \dots + a_{kn}^{(k-1)}x_n &= b_k^{(k-1)}, \\ \dots & \dots \\ a_{nk}^{(k-1)}x_k + \dots + a_{nn}^{(k-1)}x_n &= b_n^{(k-1)}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Поділимо k -те рівняння цієї системи на $a_{kk}^{(k-1)}$, припустивши, що $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$. Одержимо рівняння:

$$x_k + c_{k,k+1}x_{k+1} + \dots + c_{k,n}x_n = d_k, \quad (3.14)$$

де $c_{kj} = \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \left(j = \overline{k+1, n} \right), \quad d_k = \frac{b_k^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}.$

Помножимо рівняння (3.14) на $a_{ik}^{(k-1)}$ ($i = \overline{k+1, n}$) та віднімемо одержане співвідношення від i -го рівняння системи (3.13). Рівняння системи (3.13), починаючи з $(k+1)$ -го, матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} a_{k+1,k+1}^{(k)}x_{k+1} + \dots + a_{k+1,n}^{(k)}x_n &= b_{k+1}^{(k)}, \\ a_{k+2,k+1}^{(k)}x_{k+1} + \dots + a_{k+2,n}^{(k)}x_n &= b_{k+2}^{(k)}, \\ \dots & \dots \\ a_{n,k+1}^{(k)}x_{k+1} + \dots + a_{n,n}^{(k)}x_n &= b_n^{(k)}, \end{aligned}$$

де $a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} c_{kj}$; $b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} d_k$; ($i = \overline{k+1, n}$; $j = \overline{k+1, n}$).

Отже, здійснено k -тий крок прямого ходу методу Гаусса.

Таким чином, елементи розширеної матриці \overline{A} перетворюються за формулами:

$$\begin{aligned} a_{kj}^{(0)} &= a_{kj}, & (k, j = \overline{1, n}); \\ c_{kj} &= \frac{a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, & (j = \overline{k+1, n}; k = \overline{1, n}); \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(k)} &= a_{ij}^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} c_{kj}, & (i, j = \overline{k+1, n}; k = \overline{1, n}). \\ b_k^{(0)} &= b_k, & d_k = \frac{b_k^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, & (k = \overline{1, n}); \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - a_{ik}^{(k-1)} d_k, \quad (i = \overline{k+1, n}; k = \overline{1, n}).$$

Число $a_{kk}^{(k-1)}$ називається ведучим елементом на k -му кроці вилучення.

Істотним обмеженням даного методу є припущення, що $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$ ($k = \overline{1, n}$). Навіть, якщо деякий ведучий елемент не дорівнює нулю, а досить близький до нуля, то в процесі обчислень можуть нагромаджуватися похибки. Вихід із цієї ситуації полягає в тому, що за ведучий елемент на k -му кроці вибирається не $a_{kk}^{(k-1)}$, а інше число, тобто на k -му кроці вилучається не x_k , а інша змінна.

Однією з модифікацій методу Гаусса є схема з вибором головного елемента. Розглянемо розширену матрицю \overline{A} системи (3.2). Серед елементів a_{ij} цієї матриці виберемо найбільший за модулем елемент a_{pq} , який називається першим головним елементом. Поділимо рядок з номером p матриці \overline{A} на цей елемент і одержимо перший головний рядок, в якому замість a_{pq} стоїть число 1. За допомогою першого головного рядка вилучимо з усіх неголовних рядків змінну x_q . У результаті отримаємо нову матрицю, в якій усі елементи q -го стовпця дорівнюють нулю, крім елемента, що знаходиться в рядку з номером p .

Відкинувши перший головний рядок та q -ий стовпець, одержимо матрицю з меншою на одиницю кількістю рядків і стовпців. Знову виберемо найбільший за модулем елемент цієї матриці, який не входить в стовпець вільних членів (другий головний елемент). Поділимо рядок, що містить другий головний елемент, на цей елемент і одержимо другий головний рядок і т. д. Оскільки визначник системи (3.2) $|A| \neq 0$, то через n кроків ми отримаємо матрицю еквівалентної системи, яка складається з n головних рядків. Після належної зміни нумерації невідомих ця матриця матиме трикутний вигляд.

Зауваження. Можна довести, що для великих значень n кількість арифметичних дій, які потрібно виконати для розв'язання системи (3.2) методом Гаусса, приблизно дорівнює $\frac{2n^3}{3}$.

Приклад 3.1. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Гаусса.

$$\begin{aligned} 7,24x_1 + 0,93x_2 - 4,65x_3 + 1,29x_4 &= -0,13, \\ -2,61x_1 + 3,12x_2 + 4,97x_3 - 0,78x_4 &= -1,56, \\ 3,18x_1 + 0,84x_2 - 2,88x_3 &= -4,13, \\ 0,92x_1 + 1,38x_2 - 2,54x_4 &= 3,69. \end{aligned}$$

Розв'язання. Обчислення будемо виконувати з двома запасними знаками, тобто з чотирма знаками після коми. Запишемо розширену матрицю цієї системи і виконаємо перетворення, які зводять розширену матрицю до трикутної форми. Усі обчислення наведені в таблиці.

7,24	0,93	- 4,65	1,29	- 0,13
- 2,61	3,12	4,97	- 0,78	- 1,56
3,18	0,84	- 2,88	0	- 4,13
0,92	1,38	0	- 2,54	3,69
1	0,1285	- 0,6423	0,1782	- 0,0180
0	3,4554	3,2936	- 0,3149	- 1,6070
0	0,4314	- 0,8375	- 0,5667	- 4,0728
0	1,2618	0,5909	- 2,7039	3,7066
	1	0,9532	- 0,0911	- 0,4651
	0	- 1,2487	- 0,5272	- 3,8722
	0	- 0,6118	- 2,5889	4,2935
		1	0,4222	3,1010
		0	- 2,3306	6,1907
			1	- 2,6563
		1	0	4,2225
	1	0	0	- 4,7320
1	0	0	0	3,7755

Отже, $x_1 = 3,7755$, $x_2 = -4,7320$, $x_3 = 4,2225$, $x_4 = -2,6563$.

Перше наближення розв'язку системи (3.18) обчислюємо за формулою $X^{(1)} = \alpha X^{(0)} + \beta$, друге наближення – $X^{(2)} = \alpha X^{(1)} + \beta$ і т.д. Якщо вже обчислено k -е наближення $X^{(k)}$, то $(k+1)$ -е наближення $X^{(k+1)}$ одержуємо за формулою

$$X^{(k+1)} = \alpha X^{(k)} + \beta \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.19)$$

Якщо послідовність $X^{(0)}, X^{(1)}, \dots, X^{(k)}, \dots$ має границю $X = \lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)}$, то ця границя є розв'язком системи (3.18). Справді, перейшовши до границі при $k \rightarrow \infty$ у рівності (3.19), одержимо: $\lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k+1)} = \alpha \lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)} + \beta$ або $X = \alpha X + \beta$.

Отже, стовпець X є розв'язком системи (3.18).

Запишемо формули наближень у розгорнутому вигляді:

$$x_i^{(0)} = \beta_i, \quad x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j^{(k)} + \beta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n; k = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.20)$$

Наведемо формулювання достатніх умов збіжності ітераційного процесу для системи (3.18) та (3.2).

1. Процес простих ітерацій для системи лінійних рівнянь (3.18) збігається до її єдиного розв'язку, якщо:

а)
$$\max_i \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| < 1;$$

(3.21)

або

б)
$$\max_j \sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}| < 1;$$

або

в)
$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}^2 < 1.$$

2. Процес простої ітерації для системи лінійних рівнянь (3.2) збігається до її єдиного розв'язку, якщо виконуються нерівності:

а)
$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n |a_{ij}| \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

(3.22)

або

б)
$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq j)}}^n |a_{ij}| \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

тобто ітераційний процес збігається, якщо модулі діагональних елементів матриці A системи (3.2) або для кожного рядка перевищують суму модулів недиагональних елементів цього рядка, або для кожного стовпця перевищують суму модулів недиагональних елементів цього стовпця.

Ітераційний процес продовжують доти, доки всі наближення $x_i^{(k+1)}$ не стануть досить близькими до $x_i^{(k)}$. Близькість цих значень можна характеризувати, наприклад, найбільшою абсолютною величиною їх різниці γ . Тоді при заданій допустимій похибці $\varepsilon > 0$ критерій закінчення ітераційного процесу можна записати у вигляді:

$$\gamma = \max_i |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| < \varepsilon. \quad (3.23)$$

3.3. Зведення лінійної системи до вигляду, придатного для ітерацій

Розглянемо довільну лінійну систему виду (3.1) $AX = B$, визначник якої $|A| \neq 0$.

За допомогою елементарних перетворень рівнянь системи (3.1) цю систему завжди можна звести до еквівалентної системи (3.18), для якої умови (3.21) збіжності ітераційного процесу будуть виконані.

Справді, помножимо матричне рівняння (3.1) зліва на матрицю $D = A^{-1} - \varepsilon$, де A^{-1} – обернена матриця до матриці A , $\varepsilon = (\varepsilon_{ij})$ – квадратна матриця порядку n з досить малими за модулем елементами. Одержимо:

$$(A^{-1} - \varepsilon)AX = DB, \quad A^{-1}AX - \varepsilon AX = DB.$$

Оскільки $A^{-1}A = E$, де E – одинична матриця порядку n , то отримуємо $X = \alpha X + \beta$, тобто систему вигляду (3.18). Тут позначено: $\alpha = \varepsilon A$, $\beta = DB$. Якщо $|\varepsilon_{ij}|$ досить малі, то одержана система буде задовольняти умови збіжності (3.21).

Множення на матрицю D еквівалентне сукупності елементарних перетворень над рівняннями системи (3.1). На практиці часто роблять так. Із даної системи вибирають рівняння, в кожному з яких є коефіцієнт, модуль якого більший від суми модулів усіх інших коефіцієнтів рівняння. Кожне вибране рівняння записують у такий рядок нової системи, щоб найбільший за модулем коефіцієнт виявився діагональним. Із рівнянь системи, які залишилися, складають лінійно незалежні між собою лінійні комбінації з таким розрахунком, щоб одержувати рівняння, аналогічні вибраним, і щоб усі вільні рядки системи були заповнені. При цьому потрібно, щоб кожне невикористане раніше рівняння потрапило хоча б в одну лінійну комбінацію, яка є рівнянням нової системи.

Приклад 3.2. Звести до вигляду, придатного для ітерацій, системи лінійних рівнянь:

$$\begin{array}{ll}
 4x_1 - x_2 + x_3 = 2, & x_1 + 3x_2 + x_3 = 1,5, \quad (\text{I}) \\
 \text{а) } x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 8, & \text{б) } x_1 + x_2 + 2x_3 = 0,6, \quad (\text{II}) \\
 x_1 + 4x_2 + x_3 = 6; & 2x_1 + x_2 - x_3 = -0,4. \quad (\text{III})
 \end{array}$$

Розв'язання.

а) Перше рівняння задовольняє умову (3.22), оскільки $4 > 1+1$. Друге рівняння даної системи приймемо за третє рівняння нової системи, а третє рівняння даної системи запишемо другим рівнянням нової системи.

Одержимо систему

$$\begin{array}{l}
 4x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\
 x_1 + 4x_2 + x_3 = 6, \\
 x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 8.
 \end{array}$$

Усі рівняння отриманої системи задовольняють умову (3.22). З першого рівняння цієї системи виразимо x_1 , з другого рівняння – x_2 , з третього рівняння – x_3 . Одержимо систему вигляду (3.18)

$$\begin{array}{l}
 x_1 = 0,25x_2 - 0,25x_3 + 0,5, \\
 x_2 = -0,25x_1 - 0,25x_3 + 1,5, \\
 x_3 = -0,2x_1 + 0,4x_2 + 1,6,
 \end{array}$$

яка задовольняє умову (3.21) збіжності ітераційного процесу.

б) У рівнянні (I) коефіцієнт при x_2 за модулем більший від суми модулів інших коефіцієнтів, тому це рівняння можна прийняти за друге рівняння нової системи.

Перше рівняння нової системи одержимо таким чином: рівняння (III) помножимо на 4 і додамо до рівняння (II). В результаті отримаємо рівняння $9x_1 + 5x_2 - 2x_3 = -1$.

Для одержання третього рівняння нової системи рівняння (II) помножимо на 3, рівняння III помножимо на -3 і обидва отримані співвідношення додамо до рівняння (I).

Третє рівняння нової системи має вигляд: $-2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 4,5$.

Отже, ми отримали систему:

$$\begin{array}{l}
 9x_1 + 5x_2 - 2x_3 = -1, \\
 x_1 + 3x_2 + x_3 = 1,5, \\
 -2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 4,5.
 \end{array}$$

Аналогічно, як у попередньому випадку, з першого рівняння цієї системи виразимо x_1 , з другого – x_2 , з третього – x_3 і одержимо систему вигляду (3.18), до якої можна застосувати метод ітерацій.

3.4. Метод Зейделя

Метод Зейделя розв'язання лінійної системи є деякою модифікацією методу простих ітерацій. Якщо при обчисленні $(k+1)$ -го наближення будь-якого з невідомих x_1, x_2, \dots, x_n за методом простих ітерацій використовують тільки k -ті наближення цих невідомих, то при обчисленні $(k+1)$ -го наближення невідомого x_i за методом Зейделя враховують вже обчислені $(k+1)-i$ наближення невідомих x_1, x_2, \dots, x_{i-1} .

Виберемо початкові наближення коренів системи (3.18):

$$x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}.$$

Якщо вже відомі k -ті наближення $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}$ коренів системи, то згідно з методом Зейделя $(k+1)-i$ наближення обчислюємо за формулами:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \sum_{j=1}^n \alpha_{1j} x_j^{(k)} + \beta_1, \\ x_2^{(k+1)} &= \alpha_{21} x_1^{(k+1)} + \sum_{j=2}^n \alpha_{2j} x_j^{(k)} + \beta_2, \\ &\dots \dots \dots \\ x_i^{(k+1)} &= \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^n \alpha_{ij} x_j^{(k)} + \beta_i, \\ &\dots \dots \dots \\ x_n^{(k+1)} &= \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj} x_j^{(k+1)} + \alpha_{nn} x_n^{(k)} + \beta_n, \\ &(k = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \tag{3.24}$$

Достатні умови збіжності (3.21) справджуються також і для методу Зейделя. Зазвичай метод Зейделя дає кращу збіжність, ніж метод простих ітерацій, проте він загалом призводить до громіздкіших обчислень.

Приклад 3.3. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Зейделя.

$$\begin{aligned} 12x_1 - 100x_2 + 13x_3 &= -82, \\ 28x_1 - 19x_2 - 100x_3 &= -22, \\ 100x_1 - 21x_2 + 9x_3 &= 38. \end{aligned}$$

Розв'язання. Зведемо цю систему до вигляду (3.18). Для цього рівняння даної системи запишемо в наступному порядку:

$$\begin{aligned} 100x_1 - 21x_2 + 9x_3 &= 38, \\ 12x_1 - 100x_2 + 13x_3 &= -82, \\ 28x_1 - 19x_2 - 100x_3 &= -22. \end{aligned}$$

Перше з цих рівнянь розв'яжемо відносно x_1 , друге – відносно x_2 , третє – відносно x_3 . Одержимо еквівалентну систему

$$x_1 = 0,21x_2 - 0,09x_3 + 0,38,$$

$$x_2 = 0,12x_1 + 0,13x_3 + 0,82,$$

$$x_3 = 0,28x_1 - 0,19x_2 + 0,22,$$

яка задовольняє достатню умову (3.21) збіжності ітераційного процесу.

За початкове (нульове) наближення візьмемо, наприклад, $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$. Наступні наближення будемо обчислювати за формулами (3.24).

$$x_1^{(1)} = 0,38; \quad x_2^{(1)} = 0,12 \cdot 0,38 + 0,13 \cdot 0 + 0,82 = 0,87,$$

$$x_3^{(1)} = 0,28 \cdot 0,38 - 0,19 \cdot 0,87 + 0,22 = 0,16,$$

$$x_1^{(2)} = 0,21 \cdot 0,87 - 0,09 \cdot 0,16 + 0,38 = 0,548,$$

$$x_2^{(2)} = 0,12 \cdot 0,548 + 0,13 \cdot 0,16 + 0,82 = 0,907,$$

$$x_3^{(2)} = 0,28 \cdot 0,548 - 0,19 \cdot 0,907 + 0,22 = 0,201 \quad \text{і т.д.}$$

Одержані результати запишемо у таблицю.

k	0	1	2	3	4	5
$x_1^{(k)}$	0	0,38	0,548	0,5524	0,5535	0,55350
$x_2^{(k)}$	0	0,87	0,907	0,9124	0,9126	0,91263
$x_3^{(k)}$	0	0,16	0,201	0,2013	0,2016	0,20158

Оскільки четверте та п'яте наближення розв'язку досить близькі одне до одного, то можна прийняти: $x_1 = 0,5535$, $x_2 = 0,9126$, $x_3 = 0,2016$.

3.5. Завдання для самостійної роботи

1. Розв'язати систему рівнянь методом Гаусса: а) без вибору головного елемента; б) з вибором головного елемента. Зробити перевірку.

$$1.1. A = \begin{pmatrix} 1,34 & -2,15 & -6,05 & 2,48 & 1,75 & 4,85 \\ -3,15 & 3,28 & 7,24 & -4,39 & 5,17 & -1,89 \\ 2,18 & 3,41 & -1,74 & 2,53 & 3,98 & 0,48 \\ -0,93 & 1,78 & 2,91 & -3,47 & -0,93 & 4,85 \\ 5,07 & -2,18 & 3,15 & 6,24 & 4,33 & -5,11 \\ -2,18 & 3,25 & -4,03 & -5,17 & 2,22 & 0,48 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2,07 \\ -0,18 \\ -3,15 \\ 1,87 \\ 4,13 \\ -2,37 \end{pmatrix};$$

$$1.2. A = \begin{pmatrix} 1,75 & -4,85 & 5,17 & 2,37 & 1,05 & -2,34 \\ 2,47 & 3,45 & 1,28 & 2,07 & 3,91 & 2,52 \\ -3,72 & 2,93 & 0,74 & 3,28 & 0,64 & 1,75 \\ 1,38 & -3,83 & 4,23 & 3,75 & -1,25 & 2,78 \\ 2,35 & -2,44 & 1,17 & 2,93 & 3,28 & -1,03 \\ 3,44 & -2,56 & -1,38 & -2,81 & 4,62 & 0,65 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3,25 \\ -2,41 \\ 1,44 \\ 2,83 \\ 1,15 \\ 2,35 \end{pmatrix};$$

$$1.3. A = \begin{pmatrix} 1,37 & 0,63 & -2,34 & 3,81 & 4,08 & -1,75 \\ -2,81 & 4,62 & 3,13 & -2,13 & 5,11 & 2,73 \\ 0,72 & 2,37 & 1,96 & 2,38 & -1,38 & -1,76 \\ 1,38 & -3,83 & -1,03 & 4,23 & 3,75 & 7,85 \\ -4,83 & 2,68 & 1,39 & 2,72 & 0,58 & 0,63 \\ 3,18 & -3,44 & 2,54 & 1,52 & 2,34 & -1,38 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3,15 \\ 0,47 \\ -2,15 \\ 4,37 \\ 3,61 \\ 1,77 \end{pmatrix};$$

$$1.4. A = \begin{pmatrix} 2,32 & -1,74 & -2,43 & 1,74 & 2,36 & 3,81 \\ 0,89 & 2,38 & 5,64 & 7,85 & 6,15 & -0,83 \\ -3,14 & 0,34 & 2,17 & -4,18 & 5,37 & 4,87 \\ 1,37 & 3,62 & -4,91 & -3,38 & 2,82 & 3,15 \\ -2,19 & 5,74 & 6,31 & 4,28 & 7,34 & 2,18 \\ 1,74 & 3,56 & -2,62 & -3,71 & 4,43 & 5,13 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2,54 \\ -1,73 \\ 0,38 \\ 4,13 \\ 3,49 \\ 2,54 \end{pmatrix};$$

$$1.5. A = \begin{pmatrix} 1,15 & -2,69 & -3,74 & 4,72 & 3,51 & 3,82 \\ -3,72 & 0,74 & 2,93 & 3,28 & 6,49 & 1,75 \\ 4,13 & 5,82 & 6,34 & 3,77 & -2,43 & -2,35 \\ 0,65 & 4,38 & -3,18 & 7,16 & 8,31 & 2,43 \\ -2,37 & 3,14 & 9,57 & 5,03 & 4,84 & 3,17 \\ 3,56 & -2,94 & 2,07 & -3,91 & 4,05 & -2,52 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4,71 \\ -3,15 \\ 2,36 \\ 1,44 \\ -0,83 \\ 4,37 \end{pmatrix}.$$

2. Розв'язати систему рівнянь методом ітерацій.

$$2.1. \begin{cases} 0,71x_1 + 0,15x_2 + 0,24x_3 = 0,54, \\ 0,10x_1 + 0,44x_2 - 0,13x_3 = 0,32, \\ 0,12x_1 - 0,13x_2 + 0,83x_3 = -1,05; \end{cases}$$

$$2.2. \begin{cases} -0,13x_1 + 0,05x_2 + 0,63x_3 = 0,37, \\ -0,14x_1 + 0,34x_2 + 0,10x_3 = 0,31, \\ 0,74x_1 + 0,18x_2 - 0,13x_3 = 0,84; \end{cases}$$

$$2.3. \begin{cases} 11,75x_1 + 2,33x_2 + 4,15x_3 = 31,51, \\ 5,13x_1 + 1,75x_2 - 19,27x_3 = 18,45, \\ 2,36x_1 - 10,17x_2 + 3,43x_3 = 10,17; \end{cases}$$

$$2.4. \begin{cases} 0,34x_1 - 0,15x_2 + 0,10x_3 = 0,33, \\ 0,11x_1 + 0,12x_2 + 0,71x_3 = 0,28, \\ -0,13x_1 + 0,45x_2 + 0,14x_3 = 0,17; \end{cases}$$

$$2.5. \begin{cases} 0,85x_1 - 0,17x_2 + 0,23x_3 = 0,94, \\ 0,17x_1 + 0,44x_2 + 1,16x_3 = 1,25, \\ 0,35x_1 + 1,34x_2 - 0,30x_3 = 0,87. \end{cases}$$

3. Розв'язати систему рівнянь методом Зейделя.

$$3.1. \begin{cases} 0,60x_1 + 0,78x_2 - 1,87x_3 = 1,65, \\ 3,11x_1 - 1,66x_2 - 0,60x_3 = -0,92, \\ -1,65x_1 + 3,51x_2 - 0,48x_3 = 2,57; \end{cases}$$

$$3.2. \begin{cases} 0,35x_1 + 1,23x_2 - 0,24x_3 = -0,62, \\ -0,14x_1 - 0,25x_2 + 1,61x_3 = 0,37, \\ -1,53x_1 - 0,32x_2 + 0,11x_3 = 0,48; \end{cases}$$

$$3.3. \begin{cases} 0,15x_1 + 0,10x_2 + 0,71x_3 = 0,42, \\ 0,65x_1 + 0,05x_2 + 0,15x_3 = 0,34, \\ 0,12x_1 + 0,34x_2 + 0,10x_3 = 0,32; \end{cases}$$

$$3.4. \begin{cases} 0,75x_1 + 0,19x_2 - 0,15x_3 = 0,76, \\ -0,16x_1 + 0,44x_2 + 0,12x_3 = 0,35, \\ -0,13x_1 + 0,08x_2 + 0,65x_3 = 0,39; \end{cases}$$

$$3.5. \begin{cases} 0,84x_1 + 0,12x_2 - 0,26x_3 = 0,58, \\ 0,12x_1 + 0,71x_2 + 0,15x_3 = 0,26, \\ -0,13x_1 + 0,15x_2 + 0,63x_3 = 0,38. \end{cases}$$

РОЗДІЛ 4

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Багато практичних задач зводяться до розв'язання систем нелінійних рівнянь. На відміну від систем лінійних рівнянь не існує прямих методів розв'язання нелінійних систем загального виду. Для розв'язання систем нелінійних рівнянь зазвичай використовують ітераційні методи. Розглянемо два з них – метод Ньютона та метод простих ітерацій.

4.1. Метод Ньютона

Для спрощення викладок розглянемо систему двох нелінійних рівнянь з двома невідомими.

$$\begin{aligned} F(x, y) &= 0, \\ \Phi(x, y) &= 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Припустимо, що система (4.1) має розв'язки і нехай відоме початкове наближення одного з розв'язків цієї системи $x = x_0, y = y_0$. Це початкове наближення можна одержати, наприклад, графічним методом, побудувавши в прямокутній декартовій системі координат лінії $F(x, y) = 0$ і $\Phi(x, y) = 0$ та визначивши наближено координати точки перетину цих ліній.

Метод Ньютона для системи рівнянь (4.1) ґрунтується на розкладі функцій $F(x, y)$ і $\Phi(x, y)$ у ряд Тейлора, причому члени ряду, які містять частинні похідні другого та вищих порядків, не розглядаються.

Завдання полягає у знаходженні поправок (приростів) до початкових значень x_0, y_0 . Позначимо ці поправки $\Delta x^{(0)}$ та $\Delta y^{(0)}$ і запишемо розв'язок системи (4.1) у вигляді:

$$x = x_0 + \Delta x^{(0)}; \quad y = y_0 + \Delta y^{(0)}. \quad (4.2)$$

Замість системи (4.1) одержуємо систему:

$$\begin{aligned} F(x_0 + \Delta x^{(0)}, y_0 + \Delta y^{(0)}) &= 0, \\ \Phi(x_0 + \Delta x^{(0)}, y_0 + \Delta y^{(0)}) &= 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Розкладемо ці функції в ряд Тейлора в околі точки $M_0(x_0, y_0)$ та візьмемо тільки лінійні відносно приростів $\Delta x^{(0)}$ та $\Delta y^{(0)}$ члени розкладу:

$$\begin{aligned} F(x_0 + \Delta x^{(0)}, y_0 + \Delta y^{(0)}) &= F(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \Delta x^{(0)} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \Delta y^{(0)}, \\ \Phi(x_0 + \Delta x^{(0)}, y_0 + \Delta y^{(0)}) &= \Phi(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_0 \Delta x^{(0)} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_0 \Delta y^{(0)}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Оскільки згідно з (4.3) ліві частини виразів (4.4) повинні дорівнювати нулю, то одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження приростів $\Delta x^{(0)}$ та $\Delta y^{(0)}$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \Delta x^{(0)} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \Delta y^{(0)} &= -F(x_0, y_0), \\ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_0 \Delta x^{(0)} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_0 \Delta y^{(0)} &= -\Phi(x_0, y_0). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Символ $(\)_0$ означає, що частинна похідна функції обчислюється в точці $M_0(x_0, y_0)$. Визначник системи (4.5) – це визначник Якобі

$$I(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{vmatrix}, \quad (4.6)$$

обчислений в точці $M_0(x_0, y_0)$.

Якщо $I(x_0, y_0) \neq 0$, то система (4.5) має єдиний розв'язок, який можна знайти, наприклад, за формулами Крамера.

$$\begin{aligned} \Delta x^{(0)} &= -\frac{1}{I(x_0, y_0)} \left(F(x_0, y_0) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_0 - \Phi(x_0, y_0) \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \right), \\ \Delta y^{(0)} &= \frac{1}{I(x_0, y_0)} \left(F(x_0, y_0) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_0 - \Phi(x_0, y_0) \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 \right). \end{aligned} \quad (4.7)$$

За перше наближення розв'язку системи (4.1) приймаємо значення:

$$x_1 = x_0 + \Delta x^{(0)}, \quad y_1 = y_0 + \Delta y^{(0)}. \quad (4.8)$$

Друге наближення розв'язку одержуємо таким самим способом:

$$x_2 = x_1 + \Delta x^{(1)}, \quad y_2 = y_1 + \Delta y^{(1)},$$

де $\Delta x^{(1)}$, $\Delta y^{(1)}$ – поправки, які обчислюємо за формулами виду (4.7), в яких усі функції та частинні похідні знайдені в точці $M_1(x_1, y_1)$.

Аналогічно одержуємо третє та наступні наближення розв'язку системи (4.1).

Приклад 4.1. Знайти наближено додатні корені системи рівнянь

$$x + 3 \lg x - y^2 = 0,$$

$$2x^2 - xy - 5x + 1 = 0.$$

Розв'язання. Якщо побудувати графіки функцій $x + 3 \lg x - y^2 = 0$ і $2x^2 - xy - 5x + 1 = 0$, то можна визначити наближено координати їх точок перетину. Таких точок є дві: $A(1,4; -1,4)$ та $B(3,4; 2,2)$. Нас цікавлять додатні корені системи, тому точку $B(3,4; 2,2)$ приймемо за початкову точку M_0 . Отже, початкове наближення додатного розв'язку даної системи $x_0 = 3,4$; $y_0 = 2,2$.

$$F(x, y) = x + 3 \lg x - y^2,$$

$$\Phi(x, y) = 2x^2 - xy - 5x + 1.$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 1 + \frac{3}{x \ln 10}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -2y,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 4x - y - 5, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -x.$$

Обчислимо значення функцій $F(x, y)$, $\Phi(x, y)$, їх похідних та визначника $I(x, y)$ в точці $M_0(3, 4; 2, 2)$.

$$F(3, 4; 2, 2) = 0,1544, \quad \Phi(3, 4; 2, 2) = -0,36,$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 = 1,3832, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 = -4,4,$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_0 = 6,4, \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_0 = -3,4,$$

$$I(3, 4; 2, 2) = \begin{vmatrix} 1,3832 & -4,4 \\ 6,4 & -3,4 \end{vmatrix} = 23,4571.$$

За формулами (4.7) обчислимо поправки

$$\Delta x^{(0)} = -\frac{1}{23,4571} (-0,1544 \cdot 3,4 - 0,36 \cdot 4,4) = 0,0899 \approx 0,090,$$

$$\Delta y^{(0)} = \frac{1}{23,4571} (0,1544 \cdot 6,4 + 0,36 \cdot 1,3832) = 0,0634 \approx 0,063.$$

Перше наближення розв'язку системи отримуємо за формулами (4.8).

$$x_1 = 3,4 + 0,090 = 3,490, \quad y_1 = 2,2 + 0,063 = 2,263.$$

Щоб знайти друге наближення розв'язку, обчислимо величини $\Delta x^{(1)}$ та $\Delta y^{(1)}$.

$$F(3,490; 2,263) = -0,0027, \quad \Phi(3,490; 2,263) = 0,0123,$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_1 = 1,3733, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_1 = -4,526,$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_1 = 6,697, \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_1 = -3,490,$$

$$I(3,490; 2,263) = 25,5178, \quad \Delta x^{(1)} = -0,0026, \quad \Delta y^{(1)} = -0,0014.$$

$$\text{Отже, } x_2 = 3,490 - 0,0026 = 3,4874, \quad y_2 = 2,263 - 0,0014 = 2,2616.$$

Якщо повторити усі операції з одержаним другим наближенням розв'язку цієї системи, то одержимо поправки $\Delta x^{(2)}$, $\Delta y^{(2)}$, які менші від 10^{-4} . При підстановці значень x_2 та y_2 у ліві частини рівнянь заданої системи отримаємо:

$$F(3,4874; 2,2616) = 7 \cdot 10^{-5}, \quad \Phi(3,4874; 2,2616) = -2,2 \cdot 10^{-4}.$$

Зупиняючись на другому наближенні, одержимо $x = 3,4874$, $y = 2,2616$.

4.2. Метод простих ітерацій

Розглянемо систему двох нелінійних рівнянь із двома невідомими (4.1). Нехай $x = x_0$, $y = y_0$ є початковим наближенням розв'язку системи (4.1) $x = \xi$, $y = \eta$. Запишемо цю систему у вигляді

$$\begin{aligned}x &= f(x, y), \\ y &= \varphi(x, y),\end{aligned}\tag{4.9}$$

і побудуємо послідовність наближень розв'язку системи (4.9) за формулами:

$$\begin{aligned}x_1 &= f(x_0, y_0), \quad y_1 = \varphi(x_0, y_0); \\ x_2 &= f(x_1, y_1), \quad y_2 = \varphi(x_1, y_1); \\ &\dots\dots\dots \\ x_{n+1} &= f(x_n, y_n), \quad y_{n+1} = \varphi(x_n, y_n); \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}\tag{4.10}$$

Нехай ітераційний процес (4.10) збігається, тобто існують границі $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \eta$. Припустимо, що функції $f(x, y)$ та $\varphi(x, y)$ неперервні і перейдемо до границі при $n \rightarrow \infty$ у рівностях $x_{n+1} = f(x_n, y_n)$ і $y_{n+1} = \varphi(x_n, y_n)$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n); \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n, y_n).$$

Звідси одержимо

$$\xi = f(\xi, \eta); \quad \eta = \varphi(\xi, \eta),$$

тобто значення ξ і η є коренями системи (4.9), а, отже, й системи (4.1). Тому, взявши досить велику кількість ітерацій (4.10), отримаємо наближення розв'язку, яке буде відрізнятися від точного розв'язку системи (4.1) як завгодно мало.

Справедлива наступна **теорема**.

Нехай в деякій замкненій області $G\{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ міститься тільки один розв'язок системи (4.9) $x = \xi$, $y = \eta$. Якщо:

- 1) функції $f(x, y)$ і $\varphi(x, y)$ визначені і неперервно диференційовні в G ;
- 2) початкові наближення x_0, y_0 і усі наступні наближення x_n, y_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) містяться в області G ;
- 3) в області G виконуються умови

$$\begin{aligned}|f'_x(x, y)| + |\varphi'_x(x, y)| &\leq g_1 < 1, \\ |f'_y(x, y)| + |\varphi'_y(x, y)| &\leq g_2 < 1,\end{aligned}\tag{4.11}$$

то послідовність наближень (4.10) збігається до коренів $x = \xi$, $y = \eta$ системи (4.9), тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \eta.$$

Зауваження. Умови (4.11) можна замінити такими умовами:

$$\begin{aligned}|f'_x(x, y)| + |f'_y(x, y)| &\leq g_1 < 1, \\ |\varphi'_x(x, y)| + |\varphi'_y(x, y)| &\leq g_2 < 1.\end{aligned}\tag{4.12}$$

Розглянемо один із способів, яким можна звести систему рівнянь (4.1) до вигляду (4.9) з дотриманням умов (4.11). Запишемо систему рівнянь

$$\begin{aligned}\alpha F(x, y) + \beta \Phi(x, y) &= 0, \\ \gamma F(x, y) + \delta \Phi(x, y) &= 0,\end{aligned}\tag{4.13}$$

яка еквівалентна системі (4.1) при умові, що визначник $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0$.

Перепишемо її так:

$$\begin{aligned}x &= x + \alpha F(x, y) + \beta \Phi(x, y), \\ y &= y + \gamma F(x, y) + \delta \Phi(x, y).\end{aligned}\tag{4.14}$$

Позначимо

$$\begin{aligned}x + \alpha F(x, y) + \beta \Phi(x, y) &= f(x, y), \\ y + \gamma F(x, y) + \delta \Phi(x, y) &= \varphi(x, y).\end{aligned}$$

Виберемо параметри $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ такими, щоб частинні похідні функцій $f(x, y)$ і $\varphi(x, y)$ дорівнювали нулю або були досить близькі до нуля при початковому наближенні $x = x_0, y = y_0$, тобто знайдемо $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ як наближений розв'язок лінійної системи рівнянь

$$\begin{aligned}1 + \alpha F'_x(x_0, y_0) + \beta \Phi'_x(x_0, y_0) &= 0 \\ \alpha F'_y(x_0, y_0) + \beta \Phi'_y(x_0, y_0) &= 0 \\ \gamma F'_x(x_0, y_0) + \delta \Phi'_x(x_0, y_0) &= 0 \\ 1 + \gamma F'_y(x_0, y_0) + \delta \Phi'_y(x_0, y_0) &= 0\end{aligned}\tag{4.15}$$

При такому виборі параметрів $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ умови (4.11) будуть виконані в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$, оскільки ми припустимо, що частинні похідні функцій $f(x, y)$ і $\varphi(x, y)$ неперервні.

Приклад 4.2 Методом ітерацій знайти корені системи рівнянь

$$\begin{aligned}x^2 + y - 4 &= 0, \\ y - \lg x - 1 &= 0\end{aligned}$$

з точністю до 0,001.

Розв'язання. Побудуємо лінії $y = 4 - x^2$ та $y = \lg x + 1$. Корені даної системи – це координати точки перетину цих двох ліній.

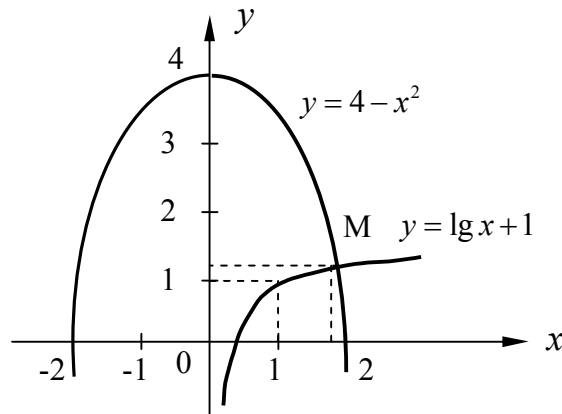


Рисунок 8

З одержаного рисунка видно, що за нульове наближення цих коренів можна взяти числа $x_0 = 1,75$; $y_0 = 1,25$.

Згідно з умовою задачі

$$F(x, y) = x^2 + y - 4,$$

$$\Phi(x, y) = y - \lg x - 1.$$

Задану систему перепишемо у вигляді:

$$x = x + \alpha F(x, y) + \beta \Phi(x, y),$$

$$y = y + \gamma F(x, y) + \delta \Phi(x, y).$$

Знайдемо частинні похідні функцій $F(x, y)$, $\Phi(x, y)$.

$$F'_x(x, y) = 2x; \quad F'_y(x, y) = 1; \quad \Phi'_x(x, y) = -\frac{1}{x \ln 10}; \quad \Phi'_y(x, y) = 1.$$

Обчислимо значення цих похідних у точці $M_0(1,75; 1,25)$ і запишемо систему лінійних рівнянь для визначення параметрів α , β , γ , δ .

$$1 + 3,5\alpha - 0,25\beta = 0,$$

$$\alpha + \beta = 0,$$

$$3,5\gamma - 0,25\delta = 0,$$

$$1 + \gamma + \delta = 0.$$

Розв'язавши цю систему, отримаємо:

$$\alpha = -0,27, \quad \beta = 0,27, \quad \gamma = -0,07, \quad \delta = -0,93.$$

Отже, задана система має вигляд:

$$x = x - 0,27 F(x, y) + 0,27 \Phi(x, y),$$

$$y = y - 0,07 F(x, y) - 0,93 \Phi(x, y).$$

Запишемо формули для обчислення послідовних наближень розв'язку системи:

$$x_{n+1} = x_n - 0,27 F(x_n, y_n) + 0,27 \Phi(x_n, y_n),$$

$$y_{n+1} = y_n - 0,07 F(x_n, y_n) - 0,93 \Phi(x_n, y_n),$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots)$$

або

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x^{(n)}, \quad y_{n+1} = y_n + \Delta y^{(n)}, \quad (4.16)$$

де

$$\Delta x^{(n)} = -0,27 F(x_n, y_n) + 0,27 \Phi(x_n, y_n),$$

$$\Delta y^{(n)} = -0,07 F(x_n, y_n) - 0,93 \Phi(x_n, y_n).$$

Обчислимо перше наближення x_1 , y_1 за формулами (4.16) при $n = 0$.

$$F(1,75; 1,25) = 1,75 + 1,25 - 4 = 0,31,$$

$$\Phi(1,75; 1,25) = 1,25 - \lg 1,75 - 1 = 0,007,$$

$$\Delta x^{(0)} = -0,27 \cdot 0,31 + 0,27 \cdot 0,007 = -0,08,$$

$$\Delta y^{(0)} = -0,07 \cdot 0,31 - 0,93 \cdot 0,007 = -0,03,$$

$$x_1 = x_0 + \Delta x^{(0)} = 1,75 - 0,08 = 1,67,$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y^{(0)} = 1,25 - 0,03 = 1,22.$$

Аналогічно обчислюємо друге та третє наближення. Одержані результати запишемо у таблицю.

n	x_n	y_n	$F(x_n, y_n)$	$\Phi(x_n, y_n)$	$\Delta x^{(n)}$	$\Delta y^{(n)}$
0	1,75	1,25	0,31	0,007	- 0,08	- 0,03
1	1,67	1,22	0,009	- 0,003	- 0,003	0,002
2	1,667	1,222	0,0009	0,0001	- 0,0002	- 0,0002
3	1,6668	1,2218				

Оскільки $|\Delta x^{(2)}| < 0,0005$, $|\Delta y^{(2)}| < 0,0005$, то з точністю до 0,001 можна прийняти $x = 1,667$, $y = 1,222$.

4.3. Завдання для самостійної роботи

1. Методом Ньютона знайти корені системи рівнянь з точністю до 0,001.

$$1.1. \begin{cases} 2x^3 - y^2 - 1 = 0, \\ xy^3 - y - 4 = 0; \end{cases}$$

$$1.2. \begin{cases} x^2 + y^2 - 4y = 0, \\ x + y + xy - 2 = 0; \end{cases}$$

$$1.3. \begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0, \\ x^4 - y^3 - 1 = 0, \\ x > 0, y > 0; \end{cases}$$

$$1.4. \begin{cases} x^2 - y^2 + y - x - 4 = 0, \\ y^2 + x - 5 = 0, \\ x > 0, y > 0; \end{cases}$$

$$1.5. \begin{cases} x + 2 \ln x - y^2 = 0, \\ x^2 - y - 1 = 0, \\ x > 0, y > 0; \end{cases}$$

2. Методом ітерацій знайти корені системи рівнянь з точністю до 0,001.

$$2.1. \begin{cases} x^3 + y^3 - 6x + 3 = 0, \\ x^3 - y^3 - 6y + 2 = 0, \\ x > 0, y > 0; \end{cases}$$

$$2.2. \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0, \\ x^3 - y = 0, \\ x > 0, y > 0; \end{cases}$$

$$2.3. \begin{cases} \sin x - y - 1,32 = 0, \\ \cos y - x + 0,85 = 0; \end{cases}$$

$$2.4. \begin{cases} x^3 - y^4 + 1 = 0, \\ x^2 + y^2 - 4 = 0; \end{cases}$$

$$2.5. \begin{cases} x^2 y^2 - 3x^3 - 6y^3 + 8 = 0, \\ x^4 - 9y + 2 = 0, \\ x > 0, y > 0. \end{cases}$$

РОЗДІЛ 5

НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ МНОГОЧЛЕНАМИ

5.1. Основні поняття

Нехай величина y є функцією аргументу x , тобто будь-якому значенню x з області визначення цієї функції поставлено у відповідність одне значення y . Проте на практиці часто неможливо записати цю функціональну залежність у вигляді формули $y = f(x)$. У деяких випадках аналітичний вираз $y = f(x)$ хоч і відомий, але настільки громіздкий, що його важко використовувати в практичних розрахунках.

Найчастіше на практиці функція задається у вигляді таблиці: дискретній множині значень аргументу $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ поставлено у відповідність множину значень функції $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$. Ці значення є або результатами обчислень, або експериментальними даними. Часто бувають потрібні значення функції і в інших точках, що не співпадають із точками x_i . Проте в багатьох випадках одержати ці значення можна тільки шляхом складних обчислень або проведенням дорогих експериментів.

Таким чином, з точки зору економії часу і коштів ми приходимо до необхідності використання наявних табличних даних для наближеного обчислення значень функції y при будь-якому значенні x із деякої області. Саме цій меті й служить задача про наближення (апроксимацію) функції: дану функцію $f(x)$ потрібно наблизити (апроксимувати) деякою іншою функцією $\varphi(x)$ так, щоб відхилення (в деякому розумінні) $\varphi(x)$ від $f(x)$ було найменшим в заданій області. Функція $\varphi(x)$ називається апроксимуючою. Найчастіше за апроксимуючу функцію беруть алгебраїчний многочлен, оскільки значення многочлена обчислюють просто, наприклад за схемою Горнера, його легко диференціювати, інтегрувати і т. д.

Якщо наближення будується на заданій дискретній множині точок $\{x_i\}$, то апроксимація називається точковою. До неї відносяться інтерполяція, середньоквадратичне наближення та інші. При побудові наближення на неперервній множині точок (наприклад, на відрізку $[a, b]$) апроксимація називається неперервною.

Одним із основних видів точкової апроксимації є інтерполяція, яка полягає в наступному: для функції $f(x)$ будується многочлен

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m, \quad (5.1)$$

який приймає в заданих точках x_i ті самі значення y_i , що і функція $f(x)$, тобто

$$P(x_i) = y_i, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (5.2)$$

При цьому припускається, що серед значень x_i немає однакових. Точки x_i називаються вузлами інтерполяції, а многочлен $P(x)$ – інтерполяційним многочленом. Найвищий степінь многочлена (5.1) може дорівнювати n . У цьому випадку інтерполяцію називають глобальною, оскільки один многочлен

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (5.3)$$

використовується для інтерполяції функції $f(x)$ на всьому інтервалі зміни аргументу x . Коефіцієнти $a_i (i = 0, 1, \dots, n)$ многочлена (5.3) визначають із системи рівнянь (5.2). Можна довести, що при $x_i \neq x_k (i \neq k)$ ця система має єдиний розв'язок.

Інтерполяційні многочлени можуть будуватися для різних частин інтервалу зміни x . У цьому випадку маємо кускову (локальну) інтерполяцію.

Отже, при інтерполяції вимагають, щоб графік інтерполяційного многочлена проходив через задані в таблиці точки графіка функції. Проте в багатьох випадках виконання цієї умови утруднене (наприклад, при заданні великої кількості вузлів) або навіть недоцільне (якщо, наприклад, табличні дані одержані шляхом вимірювань і містять помилки). Побудова апроксимуючого многочлена з умовою обов'язкового проходження його графіка через усі експериментальні точки означала б повторення допущених при вимірюваннях помилок.

Тому часто апроксимуючий многочлен вибирають так, щоб його графік проходив близько від даних точок, а поняття “близько” уточнюється при розгляді різних видів наближення. Одним із таких видів є середньоквадратичне наближення функції за допомогою многочлена (5.1).

Мірою відхилення многочлена $P(x)$ від заданої функції $f(x)$ на множині точок $(x_i, y_i) (i = 0, 1, \dots, n)$ при середньоквадратичному наближенні є величина S , що дорівнює сумі квадратів різниць між значеннями многочлена та функції в заданих точках:

$$S = \sum_{i=0}^n (P(x_i) - y_i)^2. \quad (5.4)$$

Коефіцієнти a_0, a_1, \dots, a_m апроксимуючого многочлена (5.1) потрібно підібрати так, щоб величина S була найменшою. В цьому полягає метод найменших квадратів.

Середньоквадратичне наближення застосовується у багатьох випадках, зокрема при обробці експериментальних даних.

Проте іноді при побудові наближення ставиться більш жорстка умова: вимагається, щоб в усіх точках деякого відрізка $[a, b]$ відхилення многочлена $P(x)$ від функції $f(x)$ за абсолютною величиною було меншим від заданого числа $\varepsilon > 0$:

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon, \quad a \leq x \leq b.$$

У цьому випадку кажуть, що многочлен $P(x)$ рівномірно апроксимує функцію $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ з точністю ε .

Абсолютним відхиленням Δ многочлена $P(x)$ від функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ називається максимальне значення абсолютної величини різниці між ними на даному відрізку:

$$\Delta = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P(x)| \quad (5.5)$$

Можливість побудови многочлена, який рівномірно наближує дану функцію, впливає з теореми Вейерштрасса про апроксимацію.

Теорема. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує многочлен $P(x)$ степеня $m = m(\varepsilon)$, абсолютне відхилення якого від функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ менше від ε .

Зокрема, якщо функція $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ розкладається у рівномірно збіжний степеневий ряд, то за апроксимуючий многочлен можна взяти частинну суму цього ряду.

Існує також поняття найкращого наближення функції $f(x)$ многочленом $P(x)$ фіксованого степеня. В цьому випадку многочлен $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$ потрібно вибрати так, щоб на заданому відрізку $[a, b]$ величина абсолютного відхилення (5.5) була найменшою. Тоді многочлен $P(x)$ називається многочленом найкращого рівномірного наближення. Існування і єдиність многочлена найкращого рівномірного наближення впливає з наступної теореми.

Теорема. Для будь-якої функції $f(x)$, неперервної на відрізку $[a, b]$, і будь-якого натурального числа m існує многочлен степеня, не вищого від m , абсолютне відхилення якого від функції $f(x)$ мінімальне, причому такий многочлен єдиний.

5.2. Інтерполяційний многочлен Лагранжа

Розглядаємо функцію $y = f(x)$, для якої задані її значення $y_i = f(x_i)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$). Потрібно знайти многочлен $P(x)$ степеня n (5.3), для якого виконуються умови (5.2).

Систему лінійних рівнянь (5.2) запишемо в розгорнутому вигляді:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n &= y_0, \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n &= y_1, \\ \dots & \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n &= y_n. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Як вже було сказано, ця система має єдиний розв'язок, якщо всі значення x_0, x_1, \dots, x_n різні. Визначивши значення коефіцієнтів a_i ($i = 0, 1, \dots, n$) із системи (5.6), ми одержимо інтерполяційний многочлен $P(x)$ (5.3), який дає розв'язок поставленої задачі.

Але замість того, щоб розв'язувати систему (5.6), можна безпосередньо побудувати многочлен $P(x)$, який задовольняє умови (5.2).

Спочатку знайдемо вираз для многочлена $P_0(x)$, який в точці $x = x_0$ приймає значення y_0 , а в усіх інших точках x_1, x_2, \dots, x_n дорівнює нулю, тобто $P_0(x_0) = y_0, P_0(x_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$. Неважко перевірити, що цей многочлен має вигляд:

$$P_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)} y_0.$$

Аналогічно будемо многочлен $P_j(x)$, який в точці $x = x_j$ приймає значення y_j , а в усіх інших точках дорівнює нулю, тобто

$$P_j(x_j) = y_j, P_j(x_i) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, n; i \neq j).$$

Це є многочлен вигляду:

$$P_j(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \dots (x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_n)} y_j.$$

Шуканий многочлен дорівнює сумі усіх цих многочленів

$$P(x) = \sum_{j=0}^n P_j(x),$$

оскільки в кожній точці x_j один із доданків приймає значення y_j , а всі інші доданки дорівнюють нулю.

Отже, многочлен $P(x)$, який задовольняє умови поставленої задачі, знайдено:

$$P(x) = \sum_{j=0}^n \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \dots (x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_n)} y_j. \quad (5.7)$$

Цей многочлен називається інтерполяційним многочленом Лагранжа.

Легко довести, що цей інтерполяційний многочлен єдиний.

З формули (5.7) можна одержати вирази для лінійної ($n = 1$) і квадратичної ($n = 2$) інтерполяції:

$$P(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1, \quad (n = 1); \quad (5.8)$$

$$P(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2, \quad (n = 2). \quad (5.9)$$

5.3. Інтерполяційна схема Ейткена

Для практичного знаходження значень функції інтерполяційна формула Лагранжа (5.7) не дуже зручна. Значно зручніше проводити обчислення за схемою, яка називається інтерполяційною схемою Ейткена.

Формулу (5.8) для лінійної інтерполяції, тобто у випадку задання двох точок (x_0, y_0) та (x_1, y_1) , можна записати у вигляді:

$$P_{0,1}(x) = \frac{1}{x_1 - x_0} \begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x \\ y_1 & x_1 - x \end{vmatrix}. \quad (5.10)$$

Інтерполяцію вищого степеня виконуємо аналогічно, причому для побудови кожного многочлена наступного степеня використовуємо вже побудовані попередні.

Якщо задано три точки (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , то спочатку будуємо два лінійні многочлени $P_{0,1}(x)$ та

$$P_{1,2}(x) = \frac{1}{x_2 - x_1} \begin{vmatrix} y_1 & x_1 - x \\ y_2 & x_2 - x \end{vmatrix}. \quad (5.11)$$

Многочлен другого степеня (5.9) буде мати вигляд:

$$P_{0,1,2}(x) = \frac{1}{x_2 - x_0} \begin{vmatrix} P_{0,1}(x) & x_0 - x \\ P_{1,2}(x) & x_2 - x \end{vmatrix}, \quad (5.12)$$

тобто значення функції в точці x , що відповідає інтерполяції другого степеня (5.9), одержуємо шляхом лінійної інтерполяції між значеннями лінійних многочленів $P_{0,1}(x)$ та $P_{1,2}(x)$.

Ця схема легко узагальнюється на вищі степені. Наприклад, при інтерполяції третього степеня за чотирма точками (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) (кубічна інтерполяція) справедлива формула

$$P_{0,1,2,3}(x) = \frac{1}{x_3 - x_0} \begin{vmatrix} P_{0,1,2}(x) & x_0 - x \\ P_{1,2,3}(x) & x_3 - x \end{vmatrix}, \quad (5.13)$$

де многочлен $P_{0,1,2}(x)$ визначається формулою (5.12), а $P_{1,2,3}(x)$ побудований аналогічно.

Взагалі, якщо дано $n+1$ точок (x_i, y_i) , $i=0, 1, \dots, n$, то інтерполяційний многочлен n -го степеня одержуємо за формулою

$$P_{0,1,\dots,n}(x) = \frac{1}{x_n - x_0} \begin{vmatrix} P_{0,1,\dots,n-1}(x) & x_0 - x \\ P_{1,2,\dots,n}(x) & x_n - x \end{vmatrix}, \quad (5.14)$$

в яку входять вже побудовані інтерполяційні многочлени попереднього степеня.

Неважко переконатися в тому, що формула (5.14), якщо її виразити послідовно через значення функції y_0, y_1, \dots, y_n , перетвориться у формулу (5.7).

Приклад 5.1. Функція $y = f(x)$ задана таблицею:

i	0	1	2	3	4
x_i	1,3	2,2	3,5	4,4	5,5
y_i	4,6	3,7	2,3	1,2	2,1

За допомогою інтерполяційного многочлена Лагранжа четвертого степеня із застосуванням схеми Ейткена знайти наближене значення цієї функції при $x = 2,56$.

Розв'язання. Обчислення проведемо за формулами (5.10)–(5.14). Результати обчислень запишемо у вигляді таблиці.

Пояснимо, як одержати деякі значення у таблиці. Наприклад,

$$P_{2,3}(x) = \frac{1}{4,4 - 3,5} \begin{vmatrix} 2,3 & 0,94 \\ 1,2 & 1,84 \end{vmatrix} = 3,449;$$

$$P_{1,2,3}(x) = \frac{1}{4,4 - 2,2} \begin{vmatrix} 3,312 & -0,36 \\ 3,449 & 1,84 \end{vmatrix} = 3,334;$$

$$P_{0,1,2,3}(x) = \frac{1}{4,4 - 1,3} \begin{vmatrix} 3,324 & -1,26 \\ 3,334 & 1,84 \end{vmatrix} = 3,328;$$

$$P_{0,1,2,3,4}(x) = \frac{1}{5,5 - 1,3} \begin{vmatrix} 3,328 & -1,26 \\ 3,539 & 2,94 \end{vmatrix} = 3,391.$$

i	$x_i - x$	y_i	$P_{i,i+1}(x)$	$P_{i,i+1,i+2}(x)$	$P_{i,i+1,i+2,i+3}(x)$	$P_{0,1,2,3,4}(x)$
0	-1,26	4,6				
1	-0,36	3,7	3,340			
2	0,94	2,3	3,312	3,324		
3	1,84	1,2	3,449	3,334	3,328	
4	2,94	2,1	-0,305	5,213	3,539	3,391

Отже, $f(2,56) \approx P(2,56) = 3,391$.

5.4. Оцінка похибки інтерполяційної формули Лагранжа. Многочлени Чебишева. Оптимальний вибір вузлів інтерполяції

Значення інтерполяційного многочлена Лагранжа $P(x)$ у вузлах інтерполяції x_i ($i = 0, 1, \dots, n$) дорівнюють відповідним значенням функції $f(x)$ у цих точках. В інших точках $x \in [x_0, x_n]$ в загальному випадку $f(x) \neq P(x)$. $R_n(x) = f(x) - P(x)$ називається залишковим членом інтерполяційної формули (5.7).

Припустимо, що на відрізку $[a, b]$, де містяться всі вузли інтерполяції, функція $f(x)$ має неперервні похідні до $(n+1)$ -го порядку включно. Можна довести, що в цьому випадку залишковий член інтерполяційного многочлена Лагранжа має вигляд:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n), \quad (5.15)$$

де $f^{(n+1)}(\xi)$ – значення похідної $(n+1)$ -го порядку функції $f(x)$ в деякій точці $\xi \in (a, b)$.

Якщо ввести позначення найбільшого значення $|f^{(n+1)}(x)|$ на відрізку $[a, b]$:

$$\max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)| = M_{n+1},$$

то з рівності (5.15) одержимо оцінку похибки інтерполяції:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|, \quad (5.16)$$

де

$$\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n).$$

Аналізуючи формулу (5.16), бачимо, що похибка інтерполяції з точністю до числового множника залежить від добутку двох співмножників: M_{n+1} та $|\omega_{n+1}(x)|$. Перший співмножник M_{n+1} залежить від властивостей функції $f(x)$ і не підлягає регулюванню. Другий співмножник визначається тільки вибором вузлів інтерполяції: x_0, x_1, \dots, x_n . Тому виникає запитання: як вибрати вузли інтерполяції на відрізку $[a, b]$, щоб величина $\max_{a \leq x \leq b} |\omega_{n+1}(x)|$ мала найменше значення?

Для відповіді на це запитання нам потрібно розглянути многочлени Чебишева.

Многочлени Чебишева $T_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) визначаються на відрізку $[-1, 1]$ формулою

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x). \quad (5.17)$$

Зокрема, $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, $T_2(x) = 2x^2 - 1$, $T_3(x) = 4x^3 - 3x$.

Для обчислення многочленів Чебишева можна користуватись рекурентною формулою

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (5.18)$$

Наприклад,

$$T_4(x) = 2x(4x^3 - 3x) - (2x^2 - 1) = 8x^4 - 8x^2 + 1;$$

$$T_5(x) = 2x(8x^4 - 8x^2 + 1) - (4x^3 - 3x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x \text{ і т.д.}$$

Наведемо основні властивості многочленів Чебишева.

1. При парному (непарному) n многочлен $T_n(x)$ є парною (непарною) функцією.
2. Коефіцієнт при x^n многочлена $T_n(x)$ дорівнює 2^{n-1} , якщо $n \geq 1$.
3. $T_n(x)$ має n дійсних коренів в інтервалі $(-1, 1)$, які виражаються формулою

$$\xi_i = \cos \frac{(2i+1)\pi}{2n}, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

4. $\max_{-1 \leq x \leq 1} |T_n(x)| = 1$.

5. Многочлен

$$\bar{T}_n(x) = 2^{1-n} T_n(x), \quad n \geq 1 \quad (5.19)$$

серед усіх многочленів n -го степеня зі старшим коефіцієнтом, рівним одиниці, має на відрізку $[-1, 1]$ найменше значення максимуму модуля, тобто не існує такого многочлена $\bar{P}_n(x)$ n -го степеня зі старшим коефіцієнтом, рівним 1, щоб

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |\bar{P}_n(x)| < \max_{-1 \leq x \leq 1} |\bar{T}_n(x)| = 2^{1-n}.$$

Завдяки властивості 5 многочлени Чебишева $T_n(x)$ називаються многочленами, які найменше відхиляються від нуля.

Нехай ми виконуємо інтерполяцію на відрізку $[-1, 1]$. Візьмемо за вузли інтерполяції корені многочлена Чебишева $T_{n+1}(x)$, тобто точки

$$\xi_i = \cos \frac{(2i+1)\pi}{2n+2}, \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (5.20)$$

Тоді многочлен $\omega_{n+1}(x)$ виразиться через $T_{n+1}(x)$ наступним чином:

$$\omega_{n+1}(x) = 2^{-n} T_{n+1}(x).$$

При цьому згідно з властивістю 4 многочленів Чебишева оцінка похибки інтерполяції (5.16) набуде вигляду:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)! \cdot 2^n}, \quad (5.21)$$

де $M_{n+1} = \max_{-1 \leq x \leq 1} |f^{(n+1)}(x)|$.

Згідно з властивістю 5 многочленів Чебишева оцінку (5.16) покращити на відрізку $[-1, 1]$ порівняно з оцінкою (5.21) за рахунок іншого вибору вузлів інтерполяції неможливо.

Отже, вузли інтерполяції (5.20) є оптимальними на відрізку $[-1, 1]$.

У випадку інтерполяції на довільному відрізку $[a, b]$ лінійною заміною незалежної змінної

$$x = \frac{1}{2}((b-a)t + b + a), \quad t = \frac{1}{b-a}(2x - a - b) \quad (5.22)$$

відрізок $[a, b]$ переводиться у відрізок $[-1, 1]$. При цьому кореням многочлена Чебишева $T_{n+1}(x)$ відповідають точки

$$x_i = \frac{1}{2} \left((b-a) \cos \frac{(2i+1)\pi}{2n+2} + b + a \right), \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (5.23)$$

відрізка $[a, b]$, які будуть оптимальними вузлами інтерполяції на цьому відрізку.

Враховуючи формули (5.16), (5.19), (5.20), (5.22), (5.23) і властивість 4 многочленів Чебишева, одержуємо оцінку похибки інтерполяції на довільному відрізку $[a, b]$ при оптимальному виборі вузлів інтерполяції.

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}, \quad (5.24)$$

де $M_{n+1} = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|$.

Зауваження. Порівняємо оцінки похибок при апроксимації функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ многочленом Тейлора n -го степеня

$$Q(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad (5.25)$$

та інтерполяційним многочленом Лагранжа (5.7) з вузлами (5.23).

При побудові многочлена Тейлора (5.25) доцільно взяти $x_0 = \frac{a+b}{2}$. Тоді оцінка похибки многочлена Тейлора має вигляд:

$$|f(x) - Q(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}}, \quad (5.26)$$

тобто вона в 2^n разів більша від оцінки (5.24).

Крім того, похибка інтерполяційного многочлена розподілена більш рівномірно на відрізку $[a, b]$, ніж у многочлена Тейлора, і для побудови інтерполяційного многочлена не потрібно обчислювати похідних функції, а використовуються тільки значення цієї функції.

5.5. Скінченні різниці. Інтерполяційний многочлен Ньютона

Припустимо, що табличні значення аргументу x_0, x_1, \dots, x_n є рівновіддаленими, тобто утворюють арифметичну прогресію:

$$x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_0 + 2h, \quad \dots, \quad x_n = x_0 + nh. \quad (5.27)$$

Різниця h арифметичної прогресії називається кроком таблиці. Нехай задані значення функції $y = f(x)$ в точках x_0, x_1, \dots, x_n :

$$y_i = f(x_i), \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$

Складемо різниці значень функції $y = f(x)$.

$$\begin{aligned} \Delta y_0 &= y_1 - y_0 = f(x_0 + h) - f(x_0), \\ \Delta y_1 &= y_2 - y_1 = f(x_0 + 2h) - f(x_0 + h), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1} = f(x_0 + nh) - f(x_0 + (n-1)h).$$

Ці різниці називаються скінченними різницями першого порядку даної функції. За ними можна скласти скінченні різниці другого порядку

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0, \quad \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1, \quad \dots, \quad \Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2} \quad \text{і т.д.}$$

Скінченні різниці довільного порядку m обчислюються за формулою

$$\Delta^m y_i = \Delta^{m-1} y_{i+1} - \Delta^{m-1} y_i. \quad (5.29)$$

Формула (5.29) дає можливість послідовно визначити скінченні різниці різних порядків. Можна також записати співвідношення, які виражають скінченні різниці різних порядків через значення функції:

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0,$$

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - y_1 - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0,$$

$$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = y_3 - 2y_2 + y_1 - (y_2 - 2y_1 + y_0) = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0.$$

Неважко довести, що для будь-якого m

$$\Delta^m y_0 = y_m - m y_{m-1} + \frac{m(m-1)}{2!} y_{m-2} + \dots + (-1)^{m-1} m y_1 + (-1)^m y_0. \quad (5.30)$$

Аналогічну формулу можна записати для значення скінченної різниці в довільному вузлі x_i :

$$\Delta^m y_i = y_{m+i} - m y_{m+i-1} + \frac{m(m-1)}{2!} y_{m+i-2} + \dots + (-1)^{m-1} m y_{i+1} + (-1)^m y_i. \quad (5.31)$$

Наведемо основні властивості скінченних різниць.

1. Якщо C – стала величина, то $\Delta C = 0$.
2. $\Delta(C f(x)) = C \Delta f(x)$.
3. $\Delta(f_1(x) + f_2(x)) = \Delta f_1(x) + \Delta f_2(x)$.
4. $\Delta(x^n) = n h x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} h^2 x^{n-2} + \dots + n h^{n-1} x + h^n$.

Можна довести наступне твердження. Якщо $f(x)$ – многочлен степеня n із старшим членом $a_n x^n$, то для будь-якого $m < n$ скінченна різниця $\Delta^m f(x)$ є многочленом степеня $n - m$ із старшим членом $n(n-1) \dots (n-m+1) a_n h^m x^{n-m}$. Для $m = n$ маємо $\Delta^n f(x) = n! a_n h^n$, а для $m > n$ буде $\Delta^m f(x) = 0$.

Скінченні різниці доцільно записувати у формі таблиці.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$...
x_0	y_0	Δy_0			
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	
x_3	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_3$...	
x_4	y_4		
...	...				

Знайдемо інтерполяційний многочлен для функції $y = f(x)$ у випадку рівновіддалених вузлів (5.27). Визначимо цей многочлен в іншій формі, ніж інтерполяційний многочлен Лагранжа. Запишемо його у вигляді:

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}). \quad (5.31)$$

Використовуючи умову $P(x_i) = y_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), знайдемо коефіцієнти a_0, a_1, \dots, a_n цього многочлена й підставимо їх значення у вираз (5.31). Одержимо інтерполяційний многочлен $P(x)$ у вигляді

$$P(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h} (x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2} (x - x_0)(x - x_1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}). \quad (5.32)$$

Многочлен (5.32) називається інтерполяційним многочленом Ньютона.

Після деяких перетворень многочлен Ньютона (5.32) можна звести до многочлена Лагранжа (5.7), оскільки існує єдиний інтерполяційний многочлен $P(x)$ степеня n , для якого $P(x_i) = y_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$).

Відзначимо відмінність між формами запису інтерполяційних многочленів (5.7) та (5.32). Кожний доданок многочлена Лагранжа є многочленом степеня n і всі ці доданки рівноправні. Доданки многочлена Ньютона є многочленами, степені яких збільшуються, причому коефіцієнти при них – це послідовні скінченні різниці, поділені на факторіали. Оскільки послідовні скінченні різниці досить швидко зменшуються, то є можливість не враховувати у формулі Ньютона (5.32) доданків, коефіцієнти при яких дуже малі.

Для практичного використання формулу Ньютона (5.32) зазвичай записують у дещо іншому вигляді.

Введемо нову змінну $t = \frac{x - x_0}{h}$, тобто $x = x_0 + th$. Тоді

$$\frac{x - x_1}{h} = \frac{x - x_0 - h}{h} = t - 1, \quad \frac{x - x_2}{h} = t - 2, \quad \dots, \quad \frac{x - x_{n-1}}{h} = t - n + 1$$

і формулу (5.32) запишемо таким чином:

$$P(x_0 + th) = y_0 + \frac{t}{1!} \Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots + \frac{t(t-1) \dots (t-n+1)}{n!} \Delta^n y_0. \quad (5.33)$$

Цей многочлен називається першим інтерполяційним многочленом Ньютона для інтерполяції вперед.

Формулою (5.33) доцільно користуватися при обчисленні значень функції $f(x)$ для значень аргументу, розміщених між x_0 та x_1 , тобто для $t < 1$. Якщо $x_i < x < x_{i+1}$, то потрібно прийняти за x_0 вузол x_i , тобто застосувати формулу

$$P(x_i + th) = y_i + \frac{t}{1!} \Delta y_i + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_i + \dots + \frac{t(t-1) \dots (t-n+1)}{n!} \Delta^n y_i, \quad (5.34)$$

де $t = \frac{x - x_i}{h}$.

Формули (5.33) та (5.34) використовують для обчислення значень функції в точках, які містяться в лівій частині заданого інтервалу зміни аргументу x .

Для інтерполяції в правій частині цього інтервалу застосовується інша формула.

Позначимо $\frac{x - x_n}{h} = t$, тобто $x = x_n + th$ ($t < 0$).

Інтерполяційний многочлен в цьому випадку має вигляд:

$$P(x_n + th) = y_n + \frac{t}{1!} \Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 y_{n-2} + \dots + \frac{t(t+1) \dots (t+n-1)}{n!} \Delta^n y_0. \quad (5.35)$$

Цей многочлен називається другим інтерполяційним многочленом Ньютона для інтерполяції назад.

Формулою (5.35) доцільно користуватися для значень x , що задовольняють умову $x_{n-1} < x < x_n$, тобто для $|t| < 1$. Якщо, наприклад, $x_{n-2} < x < x_{n-1}$, то в цій формулі потрібно замість x_n взяти x_{n-1} .

Зауваження. Для оцінки похибок інтерполяційних многочленів Ньютона (5.33) та (5.35) на практиці користуються наступними наближеними формулами для їх залишкових членів:

$$R_n^{(I)}(x) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_0}{(n+1)!} t(t-1) \dots (t-n), \quad (5.36)$$

$$R_n^{(II)}(x) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_n}{(n+1)!} t(t+1) \dots (t+n). \quad (5.37)$$

При практичних обчисленнях за інтерполяційними формулами Ньютона (5.33) і (5.35) зупиняються на доданках, що містять такі скінченні різниці, які в межах заданої точності можна вважати сталими.

Приклад 5.2. Функція $y = f(x)$ задана таблицею

x_i	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1
y_i	2,0617	2,7462	3,4976	4,3282	5,2515

За допомогою інтерполяційних многочленів Ньютона обчислити наближені значення функції $y = f(x)$ в точках: 1) $x = 0,4$; 2) $x = 0,95$.

Розв'язання. Складемо таблицю скінченних різниць.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0,3	<u>2,0617</u>	<u>0,6845</u>			
0,5	2,7462	0,7514	<u>0,0669</u>		
0,7	3,4976	0,8306	0,0792	<u>0,0123</u>	
0,9	4,3282	0,9233	0,0927	<u>0,0135</u>	<u>0,0012</u>
1,1	<u>5,2515</u>				

1. Значення $f(0,4)$ обчислимо за допомогою першого інтерполяційного многочлена Ньютона для інтерполяції вперед (5.33). За умовою задачі

$h = 0,2$. Обчислимо значення $t = \frac{x - x_0}{h}$; $t = \frac{0,4 - 0,3}{0,2} = 0,5$. Запишемо перший інтерполяційний многочлен Ньютона, підставивши в формулу (5.33) значення $y_0, \Delta y_0, \dots, \Delta^4 y_0$, які у складеній таблиці підкреслені суцільною лінією.

$$\begin{aligned}
 P(0,3 + 0,2t) &= 2,0617 + 0,6845t + 0,0669 \frac{t(t-1)}{2!} + \\
 &\quad + 0,0123 \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} + 0,0012 \frac{t(t-1)(t-2)(t-3)}{4!}. \\
 P(0,4) &= 2,0617 + 0,6845 \cdot 0,5 + \frac{0,0669}{2} \cdot 0,5(-0,5) + \\
 &\quad + \frac{0,0123}{6} \cdot 0,5(-0,5)(-1,5) + \frac{0,0012}{24} \cdot 0,5 \cdot (-0,5)(-1,5)(-2,5) = \\
 &= 2,0617 + 0,34225 - 0,00836 + 0,00077 - 0,00005 = 2,41311 \approx 2,4131.
 \end{aligned}$$

$$f(0,4) \approx P(0,4) = 2,4131.$$

2. Значення $f(0,95)$ обчислимо за допомогою другого інтерполяційного многочлена Ньютона для інтерполяції назад.

$$t = \frac{x - x_n}{h} = \frac{0,95 - 1,1}{0,2} = -0,75.$$

Запишемо цей многочлен, підставивши в формулу (5.35) значення $y_4, \Delta y_3, \Delta^2 y_2, \Delta^3 y_1, \Delta^4 y_0$, які в таблиці підкреслені пунктирною лінією.

$$\begin{aligned}
 P(1,1 + 0,2t) &= 5,2515 + 0,9233 \cdot t + \frac{0,0927}{2!} t(t+1) + \\
 &\quad + \frac{0,0135}{3!} t(t+1)(t+2) + \frac{0,0012}{4!} t(t+1)(t+2)(t+3).
 \end{aligned}$$

Підставивши значення $t = -0,75$, одержимо $P(0,95) = 4,5498$.

Отже, $f(0,95) \approx P(0,95) = 4,5498$.

5.6. Поділені різниці. Інтерполяційний многочлен Ньютона для нерівновіддалених значень аргументу

Нехай функція $y = f(x)$ задана таблицею: $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ – значення аргументу, $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ – відповідні значення функції, різниці $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \neq 0$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) і не рівні між собою.

Відношення $\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$ називають поділеними різницями першого порядку і позначають $f(x_i; x_{i+1})$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$).

Наприклад, $f(x_0; x_1) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$, $f(x_1; x_2) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ і т.д.

Поділені різниці другого порядку визначають за формулами:

$$f(x_i; x_{i+1}; x_{i+2}) = \frac{f(x_{i+1}; x_{i+2}) - f(x_i; x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i}.$$

Аналогічно визначають поділені різниці третього порядку:

$$f(x_i; x_{i+1}; x_{i+2}; x_{i+3}) = \frac{f(x_{i+1}; x_{i+2}; x_{i+3}) - f(x_i; x_{i+1}; x_{i+2})}{x_{i+3} - x_i} \text{ і т.д.}$$

При обчисленнях поділені різниці записують у таблицю.

Наведемо основні властивості поділених різниць.

1. Поділені різниці є симетричними функціями своїх аргументів.
2. Якщо $x_i = x_0 + ih$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), тобто значення аргументу рівновіддалені, то

$$f(x_0; x_1; \dots; x_n) = \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n}.$$

3. Поділені різниці n -го порядку від многочлена степеня n приймають сталі значення, а поділені різниці вищих від n порядків дорівнюють нулю.

Користуючись поняттям поділених різниць, інтерполяційний многочлен $P(x)$, який задовольняє умови $P(x_i) = y_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$), можна представити у вигляді, аналогічному до інтерполяційного многочлена Ньютона (5.32):

$$P(x) = y_0 + f(x_0; x_1)(x - x_0) + f(x_0; x_1; x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \dots + f(x_0; x_1; \dots; x_n)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}). \quad (5.38)$$

Цей многочлен називається інтерполяційним многочленом Ньютона для нерівновіддалених значень аргументу.

Приклад 5.3. Знайти наближене значення функції $y = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$ в точці $x = 2,35$ за допомогою інтерполяційного многочлена четвертого степеня з оптимально вибраними вузлами інтерполяції на відрізку $[2, 4]$ з використанням поділених різниць. Оцінити похибку одержаного значення.

Розв'язання. Обчислимо вузли інтерполяції за формулою (5.23). Оскільки за умовою задачі $n = 4$, $a = 2$, $b = 4$, то ця формула матиме вигляд:

$$x_i = \frac{1}{2} \left(2 \cos \frac{(2i+1)\pi}{10} + 6 \right); \quad (i = 0, 1, 2, 3, 4).$$

$$x_0 = \frac{1}{2} \left(2 \cos \frac{\pi}{10} + 6 \right) = 3,951057; \quad x_1 = \frac{1}{2} \left(2 \cos \frac{3\pi}{10} + 6 \right) = 3,587786;$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left(2 \cos \frac{\pi}{2} + 6 \right) = 3; \quad x_3 = \frac{1}{2} \left(2 \cos \frac{7\pi}{10} + 6 \right) = 2,412216;$$

$$x_4 = \frac{1}{2} \left(2 \cos \frac{9\pi}{10} + 6 \right) = 2,048944.$$

Обчислимо значення функції $y = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$ в цих вузлах.

$$y_0 = 0,356833; \quad y_1 = 0,383601; \quad y_2 = 0,438691;$$

$$y_3 = 0,516640; \quad y_4 = 0,583919.$$

Знайдемо поділені різниці та запишемо їх у таблицю.

x	y	Поділені різниці			
		1-го порядку	2-го порядку	3-го порядку	4-го порядку
3,951057	<u>0,356833</u>				
3,587786	0,383601	<u>-0,073686</u>			
3	0,438691	-0,093725	<u>0,021070</u>		
2,412216	0,516640	-0,132615	0,033082	<u>-0,007806</u>	
2,048944	0,583919	-0,185203	0,055294	-0,014434	<u>0,003485</u>

Запишемо інтерполяційний многочлен (5.38) для даної функції при $n = 4$:

$$P(x) = 0,356833 - 0,073686(x - 3,951057) +$$

$$+ 0,021070(x - 3,951057)(x - 3,587786) -$$

$$- 0,007806(x - 3,951057)(x - 3,587786)(x - 3) +$$

$$+ 0,003485(x - 3,951057)(x - 3,587786)(x - 3)(x - 2,412216).$$

Підставивши $x = 2,35$, одержимо:

$$P(2,35) = 0,356833 + 0,117975 + 0,041756 + 0,010055 + 0,000279 = 0,526898.$$

Оцінимо похибку інтерполяції за формулою (5.24). Знайдемо $f^{(5)}(x)$ та M_5 .

$$f'(x) = -\frac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}}, \quad f''(x) = \frac{26}{16}x^{-\frac{11}{4}}, \quad \dots, \quad f^{(5)}(x) = -64,29199x^{-\frac{23}{4}}.$$

$$M_5 = \max_{2 \leq x \leq 4} |f^{(5)}(x)| = 64,3 \cdot 2^{-\frac{23}{4}} = 1,19472.$$

Отже, абсолютна похибка $|R_4| \leq \frac{M_5}{5!} \frac{2^5}{2^9} = \frac{M_5}{5! \cdot 2^4} = 0,00063$;

відносна похибка $\delta = 0,0012$.

Зауваження. Теоретична оцінка похибки за формулою (5.24) часто виявляється завищеною. Значення даної функції з шістьма знаками після коми $f(2,35) = 0,526865$. Порівнюючи його із значенням інтерполяційного многочлена $P(2,35) = 0,526898$, робимо висновок, що насправді абсолютна похибка інтерполяції дорівнює 0,000033 і в значенні $P(2,35) = 0,526898$ чотири знаки після коми вірні.

5.7. Інтерполяція сплайнами

Нехай відрізок $[a, b]$ поділений на N рівних часткових відрізків $[x_i, x_{i+1}]$, де $x_i = a + ih$ ($i = 0, 1, \dots, N-1$), $x_N = b$, $h = \frac{b-a}{N}$.

Сплайном називається функція, яка разом з кількома похідними неперервна на всьому заданому відрізку $[a, b]$, а на кожному частковому відрізку $[x_i, x_{i+1}]$ є деяким алгебраїчним многочленом. Найбільший на усіх часткових відрізках степінь многочлена називається степенем сплайна, а різниця між степенем сплайна та порядком найвищої неперервної на $[a, b]$ похідної – дефектом сплайна.

На практиці найчастіше застосовуються сплайни третього степеня, які мають на $[a, b]$ неперервну принаймні першу похідну. Ці сплайни називаються кубічними і позначаються $S_3(x)$. Величина $m_i = S_3'(x_i)$ називається нахилом сплайна в точці x_i .

Неважко переконатися, що кубічний сплайн $S_3(x)$, який приймає у вузлах x_i та x_{i+1} відповідно значення y_i та y_{i+1} , має на частковому відрізку $[x_i, x_{i+1}]$ вигляд:

$$S_3(x) = \frac{1}{h^3} (x_{i+1} - x)^2 (2(x - x_i) + h) y_i + \frac{1}{h^3} (x - x_i)^2 (2(x_{i+1} - x) + h) y_{i+1} + \frac{1}{h^2} (x_{i+1} - x)^2 (x - x_i) m_i + \frac{1}{h^2} (x - x_i)^2 (x - x_{i+1}) m_{i+1}. \quad (5.39)$$

Справді, легко перевірити, що $S_3(x_i) = y_i$, $S_3(x_{i+1}) = y_{i+1}$. Крім того, після простих обчислень отримуємо $S_3'(x_i) = m_i$, $S_3'(x_{i+1}) = m_{i+1}$.

Можна також довести, що будь-який алгебраїчний многочлен третього степеня, який в точках x_i, x_{i+1} приймає відповідно значення y_i, y_{i+1} і похідна якого в цих точках дорівнює відповідно m_i та m_{i+1} , співпадає з многочленом (5.39).

Отже, щоб визначити кубічний сплайн $S_3(x)$ на всьому відрізку $[a, b]$, потрібно задати у вузлах x_i його значення y_i та нахили m_i ($i = 0, 1, 2, \dots, N$).

Кубічний сплайн, який у вузлах x_i приймає такі ж значення y_i , як і деяка функція $y = f(x)$, називається інтерполяційним сплайном. Він застосовується для наближення на відрізку $[a, b]$ функції $y = f(x)$ разом з кількома її похідними.

Нахили інтерполяційного кубічного сплайна можна задати наступними способами.

1. Приймають:

$$m_i = \frac{1}{2h} (y_{i+1} - y_{i-1}), \quad (i = 1, 2, \dots, N-1), \quad (5.40)$$

$$m_0 = \frac{1}{2h} (4y_1 - y_2 - 3y_0), \quad m_N = \frac{1}{2h} (3y_N + y_{N-2} - 4y_{N-1}). \quad (5.41)$$

2. Якщо відомі значення похідної $f'(x)$ в точках x_i : $f'(x_i) = y'_i$, то приймають $m_i = y'_i$ ($i = 0, 1, \dots, N$).

Ці способи називають локальними, оскільки за їх допомогою будують сплайн окремо на кожному частковому відрізку $[x_i, x_{i+1}]$. При цьому у вузлах x_i зберігається неперервність першої похідної $S'_3(x)$, але не гарантується неперервність другої похідної $S''_3(x)$. Тому дефект такого сплайна зазвичай дорівнює двом.

Сплайни зручніші для апроксимації функції на великому проміжку (при великих значення N), ніж, наприклад, інтерполяційні многочлени. Апроксимація функції на великому проміжку одним многочленом для досягнення заданої точності вимагає значного збільшення його степеня, що на практиці не завжди прийнятно. Розбиття заданого відрізка $[a, b]$ на кілька частин з побудовою на кожній частині самостійного інтерполяційного многочлена незручне, оскільки в точках стикування перша похідна двох сусідніх інтерполяційних многочленів буде мати розрив. Можливо, що навіть не співпадуть у точці стикування значення інтерполяційних многочленів, якщо ця точка стикування не буде їх спільним вузлом.

Приклад 5.4. Функція $y = f(x)$ задана таблицею

i	0	1	2	3	4
x_i	0,25	1,25	2,25	3,25	4,25
y_i	-1,3546	0,5428	1,6532	1,1722	0,7815

Побудувати на відрізку $[0,25; 4,25]$ інтерполяційний сплайн третього степеня для функції $y = f(x)$ і знайти за його допомогою наближене значення функції при $x = 1,76$.

Розв'язання. Обчислимо нахили інтерполяційного сплайна за формулами (5.40), (5.41). За умовою задачі $h = 1$.

$$m_0 = \frac{1}{2h} (4y_1 - y_2 - 3y_0) = 0,5(4 \cdot 0,5428 - 1,6532 + 3 \cdot 1,3546) = 2,2909,$$

$$m_1 = \frac{1}{2h} (y_2 - y_0) = 0,5(1,6532 + 1,3546) = 1,5039,$$

$$m_2 = \frac{1}{2h} (y_3 - y_1) = 0,5(1,1722 - 0,5428) = 0,3147,$$

$$m_3 = \frac{1}{2h} (y_4 - y_2) = 0,5(0,7815 - 1,6532) = -0,4358,$$

$$m_4 = \frac{1}{2h} (3y_4 + y_2 - 4y_3) = 0,5(3 \cdot 0,7815 + 1,6532 - 4 \cdot 1,1722) = -0,3456.$$

За формулою (5.39) побудуємо інтерполяційний кубічний сплайн на кожному частковому відрізку.

1. $x \in [0,25; 1,25]$.

$$S_3(x) = (1,25 - x)^2 (2(x - 0,25) + 1) \cdot (-1,3546) + \\ + (x - 0,25)^2 (2(1,25 - x) + 1) \cdot 0,5428 + (1,25 - x)^2 (x - 0,25) \cdot 2,2909 + \\ + (x - 0,25)^2 (x - 1,25) \cdot 1,5039 = -0,3935x^2 + 2,4876x - 1,9519.$$

2. $x \in [1,25; 2,25]$.

$$S_3(x) = (2,25 - x)^2 (2(x - 1,25) + 1) \cdot 0,5428 + (x - 1,25)^2 (2(2,25 - x) + 1) \cdot 1,6532 + \\ + (2,25 - x)^2 (x - 1,25) \cdot 1,5039 + (x - 1,25)^2 (x - 2,25) \cdot 0,3147 = \\ = -0,4022x^3 + 1,5168x^2 - 0,4030x - 0,5381.$$

Оскільки значення $x = 1,76$ міститься на частковому відрізку $[1,25; 2,25]$, то за допомогою одержаного на цьому відрізку сплайна обчислимо $f(1,76)$:

$$f(1,76) \approx S_3(1,76) = -0,4022 \cdot 1,76^3 + 1,5168 \cdot 1,76^2 - 0,4030 \cdot 1,76 - 0,5381 = 1,2583.$$

Отже, $f(1,76) \approx 1,2583$.

Аналогічно, як на двох перших часткових відрізках, будуємо інтерполяційний кубічний сплайн на часткових відрізках $[2,25; 3,25]$ та $[3,25; 4,25]$.

5.8. Метод найменших квадратів

Нехай, вивчаючи невідому функціональну залежність між x та y , ми одержали в результаті серії експериментів таблицю значень

i	0	1	...	n
x_i	x_0	x_1	...	x_n
y_i	y_0	y_1	...	y_n

Завдання полягає в тому, щоб знайти наближену функціональну залежність $y = f(x)$, значення якої при $x = x_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$) мало відрізняються від дослідних даних y_i . Наближена функціональна залежність, що одержана на основі експериментальних даних, називається емпіричною формулою.

Побудова емпіричної формули складається з двох частин: підбору загального вигляду цієї формули та визначення значень параметрів, що містяться в цій формулі. Найчастіше вигляд емпіричної формули визначається з геометричних міркувань: у прямокутній декартовій системі координат xOy будують експериментальні точки й приблизно визначають загальний вигляд

Система (5.50) набуде вигляду:

$$5a_0 + 15a_1 + 55a_2 = 11,4,$$

$$15a_0 + 55a_1 + 225a_2 = 38,5,$$

$$55a_0 + 225a_1 + 979a_2 = 159,1.$$

Розв'язавши цю систему, наприклад, методом Гаусса, отримаємо: $a_0 = 4,91$; $a_1 = -2,93$; $a_2 = 0,56$. Таким чином, для заданої таблицею функції $y = f(x)$ ми одержали такий апроксимуючий многочлен другого степеня:

$$y \approx 4,91 - 2,93x + 0,56x^2.$$

Обчислимо відносні похибки одержаної апроксимації в заданих точках, тобто знайдемо значення

$$\delta_i = \left| \frac{\varepsilon_i}{y_i} \right| = \left| \frac{\varphi(x_i) - y_i}{y_i} \right|.$$

Результати обчислень запишемо у таблицю:

i	x_i	y_i	$\varphi(x_i)$	ε_i	δ_i
0	1	2,6	2,54	-0,06	0,023
1	2	1,2	1,29	0,09	0,075
2	3	1,1	1,16	0,06	0,055
3	4	2,3	2,15	-0,15	0,065
4	5	4,2	4,26	0,06	0,014

5.9. Завдання для самостійної роботи

1. Знайти наближене значення функції $y = f(x)$ при заданому значенні x , якщо відома таблиця її значень, за допомогою інтерполяційного многочлена Лагранжа: а) першого степеня; б) другого степеня; в) четвертого степеня. У випадку в) застосувати схему Ейткена.

1.1.

x_i	2,1	3,0	4,3	5,3	6,4
y_i	3,3	2,4	3,5	4,9	5,8

$$x = 5,15;$$

1.2.

x_i	1,2	2,0	2,9	4,2	5,2
y_i	2,3	1,4	2,7	3,9	4,6

$$x = 1,85;$$

1.3.

x_i	1,5	2,4	3,2	4,3	5,5
y_i	4,9	3,9	2,4	0,8	1,3

$$x = 2,34;$$

1.4.

x_i	1,1	1,9	2,8	4,2	5,3
y_i	9,5	8,8	7,6	6,3	7,2

$x = 2,25;$

1.5.

x_i	2,3	3,1	4,0	5,2	6,3
y_i	3,4	2,4	3,7	4,9	5,6

$x = 3,48.$

2. Обчислити у вказаних точках наближені значення функції $y = f(x)$, яка задана таблицею, за допомогою інтерполяційних многочленів Ньютона.

2.1.

x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8
y_i	1,2536	2,6417	3,8574	4,8879	6,1583

$x = 0,1; x = 0,7;$

2.2.

x_i	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0
y_i	2,0845	3,6481	5,2793	7,0348	8,9124

$x = 0,5; x = 1,8;$

2.3.

x_i	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
y_i	3,1728	4,8573	6,0514	8,4327	12,9145

$x = 0,3; x = 0,85;$

2.4.

x_i	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
y_i	1,3725	2,5652	3,8453	5,0127	6,4281

$x = 2,3; x = 2,9;$

2.5.

x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8
y_i	7,0581	5,9874	4,8672	3,7417	2,5628

$x = 0,1; x = 0,65.$

3. Знайти наближене значення функції $y = f(x)$ в точці x , за допомогою інтерполяції 4-го порядку, використавши поділені різниці по оптимально вибраних вузлах на відрізку $[a; b]$. Оцінити похибку.

3.1. $f(x) = \lg x; [a; b] = [2; 5]; x = 4,23;$

3.2. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}; [a; b] = [4; 6]; x = 5,17;$

3.3. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + x$; $[a; b] = [2; 4]$; $x = 3,76$;

3.4. $f(x) = \ln x + x$; $[a; b] = [4; 6]$; $x = 4,45$;

3.5. $f(x) = x - \lg x$; $[a; b] = [2; 5]$; $x = 3,48$.

4. За даною таблицею значень функції побудувати методом найменших квадратів многочлени: а) першого степеня; б) другого степеня. У випадку б) знайти наближене значення функції в точці x .

4.1. а)

x_i	1	3	5	7	9
y_i	2,5	1,8	3,1	4,9	6,1

б)

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	5,3	3,8	7,2	14,3	24,6	39,2

$x = 0,35$;

4.2. а)

x_i	1	2	3	4	5
y_i	3,3	4,3	2,9	1,1	1,4

б)

x_i	-2	-1	0	1	2	3
y_i	-9,5	-2,6	1,7	4,8	5,7	5,3

$x = 0,64$;

4.3. а)

x_i	1	2	3	4	5
y_i	3,5	4,5	2,9	1,5	1,8

б)

x_i	-1	0	1	2	3	4
y_i	-3,2	-2,3	0,7	3,8	8,2	14,3

$x = -0,39$;

4.4. а)

x_i	2	4	6	8	10
y_i	4,5	7,1	8,1	7,5	8,5

б)

x_i	-1	0	1	2	3	4
y_i	5,6	3,3	2,2	2,8	5,7	11,5

$x = 0,56$;

4.5. а)

x_i	2	3	4	5	6
y_i	5,5	6,5	5,1	3,2	3,6

б)

x_i	-2	-1	0	1	2	3
y_i	16,5	7,2	1,3	-1,2	0,9	7,4

$x = -1,24$.

5. Скласти на відрізку $[a; b]$ інтерполяційний кубічний сплайн для функції $y = f(x)$, заданої на цьому відрізку таблицею. Знайти наближене значення функції в точці x .

5.1.

x_i	-1,34	-0,84	-0,34	0,16	0,66
y_i	3,7524	5,2118	3,1729	1,9118	0,6375

$x = -0,57$;

5.2.

x_i	0,85	1,85	2,85	3,85	4,85
y_i	-2,4496	-1,1536	0,5429	1,7236	1,1392

$x = 2,46$;

5.3.

x_i	0,25	1,00	1,75	2,50	3,25
y_i	-1,3017	1,2873	2,5398	0,9736	-0,2537

$x = 1,53$;

5.4.

x_i	-1,26	-0,26	0,74	1,74	2,74
y_i	0,4815	1,2519	2,7481	3,6814	4,8825

$x = 1,38$;

5.5.

x_i	-1,75	-0,75	0,25	1,25	2,25
y_i	-2,4557	0,7531	1,7643	1,1514	0,6584

$x = 1,83$.

6. За допомогою інтерполяційних формул обчислити у вказаних точках похідні першого та другого порядків функції, заданої таблицею.

6.1.

x_i	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5
y_i	3,1487	3,5138	3,9596	4,5042	5,1693	5,9817

a) $x = 1,35$; б) $x = 0,5$;

6.2.

x_i	2,1	2,4	2,7	3,0	3,3	3,6
y_i	1,7419	1,8755	1,9933	2,0986	2,1939	2,2809

a) $x = 2,25$; б) $x = 3,3$;

6.3.

x_i	1,1	1,5	1,9	2,3	2,7	3,1
y_i	1,9535	1,8165	1,7255	1,6594	1,6086	1,5680

a) $x = 1,1$; б) $x = 2,45$;

6.4.

x_i	1,3	1,6	1,9	2,2	2,5	2,8
y_i	3,3692	3,8250	4,3263	4,8545	5,4001	5,9571

a) $x = 1,65$; б) $x = 2,8$;

6.5.

x_i	1,2	1,6	2,0	2,4	2,8	3,2
y_i	-0,3667	-0,9750	-1,5002	-1,9833	-2,4429	-2,8875

a) $x = 1,6$; б) $x = 2,75$.

РОЗДІЛ 6

ЧИСЛОВЕ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

6.1. Апроксимація похідних. Похибка числового диференціювання

Як відомо, похідною функції $y = f(x)$ в деякій точці x називається границя відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx при прямуванні Δx до нуля:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (6.1)$$

Зазвичай для обчислення похідних у випадку аналітичного задання функцій використовують готові формули. Проте на практиці функція $y = f(x)$ може бути задана у вигляді таблиці значень і тоді похідну обчислюють наближено, користуючись формулою (6.1).

Якщо припустити, що приріст Δx дорівнює деякому скінченному досить малому за модулем числу, то одержимо наближену формулу для обчислення похідної:

$$y' \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (6.2)$$

Це співвідношення називається апроксимацією (наближенням) похідної за допомогою скінченних різниць.

Розглянемо наближення похідної для функції $y = f(x)$, яка задана таблицею. Нехай крок таблиці, тобто різниця між двома сусідніми значеннями аргументу, сталий і дорівнює h . Отже, табличні значення аргументу $x_i = x_0 + ih$, ($i = 0, 1, \dots, n$). Відповідні значення функції позначимо y_0, y_1, \dots, y_n .

Обчислимо похідну y'_1 даної функції в точці x_1 . Залежно від способу обчислення скінченних різниць одержимо різні формули для y'_1 :

$$\Delta y = y_1 - y_0, \quad \Delta x = h, \quad y'_1 \approx \frac{y_1 - y_0}{h}; \quad (6.3)$$

$$\Delta y = y_2 - y_1, \quad \Delta x = h, \quad y'_1 \approx \frac{y_2 - y_1}{h}; \quad (6.4)$$

$$\Delta y = y_2 - y_0, \quad \Delta x = 2h, \quad y'_1 = \frac{y_2 - y_0}{2h}. \quad (6.5)$$

Формула (6.3) записана за допомогою лівих різниць, (6.4) – за допомогою правих різниць, (6.5) – за допомогою центральних різниць.

Можна обчислити також похідні вищих порядків. Наприклад,

$$y''_1 \approx \frac{y'_2 - y'_1}{h} \approx \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2}. \quad (6.6)$$

Отже, за формулою (6.2) можна знайти наближені значення похідних будь-якого порядку. Розглянемо питання про точність одержаних значень.

Наблизимо функцію $f(x)$ деякою функцією $\varphi(x)$:

$$f(x) = \varphi(x) + R(x). \quad (6.7)$$

За апроксимуючу функцію можна взяти частинну суму ряду або інтерполяційну функцію. Тоді похибка апроксимації $R(x)$ визначається залишковим членом ряду або інтерполяційної формули.

Апроксимуючу функцію $\varphi(x)$ можна використати для наближеного обчислення похідних функції $f(x)$. Диференціюючи рівність (6.7) k разів, отримаємо:

$$f^{(k)}(x) = \varphi^{(k)}(x) + R^{(k)}(x) \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

За наближене значення похідної порядку k функції $f(x)$ можна взяти значення відповідної похідної функції $\varphi(x)$, тобто $f^{(k)}(x) \approx \varphi^{(k)}(x)$. Величина $R^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - \varphi^{(k)}(x)$ називається похибкою апроксимації похідної.

Якщо функція задана таблицею з кроком h , то ця похибка залежить від h . Нехай для похибки $R^{(k)}(x)$ виконується умова $|R^{(k)}(x)| \leq Ah^m$, де A – деяке додатне число. Тоді цю похибку записують у вигляді $O(h^m)$. Показник степеня m називається порядком похибки апроксимації. При цьому припускається, що значення кроку менше від одиниці.

Оцінку похибки апроксимації похідної можна одержати за допомогою ряду Тейлора:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x) \Delta x + \frac{f''(x)}{2!} \Delta x^2 + \frac{f'''(x)}{3!} \Delta x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \Delta x^n + \dots \quad (6.8)$$

Підставимо у формулу (6.8) $x = x_1$, $\Delta x = -h$ і зупинимося на доданку порядку h :

$$y_0 = y_1 - y_1' h + O(h^2).$$

Звідси одержимо $y_1' = \frac{y_1 - y_0}{h} + O(h)$, тобто формула (6.3) має похибку першого порядку. Таку ж похибку має формула (6.4).

Підставляючи у формулу (6.8) $x = x_1$, $\Delta x = -h$ і $\Delta x = h$, отримаємо:

$$y_0 = y_1 - y_1' h + \frac{y_1''}{2!} h^2 - \frac{y_1'''}{3!} h^3 + O(h^4), \quad (6.9)$$

$$y_2 = y_1 + y_1' h + \frac{y_1''}{2!} h^2 + \frac{y_1'''}{3!} h^3 + O(h^4).$$

Віднімаючи від другої рівності першу, одержимо:

$$y_1' = \frac{y_2 - y_0}{2h} + O(h^2),$$

тобто формула (6.5) має похибку другого порядку. Додаючи рівності (6.9), отримаємо:

$$y_1'' = \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{h^2} + O(h^2),$$

тобто формула (6.6) також має другий порядок точності.

6.2. Наближене обчислення похідних за допомогою інтерполяційних многочленів

Нехай функція $f(x)$ задана таблицею зі сталим кроком h : $y_i = f(x_i)$, $x_i = x_0 + ih$ ($i = 0, 1, \dots, n$).

Складемо для цієї функції інтерполяційний многочлен Ньютона для інтерполяції вперед (5.33):

$$P(x_0 + th) = y_0 + \frac{t}{1!} \Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots + \frac{t(t-1) \dots (t-n+1)}{n!} \Delta^n y_0,$$

де $t = \frac{x - x_0}{h}$.

Диференціюючи цей многочлен по змінній x , одержимо:

$$\frac{dP}{dx} = \frac{dP}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{h} \frac{dP}{dt};$$

$$\frac{d^2P}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{h} \frac{dP}{dt} \right) \frac{dt}{dx} = \frac{1}{h^2} \frac{d^2P}{dt^2} \quad \text{і т.д.}$$

Приймаючи $y'(x) \approx \frac{dP}{dx}$, $y''(x) \approx \frac{d^2P}{dx^2}$ і т.д., отримуємо формули для

наближеного обчислення похідних будь-якого порядку. Запишемо ці формули для похідних першого та другого порядків:

$$y'(x) \approx \frac{1}{h} \left(\Delta y_0 + \frac{2t-1}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{3t^2-6t+2}{3!} \Delta^3 y_0 + \frac{4t^3-18t^2+22t-6}{4!} \Delta^4 y_0 + \frac{5t^4-40t^3+105t^2-100t+24}{5!} \Delta^5 y_0 + \dots \right), \quad (6.10)$$

$$y''(x) \approx \frac{1}{h^2} \left(\Delta^2 y_0 + (t-1) \Delta^3 y_0 + \frac{12t^2-36t+22}{4!} \Delta^4 y_0 + \frac{20t^3-120t^2+210t-100}{5!} \Delta^5 y_0 + \dots \right). \quad (6.11)$$

З формул (6.10) та (6.11) при $t=0$ отримуємо формули для обчислення похідних y' та y'' у вузлі x_0 :

$$y'(x_0) \approx \frac{1}{h} \left(\Delta y_0 - \frac{1}{2} \Delta^2 y_0 + \frac{1}{3} \Delta^3 y_0 - \frac{1}{4} \Delta^4 y_0 + \frac{1}{5} \Delta^5 y_0 - \dots \right), \quad (6.12)$$

$$y''(x_0) \approx \frac{1}{h^2} \left(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12} \Delta^4 y_0 - \frac{5}{6} \Delta^5 y_0 + \dots \right). \quad (6.13)$$

Зауважимо, що за формулами (6.12) і (6.13) можна обчислювати значення y' та y'' в інших вузлах лівої частини інтервалу зміни аргументу x , оскільки кожний такий вузол можна вважати початковим.

Складемо для заданої функції інтерполяційний многочлен Ньютона для інтерполяції назад (5.35):

$$P(x_n + th) = y_n + \frac{t}{1!} \Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 y_{n-2} + \dots + \frac{t(t+1) \dots (t+n-1)}{n!} \Delta^n y_0,$$

де $t = \frac{x - x_n}{h}$.

Аналогічно, як і у попередньому випадку, отримаємо формули для наближеного обчислення похідних в точках, які містяться в правій частині інтервалу зміни аргументу x :

$$y'(x) \approx \frac{1}{h} \left(\Delta y_{n-1} + \frac{2t+1}{2!} \Delta^2 y_{n-2} + \frac{3t^2+6t+2}{3!} \Delta^3 y_{n-3} + \right. \quad (6.14)$$

$$\left. + \frac{4t^3+18t^2+22t+6}{4!} \Delta^4 y_{n-4} + \frac{5t^4+40t^3+105t^2+100t+24}{5!} \Delta^5 y_{n-5} + \dots \right),$$

$$y''(x) \approx \frac{1}{h^2} \left(\Delta^2 y_{n-2} + (t+1) \Delta^3 y_{n-3} + \frac{12t^2+36t+22}{4!} \Delta^4 y_{n-4} + \right. \quad (6.15)$$

$$\left. + \frac{20t^3+120t^2+210t+100}{5!} \Delta^5 y_{n-5} + \dots \right).$$

При $t = 0$ з формул (6.14) та (6.15) одержуємо:

$$y'(x_n) \approx \frac{1}{h} \left(\Delta y_{n-1} + \frac{1}{2} \Delta^2 y_{n-2} + \frac{1}{3} \Delta^3 y_{n-3} + \frac{1}{4} \Delta^4 y_{n-4} + \frac{1}{5} \Delta^5 y_{n-5} + \dots \right), \quad (6.16)$$

$$y''(x_n) \approx \frac{1}{h^2} \left(\Delta^2 y_{n-2} + \Delta^3 y_{n-3} + \frac{11}{12} \Delta^4 y_{n-4} + \frac{5}{6} \Delta^5 y_{n-5} + \dots \right). \quad (6.17)$$

За формулами (6.16) та (6.17) можна обчислювати значення y' та y'' в інших вузлах правої частини інтервалу зміни аргументу x .

Приклад 6.1. Функція $y = f(x)$ задана таблицею з кроком $h = 0,2$.

x_i	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8
y_i	0,3894	0,4794	0,5646	0,6442	0,7174	0,7833

За допомогою інтерполяційних формул обчислити:

а) $y'(1,68)$; б) $y'(0,8)$; в) $y''(0,95)$; г) $y''(1,6)$.

Розв'язання. Складемо таблицю скінченних різниць.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0,8	0,3894	0,0900				
1,0	0,4794	0,0852	- 0,0048			
1,2	0,5646	0,0796	- 0,0056	- 0,0008		
1,4	0,6442	0,0732	- 0,0064	- 0,0008	0	
1,6	0,7174	0,0659	- 0,0073	- 0,0009	- 0,0001	
1,8	0,7833					- 0,0001

а) Для обчислення $y'(1,68)$ використаємо формулу (6.14). $t = \frac{1,68 - 1,8}{0,2} = -0,6$.

$$y'(1,68) \approx \frac{1}{0,2} \left(0,0659 - 0,1(-0,0073) + \frac{1}{6}(3 \cdot 0,36 - 3,6 + 2)(-0,0009) + \right. \\ \left. + \frac{1}{24}(-4 \cdot 0,216 + 18 \cdot 0,36 - 13,2 + 6)(-0,0001) + \frac{1}{120}(5 \cdot 0,1296 + 40(-0,216) + \right. \\ \left. + 105 \cdot 0,36 - 60 + 24)(-0,0001) \right) = 0,3367.$$

б) $y'(0,8)$ обчислимо за формулою (6.12).

$$y'(0,8) \approx \frac{1}{0,2} \left(0,0900 - \frac{1}{2}(-0,0048) + \frac{1}{3}(-0,0008) + \frac{1}{5}(-0,0001) \right) = 0,4608.$$

в) Для обчислення $y''(0,95)$ застосуємо формулу (6.11). $t = \frac{0,95 - 0,8}{0,2} = 0,75$.

$$y''(0,95) \approx \frac{1}{0,04} \left(-0,0048 - 0,25(-0,0008) + \frac{1}{120}(20 \cdot 0,75^3 - 120 \cdot 0,75^2 + \right. \\ \left. + 210 \cdot 0,75 - 100)(-0,0001) \right) = -0,1150.$$

г) $y''(1,6)$ обчислимо за формулою (6.17), взявши $x_n = 1,6$.

$$y''(1,6) \approx \frac{1}{0,04} (-0,0064 - 0,0008) = -0,1800.$$

Інтерполяційні многочлени Ньютона дають вирази для похідних через скінченні різниці функції. Проте часто на практиці вигідніше виражати значення похідних не через різниці, а безпосередньо через значення функції у вузлах. Для одержання таких формул зручно користуватися інтерполяційним многочленом Лагранжа з рівновіддаленими вузлами ($x_i - x_{i-1} = h = const$, $i = 1, 2, \dots, n$).

Запишемо інтерполяційний многочлен Лагранжа (5.9) для трьох рівновіддалених вузлів ($n=2$) та його залишковий член $R(x)$ і знайдемо їх похідні.

$$P(x) = \frac{1}{2h^2} \left((x-x_1)(x-x_2)y_0 - 2(x-x_0)(x-x_2)y_1 + (x-x_0)(x-x_1)y_2 \right),$$

$$R(x) = \frac{y'''(\xi)}{3!} (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2),$$

де ξ – деяка внутрішня точка відрізка $[x_0, x_2]$,

$$P'(x) = \frac{1}{2h^2} \left((2x-x_1-x_2)y_0 - 2(2x-x_0-x_2)y_1 + (2x-x_0-x_1)y_2 \right),$$

$$R'(x) = \frac{y'''(\xi)}{3!} \left((x-x_1)(x-x_2) + (x-x_0)(x-x_2) + (x-x_0)(x-x_1) \right).$$

Запишемо вираз для значення похідної y' в точці x_0 (позначимо його y'_0):

$$y'_0 = P'(x_0) + R'(x_0) = \frac{1}{2h^2} \left((2x_0-x_1-x_2)y_0 - 2(x_0-x_2)y_1 + (x_0-x_1)y_2 \right) + \frac{y'''(\xi)}{3!} (x_0-x_1)(x_0-x_2).$$

Отже,

$$y'_0 = \frac{1}{2h} (-3y_0 + 4y_1 - y_2) + \frac{y'''(\xi)}{3} h^2. \quad (6.18)$$

Аналогічно одержимо вирази для значень похідної y' в точках x_1 та x_2 .

$$y'_1 = \frac{1}{2h} (-y_0 + y_2) - \frac{y'''(\xi)}{6} h^2, \quad y'_2 = \frac{1}{2h} (y_0 - 4y_1 + 3y_2) + \frac{y'''(\xi)}{3} h^2. \quad (6.19)$$

Таким же способом отримаємо формули для значень похідної другого порядку y'' для випадку трьох вузлів:

$$y''_0 = \frac{1}{h^2} (y_0 - 2y_1 + y_2) - h y'''(\xi),$$

$$y''_1 = \frac{1}{h^2} (y_0 - 2y_1 + y_2) - \frac{h^2}{12} y^{(4)}(\xi), \quad (6.20)$$

$$y''_2 = \frac{1}{h^2} (y_0 - 2y_1 + y_2) + h y'''(\xi).$$

Записуючи інтерполяційний многочлен Лагранжа та його залишковий член для випадку чотирьох вузлів ($n=3$), одержимо наступні апроксимації похідних:

$$y'_0 = \frac{1}{6h} (-11y_0 + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3) - \frac{h^3}{4} y^{(4)}(\xi),$$

$$y'_1 = \frac{1}{6h} (-2y_0 - 3y_1 + 6y_2 - y_3) + \frac{h^3}{12} y^{(4)}(\xi),$$

$$y_2' = \frac{1}{6h} (y_0 - 6y_1 + 3y_2 + 2y_3) - \frac{h^3}{12} y^{(4)}(\xi), \quad (6.21)$$

$$y_3' = \frac{1}{6h} (-2y_0 + 9y_1 - 18y_2 + 11y_3) + \frac{h^3}{4} y^{(4)}(\xi).$$

$$y_0'' = \frac{1}{h^2} (2y_0 - 5y_1 + 4y_2 - y_3) + \frac{11}{12} h^2 y^{(4)}(\xi),$$

$$y_1'' = \frac{1}{h^2} (y_0 - 2y_1 + y_2) - \frac{h^2}{12} y^{(4)}(\xi),$$

$$y_2'' = \frac{1}{h^2} (y_1 - 2y_2 + y_3) - \frac{h^2}{12} y^{(4)}(\xi),$$

$$y_3'' = \frac{1}{h^2} (-y_0 + 4y_1 - 5y_2 + 2y_3) + \frac{11}{12} h^2 y^{(4)}(\xi).$$

В усіх наведених формулах ξ – це деяка внутрішня точка відрізка $[x_0, x_n]$.

6.3. Наближене обчислення частинних похідних

Розглянемо функцію двох змінних $u = f(x, y)$, задану таблицею: $u_{ij} = f(x_i, y_j)$, де $x_i = x_0 + ih_1$, $y_j = y_0 + jh_2$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$; $j = 0, 1, 2, \dots, m$).

Використовуючи означення частинної похідної, можна записати наближені формули для малих значень кроків h_1 та h_2 :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{f(x + h_1, y) - f(x, y)}{h_1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{f(x, y + h_2) - f(x, y)}{h_2}.$$

На основі цих формул одержимо наближені вирази для частинних похідних функції $u = f(x, y)$ у вузлі (x_i, y_j) :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{ij} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{h_1}; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{ij} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{h_2}.$$

Для одержання інших формул застосуємо розклад функції $u = f(x, y)$ у ряд Тейлора в околі точки $M(x, y)$:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Delta x^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Delta y^2 \right) +$$

$$+ \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Delta x^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \Delta x^2 \Delta y + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \Delta x \Delta y^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \Delta y^3 \right) + \dots$$

Знайдемо $u_{i+1,j} = f(x_i + h_1, y_j)$ при $\Delta x = h_1$, $\Delta y = 0$ та $u_{i-1,j} = f(x_i - h_1, y_j)$ при $\Delta x = -h_1$, $\Delta y = 0$.

$$u_{i+1,j} = u_{ij} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ij} h_1 + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{ij} h_1^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{ij} h_1^3 + \dots$$

$$u_{i-1,j} = u_{ij} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ij} h_1 + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{ij} h_1^2 - \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{ij} h_1^3 + \dots$$

Віднімаючи почленно від першої рівності другу, одержимо:

$$u_{i+1,j} - u_{i-1,j} = 2h_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ij} + O(h_1^3).$$

Звідси знайдемо значення похідної $\frac{\partial u}{\partial x}$ у вузлі (x_i, y_j) :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ij} = \frac{1}{2h_1} (u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) + O(h_1^2).$$

При досить малому значенні кроку h_1 одержуємо наближену формулу:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ij} \approx \frac{1}{2h_1} (u_{i+1,j} - u_{i-1,j}). \quad (6.23)$$

Аналогічно можна отримати наближені формули для похідної $\frac{\partial u}{\partial y}$ та

частинних похідних другого порядку:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{ij} \approx \frac{1}{2h_2} (u_{i,j+1} - u_{i,j-1}),$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{ij} \approx \frac{1}{h_1^2} (u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}), \quad (6.24)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{ij} \approx \frac{1}{h_2^2} (u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}),$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_{ij} \approx \frac{1}{4h_1 h_2} (u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}).$$

Наведемо також формули для наближеного обчислення частинних похідних із використанням більшої кількості вузлів (розширена схема):

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ij} \approx \frac{1}{4h_1} (u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1} - u_{i-1,j-1}),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{ij} \approx \frac{1}{4h_2} (u_{i+1,j+1} - u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j+1} - u_{i-1,j-1}), \quad (6.25)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{ij} \approx \frac{1}{12h_1^2} (-u_{i+2,j} + 16u_{i+1,j} - 30u_{ij} + 16u_{i-1,j} - u_{i-2,j}),$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{ij} \approx \frac{1}{12h_2^2} (-u_{i,j+2} + 16u_{i,j+1} - 30u_{ij} + 16u_{i,j-1} - u_{i,j-2}).$$

Приклад 6.2. Функція двох змінних $u = f(x, y)$ задана таблично. Обчислити частинні похідні першого та другого порядків цієї функції в точці $A(1,1; 0,8)$ за спрощеною та розширеною схемами.

$y \backslash x$	0,5	0,8	1,1	1,4	1,7
0,4	1,221	1,377	1,553	1,751	1,974
0,6	1,350	1,616	1,935	2,316	2,773
0,8	1,492	1,896	2,411	3,065	3,896
1,0	1,649	2,226	3,004	4,055	5,474
1,2	1,822	2,612	3,743	5,366	7,691

Розв'язання. За умовою задачі $h_1 = 0,3$; $h_2 = 0,2$; $i = 0,1,2,3,4$; $j = 0,1,2,3,4$. Частинні похідні потрібно обчислити у вузлі $A(x_2; y_2)$, де $x_2 = 1,1$; $y_2 = 0,8$.

1. Застосуємо формули (6.23), (6.24) (спрощена схема):

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{22} = \frac{1}{0,6}(3,065 - 1,896) = 1,948,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{22} = \frac{1}{0,4}(3,004 - 1,935) = 2,672,$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{22} = \frac{1}{0,09}(3,065 - 2 \cdot 2,411 + 1,186) = 1,544,$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{22} = \frac{1}{0,04}(3,004 - 2 \cdot 2,411 + 1,935) = 2,925,$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)_{22} = \frac{1}{4 \cdot 0,06}(4,055 - 2,316 - 2,226 + 1,616) = 4,704.$$

2. Застосуємо формули (6.25) (розширена схема):

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{22} = \frac{1}{1,2}(4,055 - 2,226 + 2,316 - 1,616) = 2,108,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{22} = \frac{1}{0,8}(4,055 - 2,316 + 2,226 - 1,616) = 2,936,$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{22} = \frac{1}{12 \cdot 0,09}(-3,896 + 16 \cdot 3,065 - 30 \cdot 2,411 + 16 \cdot 1,896 - 1,492) = 1,535,$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{22} = \frac{1}{12 \cdot 0,04}(-3,743 + 16 \cdot 3,004 - 30 \cdot 2,411 + 16 \cdot 1,935 - 1,553) = 2,913.$$

6.4. Завдання для самостійної роботи

1. Методом невизначених коефіцієнтів обчислити у вказаній точці похідні першого та другого порядків функції, заданої таблицею.

1.1.

x_i	3,6	4,0	4,8	5,2	5,8
y_i	2,2809	2,3863	2,5686	2,6487	2,7579

$x = 4,8;$

1.2.

x_i	0,5	0,9	1,5	1,8	2,2
y_i	3,1487	3,9596	5,9817	7,5496	10,5250

$x = 0,9;$

1.3.

x_i	2,1	2,6	3,1	4,1	4,6
y_i	3,5602	3,7236	3,8718	4,1359	4,2559

$x = 3,1;$

1.4.

x_i	1,1	1,5	2,3	2,7	3,1
y_i	4,4169	2,8889	1,8672	1,6598	1,5273

$x = 1,5;$

1.5.

x_i	2,2	2,6	3,4	3,8	4,4
y_i	3,4535	3,5261	3,6426	3,6909	3,7545

$x = 3,4.$

2. Обчислити частинні похідні першого та другого порядків в точці A функції $u = f(x, y)$, заданої таблично: а) за спрощеною схемою; б) за уточненими формулами.

2.1.

	i	0	1	2	3	4
j	$y \backslash x$	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1
0	1,4	2097	2,242	2,369	2,482	2,583
1	1,6	2,183	2,335	2,467	2,583	2,688
2	1,8	2,262	2,419	2,556	2,675	2,782
3	2,0	2,335	2,497	2,637	2,760	2,869
4	2,2	2,403	2,570	2,712	2,837	2,948

$A(1,5; 1,8);$

2.2.

	i	0	1	2	3	4
j	$y \backslash x$	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8
0	0,8	1,492	1,439	1,396	1,360	1,331
1	1,1	1,733	1,649	1,581	1,527	1,481
2	1,4	2,014	1,890	1,792	1,713	1,649
3	1,7	2,340	2,166	2,031	1,923	1,835
4	2,0	2,718	2,482	2,301	2,158	2,043

 $A(2,4; 1,4);$

2.3.

	i	0	1	2	3	4
j	$y \backslash x$	0,3	0,7	1,1	1,5	1,9
0	0,2	2,170	2,250	2,329	2,407	2,482
1	0,5	2,260	2,454	2,634	2,793	2,924
2	0,8	2,349	2,642	2,882	3,043	3,110
3	1,1	2,435	2,807	3,047	3,108	2,979
4	1,4	2,509	2,941	3,110	2,974	2,574

 $A(1,1; 0,8);$

2.4.

	i	0	1	2	3	4
j	$y \backslash x$	0,2	0,5	0,8	1,1	1,4
0	0,1	1,028	0,961	0,890	0,814	0,734
1	0,5	0,840	0,589	0,289	-0,080	-0,501
2	0,9	0,619	0,097	-0,608	-1,569	-2,842
3	1,3	0,360	-0,553	-1,944	-4,061	-7,282
4	1,7	0,057	-1,414	-3,939	-8,270	-15,709

 $A(0,8; 0,9);$

2.5.

	i	0	1	2	3	4
j	$y \backslash x$	0,1	0,5	0,9	1,3	1,7
0	0,2	1,000	1,005	1,016	1,034	1,151
1	0,5	1,001	1,031	1,099	1,204	1,340
2	0,8	1,003	1,079	1,248	1,494	1,791
3	1,1	1,006	1,147	1,451	1,860	2,295
4	1,4	1,010	1,235	1,694	2,247	2,724

 $A(0,9; 0,8).$

РОЗДІЛ 7

ЧИСЛОВЕ ІНТЕГРУВАННЯ

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і відома її первісна $F(x)$, то визначений інтеграл $\int_a^b f(x) dx$ можна обчислити за формулою Ньютона – Лейбніца:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Проте на практиці часто цією формулою неможливо скористатися з двох причин:

- 1) первісна $F(x)$ не виражається в елементарних функціях;
- 2) функція $f(x)$ задана у вигляді таблиці.

В цих випадках застосовують методи числового інтегрування. Ці методи полягають у тому, що дану функцію $f(x)$ замінюють на відрізку $[a, b]$ апроксимуючою функцією $\varphi(x)$ простого вигляду (наприклад, многочленом), а потім приймають

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b \varphi(x) dx.$$

7.1. Формули прямокутників та трапецій

Метод прямокутників є найпростішим методом наближеного обчислення визначених інтегралів.

Нагадаємо означення визначеного інтеграла. Нехай на відрізку $[a, b]$ задана функція $y = f(x)$. Поділимо відрізок $[a, b]$ на n часткових відрізків точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ і на кожному частковому відрізку $[x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, \dots, n$) довільним способом виберемо точку ξ_i ($x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$). Знайдемо добуток значення функції в цій точці $f(\xi_i)$ на довжину часткового відрізка $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ та складемо суму усіх таких добутків:

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i. \quad (7.1)$$

Сума S_n називається інтегральною сумою для функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$.

Якщо існує скінченна границя інтегральної суми (7.1) при прямуванні до нуля найбільшої з довжин часткових відрізків, яка не залежить ні від способу розбиття відрізка $[a, b]$ на часткові відрізки, ні від вибору точок ξ_i на кожному

з них, то ця границя називається визначеним інтегралом від функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$.

Отже,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i. \quad (7.2)$$

Метод прямокутників ґрунтується на заміні визначеного інтеграла $\int_a^b f(x) dx$ інтегральною сумою (7.1).

За точки ξ_i можна вибрати ліві ($\xi_i = x_{i-1}$) або праві ($\xi_i = x_i$) кінці часткових відрізків. Позначивши $f(x_i) = y_i$, $\Delta x_i = h_i$, одержимо формули методу прямокутників:

$$\int_a^b f(x) dx \approx y_0 h_1 + y_1 h_2 + \dots + y_{n-1} h_n, \quad (7.3)$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx y_1 h_1 + y_2 h_2 + \dots + y_n h_n.$$

На практиці найчастіше приймають $h_i = h = \text{const}$ ($i = 1, 2, \dots, n$), тобто відрізок $[a, b]$ ділять на n рівних часткових відрізків. У цьому випадку $h = \frac{b-a}{n}$, а формули (7.3) набувають вигляду:

$$\int_a^b f(x) dx \approx h (y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}), \quad (7.4)$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx h (y_1 + y_2 + \dots + y_n).$$

Часто застосовують формулу прямокутників, що використовує значення функції $f(x)$ в точках $\xi_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2} = x_{i-1/2} + \frac{h}{2}$, які є серединами часткових відрізків. Ці точки позначають

$$x_{i-1/2} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Формула в цьому випадку має вигляд

$$\int_a^b f(x) dx \approx h (f(x_{1/2}) + f(x_{3/2}) + \dots + f(x_{n-1/2})) \quad (7.5)$$

і називається формулою середніх.

Метод трапецій використовує лінійну інтерполяцію, тобто графік функції $y = f(x)$ замінюється ламаною, яка проходить через точки (x_i, y_i) . Якщо припустити, що $f(x) \geq 0$, то площа криволінійної трапеції, обмеженої зверху

побудованою ламаною, дасть наближене значення інтеграла $\int_a^b f(x) dx$. Ця

площа дорівнює сумі площ прямолінійних трапецій, обмежених зверху ланками ламаної.

Площа кожної такої трапеції у випадку розбиття відрізка $[a, b]$ на n рівних часткових відрізків дорівнює $\frac{1}{2}(y_{i-1} + y_i)h$ ($i=1, 2, \dots, n$), де h – довжина кожного часткового відрізка.

Отже, площа всієї фігури, обмеженої зверху ламаною,

$$S_n = \frac{1}{2}(y_0 + y_1)h + \frac{1}{2}(y_1 + y_2)h + \dots + \frac{1}{2}(y_{n-1} + y_n)h.$$

Після простих перетворень отримаємо:

$$S_n = h \left(\frac{1}{2}(y_0 + y_n) + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right), \quad \text{де } h = \frac{b-a}{n}.$$

Таким чином, одержуємо наближену формулу

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right), \quad (7.6)$$

яка називається формулою трапецій.

Формула трапецій (7.6), яка виведена при припущенні, що $f(x) \geq 0$, справджується для будь-якої функції $f(x)$, неперервної на відрізку $[a, b]$. Позначимо праву частину будь-якої з формул (7.4), (7.5) та (7.6) через S_n . Тоді похибка кожної з цих формул

$$R_n = \int_a^b f(x) dx - S_n.$$

Ця похибка залежить від кроку розбиття і її можна представити у вигляді $R_n = O(h^k)$. Наведемо оцінку похибки для кожної з наближених формул.

Для формул прямокутників (7.4):

$$|R_n| \leq \frac{h}{2} (b-a) M_1, \quad \text{де } M_1 = \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)|. \quad (7.7)$$

Для формули середніх (7.5) залишковий член R_n має вигляд:

$$R_n = \frac{h^2}{24} (b-a) f''(\xi), \quad (7.8)$$

де ξ – деяка точка відрізка $[a, b]$.

Тому для цієї формули справджується оцінка:

$$|R_n| \leq \frac{h^2}{24} (b-a) M_2, \quad (7.9)$$

де $M_2 = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$.

Для формули трапецій (7.6) залишковий член R_n має вигляд:

$$R_n = -\frac{h^2}{12} (b-a) f''(\xi), \quad (7.10)$$

де ξ – деяка точка відрізка $[a, b]$.

В цьому випадку одержується така оцінка похибки:

$$|R_n| \leq \frac{h^2}{12} (b-a) M_2, \quad \text{де } M_2 = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|. \quad (7.11)$$

Для формули середніх (7.5) і формули трапецій (7.6) можна записати, що $R_n = O(h^2)$. Ці формули є точними для многочленів першого степеня. Якщо $f''(x)$ не змінює знаку на відрізку $[a, b]$, то формули (7.5) та (7.6) дають двосторонні наближення для інтеграла $\int_a^b f(x) dx$, оскільки згідно з формулами (7.8) та (7.10) їх залишкові члени мають протилежні знаки.

Зауважимо, що формули (7.5) та (7.6) дають двосторонні наближення для інтеграла не тільки тоді, коли $f''(x)$ не змінює знаку, проте ми не будемо зупинятися на цьому питанні.

Враховуючи вигляд залишкових членів (7.8) і (7.10) для формул середніх та трапецій, можна записати уточнену формулу середніх і трапецій для обчислення інтеграла $I = \int_a^b f(x) dx$.

Нехай $I_{np.c}$ – наближене значення інтеграла I , обчислене за формулою (7.5), а I_{mp} – наближене значення цього інтеграла, обчислене за формулою (7.6). Уточнене значення цього інтеграла $I_{уточн}$ обчислюється за формулою:

$$I_{уточн} = \frac{1}{3} (2I_{np.c} + I_{mp}). \quad (7.12)$$

Для цієї формули $R_n = O(h^4)$.

7.2. Формула Сімпсона

Поділимо відрізок інтегрування $[a, b]$ точками $x_i = x_0 + ih$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$, $x_0 = a$, $x_n = b$) на n рівних часткових відрізків довжиною $h = \frac{b-a}{n}$. Будемо вважати, що n – парне число.

Метод Сімпсона наближеного обчислення інтеграла $\int_a^b f(x) dx$ ґрунтується на заміні підінтегральної функції $f(x)$ на кожному відрізку $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4]$, ..., $[x_{n-2}, x_n]$ довжиною $2h$ інтерполяційним многочленом другого степеня.

Розглянемо спочатку $\int_{-h}^h f(x) dx$. Замінімо графік функції $y = f(x)$ параболою, яка проходить через точки $M_1(-h, f(-h))$, $M_2(0, f(0))$, $M_3(h, f(h))$, тобто прийнемо $f(x) \approx \varphi(x) = ax^2 + bx + c$. Для визначення коефіцієнтів a, b, c отримаємо систему лінійних рівнянь:

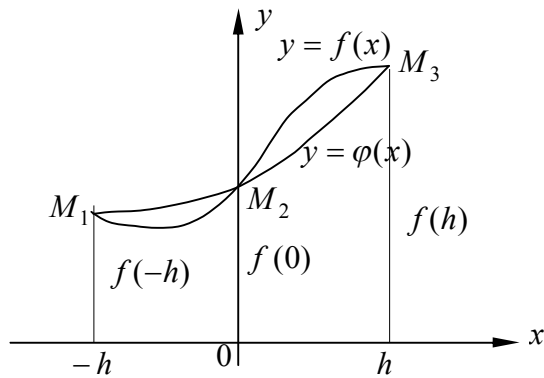


Рисунок 9

$$\begin{aligned} ah^2 - bh + c &= f(-h), \\ c &= f(0), \end{aligned} \quad (7.13)$$

$$ah^2 + bh + c = f(h).$$

$$\int_{-h}^h f(x) dx \approx \int_{-h}^h (ax^2 + bx + c) dx = \left(a \frac{x^3}{3} + b \frac{x^2}{2} + c \right) \Big|_{-h}^h = \frac{2}{3} ah^3 + 2ch = \frac{h}{3} (2ah^2 + 6c).$$

Із системи (7.13) одержуємо: $2ah^2 + 6c = f(-h) + 4f(0) + f(h)$.

Отже,

$$\int_{-h}^h f(x) dx \approx \frac{h}{3} (f(-h) + 4f(0) + f(h)). \quad (7.14)$$

Перейдемо до наближеного обчислення інтеграла $\int_a^b f(x) dx$. На кожному відрізку $[x_0, x_2]$, $[x_2, x_4]$, ..., $[x_{n-2}, x_n]$ застосуємо формулу (7.14):

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_2} f(x) dx &\approx \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2), \\ \int_{x_2}^{x_4} f(x) dx &\approx \frac{h}{3} (y_2 + 4y_3 + y_4), \\ &\dots \\ \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x) dx &\approx \frac{h}{3} (y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n), \end{aligned} \quad (7.15)$$

де $y_i = f(x_i)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$).

Додаючи ліві та праві частини співвідношень (7.15), одержуємо:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} (y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2})). \quad (7.16)$$

Ця формула називається формулою Сімпсона або формулою параболічних трапецій.

Можна довести, що залишковий член (похибка) формули Сімпсона має вигляд:

$$R_n = -\frac{h^4}{180} (b-a) f^{(4)}(\xi), \quad (7.17)$$

де ξ – деяка точка відрізка $[a, b]$. Отже,

$$|R_n| \leq \frac{h^4}{180} (b-a) M_4, \quad (7.18)$$

де $M_4 = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(4)}(x)|$.

Таким чином, для формули Сімпсона $R_n = O(h^4)$. Відзначимо, що формула Сімпсона є точною для многочленів до третього степеня включно, оскільки в цьому випадку $f^{(4)}(x) \equiv 0$ і $R_n = 0$.

Похибки уточненої формули (7.12), яка використовує методи прямокутників і трапецій, та формули Сімпсона (7.16) мають однаковий порядок. Проте формула (7.12) вимагає двократного обчислення інтеграла різними методами. Крім того, для формули Сімпсона потрібно майже вдвічі менше табличних значень функції, ніж для формули (7.12), оскільки для методу прямокутників потрібні додаткові значення функції в точках, що є серединами часткових відрізків. Тому на практиці надають перевагу формулі Сімпсона.

Зауваження 1. Для наближеного обчислення похибки формули Сімпсона (7.16) застосовують правило Рунге. Нехай I_h – наближене значення інтеграла

$I = \int_a^b f(x) dx$, обчислене за формулою Сімпсона з кроком h , I_{2h} – наближене значення цього інтеграла, обчислене за формулою Сімпсона з кроком $2h$. Тоді

$$I - I_h \approx \frac{I_h - I_{2h}}{15}, \quad (7.19)$$

тобто абсолютна похибка

$$|R_n| \approx \frac{|I_h - I_{2h}|}{15}. \quad (7.20)$$

Зауваження 2. Для уточнення результатів наближеного інтегрування можна застосувати процес Ейткена. Він дає можливість оцінити похибку методу $O(h^k)$ і вказує алгоритм уточнення результатів. Обчислення проводяться послідовно три рази при різних кроках розбиття h_1, h_2, h_3 , причому їх відношення сталі: $\frac{h_2}{h_1} = \frac{h_3}{h_2} = q$ (наприклад, при діленні крока навпіл $q = 0,5$).

Нехай у результаті наближеного інтегрування одержані значення інтеграла I_1, I_2, I_3 . Тоді уточнене значення інтеграла обчислюється за формулою

$$I = I_1 - \frac{(I_1 - I_2)^2}{I_1 - 2I_2 + I_3}, \quad (7.21)$$

а порядок точності використаного методу чисельного інтегрування визначається співвідношенням

$$k = \frac{1}{\ln q} \ln \frac{I_3 - I_2}{I_2 - I_1}. \quad (7.22)$$

Приклад 7.1. Обчислити інтеграл $I = \int_{0.5}^{1.5} \frac{e^{0,1x}}{x} dx$, взявши $n = 20$:

- а) за формулами прямокутників;
- б) за формулою трапецій;
- в) за формулою середніх;
- г) за уточненою формулою середніх та трапецій;
- д) за формулою Сімпсона.

Розв'язання. Складемо таблицю значень функції $f(x) = \frac{e^{0,1x}}{x}$ для $n = 20$

та $h = \frac{1,5 - 0,5}{20} = 0,05$.

Таблиця 1

i	x_i	y_i	i	x_i	y_i	i	x_i	y_i
0	0,50	2,10254	7	0,85	1,28085	14	1,20	0,93958
1	0,55	1,92098	8	0,90	1,21574	15	1,25	0,90652
2	0,60	1,76973	9	0,95	1,15754	16	1,30	0,87602
3	0,65	1,64178	10	1,00	1,10517	17	1,35	0,84781
4	0,70	1,53216	11	1,05	1,05782	18	1,40	0,82162
5	0,75	1,43717	12	1,10	1,01480	19	1,45	0,79727
6	0,80	1,35411	13	1,15	0,97554	20	1,50	0,77455

а) Застосуємо формули прямокутників (7.4):

$$I_{np}^{(1)} = h \sum_{i=0}^{19} y_i = 0,05 \cdot 24,75475 = 1,23774,$$

$$I_{np}^{(2)} = h \sum_{i=1}^{20} y_i = 0,05 \cdot 23,42676 = 1,17134.$$

б) Використовуючи формулу трапецій (7.6), одержимо:

$$I_{mp} = h \left(\frac{1}{2} (y_0 + y_{20}) + \sum_{i=1}^{19} y_i \right) = 0,05 \cdot 24,09076 = 1,20454.$$

в) Щоб застосувати формулу середніх (7.5), складемо таблицю значень даної функції в точках $x_{i-1/2} + \frac{h}{2}$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Таблиця 2

i	$x_{i-1/2}$	$f(x_{i-1/2})$	i	$x_{i-1/2}$	$f(x_{i-1/2})$	i	$x_{i-1/2}$	$f(x_{i-1/2})$
1	0,525	2,00743	8	0,875	1,24736	15	1,225	0,92271
2	0,575	1,84206	9	0,925	1,18585	16	1,275	0,89097
3	0,625	1,70319	10	0,975	1,13068	17	1,325	0,86164
4	0,675	1,58493	11	1,025	1,08091	18	1,375	0,83447
5	0,725	1,48302	12	1,075	1,03581	19	1,425	0,80923
6	0,775	1,39430	13	1,125	0,99473	20	1,475	0,78572
7	0,825	1,31636	14	1,175	0,95718			

Застосувавши формулу середніх (7.5), одержимо:

$$I_{np.c} = h \sum_{i=1}^{20} f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right) = 0,05 \cdot 24,06855 = 1,20343.$$

г) За уточненою формулою (7.12) отримаємо:

$$I_{уточн} = \frac{1}{3} (2I_{np.c} + I_{mp}) = \frac{1}{3} (2 \cdot 1,20343 + 1,20454) = 1,20380.$$

д) Застосувавши формулу Сімпсона (7.16) і таблицю 1 значень функції $f(x)$, одержимо:

$$\begin{aligned} I_{сїм} &= \frac{h}{3} (y_0 + y_{20} + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \dots + y_{19}) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + \dots + y_{18})) = \\ &= \frac{0,5}{3} (2,87709 + 4 \cdot 12,02328 + 2 \cdot 10,62893) = 1,20380. \end{aligned}$$

Обчислимо абсолютну похибку формули Сімпсона за допомогою правила Рунге. Ми знайшли наближене значення даного інтеграла за формулою Сімпсона з кроком $h = 0,05$

$$I_h = 1,20380.$$

Обчислимо також наближене значення цього інтеграла з кроком $2h = 0,10$.

$$I_{2h} = \frac{0,10}{3} (2,87709 + 4 \cdot 5,99021 + 2 \cdot 4,63872) = 1,20385.$$

$$\text{Отже, } |R_{20}| \approx \frac{|1,20380 - 1,20385|}{15} \approx 3,33 \cdot 10^{-6}, \text{ тобто } |R_{20}| < 5 \cdot 10^{-6}.$$

Таким чином, обчислюючи наближено даний інтеграл за формулою Сімпсона, ми одержали, що $\int_{0,5}^{1,5} \frac{e^{0,1x}}{x} dx \approx 1,20380$. В отриманому результаті всі знаки вірні. Зауважимо, що таке ж значення ми одержали, застосовуючи уточнену формулу (7.12).

7.3. Метод Монте–Карло

У багатьох задачах вихідні дані мають випадковий характер, тому для розв'язання таких задач застосовують статистико-ймовірнісний підхід. На основі такого підходу побудовано низку числових методів, які враховують випадковий характер величин, що обчислюються. До таких методів належить метод Монте-Карло, який застосовується до розв'язання деяких задач обчислювальної математики, зокрема до обчислення інтегралів.

Наприклад, потрібно обчислити інтеграл $\int_0^1 \varphi(t) dt$.

Нехай t – рівномірно розподілена на відрізьку $[0, 1]$ випадкова величина, $\rho(t)$ – густина розподілу ймовірностей цієї випадкової величини:

$$\rho(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } 0 \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{при } t > 1. \end{cases} \quad (7.23)$$

Нехай $\varphi(t)$ – функція випадкової величини t . Математичне сподівання функції $\varphi(t)$ визначається формулою

$$M(\varphi(t)) = \int_0^1 \varphi(t) \rho(t) dt = \int_0^1 \varphi(t) dt. \quad (7.24)$$

Знайдемо наближене значення математичного сподівання функції $\varphi(t)$. Нехай у результаті n випробувань одержано n значень випадкової величини t : t_1, t_2, \dots, t_n . Ці значення можна взяти, наприклад, з таблиці випадкових чисел. У результаті цих n випробувань функція $\varphi(t)$ прийме значення $\varphi(t_1), \varphi(t_2), \dots, \varphi(t_n)$. Середнє арифметичне одержаних значень функції $\varphi(t)$ дорівнює $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(t_i)$. При досить великому значенні n

$$M(\varphi(t)) \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(t_i). \quad (7.25)$$

Із формул (7.24) та (7.25) випливає, що

$$\int_0^1 \varphi(t) dt \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(t_i). \quad (7.26)$$

Розглянемо загальний випадок: нехай потрібно обчислити інтеграл $\int_a^b f(x) dx$. Перейдемо до нової змінної t за допомогою рівності $x = a + (b-a)t$.
Тоді

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \int_0^1 \varphi(t) dt, \text{ де } \varphi(t) = f(a + (b-a)t).$$

Використовуючи формулу (7.26) для наближеного обчислення інтеграла $\int_0^1 \varphi(t) dt$, отримаємо:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n \varphi(t_i) \text{ або } \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i), \quad (7.27)$$

де $x_i = a + (b-a)t_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Приклад 7.2. Обчислити наближене значення інтеграла $\int_1^3 (e^{-x} + 1)^2 dx$

методом Монте-Карло, взявши $n = 30$. Знайти точне значення цього інтеграла і обчислити абсолютну та відносну похибки одержаного наближеного значення.

Розв'язання. З таблиці випадкових чисел візьмемо 30 чисел t_1, t_2, \dots, t_{30} , які містяться на відрізку $[0, 1]$. Знайдемо відповідні значення x_i за формулою: $x_i = 1 + 2t_i$, ($i = 1, 2, \dots, 30$).

Обчислимо значення функції $f(x_i)$ ($i = 1, 2, \dots, 30$) і застосуємо формулу (7.27).

i	t_i	x_i	$f(x_i)$	i	t_i	x_i	$f(x_i)$
1	0,6987	2,3974	1,19018	16	0,2059	1,4118	1,54680
2	0,0387	1,0774	1,79689	17	0,5626	2,1252	1,25308
3	0,5581	2,1162	1,25549	18	0,8516	2,7032	1,13847
4	0,6531	2,3062	1,20921	19	0,6476	2,2952	1,21163
5	0,5735	2,1470	1,24732	20	0,5685	2,1270	1,25260
6	0,9333	2,8666	1,11702	21	0,1313	1,2626	1,64588
7	0,1998	1,3996	1,55425	22	0,3897	1,7794	1,36595
8	0,1837	1,3674	1,57444	23	0,4380	1,8760	1,32987
9	0,4216	1,8432	1,34168	24	0,1618	1,3236	1,60320
10	0,3384	1,6768	1,40890	25	0,4858	1,9716	1,29785
11	0,4247	1,8494	1,33942	26	0,1017	1,2034	1,69045
12	0,2910	1,5820	1,45338	27	0,0858	1,1716	1,71576
13	0,4731	1,9462	1,30603	28	0,8396	2,6792	1,14194
14	0,6454	2,2908	1,21261	29	0,7813	2,5626	1,16015
15	0,5146	2,0292	1,28016	30	0,2712	1,5424	1,47347

$$\int_1^3 (e^{-x} + 1)^2 dx \approx \frac{2}{30} \sum_{i=1}^{30} f(x_i) = \frac{1}{15} \cdot 41,11408 = 2,74094 \approx 2,7409.$$

Обчислимо цей інтеграл за формулою Ньютона-Лейбніца:

$$\begin{aligned} \int_1^3 (e^{-x} + 1)^2 dx &= \int_1^3 (e^{-2x} + 2e^{-x} + 1) dx = \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} - 2e^{-x} + x \right) \Big|_1^3 = \\ &= -\frac{1}{2} e^{-6} - 2e^{-3} + 3 + \frac{1}{2} e^{-2} + 2e^{-1} - 1 \approx 2,7026. \end{aligned}$$

Абсолютна похибка $\Delta \approx 0,038$; відносна похибка $\delta \approx 0,014$, тобто $\delta \approx 1,4\%$.

7.4. Завдання для самостійної роботи

- Обчислити визначений інтеграл, взявши $n = 20$: а) методом прямокутників; б) методом трапецій; в) за уточненою формулою прямокутників та трапецій; г) методом Сімпсона; д) за формулою Ейткена. Оцінити точність обчислень.

1.1. $\int_0^2 \sqrt{1 + \sin^3 x} dx$;

1.2. $\int_0^{1.5} \sqrt[3]{\sin 2x + 1} dx$;

$$1.3. \int_0^{1,5} x^2 \sqrt{1+x^5} dx;$$

$$1.5. \int_1^{2,5} \frac{xdx}{\ln(x+2)};$$

$$1.7. \int_0^{0,5} (x^2+1)e^{-x^2} dx;$$

$$1.9. \int_0^1 \frac{e^x}{x+1} dx;$$

$$1.4. \int_0^1 \cos(x^3+2x^2) dx;$$

$$1.6. \int_0^{1,2} x \ln(1+\cos x) dx;$$

$$1.8. \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{2+x^3}} dx;$$

$$1.10. \int_0^{1,1} x \cos(x^3) dx.$$

2. Обчислити визначений інтеграл методом Монте-Карло, взявши $n = 40$.

$$2.1. \int_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2};$$

$$2.3. \int_1^2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx;$$

$$2.5. \int_1^2 \sqrt{4+x^2} dx;$$

$$2.7. \int_0^2 \sqrt{2x-x^2} dx;$$

$$2.9. \int_2^4 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}};$$

$$2.2. \int_1^2 (x-1)e^x dx;$$

$$2.4. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+1};$$

$$2.6. \int_0^2 \sqrt{e^x-1} dx;$$

$$2.8. \int_2^3 x \ln(1+2x) dx;$$

$$2.10. \int_2^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$$

РОЗДІЛ 8

ЧИСЛОВІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

8.1. Метод Ейлера

Нехай потрібно знайти розв'язок диференціального рівняння першого порядку

$$y' = f(x, y), \quad (8.1)$$

який задовольняє початкову умову

$$y(x_0) = y_0. \quad (8.2)$$

Припустимо, що для правої частини рівняння (8.1) на деякому відрізку $[x_0, b]$ виконуються умови теореми про існування та єдиність розв'язку задачі Коші. Тоді на відрізку $[x_0, b]$ існує єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$ диференціального рівняння (8.1), що задовольняє початкову умову (8.2).

Поділимо відрізок $[x_0, b]$ на n рівних часткових відрізків точками $x_i = x_0 + ih$ ($i = 0, 1, \dots, n$; $x_n = b$).

Таким чином, довжина кожного часткового відрізка дорівнює h .

Метод Ейлера полягає в тому, що інтегральна крива, яка є графіком розв'язку даної задачі Коші, наближено замінюється ламаною.

Користуючись рівнянням (8.1), обчислимо в початковій точці $M_0(x_0, y_0)$ інтегральної кривої кутівий коефіцієнт її дотичної $y'_0 = f(x_0, y_0)$. Тоді рівняння дотичної до інтегральної кривої в точці $M_0(x_0, y_0)$ запишемо у вигляді

$$y - y_0 = f(x_0, y_0)(x - x_0). \quad (8.3)$$

Замінюючи на відрізку $[x_0, x_1]$ шукану інтегральну криву $y = \varphi(x)$ відрізком дотичної (8.3), знайдемо наближене значення розв'язку y_1 в точці x_1 :

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0),$$

або, оскільки $x_1 - x_0 = h$,

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h. \quad (8.4)$$

Підставивши значення x_1 та y_1 в праву частину рівняння (8.1), знайдемо $y'_1 = f(x_1, y_1)$. На відрізку $[x_1, x_2]$ замінимо інтегральну криву $y = \varphi(x)$ відрізком дотичної, яка проходить через точку $M_1(x_1, y_1)$ і має кутівий коефіцієнт $y'_1 = f(x_1, y_1)$:

$$y - y_1 = f(x_1, y_1)(x - x_1). \quad (8.5)$$

Підставляючи у рівняння (8.5) $x = x_2$, знайдемо наближене значення шуканого розв'язку $y = \varphi(x)$ в точці x_2 :

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1),$$

або, оскільки $x_2 - x_1 = h$,

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)h. \quad (8.6)$$

Продовжуючи цей процес, послідовно одержимо наближені значення розв'язку $y = \varphi(x)$ в точках $x_3, x_4, \dots, x_n = b$. При цьому значення розв'язку в точці x_{i+1} обчислюємо за формулою

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1). \quad (8.7)$$

Таким чином, отримаємо наближені значення шуканого розв'язку в точках $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, b$.

Ми розглянули випадок $b > x_0$. Якщо $b < x_0$, то формула (8.7) також справедлива, але в цьому випадку крок розбиття $h = (b - x_0)/n$ є від'ємним.

Метод Ейлера є найпростішим із числових методів розв'язання задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку. Недоліком цього методу є його невисока точність. Можна довести, що метод Ейлера має перший порядок точності, тобто похибка цього методу дорівнює $O(h)$.

Приклад 8.1. Обчислити методом Ейлера наближене значення $y(1,4)$

розв'язку задачі Коші $y' + \frac{y}{x} = e^x$, $y(1) = 1$, взявши крок $h = 0,1$. Знайти точний розв'язок цієї задачі та обчислити похибку одержаного наближеного значення.

Розв'язання. Відрізок $[1; 1,4]$ поділимо на 4 рівних часткових відрізки. Тоді довжина кожного часткового відрізка дорівнює 0,1. Обчислимо наближені значення розв'язку в точках $x_1 = 1,1$; $x_2 = 1,2$; $x_3 = 1,3$; $x_4 = 1,4$.

Задане рівняння запишемо у вигляді $y' = e^x - \frac{y}{x}$. Отже, $f(x, y) = e^x - \frac{y}{x}$.

Значення розв'язку будемо обчислювати за формулою (8.7). Результати обчислень запишемо у таблицю.

i	x_i	y_i	$hf(x_i, y_i)$	i	x_i	y_i	$hf(x_i, y_i)$
0	1	1	0,1718	3	1,3	1,5839	0,2451
1	1,1	1,1718	0,1939	4	1,4	1,8290	
2	1,2	1,3657	0,2182				

Таким чином, $y(1,4) \approx 1,8290$.

Знайдемо точний розв'язок даної задачі Коші: $y' + \frac{y}{x} = e^x$, $y(1) = 1$.

Рівняння $y' + \frac{y}{x} = e^x$ є лінійним рівнянням першого порядку. Його розв'язок шукатимемо у вигляді добутку двох функцій $y = u \cdot v$. $y' = u'v + uv'$. Підставивши ці вирази у рівняння, отримаємо:

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = e^x; \quad u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = e^x.$$

Нехай $v' + \frac{v}{x} = 0$. Тоді одержимо: $u'v = e^x$.

Розв'яжемо ці два рівняння.

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}; \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}; \quad \ln|v| = -\ln|x|.$$

Отже, $v = \frac{1}{x}$. Рівняння $u'v = e^x$ матиме вигляд: $u' \frac{1}{x} = e^x$. Звідси

$$du = x e^x dx, \quad u = \int x e^x dx = x e^x - e^x + C.$$

Таким чином, загальний розв'язок рівняння $y' + \frac{y}{x} = e^x$ має вигляд:

$$y = \frac{1}{x} (x e^x - e^x + C).$$

Знайдемо частинний розв'язок цього рівняння, який задовольняє початкову умову $y'(1) = 1$.

$$1 = 1(e - e + C).$$

Отже, $C = 1$ і розв'язок заданої задачі Коші

$$y = \frac{1}{x} (x e^x - e^x + 1).$$

Обчислимо за цією формулою значення $y(1,4)$, залишаючи чотири знаки після коми:

$$y(1,4) = 1,8729.$$

Абсолютна похибка наближеного значення $y(1,4)$, обчисленого методом Ейлера, $\Delta = 4,39 \cdot 10^{-2} < 5 \cdot 10^{-2}$; відносна похибка $\delta \approx 2,34 \cdot 10^{-2}$, тобто $\delta \approx 2,34\%$.

8.2. Модифікований метод Ейлера

Суть цього методу полягає в тому, що спочатку ми обчислюємо значення розв'язку задачі Коші (8.1), (8.2) в точці $x_{i+1/2} = x_i + \frac{h}{2}$ за формулою:

$$y_{i+1/2} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i), \quad (i = 0, 1, \dots, n-1). \quad (8.8)$$

Потім знаходимо значення правої частини рівняння (8.1) в точці $(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})$, тобто $f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})$.

Після цього обчислюємо y_{i+1} за формулою:

$$y_{i+1} = y_i + h f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}), \quad (i = 0, 1, \dots, n-1). \quad (8.9)$$

Формули (8.8) та (8.9) можна об'єднати в одну формулу:

$$y_{i+1} = y_i + h f\left(x_{i+1/2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)\right), \quad (i = 0, 1, \dots, n-1). \quad (8.10)$$

Цей метод точніший, ніж звичайний метод Ейлера. Можна довести, що похибка модифікованого методу Ейлера дорівнює $O(h^2)$.

Приклад 8.2. Обчислити наближене значення $y(1,4)$ розв'язку задачі Коші, яка розглядалась у прикладі 8.1, модифікованим методом Ейлера. Знайти похибку одержаного наближеного значення.

Розв'язання. Виконані обчислення запишемо у таблицю.

i	x_i	y_i	$\frac{h}{2} f(x_i, y_i)$	$x_{i+1/2}$	$y_{i+1/2}$	$h f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})$
0	1	1	0,0859	1,05	1,0859	0,1823
1	1,1	1,1823	0,0965	1,15	1,2788	0,2046
2	1,2	1,3869	0,1082	1,25	1,4951	0,2294
3	1,3	1,6163	0,1213	1,35	1,7376	0,2570
4	1,4	1,8733				

Отже, застосувавши модифікований метод Ейлера, ми отримали: $y(1,4) \approx 1,8733$. У прикладі 8.1 одержано точне значення розв'язку з чотирма знаками після коми: $y(1,4) = 1,8729$. Таким чином, абсолютна похибка наближеного значення, обчисленого модифікованим методом Ейлера, $\Delta = 4 \cdot 10^{-4}$, а відносна похибка $\delta \approx 2,3 \cdot 10^{-4}$, тобто $\delta \approx 0,023\%$.

8.3. Метод Рунге-Кутта

Метод Рунге-Кутта є методом підвищеної точності.

Нехай потрібно знайти розв'язок диференціального рівняння (8.1), який задовольняє початкову умову (8.2). Як і за методом Ейлера, будемо розглядати відрізок $[x_0, b]$, який поділимо на n рівних часткових відрізків точками $x_i = x_0 + ih$, ($i = 0, 1, \dots, n$; $x_n = b$).

В околі точки x_i представимо шуканий розв'язок задачі Коші у вигляді формули Тейлора, припускаючи, що виконуються умови, при яких це представлення справедливе.

При цьому запишемо члени, що містять похідні розв'язку до четвертого порядку включно:

$$y(x) \approx y(x_i) + y'(x_i)(x - x_i) + \frac{y''(x_i)}{2!}(x - x_i)^2 + \frac{y'''(x_i)}{3!}(x - x_i)^3 + \frac{y^{(4)}(x_i)}{4!}(x - x_i)^4. \quad (8.11)$$

Підставивши у формулу (8.11) $x = x_{i+1}$, отримаємо:

$$y_{i+1} \approx y_i + \Delta y_i, \quad (8.12)$$

де $\Delta y_i = y'(x_i)h + \frac{y''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{y'''(x_i)}{3!}h^3 + \frac{y^{(4)}(x_i)}{4!}h^4$.

Δy_i представимо у вигляді:

$$\Delta y_i = \alpha k_1^{(i)} + \beta k_2^{(i)} + \gamma k_3^{(i)} + \delta k_4^{(i)}, \quad (8.13)$$

де $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – деякі коефіцієнти, $k_1^{(i)}, k_2^{(i)}, k_3^{(i)}, k_4^{(i)}$ – числа, що визначаються співвідношеннями:

$$\begin{aligned} k_1^{(i)} &= h f(x_i, y_i), \\ k_2^{(i)} &= h f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right), \\ k_3^{(i)} &= h f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right), \\ k_4^{(i)} &= h f(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}). \end{aligned} \quad (8.14)$$

Можна довести, що для того, аби виконувались рівності (8.12) і (8.13), коефіцієнти $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ повинні мати значення: $\alpha = \delta = \frac{1}{6}, \beta = \gamma = \frac{1}{3}$.

Таким чином, ми отримали формули для послідовного обчислення наближених значень шуканого розв'язку в точках $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, b$:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \quad (i = 0, 1, \dots, n-1), \quad (8.15)$$

де

$$\Delta y_i = \frac{1}{6} (k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}), \quad (8.16)$$

а числа $k_1^{(i)}, k_2^{(i)}, k_3^{(i)}, k_4^{(i)}$ визначаються за формулами (8.14).

Формули (8.14)-(8.16) описують метод Рунге-Кутта четвертого порядку точності. Можна довести, що похибка цього методу дорівнює $O(h^4)$.

Зауважимо, що наближену оцінку похибки методу Рунге-Кутта на даному відрізку $[x_0, b]$ можна одержати за правилом Рунге:

$$|R| \approx \frac{|y_h - y_{2h}|}{15},$$

де y_h та y_{2h} – результати обчислень за формулами (8.14)-(8.16) відповідно з кроками h і $2h$.

Приклад 8.3. Скласти таблицю значень розв'язку рівняння $y' = y - \frac{2x}{y}$, який задовольняє початкову умову $y(0) = 1$, на відрізку $[0; 0,6]$ з кроком $h = 0,2$, застосувавши метод Рунге-Кутта.

Розв'язання. За умовою задачі $x_0 = 0, y_0 = 1, f(x, y) = y - \frac{2x}{y}$. Потрібно знайти значення розв'язку в точках $x_1 = 0,2; x_2 = 0,4; x_3 = 0,6$. Обчислимо значення розв'язку y_1 в точці x_1 . За формулами (8.15) і (8.16) одержимо:

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0, \text{ де } \Delta y_0 = \frac{1}{6} (k_1^{(0)} + 2 k_2^{(0)} + 2 k_3^{(0)} + k_4^{(0)}).$$

При цьому числа $k_j^{(0)}$ ($j=1, \dots, 4$) знайдемо за формулами (8.14).

Таким чином,

$$k_1^{(0)} = h f(x_0, y_0) = 0,2 \cdot f(0,1) = 0,2,$$

$$k_2^{(0)} = h f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}\right) = 0,2 f(0,1; 1,1) = 0,18364,$$

$$k_3^{(0)} = h f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}\right) = 0,2 f(0,1; 1,09182) = 0,18173,$$

$$k_4^{(0)} = h f(x_0 + h, y_0 + k_3^{(0)}) = 0,2 f(0,2; 1,18173) = 0,16865,$$

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6} (0,2 + 2 \cdot 0,18364 + 2 \cdot 0,18173 + 0,16865) = 0,18323.$$

Отже, $y_1 = 1 + 0,18323 = 1,18323$.

Значення y_2 та y_3 знаходимо аналогічно. Процес обчислень проводимо за схемою:

i	j	x	y	$f(x, y)$	$k_j = h f(x, y)$	Δy
0	1	<u>0</u>	<u>1</u>	1	0,2	0,18323
	2	0,1	1,1	0,91818	0,18364	
	3	0,1	1,09182	0,90864	0,18173	
	4	0,2	1,18173	0,84324	0,16865	
1	1	<u>0,2</u>	<u>1,18323</u>	0,84517	0,16903	0,15844
	2	0,3	1,26775	0,79447	0,15889	
	3	0,3	1,26268	0,78750	0,15750	
	4	0,4	1,34073	0,74404	0,14881	
2	1	<u>0,4</u>	<u>1,34167</u>	0,74540	0,14908	0,14162
	2	0,5	1,41621	0,71010	0,14202	
	3	0,5	1,41268	0,70481	0,14096	
	4	0,6	1,48263	0,67326	0,13465	
3		<u>0,6</u>	<u>1,48329</u>			

Знайдені значення y_1, y_2, y_3 розв'язку даної задачі Коші в наведеній таблиці підкреслені. Зауважимо, що точний розв'язок цієї задачі виражається формулою $y = \sqrt{2x+1}$. Якщо обчислити значення розв'язку $y(0,2)$, $y(0,4)$, $y(0,6)$ за цією формулою, то отримаємо: $y(0,2) = 1,18322$; $y(0,4) = 1,34164$; $y(0,6) = 1,48324$. Таким чином, числа y_1, y_2, y_3 , які обчислені методом Рунге-Кутта, мають чотири вірних знаки після коми.

8.4. Метод Адамса

Розглянемо знову задачу Коші: потрібно знайти розв'язок рівняння $y' = f(x, y)$, який задовольняє початкову умову $y(x_0) = y_0$. Одним із різницевих методів наближеного розв'язання цієї задачі є метод Адамса.

Виберемо крок h і введемо допоміжну функцію

$$q(x) = h y'(x) = h f(x, y). \quad (8.17)$$

Позначимо $q_i(x) = h y'_i = h f(x_i, y_i)$, де $x_i = x_0 + ih$, $y_i = y(x_i)$. Нехай вже відомі наближені значення розв'язку даної задачі Коші $y_{i-3}, y_{i-2}, y_{i-1}, y_i$. Побудуємо інтерполяційний многочлен Ньютона для інтерполяції назад для функції $q(x)$ на відрізку $[x_{i-3}, x_i]$ з вузлами $x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i$. Припускаючи, що функція $q(x)$ дорівнює своєму інтерполяційному многочлену, одержимо:

$$q(x) = q(x_i + th) = q_i + t \Delta q_{i-1} + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 q_{i-2} + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!} \Delta^3 q_{i-3}, \quad (8.18)$$

де $t = \frac{x - x_i}{h}$.

Наближене значення розв'язку y_{i+1} у вузлі x_{i+1} обчислимо за формулою:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i. \quad (8.19)$$

Використовуючи вираз (8.18), одержимо формулу для знаходження Δy_i .

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} q(x) \frac{dx}{h}. \quad (8.20)$$

Зробивши заміну змінної $x = x_i + th$, $dx = h dt$, отримаємо:

$$\Delta y_i = \int_0^1 q(x_i + th) dt = \int_0^1 \left(q_i + t \Delta q_{i-1} + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 q_{i-2} + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!} \Delta^3 q_{i-3} \right) dt.$$

Обчисливши цей інтеграл, остаточно одержимо:

$$\Delta y_i = q_i + \frac{1}{2} \Delta q_{i-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 q_{i-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 q_{i-3}, \quad (i = 3, 4, \dots). \quad (8.21)$$

Для того, щоб користуватися формулами (8.19) і (8.21), необхідно знати чотири значення розв'язку: y_0, y_1, y_2, y_3 . Значення y_1, y_2, y_3 можна визначити, наприклад, методом Рунге-Кутта або за допомогою розкладу розв'язку $y(x)$ в ряд Тейлора в околі точки x_0 .

Метод Адамса, що визначається формулами (8.19) та (8.21), має четвертий порядок точності, тобто його похибка дорівнює $O(h^4)$. Якщо потрібно одержати значення розв'язку $y(x)$ з точністю до 10^{-m} , то крок обчислень h визначається з нерівності $h^4 < 10^{-m}$. На практиці це здійснюють так: слідкують за зміною третіх скінченних різниць, вибираючи крок h настільки малим, щоб сусідні різниці $\Delta^3 q_i$ та $\Delta^3 q_{i+1}$ відрізнялися між собою не більше, ніж на одну-дві одиниці заданого розряду.

Якщо у формулі (8.18) врахувати скінченні різниці, наприклад, п'ятого порядку, то одержимо:

$$\Delta y_i = q_i + \frac{1}{2} \Delta q_{i-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 q_{i-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 q_{i-3} + \frac{251}{720} \Delta^4 q_{i-4} + \frac{95}{288} \Delta^5 q_{i-5}, \quad (i = 5, 6, \dots). \quad (8.22)$$

У цьому випадку похибка методу Адамса дорівнює $O(h^6)$, але для застосування формули (8.22) потрібно знати шість значень розв'язку: $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$.

Зауважимо, що простіші формули Адамса одержуються із складніших шляхом простого відкидання членів із різницями вищих порядків.

Порівняємо методи Рунге-Кутта (8.14)–(8.16) та Адамса (8.19), (8.21), які мають четвертий порядок точності. На кожному кроці h за методом Рунге-Кутта потрібно чотири рази обчислювати значення функції $f(x, y)$. За методом Адамса на кожному кроці обчислюється тільки одне значення функції $f(x, y)$. Проте метод Рунге-Кутта можна застосувати, маючи тільки початкове значення y_0 , і при цьому в будь-який момент можна змінити крок h , а метод Адамса вимагає знання значень розв'язку y_0, y_1, y_2, y_3 і не дозволяє змінювати крок. На практиці часто комбінують ці методи: на початковому етапі, застосовуючи метод Рунге-Кутта, обчислюють наближені значення розв'язку y_1, y_2, y_3 , а потім, користуючись методом Адамса, знаходять наступні наближені значення розв'язку.

Приклад 8.4. Застосувавши комбінований метод Рунге-Кутта і Адамса, обчислити наближені значення розв'язку задачі Коші $y' = y - \frac{2x}{y}$, $y(0) = 1$ на відрізьку $[0; 1,2]$ з кроком $h = 0,2$.

Розв'язання. Наближені значення розв'язку даної задачі Коші $y_1 = 1,18323$, $y_2 = 1,34167$, $y_3 = 1,48329$ вже обчислені методом Рунге-Кутта у прикладі 8.3. Усі наступні значення знайдемо методом Адамса. Виконані обчислення запишемо у таблицю:

i	x_i	y_i	Δy_i	$q_i = h f(x_i, y_i)$	Δq_i	$\Delta^2 q_i$	$\Delta^3 q_i$
0	0	1		0,2			
1	0,2	1,18323		0,16903	-0,03097		
2	0,4	1,34167		0,14908	-0,01995	0,01102	
3	0,6	1,48329	0,12815	<u>0,13486</u>	<u>-0,01422</u>	<u>0,00573</u>	<u>-0,00529</u>
4	0,8	1,61144	0,11842	0,12371	-0,01115	0,00307	-0,00266
5	1,0	1,72986	0,11083	0,11474	-0,00897	0,00218	-0,00089
6	1,2	1,84069					

Зробимо деякі пояснення до складеної таблиці. Заповнення таблиці починаємо із стовпців x_i та y_i , записавши в них відповідно значення вузлів та відомі значення розв'язку y_0, y_1, y_2, y_3 . Потім обчислюємо значення q_0, q_1, q_2, q_3 та скінченні різниці першого порядку $\Delta q_0, \Delta q_1, \Delta q_2$, другого порядку $\Delta^2 q_0, \Delta^2 q_1$ та скінченну різницю третього порядку $\Delta^3 q_0$.

Застосувавши формулу (8.21) при $i = 3$, отримаємо:

$$\Delta y_3 = q_3 + \frac{1}{2} \Delta q_2 + \frac{5}{12} \Delta^2 q_1 + \frac{3}{8} \Delta^3 q_0,$$

тобто

$$\Delta y_3 = 0,13486 + \frac{1}{2} (-0,01422) + \frac{5}{12} \cdot 0,00573 + \frac{3}{8} (-0,00529) = 0,12815.$$

Усі числа, які ми використали для обчислення Δy_3 , в даній таблиці підкреслені.

З формули (8.19) при $i = 3$ одержимо:

$$y_4 = y_3 + \Delta y_3 = 1,48329 + 0,12815 = 1,61144.$$

Потім обчислимо q_4 та скінченні різниці $\Delta q_3, \Delta^2 q_2$ і $\Delta^3 q_1$. Підставляючи отримані значення у формулу (8.21) при $i = 4$, одержимо величину Δy_4 . З формули (8.19) при $i = 4$ знайдемо $y_5 = y_4 + \Delta y_4$ і т.д.

Таким чином, методом Адамса ми обчислили наступні наближені значення розв'язку даної задачі Коші: $y_4 = 1,61144$; $y_5 = 1,72986$; $y_6 = 1,84069$.

8.5. Числові методи розв'язання задачі Коші для системи диференціальних рівнянь першого порядку

Нехай потрібно знайти розв'язок системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y, z), \\ \frac{dz}{dx} = \varphi(x, y, z), \end{cases} \quad (8.23)$$

який задовольняє початкові умови

$$y(x_0) = y_0, \quad z(x_0) = z_0. \quad (8.24)$$

Розв'язок задачі Коші (8.23), (8.24) може бути знайдений за допомогою таких же методів, як і для одного диференціального рівняння. Розглянемо застосування методів Рунге-Кутта і Адамса. Таблицю значень функцій y та z будемо складати для значень аргументу x , які утворюють арифметичну прогресію:

$$x_i = x_0 + i h \quad (i = 0, 1, 2, \dots).$$

Позначимо: $y(x_i) = y_i, \quad z(x_i) = z_i$.

За методом Рунге-Кутта послідовні значення шуканих функцій обчислюємо за формулами:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i; \quad z_{i+1} = z_i + \Delta z_i \quad (i = 0, 1, 2, \dots), \quad (8.25)$$

де

$$\begin{aligned} \Delta y_i &= \frac{1}{6} (k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}), \\ \Delta z_i &= \frac{1}{6} (l_1^{(i)} + 2l_2^{(i)} + 2l_3^{(i)} + l_4^{(i)}), \end{aligned} \quad (8.26)$$

$$\begin{aligned} k_1^{(i)} &= h f(x_i, y_i, z_i), \\ k_2^{(i)} &= h f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}, z_i + \frac{l_1^{(i)}}{2}\right), \\ k_3^{(i)} &= h f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}, z_i + \frac{l_2^{(i)}}{2}\right), \\ k_4^{(i)} &= h f(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}, z_i + l_3^{(i)}); \end{aligned} \quad (8.27)$$

$$\begin{aligned} l_1^{(i)} &= h \varphi(x_i, y_i, z_i), \\ l_2^{(i)} &= h \varphi\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}, z_i + \frac{l_1^{(i)}}{2}\right), \\ l_3^{(i)} &= h \varphi\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}, z_i + \frac{l_2^{(i)}}{2}\right), \\ l_4^{(i)} &= h \varphi(x_i + h, y_i + k_3^{(i)}, z_i + l_3^{(i)}). \end{aligned} \quad (8.28)$$

Нехай методом Рунге-Кутта знайдено по три значення шуканих функцій:

$$\begin{aligned} y_1 &= y(x_1) = y(x_0 + h), & y_2 &= y(x_2) = y(x_0 + 2h), & y_3 &= y(x_3) = y(x_0 + 3h), \\ z_1 &= z(x_1) = z(x_0 + h), & z_2 &= z(x_2) = z(x_0 + 2h), & z_3 &= z(x_3) = z(x_0 + 3h). \end{aligned}$$

Для одержання наступних значень можна застосувати різницевий метод Адамса, який дозволяє отримати результати високої точності при невеликому об'ємі обчислень.

Введемо позначення:

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= h f(x, y, z), & \Phi(x, y, z) &= h \varphi(x, y, z), \\ F_i &= F(x_i, y_i, z_i), & \Phi_i &= \Phi(x_i, y_i, z_i); \end{aligned} \quad (8.29)$$

$\Delta F_i, \Delta^2 F_i, \Delta^3 F_i, \Delta \Phi_i, \Delta^2 \Phi_i, \Delta^3 \Phi_i$ – скінченні різниці першого, другого та третього порядків функцій $F(x, y, z)$ і $\Phi(x, y, z)$.

Запишемо основні формули методу Адамса для системи диференціальних рівнянь:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \quad z_{i+1} = z_i + \Delta z_i, \quad (8.30)$$

$$\begin{aligned} \Delta y_i &= F_i + \frac{1}{2} \Delta F_{i-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 F_{i-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 F_{i-3}, \\ \Delta z_i &= \Phi_i + \frac{1}{2} \Delta \Phi_{i-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 \Phi_{i-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 \Phi_{i-3}, \quad (i = 3, 4, \dots). \end{aligned} \quad (8.31)$$

Приклад 8.5. Застосувавши комбінований метод Рунге-Кутта і Адамса, обчислити значення розв'язку задачі Коші

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{z}, \\ \frac{dz}{dx} = \frac{1}{y-x}, \end{cases} \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 2$$

на відрізку $[0; 1,2]$ з кроком $h = 0,2$.

Розв'язання. Перші три значення функцій $y(x)$ та $z(x)$ обчислимо методом Рунге-Кутта за формулами (8.25)-(8.28). Обчислимо спочатку значення y_1 та z_1 . За умовою задачі

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \quad z_0 = 2, \quad h = 0,2, \quad f(x, y, z) = 1 - \frac{1}{z}, \quad \varphi(x, y, z) = \frac{1}{y-x}.$$

$$k_1^{(0)} = 0,2 \cdot f(0; 1; 2) = 0,1,$$

$$l_1^{(0)} = 0,2 \cdot \varphi(0; 1; 2) = 0,2,$$

$$k_2^{(0)} = 0,2 \cdot f(0,1; 1,05; 2,1) = 0,10476,$$

$$l_2^{(0)} = 0,2 \cdot \varphi(0,1; 1,05; 2,1) = 0,21053,$$

$$k_3^{(0)} = 0,2 \cdot f(0,1; 1,05238; 2,10526) = 0,10500,$$

$$l_3^{(0)} = 0,2 \cdot \varphi(0,1; 1,05238; 2,10526) = 0,21000,$$

$$k_4^{(0)} = 0,2 \cdot f(0,2; 1,10500; 2,21000) = 0,10950,$$

$$l_4^{(0)} = 0,2 \cdot \varphi(0,2; 1,10500; 2,21000) = 0,22099,$$

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6} (0,1 + 2 \cdot 0,10476 + 2 \cdot 0,10500 + 0,10950) = 0,10484,$$

$$\Delta z_0 = \frac{1}{6} (0,2 + 2 \cdot 0,21053 + 2 \cdot 0,21000 + 0,22099) = 0,21034,$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0,10484 = 1,10484,$$

$$z_1 = z_0 + \Delta z_0 = 2 + 0,21034 = 2,21034.$$

Аналогічно обчислюємо значення y_2, z_2 та y_3, z_3 . Результати обчислень наведені в таблиці 1.

Таблиця 1

i	j	x	y	z	$k_j = hf(x, y, z)$	$l_j = h\varphi(x, y, z)$	Δy	Δz
0	1	0	1	2	0,1	0,2	0,10484	0,21034
	2	0,1	1,05	2,1	0,10476	0,21053		
	3	0,1	1,05238	2,10526	0,10500	0,21000		
	4	0,2	1,10500	2,21000	0,10950	0,22099		

1	1	<u>0,2</u>	<u>1,10484</u>	<u>2,21034</u>	0,10952	0,22103	0,11390	0,23246
	2	0,3	1,15960	2,32086	0,11383	0,23267		
	3	0,3	1,16175	2,32668	0,11404	0,23209		
	4	0,4	1,21888	2,44243	0,11811	0,24424		
2	1	<u>0,4</u>	<u>1,21874</u>	<u>2,44280</u>	0,11813	0,24428	0,12209	0,25691
	2	0,5	1,27780	2,56494	0,12203	0,25714		
	3	0,5	1,27975	2,57137	0,12222	0,25649		
	4	0,6	1,34096	2,69929	0,12591	0,26992		
3		<u>0,6</u>	<u>1,34083</u>	<u>2,69971</u>				

Значення функцій $y(x)$ та $z(x)$ для $x_4 = 0,8$, $x_5 = 1,0$, $x_6 = 1,2$ обчислимо методом Адамса за формулами (8.29)-(8.31). За допомогою чисел x_0, x_1, x_2, x_3 ; y_0, y_1, y_2, y_3 ; z_0, z_1, z_2, z_3 визначимо значення $F_0, F_1, F_2, F_3, \Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ і складемо таблицю скінченних різниць величин F та Φ .

Таблиця 2

i	x_i	y_i	z_i	Δy_i	Δz_i	$F_i = hf(x_i, y_i, z_i)$	ΔF_i	$\Delta^2 F_i$	$\Delta^3 F_i$
0	0	1	2			0,1			
1	0,2	1,10484	2,21034			0,10952	0,00952	-0,00091	$9 \cdot 10^{-5}$
2	0,4	1,21874	2,44280			0,11813	0,00861	-0,00082	
3	0,6	1,34083	2,69971	0,12951	0,28391	<u>0,12592</u>	<u>0,00779</u>	-0,00074	$8 \cdot 10^{-5}$
4	0,8	1,47034	2,98362	0,13621	0,31378	0,13297	0,00705	-0,00067	$7 \cdot 10^{-5}$
5	1,0	1,60655	3,29740	0,14229	0,34676	0,13935	0,00638		
6	1,2	1,74884	3,64416						

Таблиця 2 (продовження)

i	$\Phi_i = h\varphi(x_i, y_i, z_i)$	$\Delta \Phi_i$	$\Delta^2 \Phi_i$	$\Delta^3 \Phi_i$
0	0,2			
1	0,22103	0,02103		
2	0,24428	0,02325	0,00222	
3	<u>0,26997</u>	<u>0,02569</u>	<u>0,00244</u>	<u>0,00022</u>
4	0,29836	0,02839	0,00270	0,00026
5	0,32973	0,03137	0,00298	0,00028

За формулами (8.31) при $i=3$ обчислимо Δy_3 і Δz_3 :

$$\begin{aligned}\Delta y_3 &= F_3 + \frac{1}{2} \Delta F_2 + \frac{5}{12} \Delta^2 F_1 + \frac{3}{8} \Delta^3 F_0, \\ \Delta z_3 &= \Phi_3 + \frac{1}{2} \Delta \Phi_2 + \frac{5}{12} \Delta^2 \Phi_1 + \frac{3}{8} \Delta^3 \Phi_0.\end{aligned}\tag{8.32}$$

Усі значення, які потрібно підставляти у вирази (8.32), в таблиці 2 підкреслені.

Отже,

$$\Delta y_3 = 0,12592 + \frac{1}{2} \cdot 0,00779 + \frac{5}{12} (-0,00082) + \frac{3}{8} \cdot 0,00009 = 0,12951,$$

$$\Delta z_3 = 0,26997 + \frac{1}{2} \cdot 0,02569 + \frac{5}{12} \cdot 0,00244 + \frac{3}{8} \cdot 0,00022 = 0,28391.$$

За формулами (8.30) при $i=3$ обчислимо

$$y_4 = y_3 + \Delta y_3 = 1,34083 + 0,12951 = 1,47034,$$

$$z_4 = z_3 + \Delta z_3 = 2,69971 + 0,28391 = 2,98362.$$

Тепер, знаючи y_4 та z_4 , обчислимо F_4 , Φ_4 і скінченні різниці ΔF_3 , $\Delta^2 F_2$, $\Delta^3 F_1$, $\Delta \Phi_3$, $\Delta^2 \Phi_2$, $\Delta^3 \Phi_1$.

Із формул (8.31) при $i=4$ отримаємо:

$$\begin{aligned}\Delta y_4 &= F_4 + \frac{1}{2} \Delta F_3 + \frac{5}{12} \Delta^2 F_2 + \frac{3}{8} \Delta^3 F_1 = 0,13297 + \frac{1}{2} \cdot 0,00705 + \\ &+ \frac{5}{12} (-0,00074) + \frac{3}{8} \cdot 0,00008 = 0,13621,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta z_4 &= \Phi_4 + \frac{1}{2} \Delta \Phi_3 + \frac{5}{12} \Delta^2 \Phi_2 + \frac{3}{8} \Delta^3 \Phi_1 = 0,29836 + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot 0,02839 + \frac{5}{12} \cdot 0,00270 + \frac{3}{8} \cdot 0,00026 = 0,31378.\end{aligned}$$

Отже, $y_5 = y_4 + \Delta y_4 = 1,60655$; $z_5 = z_4 + \Delta z_4 = 3,29740$.

Аналогічно обчислимо

$$\Delta y_5 = 0,13935 + \frac{1}{2} \cdot 0,00638 + \frac{5}{12} (-0,00067) + \frac{3}{8} \cdot 0,00007 = 0,14229,$$

$$\Delta z_5 = 0,32973 + \frac{1}{2} \cdot 0,03137 + \frac{5}{12} \cdot 0,00298 + \frac{3}{8} \cdot 0,00028 = 0,34676.$$

$$y_6 = y_5 + \Delta y_5 = 1,74884, \quad z_6 = z_5 + \Delta z_5 = 3,64416.$$

Отже, ми одержали значення розв'язку даної задачі Коші на відрізку $[0; 1,2]$ з кроком $h=0,2$. В таблиці 2 вони записані у другому, третьому та четвертому стовпцях. Зауважимо, що додаткові дослідження, які тут не наведені, дають підставу стверджувати, що в одержаних результатах чотири знаки після коми вірні.

8.6. Завдання для самостійної роботи

1. Знайти чотири значення розв'язку задачі Коші з кроком h : а) методом Ейлера; б) методом Рунге-Кутта. Знайти точний розв'язок та обчислити похибку результатів а) та б) в точці x_4 .

1.1. $y' = x - y$; $y(0) = 1$; $h = 0,1$;

1.2. $y' = 2x \cos(x^2)$; $y(0) = 1$; $h = 0,1$;

1.3. $y' = y \cos x$; $y(0) = 1$; $h = 0,1$;

1.4. $y' = x + y$; $y(0) = 1$; $h = 0,1$;

1.5. $y' + y \operatorname{ch} x = 0$; $y(0) = 1$; $h = 0,1$;

1.6. $y' = y^2 + \frac{y}{x}$; $y(1) = 1$; $h = 0,1$;

1.7. $y' = x^2 + y$; $y(0) = 1$; $h = 0,1$;

1.8. $y' = 2y - 3$; $y(0) = 1$; $h = 0,1$;

1.9. $y' = y - x$; $y(0) = 1,5$; $h = 0,1$;

1.10. $y' = \frac{y}{x} - y^2$; $y(1) = 1$; $h = 0,1$.

2. Застосувавши комбінований метод Рунге-Кутта і Адамса, обчислити значення розв'язку задачі Коші на відрізку $[a; b]$ з кроком h .

2.1. $y' = \sqrt[3]{x^2 + 3y}$; $y(2) = 3$; $[2; 2,6]$; $h = 0,1$;

2.2. $y' = 1 + x + y^2$; $y(0) = 1,2$; $[0; 1,2]$; $h = 0,2$;

2.3. $y' = x^2 + y^2$; $y(0) = 0,5$; $[0; 1,2]$; $h = 0,2$;

2.4. $4y' = y^2 + 4x^2$; $y(0) = 1,1$; $[0; 1,2]$; $h = 0,2$;

2.5. $y' = (x + y)(1 - xy)$; $y(0) = 1$; $[0; 0,6]$; $h = 0,1$;

2.6. $y' = x + y^2$; $y(0) = 0,5$; $[0; 1,2]$; $h = 0,2$;

2.7. $y' = \frac{2,5}{x + y}$; $y(1) = 1$; $[1; 1,6]$; $h = 0,1$;

2.8. $y' = x + \cos \frac{y}{2}$; $y(0,5) = 1$; $[0,5; 1,1]$; $h = 0,1$;

2.9. $y' = x^2 + e^{-y}$; $y(1) = 0,5$; $[1; 1,6]$; $h = 0,1$;

2.10. $y' = 2x + \ln y$; $y(0,5) = 1,5$; $[0,5; 1,7]$; $h = 0,2$.

РОЗДІЛ 9

МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ

9.1. Основні поняття

Під оптимізацією розуміють процес вибору найкращого в деякому розумінні варіанту з усіх можливих. У процесі розв'язання задачі оптимізації зазвичай потрібно визначити оптимальні значення деяких параметрів, які характеризують дану задачу. При розв'язанні інженерних задач ці параметри називають проектними параметрами, а в економічних задачах – параметрами плану. Кількість n проектних параметрів x_1, x_2, \dots, x_n характеризує вимірність та ступінь складності задачі оптимізації.

Вибір оптимального розв'язку здійснюється за допомогою деякої функції від проектних параметрів. Ця функція називається цільовою. В процесі розв'язання задачі оптимізації потрібно знайти такі значення проектних параметрів, при яких цільова функція має найменше або найбільше значення. Цільову функцію можна записати у вигляді:

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (9.1)$$

Прикладами цільової функції є міцність або маса конструкції, потужність обладнання, об'єм випуску продукції, величина прибутку та інше. У випадку одного проектного параметра ($n=1$) цільова функція (9.1) є функцією однієї змінної і її графік – це деяка лінія на площині. При $n=2$ цільова функція є функцією двох змінних і її графіком є деяка поверхня у тривимірному просторі.

Цільова функція не завжди визначається формулою. Інколи вона може задаватися таблицею. Проте в усіх випадках вона повинна бути однозначною функцією проектних параметрів.

Задачі оптимізації можна поділити на два типи: безумовні та умовні. Безумовна задача оптимізації полягає у знаходженні максимуму або мінімуму функції (9.1) та визначенні відповідних значень аргументів x_1, x_2, \dots, x_n на деякій множині G n -вимірному просторі. Зазвичай розглядають задачі мінімізації; задачі про пошук максимуму зводяться до задач мінімізації шляхом зміни знаку цільової функції на протилежний.

Умовні задачі оптимізації або задачі з обмеженнями – це такі задачі, при формулюванні яких задаються деякі умови (обмеження) на множині G . Ці обмеження задаються сукупністю деяких функцій від проектних параметрів, які задовольняють рівняння або нерівності. Кількість обмежень може бути довільною.

Обмеження-рівності записують у вигляді:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\
\varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \\
&\dots\dots\dots \\
\varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0.
\end{aligned}
\tag{9.2}$$

Аналогічно вводять обмеження-нерівності:

$$\begin{aligned}
a_1 &\leq \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_1, \\
a_2 &\leq \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_2, \\
&\dots\dots\dots \\
a_k &\leq \varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_k.
\end{aligned}
\tag{9.3}$$

Методи розв'язання задач оптимізації з обмеженнями розглядають в одному з розділів прикладної математики – математичному програмуванні.

9.2. Одновимірна оптимізація. Метод золотого перерізу

Одновимірна задача оптимізації формулюється так: знайти найменше або найбільше значення цільової функції $y = f(x)$, заданої на множині G , і визначити значення проектного параметра $x \in G$, при якому цільова функція приймає екстремальне значення. Існування розв'язку поставленої задачі впливає із наступної теореми.

Теорема Вейєрштрасса. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відріжку $[a, b]$, то вона приймає на цьому відріжку найбільше та найменше значення, тобто на відріжку $[a, b]$ існують такі точки x_1 і x_2 , що для будь-якого $x \in [a, b]$ справджуються нерівності

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2).$$

Нехай функція $y = f(x)$ задана аналітично і вона диференційовна на відріжку $[a, b]$.

Як відомо з курсу математичного аналізу, функція $y = f(x)$ досягає свого найбільшого та найменшого значень або в точках екстремуму, або на кінцях відрізка. Тому для визначення найменшого та найбільшого значень функції $f(x)$ на відріжку $[a, b]$ потрібно обчислити її значення на кінцях відрізка та в усіх критичних точках, які містяться на даному відріжку, і з одержаних значень вибрати найменше та найбільше. Часто рівняння $f'(x) = 0$ для знаходження критичних точок необхідно розв'язувати числовим методом.

Якщо цільова функція задана таблично, то методи математичного аналізу використати неможливо. Тому в задачах оптимізації застосовують методи пошуку, які ґрунтуються на обчисленні значень цільової функції в окремих точках і виборі серед них найменшого або найбільшого значень. Одним із найефективніших методів пошуку, в якому при обмеженій кількості обчислень

значень функції $f(x)$ досягається найкраща точність, є метод золотого перерізу. Він полягає в побудові послідовності відрізків $[a_0, b_0], [a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots$, які стягуються в точку ξ мінімуму функції $f(x)$. На кожному кроці, крім першого, значення функції $f(x)$ обчислюється тільки один раз. Ця точка, яка називається золотим перерізом, вибирається спеціальним способом.

Золотим перерізом називається такий поділ відрізка $[a, b]$ точкою c на дві нерівні частини, при якому відношення довжини більшої частини відрізка до довжини всього відрізка дорівнює відношенню довжини меншої частини до довжини більшої частини відрізка.

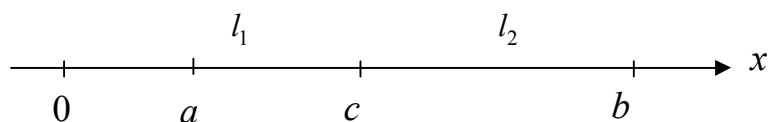


Рисунок 10

Нехай довжина відрізка $[a, b]$ дорівнює l , довжина меншої частини відрізка дорівнює l_1 , довжина більшої частини – l_2 .

Отже,

$$\frac{l_2}{l} = \frac{l_1}{l_2}. \quad (9.4)$$

Звідси $l_2^2 = l_1 l$; $l_2^2 = l_1(l_1 + l_2)$;

$$\left(\frac{l_1}{l_2}\right)^2 + \frac{l_1}{l_2} - 1 = 0. \quad (9.5)$$

Оскільки $l_1 > 0$, $l_2 > 0$, то з рівняння (9.5) одержуємо, що $\frac{l_1}{l_2} \approx 0,618$.

З умови (9.4) випливає, що $l_2 = 0,618l$. Тоді $l_1 = 0,382l$ і $\frac{l_1}{l_2} = \frac{0,382}{0,618}$.

Знайдемо значення c як координату точки, яка ділить відрізок $[a, b]$ у відношенні $\lambda = \frac{0,382}{0,618}$; $c = \frac{a + \lambda b}{1 + \lambda}$.

Звідси

$$c = 0,618a + 0,382b. \quad (9.6)$$

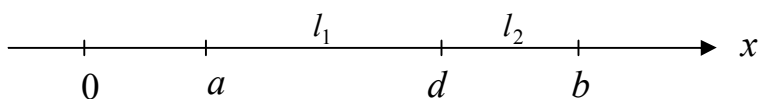


Рисунок 11

Якщо $l_1 > l_2$, як зображено на рис.11, то аналогічно можна визначити:

$$d = 0,382 a + 0,618 b. \quad (9.7)$$

Кожна з точок c і d здійснює золотий переріз відрізка $[a, b]$. Крім цього, точка c здійснює золотий переріз відрізка $[a, d]$, а точка d – золотий переріз відрізка $[c, b]$.

Розглянемо задачу мінімізації функції $f(x)$. Припустимо, що всередині відрізка $[a, b]$ існує тільки один мінімум функції $f(x)$. Обчислимо значення функції в точках c та d і порівняємо їх між собою.

Якщо $f(c) < f(d)$, то приймаємо:

$$a_1 = a; \quad b_1 = d; \quad d_1 = c; \quad c_1 = 0,618a_1 + 0,382b_1. \quad (9.8)$$

Якщо $f(c) \geq f(d)$, то приймаємо:

$$a_1 = c; \quad b_1 = b; \quad c_1 = d; \quad d_1 = 0,382a_1 + 0,618b_1. \quad (9.9)$$

Продовжуючи аналогічно, отримуємо формули для визначення координат точок поділу c_k і d_k ($c_k < d_k$) на $(k+1)$ -му кроці мінімізації:

$$\begin{aligned} c_k &= 0,618 a_k + 0,382 b_k, \\ d_k &= 0,382 a_k + 0,618 b_k. \end{aligned} \quad (9.10)$$

При цьому, якщо $f(c_k) < f(d_k)$, то приймаємо

$$a_{k+1} = a_k, \quad b_{k+1} = d_k, \quad d_{k+1} = c_k. \quad (9.11)$$

Якщо $f(c_k) \geq f(d_k)$, то приймаємо

$$a_{k+1} = c_k, \quad b_{k+1} = b_k, \quad c_{k+1} = d_k. \quad (9.12)$$

При цьому довжина відрізка $[a_k, b_k]$

$$h_k = b_k - a_k = 0,618^k (b - a). \quad (9.13)$$

Процес мінімізації закінчують при $h_k < \varepsilon$, де ε – задана абсолютна похибка. Проектний параметр мінімізації ξ задовольняє умову $a_k < \xi < b_k$. За наближене значення параметра ξ можна взяти:

$$\xi^* = \frac{a_k + b_k}{2}. \quad (9.14)$$

Приклад 9.1. Визначити найменше значення функції $f(x) = e^{-x} - 2 \cos x$ на відрізку $[0, 1]$. Точку ξ , в якій дана функція приймає це найменше значення, знайти з абсолютною похибкою $\varepsilon \leq 0,01$.

Розв'язання. Перевіримо, чи приймає дана функція своє найменше значення на відрізку $[0, 1]$ в деякій внутрішній точці ξ цього відрізка. Знайдемо критичні точки функції $f(x)$, які містяться на відрізку $[0, 1]$. $f'(x) = -e^{-x} + 2 \sin x$. Оскільки $f'(0) = -1$, $f'(1) = 1,315$, то існує принаймні одна така точка ξ , $0 < \xi < 1$, що $f'(\xi) = 0$.

Можна переконатися, наприклад, графічним способом, що така точка ξ на відрізку $[0, 1]$ єдина. Оскільки $f'(x) < 0$ при $x < \xi$ і $f'(x) > 0$ при $x > \xi$, то в

точці $x = \xi$ функція $f(x)$ має мінімум. Отже, функція $f(x)$ приймає в точці $x = \xi$ своє найменше значення на відрізку $[0, 1]$.

Позначимо $\gamma_k = f(c_k) - f(d_k)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). За умовою задачі $a_0 = a = 0$, $b_0 = b = 1$. Застосовуючи формули (9.6), (9.7), отримаємо: $c = c_0 = 0,382$, $d = d_0 = 0,618$. Обчислюємо $f(c_0) = -1,17335$, $f(d_0) = -1,09106$. Оскільки $f(c_0) < f(d_0)$, тобто $\gamma_0 < 0$, то $\xi \in [0; 0,618]$ Згідно з формулою (9.8) приймаємо: $a_1 = 0$, $b_1 = 0,618$, $d_1 = 0,382$ і обчислюємо $c_1 = 0,618a_1 + 0,382b_1 = 0,236$. Обчислюємо $f(c_1) = -1,15478$. Оскільки $f(c_1) > f(d_1)$, тобто $\gamma_1 > 0$, то $\xi \in [0,236; 0,618]$. Згідно з формулою (9.12) приймаємо: $a_2 = 0,236$, $b_2 = 0,618$, $c_2 = 0,382$ і обчислюємо $d_2 = 0,382a_2 + 0,618b_2 = 0,472$. Подальші обчислення проводимо аналогічно. Процес мінімізації закінчимо, як тільки справдиться нерівність $h_k = b_k - a_k < 0,01$.

Результати обчислень доцільно записати у таблицю:

k	a_k	b_k	c_k	d_k	$f(c_k)$	$f(d_k)$	Знак γ_k	h_k
0	0	1	0,382	0,618	-0,17335	-1,09106	-	1
1	0	0,618	0,236	0,382	-1,15478	-1,17335	+	0,618
2	0,236	0,618	0,382	0,472	-1,17335	-1,15757	-	0,382
3	0,236	0,472	0,326	0,382	-1,17286	-1,17335	+	0,236
4	0,326	0,472	0,382	0,416	-1,17335	-1,16975	-	0,146
5	0,326	0,416	0,360	0,382	-1,17412	-1,17335	-	0,090
6	0,236	0,382	0,347	0,360	-1,17399	-1,17412	+	0,056
7	0,347	0,382	0,360	0,369	-1,17412	-1,17395	-	0,035
8	0,347	0,369	0,355	0,360	-1,174120	-1,174117	-	0,022
9	0,347	0,360	0,352	0,355	-1,174090	-1,174120	+	0,013
10	0,352	0,360						0,008

Оскільки $h_{10} = 0,008 < 0,01$, то процес мінімізації закінчено. За наближене значення ξ приймаємо $\xi^* = \frac{0,352 + 0,360}{2} = 0,356$; $f_{\min} = f(0,356) = -1,174124$.

9.3. Багатовимірні задачі оптимізації

У попередньому параграфі ми розглянули одновимірну задачу оптимізації, в якій цільова функція залежить лише від одного аргументу. Проте в більшості реальних задач оптимізації цільова функція залежить від багатьох проектних параметрів.

Щоб знайти мінімум диференційовної функції кількох змінних $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, потрібно дослідити її значення в критичних точках, які визначаються системою рівнянь

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0. \quad (9.15)$$

Проте можуть виникнути значні труднощі при розв'язанні нелінійної системи (9.15). Крім того, в багатьох випадках цільова функція не задається аналітично, а відомий тільки спосіб для визначення значень цільової функції в довільних точках області G за допомогою деякого алгоритму чи вимірювання. Задача мінімізації полягає в наближеному визначенні найменшого значення функції в цій області, якщо відомі її значення в окремих точках. Можна ввести дискретну множини точок (вузлів), поділивши інтервали зміни параметрів x_1, x_2, \dots, x_n на частини з кроками h_1, h_2, \dots, h_n , обчислити значення цільової функції в одержаних вузлах і серед цих значень знайти найменше. Але в багатовимірних задачах оптимізації цей метод загального пошуку потребує дуже великого обсягу обчислень. Тому до цих задач застосовують числові методи, які ґрунтуються на цілеспрямованому пошуку. Розглянемо один із таких методів, який називається методом градієнтного спуску. З курсу математичного аналізу відомо, що напрям найшвидшого зростання функції $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ визначається її градієнтом:

$$\text{gradu} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right).$$

Отже, напрям, який є протилежним до градієнтного, визначає напрям найшвидшого спадання функції.

Розглянемо ідею методу градієнтного спуску. Вибираємо деяку початкову точку і обчислюємо градієнт даної функції в цій точці. Робимо крок у напрямку, протилежному до градієнтного, і приходимо в точку, значення функції в якій зазвичай менше від початкового. Якщо значення функції не змінилося або навіть зросло, то потрібно зменшити крок. У новій точці процедуру повторюємо: обчислюємо градієнт і знову робимо крок у протилежному до нього напрямку. Процес продовжується до одержання найменшого значення цільової функції. Пошук закінчується тоді, коли рух із отриманої точки з будь-яким кроком призводить до зростання значення цільової функції. Зауважимо, що коли мінімум функції досягається всередині даної області, то в цій точці градієнт даної функції дорівнює нулю; це також є сигналом про закінчення процесу мінімізації.

У методі градієнтного спуску потрібно на кожному кроці оптимізації обчислювати градієнт цільової функції. Тому доцільно зменшити кількість

таких кроків. Це досягається в деяких методах, які є модифікаціями методу градієнтного спуску. Одним із них є метод найшвидшого спуску. Він полягає в тому, що після визначення у початковій точці напрямку, протилежного до градієнтного, в цьому напрямку роблять не один крок, а рухаються доти, доки цільова функція спадає, досягаючи в деякій точці мінімуму. В цій точці знову визначають напрям спуску, тобто напрям, протилежний до градієнтного, і шукають нову точку мінімуму цільової функції і т. д. У цьому методі спуск проводиться набагато більшими кроками і градієнт обчислюється у меншій кількості точок. Зауважимо, що метод найшвидшого спуску зводить багатовимірну задачу оптимізації до послідовності одновимірних задач на кожному кроці оптимізації, при цьому напрям одновимірної оптимізації визначається градієнтом цільової функції.

Розглянемо, наприклад, двічі неперервно диференційовну в області G функцію двох змінних $u = f(x_1, x_2)$. Нехай в деякій внутрішній точці $M^*(x_1^*, x_2^*)$ області G ця функція має найменше значення. Припустимо, що ми знайшли точку $M_k(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$, яка є k -тим наближенням до точки $M^*(x_1^*, x_2^*)$. Обчислимо градієнт функції у точці M_k

$$\text{grad } f(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) = \left(\frac{\partial f(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2} \right)$$

і будемо рухатися у напрямку вектора $\overline{M_k M} = -\alpha \text{grad } f(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})$, де α – деяке додатне число.

$$\begin{aligned} \text{Якщо точка } M \text{ має координати } x_1 \text{ та } x_2, \text{ то } x_1 - x_1^{(k)} &= -\alpha \frac{\partial f(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1}, \\ x_2 - x_2^{(k)} &= -\alpha \frac{\partial f(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2}. \end{aligned}$$

Звідси отримуємо:

$$x_1 = x_1^{(k)} - \alpha \frac{\partial f(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1}, \quad x_2 = x_2^{(k)} - \alpha \frac{\partial f(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2}. \quad (9.16)$$

Розглянемо функцію

$$F(\alpha) = f\left(x_1^{(k)} - \alpha \frac{\partial f(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1}, x_2^{(k)} - \alpha \frac{\partial f(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2}\right) \quad (9.17)$$

і знайдемо значення $\alpha = \alpha^{(k)}$, яке мінімізує функцію $F(\alpha)$.

Тоді з формул (9.16) знайдемо наступне наближення

$$x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} - \alpha^{(k)} \frac{\partial f(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_1}, \quad x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} - \alpha^{(k)} \frac{\partial f(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_2} \quad (9.18)$$

і процес обчислень продовжимо аналогічно. Процес мінімізації закінчимо, якщо, наприклад,

$$\max_i \left| \frac{\partial f(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})}{\partial x_i} \right| < \varepsilon, \quad (9.19)$$

де ε – задана абсолютна похибка.

Для випадку функції n змінних $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ позначимо $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Функція $F(\alpha)$ матиме вигляд:

$$F(\alpha) = f\left(\vec{x}^{(k)} - \alpha \operatorname{grad} f\left(\vec{x}^{(k)}\right)\right), \quad \alpha > 0. \quad (9.20)$$

Формули (9.18) запишуться так:

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - \alpha^{(k)} \operatorname{grad} f\left(\vec{x}^{(k)}\right), \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (9.21)$$

9.4. Застосування методу найшвидшого спуску до задачі мінімізації квадратичної функції

Нехай у деякому околі критичної точки $M^*(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ функція $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ є двічі неперервно диференційовною. Як відомо з курсу математичного аналізу, якщо в цій точці диференціал другого порядку $d^2u = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$ є додатно (від'ємно) визначеною квадратичною формою від диференціалів dx_1, dx_2, \dots, dx_n , то у цій критичній точці функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ має мінімум (максимум).

Зауважимо, що квадратичною формою від змінних t_1, t_2, \dots, t_n називається функція

$$\Phi(t_1, t_2, \dots, t_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} t_i t_j, \quad (a_{ij} = a_{ji}). \quad (9.22)$$

Числа a_{ij} називаються коефіцієнтами квадратичної форми, а матриця з цих коефіцієнтів $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ називається матрицею квадратичної форми. Сформулюємо критерій знаковизначеності квадратичної форми – критерій Сільвестра. Для того, щоб квадратична форма (9.22) була додатно визначеною, необхідно і достатньо, щоб виконувалися нерівності:

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \dots, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0. \quad (9.23)$$

При виконанні умов (9.23) матриця A також називається додатно визначеною.

Для того, щоб квадратична форма (9.22) була від'ємно визначеною, необхідно і достатньо, щоб виконувалися нерівності:

$$a_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} < 0, \dots, \quad (-1)^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0. \quad (9.24)$$

При виконанні нерівностей (9.24) матриця A також називається від'ємно визначеною.

Метод найшвидшого спуску досить просто реалізується для квадратичної функції вигляду

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{2}(A\vec{x}, \vec{x}) - (\vec{b}, \vec{x}), \quad (9.25)$$

де A – симетрична додатно визначена матриця порядку n , \vec{b} та \vec{x} – вектори з векторного простору E_n , (\vec{x}, \vec{y}) – скалярний добуток векторів з E_n .

Можна довести, що ця функція має єдиний екстремум, а саме мінімум. У даному випадку

$$\text{grad } f(\vec{x}^{(k)}) = A\vec{x}^{(k)} - \vec{b}, \quad (9.26)$$

величина $\alpha^{(k)}$ визначається за формулою:

$$\alpha^{(k)} = \frac{(A\vec{x}^{(k)} - \vec{b}, A\vec{x}^{(k)} - \vec{b})}{(A(A\vec{x}^{(k)} - \vec{b}), A\vec{x}^{(k)} - \vec{b})}. \quad (9.27)$$

Приклад 9.2. Методом найшвидшого спуску обчислити найменше значення функції $f(\vec{x}) = \frac{1}{2}(A\vec{x}, \vec{x}) - (\vec{b}, \vec{x})$ з точністю $\varepsilon = 0,02$, взявши за початкове наближення вектор $\vec{x}^{(0)}$, якщо A – симетрична додатно визначена матриця третього порядку, (\vec{x}, \vec{y}) – скалярний добуток векторів у тривимірному просторі:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 1,3 \\ 1,2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. За формулою (9.26) при $k=0$ обчислимо $\text{grad } f(\vec{x}^{(0)})$:

$$\begin{aligned} \text{grad } f(\vec{x}^{(0)}) &= A\vec{x}^{(0)} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,6 \\ 1,3 \\ 1,2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1,8 + 1,3 - 1,2 \\ 0,6 + 5,2 + 2,4 \\ -0,6 + 2,6 + 7,2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,9 \\ 8,2 \\ 9,2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,1 \\ 0,2 \\ 0,2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Формулу (9.27) запишемо у вигляді: $\alpha^{(k)} = \frac{\gamma^{(k)}}{\eta^{(k)}}$.

$$\gamma^{(0)} = (A\vec{x}^{(0)} - \vec{b}, A\vec{x}^{(0)} - \vec{b}) = (-0,1)^2 + 0,2^2 + 0,2^2 = 0,09.$$

$$A(A\vec{x}^{(0)} - \vec{b}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,1 \\ 0,2 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,3 + 0,2 - 0,2 \\ -0,1 + 0,8 + 0,4 \\ 0,1 + 0,4 + 1,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,3 \\ 1,1 \\ 1,7 \end{pmatrix}.$$

$$\eta^{(0)} = (A(A\vec{x}^{(0)} - \vec{b}), A\vec{x}^{(0)} - \vec{b}) = -0,1(-0,3) + 0,2 \cdot 1,1 + 0,2 \cdot 1,7 = 0,59.$$

$$\alpha^{(0)} = \frac{\gamma^{(0)}}{\eta^{(0)}} = \frac{0,09}{0,59} = 0,1525.$$

За формулою (9.21) при $k = 0$ знаходимо перше наближення:

$$\vec{x}^{(1)} = \vec{x}^{(0)} - \alpha^{(0)} \text{grad } f(\vec{x}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 1,3 \\ 1,2 \end{pmatrix} - 0,1525 \begin{pmatrix} -0,1 \\ 0,2 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6152 \\ 1,2695 \\ 1,1695 \end{pmatrix}.$$

Наступні обчислення виконуємо аналогічно. Знаходимо $\text{grad } f(\vec{x}^{(1)}) = A\vec{x}^{(1)} - \vec{b}$:

$$\text{grad } f(\vec{x}^{(1)}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,6152 \\ 1,2695 \\ 1,1695 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,0544 \\ 0,0322 \\ -0,0643 \end{pmatrix}.$$

$$A(A\vec{x}^{(1)} - \vec{b}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,0544 \\ 0,0322 \\ -0,0643 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,0667 \\ -0,0542 \\ -0,2670 \end{pmatrix}.$$

$$\gamma^{(1)} = (-0,0544)^2 + 0,0322^2 + (-0,0643)^2 = 0,00813.$$

$$\eta^{(1)} = -0,0544(-0,0667) + 0,0322(-0,0544) - 0,0643(-0,2670) = 0,01905.$$

$$\alpha^{(1)} = \frac{\gamma^{(1)}}{\eta^{(1)}} = \frac{0,00813}{0,01905} = 0,4268.$$

Друге наближення:

$$\vec{x}^{(2)} = \vec{x}^{(1)} - \alpha^{(1)} \text{grad } f(\vec{x}^{(1)}) = \begin{pmatrix} 0,6152 \\ 1,2695 \\ 1,1695 \end{pmatrix} - 0,4268 \begin{pmatrix} -0,0544 \\ 0,0322 \\ -0,0643 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6385 \\ 1,2558 \\ 1,1969 \end{pmatrix}.$$

Знову обчислюємо $\text{grad } f(\vec{x}^{(2)})$:

$$\text{grad } f(\vec{x}^{(2)}) = A\vec{x}^{(2)} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,6385 \\ 1,2558 \\ 1,1969 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,0256 \\ 0,0555 \\ 0,0545 \end{pmatrix}.$$

$$\gamma^{(2)} = (-0,0256)^2 + 0,0555^2 + 0,0545^2 = 0,00671$$

$$A(A\vec{x}^{(2)} - \vec{b}) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,0256 \\ 0,0555 \\ 0,0545 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,0758 \\ 0,3054 \\ 0,4636 \end{pmatrix}.$$

$$\eta^{(2)} = -0,0256(-0,0758) + 0,0555 \cdot 0,3054 + 0,0545 \cdot 0,4636 = 0,04416.$$

$$\alpha^{(2)} = \frac{\gamma^{(2)}}{\eta^{(2)}} = \frac{0,00671}{0,04416} = 0,1519.$$

Третє наближення:

$$\vec{x}^{(3)} = \vec{x}^{(2)} - \alpha^{(2)} \text{grad } f(\vec{x}^{(2)}) = \begin{pmatrix} 0,6385 \\ 1,2558 \\ 1,1969 \end{pmatrix} - 0,1519 \begin{pmatrix} -0,0256 \\ 0,0555 \\ -0,0545 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6424 \\ 1,2474 \\ 1,1886 \end{pmatrix}.$$

Канонічна форма задачі мінімізації має вигляд: знайти такі числові значення змінних x_1, x_2, \dots, x_n , які задовольняють систему лінійних рівнянь

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad (9.30)$$

і умову невід'ємності

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad \dots, \quad x_n \geq 0, \quad (9.31)$$

для яких цільова функція (9.29) досягає мінімуму.

Нерівності різних знаків системи (9.28) завжди можна звести до нерівностей одного знаку множенням їх обох частин на -1 , так що завжди розглядаються нерівності одного знаку (\geq або \leq).

Стандартна форма задачі мінімізації має вигляд: знайти такі числові значення змінних x_1, x_2, \dots, x_n , які задовольняють систему лінійних нерівностей

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\geq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\geq b_2, \\ &\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\geq b_m \end{aligned} \quad (9.32)$$

і умову невід'ємності (9.31), для яких цільова функція (9.29) досягає мінімуму.

Від стандартної форми задачі мінімізації можна перейти до відповідної їй канонічної форми і навпаки.

У випадку двох змінних задачі лінійного програмування можна розв'язувати геометричним методом. Як відомо, рівняння $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$ визначає на площині в декартовій системі координат пряму лінію. Якщо $b_1 = 0$, то відповідна пряма проходить через початок координат. Нерівність $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1$ визначає в декартовій системі півплощину з граничною прямою $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$. Другу півплощину визначає нерівність $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 < b_1$.

Розглянемо систему m лінійних нерівностей з двома змінними

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &\geq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &\geq b_2, \\ &\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 &\geq b_m. \end{aligned} \quad (9.33)$$

Кожна з нерівностей системи (9.33) визначає півплощину. Перетин цих m півплощин визначає множину усіх розв'язків системи (9.33). Нас цікавить множина невід'ємних розв'язків, тобто тих, які містяться в I чверті координатної площини. Можна довести, що для двовимірного випадку множина невід'ємних розв'язків системи (9.33) є многокутною областю G . Вона може бути як обмеженою, так і необмеженою і навіть порожньою (якщо система нерівностей суперечлива). Ця область є опуклою, тобто будь-які дві її точки можна з'єднати відрізком, усі точки якого належать області G .

Опорною прямою називається пряма, яка має з областю принаймні одну спільну точку і при цьому вся область розміщена з одного боку від цієї прямої.

Нехай задана лінійна цільова функція двох змінних $u = c_1x_1 + c_2x_2$ і потрібно серед допустимих розв'язків $(x_1, x_2) \in G$ знайти такий розв'язок, при якому цільова функція u приймає найменше або найбільше значення.

Напрямом найшвидшого зростання функції $u = c_1x_1 + c_2x_2$ визначається її градієнтом $grad\ u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) = (c_1, c_2)$. Напрямом, протилежним до градієнтного, визначає напрям найшвидшого спадання цієї функції.

Припустимо, що цільова функція u дорівнює деякому сталому значенню c . Це стале значення цільова функція u приймає в усіх точках прямої

$$c_1x + c_2x_2 = c, \quad (9.34)$$

яка перпендикулярна до вектора $grad\ u$ і називається лінією рівня функції u .

При переміщенні цієї прямої паралельно самій собі в напрямі вектора $grad\ u$ цільова функція u буде зростати, а при переміщенні прямої в протилежному напрямі – спадати.

Побудуємо лінію рівня $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$, яка проходить через початок координат. Будемо переміщувати цю лінію рівня паралельно самій собі в напрямі вектора $grad\ u$ при знаходженні найбільшого значення цільової функції в області допустимих значень G або в напрямі вектора $-grad\ u$ при знаходженні найменшого значення цільової функції. Точки, які є спільними для лінії рівня та області G при умові, що лінія рівня стає опорною прямою, будуть оптимальними.

Таким чином, оптимізація лінійної цільової функції u на багатокутнику допустимих розв'язків відбувається в точках перетину цього багатокутника з опорними прямими, які відповідають даній цільовій функції. При цьому перетин може бути в одній точці (вершині багатокутника) або в нескінченній множині точок (на стороні багатокутника).

Приклад 9.3. Знайти такі значення змінних x_1, x_2 , які задовольняють систему нерівностей

$$8x_1 + 5x_2 \geq 12,$$

$$-2x_1 + 3x_2 \leq 6,$$

$$x_1 + x_2 \leq 7,$$

$$x_2 \geq 1, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

і при яких цільова функція $u = 2x_1 + 3x_2$ досягає найменшого та найбільшого значень.

Розв'язання. Побудуємо прямі

$$8x_1 + 5x_2 = 12, \quad (1)$$

$$-2x_1 + 3x_2 = 6, \quad (2)$$

$$x_1 + x_2 = 7, \quad (3)$$

$$x_2 = 1, \quad (4)$$

та зобразимо область G допустимих розв'язків даної задачі (чотирикутник $ABDE$).

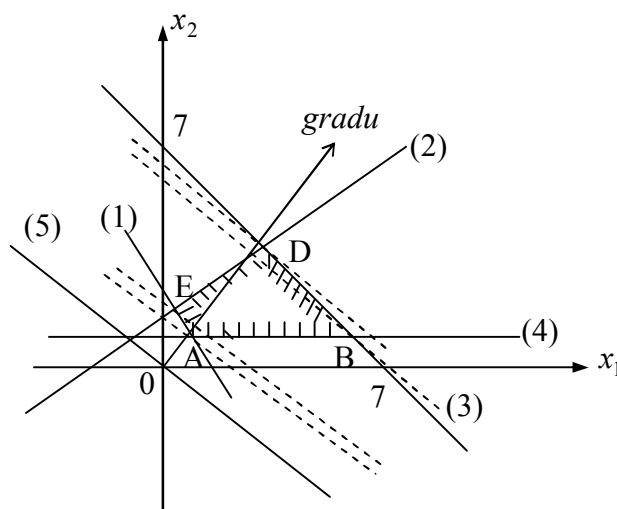


Рисунок 12

Побудуємо лінію рівня (5) $2x_1 + 3x_2 = 0$, яка проходить через початок координат, та вектор $grad u = (2, 3)$. Будемо переміщувати пряму $2x_1 + 3x_2 = 0$ паралельно самій собі в напрямі градієнта функції u . Оскільки в цьому напрямі цільова функція $u = 2x_1 + 3x_2$ зростає, то найменшого значення в області допустимих розв'язків G вона досягає у вершині A , а найбільшого – у вершині D .

Щоб знайти координати точок A та D , розв'яжемо дві системи рівнянь:

$$\begin{array}{ll} \text{а)} & \begin{cases} 8x_1 + 5x_2 = 12, \\ x_2 = 1; \end{cases} & \text{б)} & \begin{cases} -2x_1 + 3x_2 = 6, \\ x_1 + x_2 = 7. \end{cases} \end{array}$$

З першої системи одержимо $x_1 = \frac{7}{8}$, $x_2 = 1$, тобто $A\left(\frac{7}{8}, 1\right)$; з другої – $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, тобто $D(3, 4)$.

Отже, найменше значення цільової функції

$$u_{\min} = 2 \cdot \frac{7}{8} + 3 = 4,75,$$

а найбільше значення

$$u_{\max} = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 18.$$

Зауваження. Якщо поставимо задачу про екстремум, наприклад, цільової функції $u_1 = -2x_1 + 3x_2$ при тих самих обмеженнях на область допустимих значень, то за допомогою аналогічних міркувань можна пересвідчитися, що мінімального значення функція u_1 набуде у вершині B , а максимального – в будь-якій точці відрізка ED .

9.6. Симплексний метод

Геометричний метод розв'язання задач лінійного програмування можна застосувати й у тривимірному просторі, проте це застосування пов'язане з такими громіздкими побудовами, що стає практично неможливим.

Розглянемо симплексний метод, який дає можливість розв'язувати задачі лінійного програмування з будь-якою скінченною кількістю змінних. Покажемо застосування цього методу до випадку, коли обмеження (9.28) задаються у вигляді нерівностей одного знаку \leq і усі праві частини нерівностей $b_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Для спрощення викладу приймемо, наприклад, $m = 3$, $n = 4$.

Отже, розглянемо задачу мінімізації: знайти такі числові значення змінних x_1, x_2, x_3, x_4 , які задовольняють систему лінійних нерівностей

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &\leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &\leq b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &\leq b_3, \end{aligned} \quad (9.35)$$

умову невід'ємності

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0 \quad (9.36)$$

і для яких цільова функція

$$u = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 \quad (9.37)$$

досягає мінімуму.

Систему лінійних нерівностей (9.35) перетворимо у систему лінійних рівнянь, додавши до лівої частини кожної нерівності по одній невід'ємній змінній x_5, x_6, x_7 :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + x_5 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + x_6 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + x_7 &= b_3. \end{aligned} \quad (9.38)$$

Змінні x_5, x_6, x_7 називаються додатковими змінними. В цільову функцію (9.37) їх вводять із нульовими коефіцієнтами, тобто вигляд цільової функції не змінюється.

Приймемо змінні x_5, x_6, x_7 за базисні й виразимо їх із системи (9.38) через всі інші змінні:

$$\begin{aligned} x_5 &= b_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - a_{14}x_4, \\ x_6 &= b_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - a_{23}x_3 - a_{24}x_4, \\ x_7 &= b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - a_{33}x_3 - a_{34}x_4. \end{aligned} \quad (9.39)$$

За опорний розв'язок візьмемо такий розв'язок, який відповідає нульовим значенням вільних змінних x_1, x_2, x_3, x_4 :

$$x_1^{(0)} = 0, x_2^{(0)} = 0, x_3^{(0)} = 0, x_4^{(0)} = 0, x_5^{(0)} = b_1, x_6^{(0)} = b_2, x_7^{(0)} = b_3. \quad (9.40)$$

Цьому розв'язку відповідає нульове значення цільової функції (9.37): $u^{(0)} = 0$.

Подальше розв'язання задачі лінійного програмування симплексним методом ділиться на ряд етапів, які полягають у тому, що від одного розв'язку потрібно перейти до іншого при умові, щоб цільова функція не зростала. Цього досягають вибором нового базису і нових значень вільних змінних.

Вияснимо, чи є розв'язок (9.40) оптимальним. Оскільки $x_i \geq 0$ ($i=1,2,\dots,7$), то ми можемо тільки збільшувати їх значення. Якщо всі коефіцієнти c_1, c_2, c_3, c_4 у формулі (9.37) невід'ємні, то при збільшенні будь-якої змінної x_1, \dots, x_4 цільова функція не може зменшитися. В цьому випадку розв'язок (9.40) буде оптимальним.

Нехай серед коефіцієнтів формули (9.37) є хоча б один від'ємний, наприклад, $c_1 < 0$. Це означає, що при збільшенні змінної x_1 цільова функція (9.37) буде зменшуватися порівняно із значенням $u^{(0)}$, яке відповідає розв'язку (9.40). Тому за новий опорний розв'язок вибираємо розв'язок при таких значеннях вільних параметрів:

$$x_1 = x_1^{(1)}, \quad x_2 = x_3 = x_4 = 0. \quad (9.41)$$

При цьому базисні змінні обчислюємо за формулами:

$$x_5 = b_1 - a_{11}x_1^{(1)}, \quad x_6 = b_2 - a_{21}x_1^{(1)}, \quad x_7 = b_3 - a_{31}x_1^{(1)}. \quad (9.42)$$

Якщо всі коефіцієнти a_{11}, a_{21}, a_{31} недодатні, то x_1 можна збільшувати необмежено; в цьому випадку не існує оптимального розв'язку задачі.

Зазвичай серед цих коефіцієнтів є додатні числа, а тому існує можливість зробити деякі базисні змінні від'ємними.

Тому змінну x_1 можна збільшувати тільки доти, доки всі базисні змінні залишаються невід'ємними. Нехай, наприклад, у формулі (9.42) $a_{11} > 0$ та $a_{21} > 0$.

Знайдемо числа $\frac{b_1}{a_{11}}$ та $\frac{b_2}{a_{21}}$ і виберемо з них менше.

$$\text{Нехай } \min \left\{ \frac{b_1}{a_{11}}, \frac{b_2}{a_{21}} \right\} = \frac{b_2}{a_{21}}.$$

Тоді змінну x_1 можна збільшити тільки до значення $\frac{b_2}{a_{21}}$, оскільки при більших значеннях x_1 базисна змінна x_6 буде від'ємною.

Новий опорний розв'язок запишемо у вигляді:

$$x_1^{(1)} = \frac{b_2}{a_{21}}, \quad x_2^{(1)} = 0, \quad x_3^{(1)} = 0, \quad x_4^{(1)} = 0, \quad (9.43)$$

$$x_5^{(1)} = b_1 - a_{11} \frac{b_2}{a_{21}}, \quad x_6^{(1)} = 0, \quad x_7^{(1)} = b_3 - a_{31} \frac{b_2}{a_{21}}.$$

Цільова функція при цих значеннях проектних параметрів має значення $u^{(1)} = c_1 \cdot \frac{b_2}{a_{21}}$. Оскільки за припущенням $c_1 < 0$, $b_2 > 0$ і $a_{21} > 0$, то $u^{(1)} < u^{(0)}$.

На цьому закінчується перший етап оптимізації. Тепер потрібно зробити другий крок, використовуючи аналогічну процедуру. Прийнемо ненульові

змінні в (9.43) x_1, x_5, x_7 за базисні змінні, а нульові змінні x_2, x_3, x_4, x_6 за вільні. Із системи (9.38) виразимо x_1, x_5, x_7 через вільні змінні x_2, x_3, x_4, x_6 . Вираз для цільової функції також виразимо через вільні параметри. Після другого кроку ми або знайдемо нові оптимальні значення змінних і відповідне їм значення цільової функції $u^{(2)} < u^{(1)}$, або доведемо, що розв'язок (9.43) є оптимальним. Загалом після скінченної кількості кроків прийдемо до оптимального розв'язку. Зауважимо, що на відміну від методу простого перебирання симплексний метод дає можливість вести пошук оптимального розв'язку цілеспрямовано, зменшуючи на кожному кроці значення цільової функції.

Якщо для системи обмежень (9.28) не справджуються прийняті нами припущення, то для розв'язання задачі лінійного програмування симплексним методом використовують штучний базис.

Приклад 9.4. У розпорядженні бригади робітників є ресурси: 420кг металу, 150м^2 скла та 210год. робочого часу. Бригаді доручено виготовляти вироби двох видів: A та B . Ціна одного виробу виду A – 48 грн., а виду B – 40 грн. На виготовлення одного виробу A потрібно 4 кг металу, 2м^2 скла і 3год. робочого часу, а на виготовлення одного виробу B – 6 кг металу, 1м^2 скла і 2год. робочого часу. Потрібно так спланувати обсяг випуску продукції, щоб її вартість була максимальною.

Розв'язання. Складемо математичну модель цієї задачі. Нехай x_1 та x_2 – це кількість виробів видів A та B , які потрібно запланувати; x_1 та x_2 є цілими невід'ємними числами. Наявні ресурси сировини і робочого часу задамо у вигляді обмежень – нерівностей:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 6x_2 &\leq 420, \\ 2x_1 + x_2 &\leq 150, \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 210. \end{aligned} \tag{9.44}$$

Повна вартість запланованої до виробництва продукції виражається формулою

$$u = 48x_1 + 40x_2. \tag{9.45}$$

Таким чином, потрібно визначити такі значення проектних параметрів x_1 та x_2 , які задовольняють систему лінійних нерівностей (9.44) і для яких цільова функція (9.45) досягає максимуму.

Введемо додаткові змінні $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$, $x_5 \geq 0$, при цьому виберемо їх так, щоб нерівності (9.44) перетворилися у рівняння:

$$\begin{aligned} 4x_1 + 6x_2 + x_3 &= 420, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 &= 150, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 &= 210. \end{aligned} \tag{9.46}$$

Зауважимо, що цільова функція (9.45) не змінить свого вигляду. Фактично x_3, x_4 та x_5 будуть означати залишки ресурсів, що не використані у виробництві.

Якщо змінити знак цільової функції (9.45), тобто розглянути нову цільову функцію

$$z = -u = -48x_1 - 40x_2, \quad (9.47)$$

то одержимо задачу мінімізації для цільової функції (9.47).

Прийmemo x_3, x_4, x_5 за базисні змінні і виразимо їх через вільні змінні x_1 та x_2 з рівнянь (9.46):

$$\begin{aligned} x_3 &= 420 - 4x_1 - 6x_2, \\ x_4 &= 150 - 2x_1 - x_2, \\ x_5 &= 210 - 3x_1 - 2x_2. \end{aligned} \quad (9.48)$$

За початковий опорний розв'язок візьmemo розв'язок, який відповідає нульовим значенням вільних змінних:

$$x_1^{(0)} = 0, \quad x_2^{(0)} = 0, \quad x_3^{(0)} = 420, \quad x_4^{(0)} = 150, \quad x_5^{(0)} = 210. \quad (9.49)$$

Цьому розв'язку відповідає нульове значення цільової функції

$$z^{(0)} = 0. \quad (9.50)$$

Значення (9.50) не є мінімальним, оскільки значення цільової функції z можна зменшити шляхом збільшення вільних параметрів x_1 та x_2 . У формулі (9.47) обидва коефіцієнти від'ємні, але оскільки $48 > 40$, то прийmemo $x_2 = 0$, а будемо збільшувати змінну x_1 доти, доки базисні змінні будуть невід'ємними.

З формул (9.48) випливає, що x_1 можна збільшувати до значення $x_1 = 70$, бо при більших його значеннях базисна змінна x_5 буде від'ємною.

Таким чином, при $x_1 = 70, x_2 = 0$ одержимо новий опорний розв'язок (значення змінних x_3, x_4, x_5 знаходимо за формулами (9.48)):

$$x_1^{(1)} = 70, \quad x_2^{(1)} = 0, \quad x_3^{(1)} = 140, \quad x_4^{(1)} = 10, \quad x_5^{(1)} = 0. \quad (9.51)$$

Значення цільової функції (9.47) для цього розв'язку

$$z^{(1)} = -3360. \quad (9.52)$$

Новий розв'язок (9.51) кращий, оскільки значення цільової функції зменшилося порівняно з (9.50).

Наступний крок почнемо з вибору нового базису. Приймемо ненульові змінні в (9.51) x_1, x_3, x_4 за базисні змінні, а змінні x_2, x_5 - за вільні. Із системи (9.46) знайдемо:

$$\begin{aligned} x_1 &= 70 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_5, \\ x_3 &= 140 - \frac{10}{3}x_2 + \frac{4}{3}x_5, \\ x_4 &= 10 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_5. \end{aligned} \quad (9.53)$$

Виразимо цільову функцію (9.47) через вільні параметри x_2, x_5 , замінивши x_1 за допомогою першої з формул (9.53):

$$z = -3360 - 8x_2 + 16x_5. \quad (9.54)$$

Значення цільової функції (9.54) можна зменшити за рахунок збільшення x_2 , оскільки коефіцієнт при цій змінній від'ємний. При цьому зростання

змінної x_5 недопустиме, бо це призвело б до зростання цільової функції. Тому прийmemo $x_5 = 0$.

Максимальне значення змінної x_2 визначається співвідношеннями (9.53). Швидше від змінної x_1 нульового значення досягне змінна x_3 при $x_2 = 42$. Подальше збільшення x_2 неможливе, оскільки змінна x_3 буде від'ємною.

Отже, одержуємо наступний опорний розв'язок при $x_2 = 42, x_3 = 0$ (значення змінних x_1, x_3, x_4 знаходимо за формулами (9.53)):

$$x_1^{(2)} = 42, x_2^{(2)} = 42, x_3^{(2)} = 0, x_4^{(2)} = 24, x_5^{(2)} = 0. \quad (9.55)$$

Значення цільової функції (9.47) для цього розв'язку

$$z^{(2)} = -3696. \quad (9.56)$$

Для виконання наступного кроку змінні x_1, x_2, x_4 прийmemo за базисні, а x_3, x_5 – за вільні змінні. Із системи (9.46) знайдемо:

$$\begin{aligned} x_1 &= 42 + \frac{1}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_5, \\ x_2 &= 42 - \frac{3}{10}x_3 + \frac{2}{5}x_5, \\ x_4 &= 24 - \frac{1}{10}x_3 + \frac{4}{5}x_5. \end{aligned} \quad (9.57)$$

Цільова функція набуде вигляду:

$$z = -3360 - 8 \left(42 - \frac{3}{10}x_3 + \frac{2}{5}x_5 \right) + 16x_5,$$

тобто

$$z = -3696 + \frac{12}{5}x_3 + \frac{64}{5}x_5. \quad (9.58)$$

Оскільки у формулі (9.58) коефіцієнти при x_3 та x_5 додатні, то при збільшенні цих параметрів значення функції (9.58) зростає.

Отже, мінімальне значення цільової функції (9.58) відповідає нульовим значенням змінних x_3 та x_5 і одержаний розв'язок (9.55) є оптимальним. Значення цільової функції (9.45) для цього розв'язку є максимальним і воно дорівнює $u_{\max} = 3696$.

Таким чином, для одержання максимальної вартості продукції при заданих ресурсах необхідно виготовити по 42 вироби виду A та B . Вартість запланованої продукції дорівнює 3696 грн. При цьому всі ресурси металу і робочого часу будуть використані, а скла залишиться 24 м^2 .

Розв'язання задачі лінійного програмування симплексним методом можна оформити у вигляді послідовності симплекс-таблиць. Покажемо це на прикладі розв'язаної задачі. Цільову функцію (9.47) запишемо у вигляді:

$$z + 48x_1 + 40x_2 = 0. \quad (9.59)$$

У стовпець “базис” запишемо назву цільової функції та базисні невідомі, у стовпець “план” – праві частини обмежень та константу у представленні цільової функції. У стовпці x_1, \dots, x_5 запишемо коефіцієнти при відповідних змінних у формулах (9.59) та (9.46).

У випадку пошуку мінімуму функції z розв'язок (план) буде оптимальним, якщо числа, одержані в рядку z , недодатні. Якщо розв'язок оптимальний, то обчислення закінчено. Оптимальні значення базисних невідомих і цільової функції можна знайти у стовпці “план”.

Якщо розв'язок не є оптимальним, то серед додатних коефіцієнтів рядка z вибираємо найбільший. Він визначає змінну, яка буде включена в новий базис, та ведучий стовпець.

Обчислюємо відношення чисел стовпця “план” до відповідних додатних елементів ведучого стовпця і серед них вибираємо найменше. Воно визначає ведучий рядок та змінну, яка буде виключена з базису. На перетині ведучого рядка та ведучого стовпця міститься ведучий елемент.

Якщо всі елементи ведучого стовпця від'ємні, то цільова функція необмежена.

Будуємо нову симплекс-таблицю. Змінну ведучого стовпця включаємо в базис. Відповідний їй рядок отримуємо шляхом ділення ведучого рядка на ведучий елемент. Помножимо цей рядок на елемент з протилежним знаком i -го рядка ведучого стовпця і додамо його до цього ж i -го рядка. Такі ж перетворення виконаємо з усіма рядками. Одержимо нову симплекс-таблицю, яку перевіримо на оптимальність. Побудову наступних симплекс-таблиць виконаємо аналогічно.

Базис	План	$x_1 \downarrow$	x_2	x_3	x_4	x_5
z	0	48	40	0	0	0
x_3	420	4	6	1	0	0
x_4	150	2	1	0	1	0
$\leftarrow x_5$	210	<u>3</u>	2	0	0	1
z	-3360	0	8↓	0	0	-16
$\leftarrow x_3$	140	0	<u>10/3</u>	1	0	-4/3
x_4	10	0	-1/3	0	1	-2/3
x_1	70	1	2/3	0	0	1/3
z	-3696	0	0	-12/5	0	-64/5
x_2	42	0	1	3/10	0	-2/5
x_4	24	0	0	1/10	1	-4/5
x_1	42	1	0	-1/5	0	3/5

Отже, $z_{\min} = -3696$ при $x_1 = 42, x_2 = 42, x_3 = 0, x_4 = 24, x_5 = 0$.

9.7. Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити методом золотого перерізу найменше або найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$. Точку x^* , в якій функція приймає це значення, визначити з точністю до $\varepsilon = 0,01$.

1.1. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 5x + x \ln x$; $[1,5; 2]$; f_{\min} ;

1.2. $f(x) = 1 + 2x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^6$; $[1; 1,5]$; f_{\max} ;

1.3. $f(x) = 1 + x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$; $[0; 1]$; f_{\max} ;

1.4. $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + x(\ln x - 1)$; $[0,5; 1]$; f_{\min} ;

1.5. $f(x) = -2x + \frac{7}{2}x^2 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4$; $[0; 0,5]$; f_{\min} .

2. Методом найшвидшого спуску обчислити найменше значення функції $f(\vec{x}) = \frac{1}{2}(A\vec{x}, \vec{x}) - (\vec{b}, \vec{x})$ з точністю $\varepsilon = 0,01$, взявши за початкове наближення $\vec{x}^{(0)}$. A – симетрична додатно визначена матриця третього порядку; (\vec{x}, \vec{y}) – скалярний добуток векторів у тривимірному просторі.

2.1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$; $\vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1,2 \\ 0,8 \end{pmatrix}$;

2.2. $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7,2 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 1 \\ 0,7 \end{pmatrix}$;

2.3. $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7,6 \\ 7 \end{pmatrix}$; $\vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,9 \\ 0,6 \end{pmatrix}$;

2.4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0,7 \\ 1 \\ 0,4 \end{pmatrix}$;

2.5. $A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 3,2 \end{pmatrix}$; $\vec{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,8 \\ 1,1 \end{pmatrix}$.

3. Знайти розв'язок задачі лінійного програмування: а) графічним методом;
б) симплексним методом.

3.1. $u = 3x_1 - 3x_2 + 7; u_{\max}$

$$2x_1 - 3x_2 \geq -6;$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 19;$$

$$2x_1 - x_2 \leq 11;$$

$$x_1 - 6x_2 \leq 0;$$

$$x_1 \geq 0;$$

$$x_2 \geq 0;$$

3.2. $u = -4x_1 + x_2 - 5; u_{\min}$

$$4x_1 - x_2 \geq -2;$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 13;$$

$$3x_1 + x_2 \leq 14;$$

$$2x_1 - 3x_2 \leq 2;$$

$$x_1 \geq 0;$$

$$x_2 \geq 0;$$

3.3. $u = 4x_1 - x_2 + 8; u_{\max}$

$$3x_1 - 2x_2 \geq 0;$$

$$-x_1 + 4x_2 \leq 10;$$

$$3x_1 - x_2 \leq 14;$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 3;$$

$$x_1 \geq 0;$$

$$x_2 \geq 0;$$

3.4. $u = 2x_1 + 3x_2 + 5; u_{\max}$

$$x_1 - x_2 \geq -1;$$

$$-x_1 + 3x_2 \leq 7;$$

$$2x_1 + x_2 \leq 14;$$

$$2x_1 - 5x_2 \leq 1;$$

$$x_1 \geq 0;$$

$$x_2 \geq 0;$$

3.5. $u = 4x_1 + x_2 + 8; u_{\max}$

$$2x_1 - x_2 \geq -2$$

$$x_1 - 2x_2 \geq -7;$$

$$3x_1 + x_2 \leq 14;$$

$$2x_1 - 3x_2 \leq 2;$$

$$x_1 \geq 0;$$

$$x_2 \geq 0.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Бігун Я.Й. Числові методи. Інтерполювання. Числове інтегрування та диференціювання: Навчальний посібник / Чернівецький національний університет ім. Ю.Федьковича – Чернівці: Рута, 2005. – 80с.
2. Білик Г.Б., Веремій О.В., Кравченко В.І. Навчальний посібник "Чисельні методи в інформатиці": Для студ. заоч. від-ня спец. 7.080402: Навч. посіб. для студ. ВНЗ / Донбаська держ. машинобудівна академія. – Краматорськ: ДДМА, 2006. – 111с.
3. Волков Е.А. Численные методы. – М.: Наука, 1987. – 254с.
4. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1970. – 368с.
5. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512с.
6. Лабораторний практикум з дисципліни "Чисельні методи математики" для студентів спеціальностей 6.091501, 6.080401, 6.080402, 6.092401, 6.091503 / Черкаський держ. технологічний ун-т / Ю.В. Мітіхін (уклад.). – Черкаси: ЧДТУ, 2007. – 81с.
7. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1980. – 286с.
8. Методичні рекомендації до виконання лабораторних робіт з навчальної дисципліни "Чисельні методи в інформатиці": для студентів напряму підготовки 0804 "Комп'ютерні науки" всіх форм навчання / В.М. Задачин (уклад.), І.Г. Конюшенко (уклад.). – Х.: ХНЕУ, 2007. – 60с.
9. Окуненко В.М., Ясинський В.К. Чисельні методи в моделюванні систем. – Чернівці: Золоті литаври, 2006. – 592с.
10. Турчак Л.И. Основы численных методов. – М.: Наука, 1987. – 320с.
11. Фельдман Л.П., Петренко А.І., Дмитрієва О.А. Чисельні методи в інформатиці. – К.: Видавнича група ВНУ, 2006. – 480с.
12. Цегелик Г.Г. Чисельні методи. – Львів: Видавничий центр Львівського національного університету, 2004. – 408с.
13. Числові методи / П.П.Овчинников, В.М.Михайленко; За заг. ред. П.П.Овчинникова. – 3-тє видання, виправлене. – К.: Техніка, 2004. – 792с.
14. Ясинський В.К. Основы обчислювальних методів. Навч. пос. – Чернівці: Золоті литаври, 2005. – 396с.

ЗМІСТ

Вступ	3
Розділ 1. Наближені числа та дії з ними.....	4
1.1.Числа з плаваючою крапкою	4
1.2.Абсолютна та відносна похибки	5
1.3.Значущі цифри. Кількість вірних знаків	6
1.4.Заокруглення чисел	7
1.5.Похибка суми та різниці	8
1.6.Похибка добутку та частки	10
1.7.Похибка функції	12
1.8.Обернена задача теорії похибок	14
1.9.Обчислення значень многочлена. Схема Горнера.....	15
1.10.Завдання для самостійної роботи	17
Розділ 2. Числові методи розв’язання алгебраїчних і трансцендентних рівнянь	20
2.1.Відокремлення коренів	20
2.2.Метод половинного поділу.....	22
2.3.Метод хорд	23
2.4.Метод дотичних (метод Ньютона)	26
2.5.Комбінований метод хорд та дотичних	28
2.6.Метод ітерацій.....	30
2.7.Завдання для самостійної роботи	33
Розділ 3. Методи розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.....	34
3.1.Метод Гауса.....	35
3.2.Метод простих ітерацій	40
3.3.Зведення лінійної системи до вигляду, придатного для ітерацій	42
3.4.Метод Зейделя	43
3.5.Завдання для самостійної роботи	45
Розділ 4. Методи розв’язання систем нелінійних рівнянь	48
4.1.Метод Ньютона	48
4.2.Метод простих ітерацій	51
4.3.Завдання для самостійної роботи	54
Розділ 5. Наближення функцій многочленами	55
5.1.Основні поняття	55
5.2.Інтерполяційний многочлен Лагранжа	57
5.3.Інтерполяційна схема Ейткена	58
5.4.Оцінка похибки інтерполяційної формули Лагранжа. Многочлени Чебишева. Оптимальний вибір вузлів інтерполяції	60
5.5.Скінченні різниці. Інтерполяційний многочлен Ньютона	63
5.6.Поділені різниці. Інтерполяційний многочлен Ньютона для нерівновіддалених значень аргументу	67
5.7.Інтерполяція сплайнами.....	70
5.8.Метод найменших квадратів	72
5.9.Завдання для самостійної роботи	75

Розділ 6. Числове диференціювання	80
6.1. Апроксимація похідних. Похибка числового диференціювання	80
6.2. Наближене обчислення похідних за допомогою інтерполяційних многочленів	82
6.3. Наближене обчислення частинних похідних	86
6.4. Завдання для самостійної роботи	89
Розділ 7. Числове інтегрування.....	91
7.1. Формули прямокутників та трапецій	91
7.2. Формула Сімпсона	94
7.3. Метод Монте-Карло	98
7.4. Завдання для самостійної роботи	100
Розділ 8. Числові методи розв'язання задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку	102
8.1. Метод Ейлера	102
8.2. Модифікований метод Ейлера	104
8.3. Метод Рунге-Кутта	105
8.4. Метод Адамса	108
8.5. Числові методи розв'язання задачі Коші для системи диференціальних рівнянь першого порядку	110
8.6. Завдання для самостійної роботи	115
Розділ 9. Методи оптимізації	116
9.1. Основні поняття	116
9.2. Одновимірна оптимізація. Метод золотого перерізу	117
9.3. Багатовимірні задачі оптимізації	121
9.4. Застосування методу найшвидшого спуску до задачі мінімізації квадратичної функції	123
9.5. Задачі лінійного програмування. Геометричний метод розв'язання задач лінійного програмування з двома змінними	126
9.6. Симплексний метод	130
9.7. Завдання для самостійної роботи	136
Література	138