Міністерство освіти і науки України
Тернопільський державний технічний університет
імені Івана Пулюя

Кафедра
Вищої математики

МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

З КУРСУ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

для студентів заочної форми навчання

(I семестр)

Тернопіль
2002р.

Методичний посібник з курсу вищої математики для студентів заочної форми навчання (I семестр) / уклад. Б.Г.Шелестовський , Л.В.Фурсевич, А.В.Ясінський, Н.І. Блащак. Тернопіль: ТДТУ ім. Івана Пулюя, 1998.–62 с.

Укладачі: доц.,к.ф.–м.н. Б.Г.Шелестовський
доц.,к.ф.–м.н. Л.В.Фурсевич
ст..н.с., к.ф.–м.н. А.В.Ясінський
к.ф.-м.н. Н.І.Блащак

Відповідальний за випуск: доц.,к.ф.–м.н. Л.В.Фурсевич

Рецензенти: доц.,к.ф.–м.н. В.М.Неміш
доц.,к.ф.–м.н. П.І.Данчак

Методичні вказівки розглянуті і затверджені на засіданні кафедри вищої математики.
Протокол №5 від 7 грудня 2001р.

Схвалено і рекомендовано до друку методичною Радою Тернопільського державного технічного університету ім. Івана Пулюя.
Протокол №1 від 25 січня 2002р.

Посібник складено з врахуванням матеріалів літературних джерел , наведених у списку.

ВСТУП

Метою даного методичного посібника є надання допомоги студентам–заочникам при самостійному вивченні таких розділів вищої математики:

- елементи лінійної алгебри;
- елементи векторної алгебри;
- елементи аналітичної геометрії;
- вступ до математичного аналізу;
- диференціальне числення функції однієї змінної.

Кожен з розглянутих розділів містить як основні теоретичні положення (основні поняття, означення, теореми), так і детально розв’язані приклади.

Методичний посібник може бути використаний студентами–заочниками для розв’язування контрольних робіт та підготовки до екзаменів.

1. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

1.1. Матриці. **Матрицею** розміру $m \times n$ називається прямокутна таблиця з $m \times n$ чисел a_{ij}, $i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right).$$

Числа a_{ij} називаються **елементами** матриці A, де i - номер рядка, а j - номер стовбця, в яких стоїть елемент a_{ij}.

Якщо $m = n$, то матриця A називається **квадратною матрицею порядку** n, а елементи a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} складають головну діагональ.

Квадратна матриця, у якої на головній діагоналі стоять одиниці, а всі інші елементи дорівнюють нулю, називається **одиничною матрицею** і позначається через E.

Сумою матриць $A = \left(a_{ij}\right)$ **і** $B = \left(b_{ij}\right)$ розміру $m \times n$ називається матриця $C = \left(c_{ij}\right)$ того ж розміру така, що

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},\quad i = \overline{1,m},\quad j = \overline{1,n}\ .$$

Позначення: $C = A + B$.

Добутком матриці $A = \left(a_{ij}\right)$ розміру $m \times n$ **на число** α називається матриця $C = \left(c_{ij}\right)$ того ж розміру така, що

$$c_{ij} = \alpha\, a_{ij}\ ,\quad i = \overline{1,m},\quad j = \overline{1,n}\ .$$

Позначення: $C = \alpha\ A$.

Добутком матриці $A = \left(a_{ij}\right)$ розміру $m \times n$ **на матрицю** $B = \left(b_{ij}\right)$ розміру $n \times k$ називається матриця $C = \left(c_{ij}\right)$ розміру $m \times k$ така, що

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{im}b_{nj}\ ,\quad i = \overline{1,n}\ ,\quad j = \overline{1,k}\ .$$

Зауваження 1. В загальному випадку $AB \neq BA$. Якщо ж $AB = BA$, то матриці A і B називаються переставними.

1.2. Лінійні перетворення. **Лінійним перетворенням** величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в величини $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ називається перетворення виду

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{cases},$$

або скорочено

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad , \quad i = \overline{1,n} \quad , \tag{1}$$

де a_{ij} - задані числа.

Матриця $A = \left(a_{ij}\right)$, складена із коефіцієнтів лінійного перетворення, називається **матрицею лінійного перетворення.**

Введемо матриці розміру $n \times 1$:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} , \qquad X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ . \\ . \\ . \\ x_n' \end{pmatrix} .$$

Тоді лінійне перетворення можна записати в матричній формі:

$$X' = AX .$$

Поряд з лінійним перетворенням (1) розглянемо лінійне перетворення величин $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ в величини $x_1'', x_2'', \ldots, x_n''$:

$$x_i'' = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j' \ , \ \ i = \overline{1,n} \ . \tag{2}$$

Потрібно засобами матричного числення знайти лінійне перетворення, яке виражає $x_1'', x_2'', \ldots, x_n''$ через $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Запишемо лінійне перетворення (2) також в матричній формі

$$X'' = BX', \quad \text{де } B = \left(b_{ij}\right), \quad X'' = \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ . \\ . \\ . \\ x_n'' \end{pmatrix} ,$$

тоді

$$X'' = BX' = B \cdot \left(AX\right) = \left(BA\right) \cdot X .$$

Отже, шукане лінійне перетворення має матрицю $C = BA$.

Приклад 1. Дано два лінійні перетворення

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 - x_3 \\ x_2' = 2x_1 - x_2 + 3x_3 \\ x_3' = 3x_1 + x_2 - x_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1' = x_1' + 2x_2' + x_3' \\ x_2'' = 2x_1' + x_2' + x_3' \\ x_3'' = 2x_1' + 3x_2' - 4x_3' \end{cases} .$$

Засобами матричного числення знайти перетворення, яке виражає $x_1'', x_2'', \ldots, x_3''$ через x_1, x_2, x_3 .

Розв'язування. Введемо відповідні матриці лінійних перетворень:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 2 & 3 & -4\end{pmatrix}.$$

Знайдемо матрицю C шуканого лінійного перетворення

$$C=BA=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 2 & 3 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 1 & 4\\ 7 & 4 & 0\\ -4 & -3 & 11\end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\begin{pmatrix}x_1''\\ x_2''\\ x_3''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 1 & 4\\ 7 & 4 & 0\\ -4 & -3 & 11\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

і шукане перетворення має вигляд:

$$\begin{cases}x_1''=8x_1+x_2+4x_3\\ x_2''=7x_1+4x_2\\ x_3''=-4x_1-3x_2+11x_3\ .\end{cases}$$

1.4. Визначники. Визначником n**-**го порядку, що відповідає квадратній матриці A порядку n, називається число, яке знаходиться за певним правилом і позначається $|A|$ або $det\, A$. У випадку $n=2$:

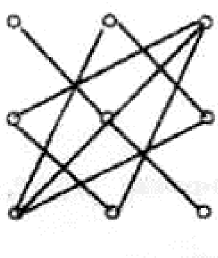
$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}.$$

У випадку $n=3$:

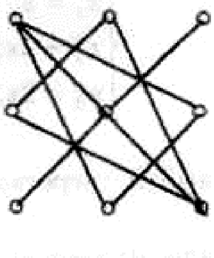
$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{32}a_{13}-a_{31}a_{22}a_{13}- \tag{3}$$

$$-a_{21}a_{12}a_{33}-a_{32}a_{23}a_{11}\,.$$

На практиці, визначники третього порядку обчислюються з використанням **правила Саррюса:** перші три доданки, які входять в праву частину (3) із знаком плюс, являють собою добутки елементів визначника, взятих по три, як показано на Рис.1, а останні три доданки, які входять в (3) із знаком мінус, - як на Рис.2.



(+)
Рис. 1



(-)
Рис. 2

Властивості визначників

Властивість 1. Величина визначника не зміниться, якщо всі його рядки замінити стовпцями, причому кожен рядок замінити стовпцем з тим же номером.

Властивість 2. Перестановка двох рядків, чи стовпців визначника рівносильна множенню його на (-1).

Властивість 3. Якщо визначник має два однакових рядки чи стовпці, то він рівний нулю.

Наслідок. Визначник з двома пропорційними рядками чи стовпцями рівний нулю.

Властивість 4. Множення всіх елементів одного стовпця чи рядка визначника на довільне число k рівносильне множенню визначника на це число

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Властивість 5. Якщо всі елементи деякого стовпця чи рядка дорівнюють нулю, то сам визначник також дорівнює нулю.

Властивість 6. Якщо кожен елемент деякого стовпця чи рядка є сумою двох доданків, то визначник може бути поданий у вигляді суми двох визначників

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Зауваження 2. Якщо кожен елемент деякого стовпця чи рядка є сумою k доданків, то визначник може бути представлений у вигляді суми k визначників.

Властивість 7. Визначник не змінить свого значення, якщо до всіх елементів будь-якого рядка чи стовпця додати відповідні елементи паралельного ряду, помноженого на одне і те ж число

$$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Властивості (1)-(7) справджуються і для визначників n-го порядку.

Приклад 2. Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} sin^2\alpha & cos^2\alpha & cos\,2\alpha \\ sin^2\beta & cos^2\beta & cos\,2\beta \\ sin^2\gamma & cos^2\gamma & cos\,2\gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} sin^2\alpha & cos^2\alpha & cos^2\alpha - sin^2\alpha \\ sin^2\beta & cos^2\beta & cos^2\beta - sin^2\beta \\ sin^2\gamma & cos^2\gamma & cos^2\gamma - sin^2\gamma \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} sin^2\alpha & cos^2\alpha & cos^2\alpha \\ sin^2\beta & cos^2\beta & cos^2\beta \\ sin^2\gamma & cos^2\gamma & cos^2\gamma \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} sin^2\alpha & cos^2\alpha & -sin^2\alpha \\ sin^2\beta & cos^2\beta & -sin^2\beta \\ sin^2\gamma & cos^2\gamma & -sin^2\gamma \end{vmatrix} = 0+0=0\ ;$$

Використано властивість 3 і наслідок з неї.

Мінори і алгебраїчні доповнення

Нехай маємо визначник n-го порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника $n-$го порядку називається визначник $(n-1)-$го порядку, одержаний з визначника Δ викресленням $i-$го рядка і $j-$го стовпця.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} називається його мінор, взятий із знаком $(-1)^{i+j}$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Властивість 8. Визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого стовпця (чи рядка) на їх алгебраїчне доповнення.

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$ (розклад за елементами $i-$го рядка) і $\Delta = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \dots + a_{nk}A_{nk}$ (розклад за елементами $k-$го стовпця).

Властивості (7) і (8) дають можливість обчислювати визначники будь-якого порядку.

Приклад 3. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ \langle 1 \rangle & -1 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

В третьому рядку вибираємо контрольний елемент $\langle 1 \rangle$, а всі інші елементи цього рядка перетворюємо в 0, для цього, всі елементи 1-го стовпця додаємо до відповідних елементів 2-го і 5-го стовпців, а також всі елементи 1-го стовпця множимо на (-2) і додаємо до відповідних елементів 3-го стовпця, - множимо на (-1) і додаємо до 4-го стовпця.

$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -7 & -5 & 4 \\ 2 & 3 & -3 & -1 & 4 \\ \langle 1 \rangle & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 5 & -7 & -5 & 4 \\ 3 & -3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$ винесемо 4 з четвертого стовпця $= 4 \begin{vmatrix} 5 & -7 & -5 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & \langle 1 \rangle \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ всі елементи 2-го рядка множимо на (-1) і додаємо до 1-го рядка.

$$\Delta = 4\begin{vmatrix} 2 & -4 & -4 & 0 \\ 3 & -3 & -1 & \langle 1 \rangle \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 2 & -4 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Виносимо з 1-го рядка 2, одержимо

$$\Delta = 8\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ \langle -1 \rangle & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Елементи другого рядка додаємо до відповідних елементів першого рядка, а також множимо на 2 і додаємо до відповідних елементів третього рядка.

$$\Delta = 8\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 8(-1)^{2+1}(-1)\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 8(0+7) = 8 \cdot 7 = 56.$$

1.4. Обернена матриця. Матриця B називається **оберненою** до матриці A, якщо

$$AB = BA = E.$$

Позначення: $B = A^{-1}$.

Обернена матриця A^{-1} до A **існує тоді і лише тоді,** коли $|A| \neq 0$. Має місце формула

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Приклад 4. Знайти матрицю обернену до даної

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування. Переконаємось, що $|A| \neq 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 18 + 0 - 0 - 16 - 0 = 2 \neq 0.$$

Обчислимо алгебраїчні доповнення A_{ij}, $i = 1,2,3;$ $j = 1,2,3$.

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 0,\quad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -8,\quad A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6.$$

Аналогічно знайдемо: $A_{12} = 1,\ A_{22} = 1,\ A_{32} = -1;$

$$A_{13} = 0,\ A_{23} = 6,\ A_{33} = -4.$$

Отже,

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -8 & 6 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 3 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

1.5. Системи лінійних рівнянь. Система n лінійних рівнянь з n невідомими має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{4}$$

або, в матричному вигляді

$$AX = B, \tag{5}$$

де

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} -$$ **матриця системи.**

Якщо система (4) має розв'язки, то вона називається **сумісною,** в протилежному випадку – **несумісною.**

1.5.1. Матричний спосіб розв'язування системи лінійних рівнянь.

Нехай $|A| \neq 0$. Домножимо рівняння (5) зліва на A^{-1}:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B, \qquad \left(A^{-1}A\right)X = A^{-1}B.$$

Так як $A^{-1}A = E$, $EX = X$, то $X = A^{-1}B.$ (6)

Приклад 5. Матричним способом розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_3 = 1 \end{cases}$$

Розв'язування. Скористаємося формулою (6). Випишемо матрицю системи

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

В прикладі 2 було показано, що $|A| \neq 0$ і

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 3 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 3 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$.

1.5.2. Формула Крамера. Якщо $|A| \neq 0$, то розв'язок системи (4) може бути знайдений за **формулами Крамера:**

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = \overline{1, n}, \quad \text{де } \Delta = |A|, \tag{7}$$

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Приклад 6. За формулами Крамера розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}.$$

Розв'язування. Згідно з формулою (7) обчислимо Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -5, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -5,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -10, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -15.$$

Отже, $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{-5}{-5} = 1$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{-10}{-5} = 2$, $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{-15}{-5} = 3$.

Зауваження 3. Якщо $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \dots = \Delta_n = 0$, то система (4) має нескінченну кількість розв'язків.

Зауваження 4. Якщо $\Delta = 0$ і хоча б один з визначників $\Delta_i \neq 0$, то система несумісна.

1.5.3. Метод Гаусса. Метод Гаусса використовується для розв'язування довільних систем рівнянь. Нехай задана система виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \tag{8}$$

де число рівнянь m може як співпадати з числом невідомих x_n, так і бути відмінним від нього.

Припустимо, що $a_{11} \neq 0$. Виключимо невідоме x_1 з усіх рівнянь системи, за винятком першого. Для цього домножимо 1-е рівняння на $\left(-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}\right)$ і додамо до 2-го рівняння і т. д., нарешті домножимо 1-е рівняння на $\left(-\dfrac{a_{m1}}{a_{11}}\right)$ і додамо до m-го рівняння. В результаті отримаємо систему рівнянь еквівалентну системі (8):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a'_{m2}x_2 + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases} . \tag{9}$$

Припустимо тепер, що $a'_{22} \neq 0$ і виключимо аналогічно невідоме x_2 з 3-го, ..., m-го рівняння системи (9). Після цього переходимо до невідомого x_3 і т. д. В ході виконання вказаного алгоритму можуть з'явитися рівняння виду 0=0. Тоді рівняння відкидаємо. Якщо ж з'являться рівняння виду $0 = \alpha$, де $\alpha \neq 0$, то це означає, що система (8) несумісна. В результаті отримаємо систему виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a''_{ss}x_s + \ldots + a''_{sn}x_n = b''_s \end{cases} , \tag{10}$$

де $s \leq n;\ a_{11}a'_{22}\ldots a''_{ss} \neq 0$.

Розглянемо тепер два випадки.

1) Якщо $s = n$, то система (10), а значить і система (8), має єдиний розв'язок, який може бути знайдений за допомогою зворотнього ходу метода Гаусса. Із останнього рівняння знаходимо $x_n = b''_n / a''_{nn}$.

Підставляючи знайдене значення x_n в передостаннє рівняння, знайдемо значення для x_{n-1} і т. д. З першого рівняння знайдемо значення для x_1.

2) Якщо $s < n$, то система (10), а значить і система (8) , має нескінченну кількість розв'язків. Надаючи невідомим $x_{s+1}, x_{s+2}, \ldots, x_n$ довільних значень $c_{s+1}, c_{s+2}, \ldots, c_n$, виразимо невідомі $x_1, x_2, \ldots, x_s$ через $c_{s+1}, c_{s+2}, \ldots, c_n$ і отримаємо загальний розв'язок системи (8).

Зауваження 5. Система рівнянь (8) називається однорідною, якщо $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$. Однорідна система рівнянь завжди сумісна, оскільки має тривіальний розв'язок $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Зауваження 6. При використанні метода Гаусса на практиці зручно виконувати відповідні перетворення не над рівняннями системи. а над рядками розширеної матриці системи

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right), \tag{11}$$

Приклад 7. За методом Гаусса розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=5 \\ x_1+x_2-x_3=0 \\ 4x_1-x_2+5x_3=3 \end{cases}.$$

Розв'язування.

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 3 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 5 & 3 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & 9 & 3 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -11 & -22 \end{array}\right).$$

Даній розширеній матриці відповідає система рівнянь еквівалентна вихідній:

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=0 \\ -x_2+4x_3=5 \\ -11x_3=-22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3=\dfrac{-22}{-11}=2 \\ -x_2+8=5 \\ x_1=x_3-x_2 \end{cases} \Leftrightarrow x_1=-1,\ x_2=3,\ x_3=2.$$

Приклад 8.Знайти загальний розв'язок однорідної системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0 \\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0 \\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0 \end{cases}.$$

Розв'язування. Скористаємося методом Гаусса.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & -18 & 15 \\ 0 & 2 & 12 & -10 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Даній матриці відповідає однорідна система рівнянь еквівалентна вихідній:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0 \\ -x_2-6x_3+5x_4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2=-6x_3+5x_4 \\ x_1=-2x_2-4x_3+3x_4 \end{cases}.$$

Покладаючи $x_3=c_1$, $x_4=c_2$, отримаємо $x_2=-6c_1+5c_2$, $x_1=8c_1-7c_2$.

Отже, загальний розв'язок системи має вигляд:

$$x_1=8c_1-7c_2,\ x_2=-6c_1+5c_2,\ x_3=c_1,\ x_4=c_2.$$

1.5.4. Дослідження систем лінійних алгебраїчних рівнянь в загальному випадку.

Системі (8) поставимо у відповідність матрицю

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

яку назвемо основною матрицею і розширену матрицю (11). Виділимо в цій матриці які-небудь k рядків і k стовпців $(k \le m,\ k \le n)$. З виділених рядків і стовпців складемо визначник k-го порядку. Всі такі визначники називаються мінорами цієї матриці.

Рангом матриці називається найвищий порядок відмінних від нуля мінорів цієї матриці. Ранг матриці A будемо позначати $r(A)$.

Елементарними перетвореннями матриці називаються наступні її перетворення:

1. Транспортування, тобто заміна кожного рядка стовпцем з тим же номером, і навпаки.
2. Перестановка двох рядків, чи двох стовпців.
3. Множення всіх елементів рядка чи стовпця на довільне число, не рівне нулю.
4. Додавання до всіх елементів рядка чи стовпця відповідних елементів паралельного ряду, помножених на одне і теж число.

Матриці, які одержуються одна з одної за допомогою елементарних перетворень називаються еквівалентними і з'єднуються знаком ~.

Елементарні перетворення (1)-(4) не змінюють рангу вихідної матриці.

Відмінний від нуля мінор, порядок якого дорівнює рангу матриці, називається **базисним.**

Для обчислення рангу матриці можна використати елементарні перетворення, а також метод **обвідних мінорів.** За допомогою елементарних перетворень будь-яку матрицю можна привести до вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

де на головній діагоналі стоять r одиниць, а всі інші елементи матриці рівні нулю, ранг такої матриці дорівнює r.

Приклад 9. Знайти ранг матриці

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування. Перший рядок множимо на (-1) і додаємо відповідно до другого і четвертого рядків, а також на (-2) і додаємо до третього рядка

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

другий рядок множимо на (-1) і додаємо до третього і четвертого рядків

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

другий рядок поділимо на (-4), а третій рядок додамо до четвертого рядка

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

другий рядок множимо на (-1) і додаємо до першого, а потім третій рядок додаємо до першого

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

третій рядок множимо на (-1) і переставляємо його місцями з другим рядком, одержимо

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

звідки відомо, що $r(A) = 3$.

Приклад 10. Знайти ранг матриці

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язування.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-2) \\ "+" \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -5 & -1 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що $r(A) = 2$.

За допомогою введеного поняття рангу матриці питання сумісності системи (8) може бути вирішене на основі наступної теореми.

Теорема Кронекера-Капеллі

Для сумісності системи (8) необхідно і достатньо, щоб ранг розширеної матриці дорівнював рангу основної матриці системи, тобто $r(A) = r(B)$.

Очевидно, що $r(B) \geq r(A)$, оскільки кожен мінор матриці A буде мінором і матриці B, але не навпаки.

Таким чином, якщо $r = n$ - система має єдиний розв'язок; $r < n, \ (m \leq n)$, то система має безліч розв'язків. Якщо ж $r(A) < r(B)$, то система несумісна.

При знаходженні рангу системи лінійних рівнянь елементарні перетворення відповідних матриць здійснюємо тільки з їх **рядками.**

Приклад 11. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3 \end{cases}. \tag{12}$$

Складемо розширену матрицю, де рискою відокремлено стовпець вільних членів

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 & 3 \end{array}\right) \downarrow \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -2 & -2 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 & 3 \end{array}\right) \downarrow (-2) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 & 3 \end{array}\right) \downarrow (2) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & -3 & -3 & 3 & 3 \end{array}\right) \downarrow (-3) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

звідки випливає, що останні два рівняння системи є лінійною комбінацією перших двох рівнянь системи, ранг основної матриці дорівнює рангу розширеної і дорівнює 2т, тому система має безліч розв'язків. Так як мінор

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0,$$

то на основі отриманої розширеної матриці складемо систему двох рівнянь і перенесемо в праву частину невідомі x_3, x_4, x_5, коефіцієнти при яких не входять в мінор Δ:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = x_3 + x_4 - x_5 + 1 \\ x_1 - x_2 = -x_3 - x_4 + 2x_5 \end{cases}. \tag{13}$$

Додамо перше рівняння системи до другого

$$3x_1 = x_5 + 1, \quad x_1 = \frac{1}{3}x_5 + \frac{1}{3},$$

і одержане значення невідомого x_1 підставимо в друге рівняння системи:

$$x_2 = \frac{1}{3}x_5 + \frac{1}{3} + x_3 + x_4 - 2x_5,$$

$$x_2 = x_3 + x_4 - \frac{5}{3}x_5 + \frac{1}{3},$$

де невідомими x_3, x_4, x_5 можна надавати довільних значень. Побудований розв'язок називається загальним розв'язком системи (12).

Систему (13) можна було б розв'язати також за формулами Крамера.

Приклад 12. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -4 \\ x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 7x_4 = 6 \end{cases}.$$

Складемо розширену матрицю і знайдемо її ранг

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 5 & -4 & -4 \\ 1 & 8 & 7 & -7 & 6 \end{array}\right)(-2) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 5 & -4 & -4 \\ -1 & -2 & -3 & 1 & 14 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 5 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \end{array}\right)(-2) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -5 & -5 & 4 & 4 \\ 1 & 5 & 5 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \end{array}\right) \sim$$

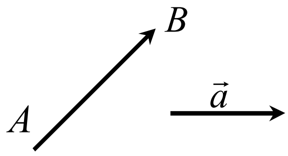
$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -5 & -5 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -5 & -5 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Очевидно, що $r(A) = 2,$ а $r(B) = 3.$ Отже, $r(A) \neq r(B),$ тому система несумісна.

2. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

2.1. Вектори та лінійні операції над ними.

Геометричним вектором (коротко – **вектором**) називається відрізок, який має певну довжину і напрям. Позначення: $\overrightarrow{AB}$, де A- початок, а B- кінець відрізка AB або $\vec{a}$. Довжина відрізка AB називається **модулем** вектора $\overrightarrow{AB}$ і позначається $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ або $\left|\vec{a}\right|$.



Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються **рівними**, якщо $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right|$ і вони мають однаковий напрям. Звідси випливає, що початок вектора можна помістити в довільну точку простору.

Якщо $\left|\vec{a}\right| = 0$, то вектор називається **нульовим і позначається** $\vec{0}$**.**

Сумою $\vec{a}+\vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається такий вектор $\vec{c}$, початок якого співпадає з початком вектора $\vec{a}$, кінець – з кінцем вектора $\vec{b}$ при умові, що вектор $\vec{b}$ прикладений до вектора $\vec{a}$ (рис.1).

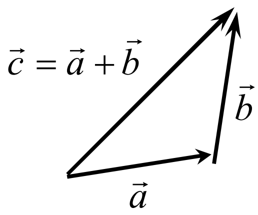


рис. 1

Добутком $(\lambda\,\vec{a})$ **вектора** $\vec{a}$ **на число** λ **називається** вектор $\vec{p}$ такий, що $\left|\vec{p}\right| = \left|\lambda\right|\left|\vec{a}\right|$, напрямок $\vec{p}$ збігається з напрямом $\vec{a}$ при $\lambda > 0$ і змінюється на протилежний, якщо $\lambda < 0$ (рис.2).

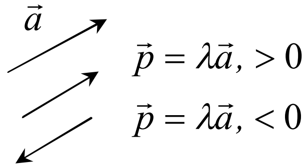


рис. 2

Різницею $\vec{a}-\vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{d} = \vec{a} + (-1)\vec{b}$ (рис.3).

Вектори називаються **колінеарними**, якщо вони лежать на паралельних прямих, або на одній прямій.

Вектори називаються **компланарними** , якщо вони паралельні деякій площині, або лежать в одній площині.

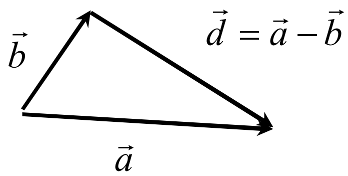


рис. 3

Вектор $\vec{a}_0 = \dfrac{1}{\left|\vec{a}\right|}\,\vec{a}$ називається **ортом** вектора $\vec{a}$ ($\left|\vec{a}_0\right| = 1$ і напрям $\vec{a}_0$ співпадає з напрямом $\vec{a}$).

2.2. Розклад вектора по базису. Впорядкована трійка некомпланарних векторів $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ називається **базисом** множини векторів. Всякий вектор $\vec{a}$ може бути єдиним чином розкладений по базису:

$$\vec{a} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3. \tag{1}$$

Числа x_1, x_2, x_3 називаються **координатами** вектора $\vec{a}$ в базисі $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Нехай в просторі введена прямокутна декартова система координат $Oxyz$. Трійка $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ одиничних векторів, які напрямлені відповідно вздовж осей Ox, Oy, Oz, називається **координатним базисом** (рис. 4).

Якщо $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, то будемо також записувати $\vec{a} = (x, y, z)$.

Якщо $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, то будемо також записувати $\vec{a} = (x, y, z)$.

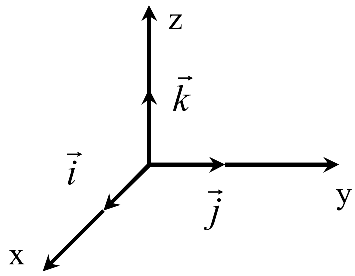


рис. 4

Якщо $\vec{a} = (x, y, z)$, то $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Числа $cos\,\alpha = \dfrac{x}{|\vec{a}|}$, $cos\,\beta = \dfrac{y}{|\vec{a}|}$, $cos\,\gamma = \dfrac{z}{|\vec{a}|}$

називаються **напрямними косинусами** вектора $\vec{a}$; α, β, γ - кути, які утворює вектор $\vec{a}$ з додатними напрямками координатних осей.

Має місце наступна рівність:

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1.$$

Якщо

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1),\ \vec{b} = (x_2, y_2, z_2),$$

то

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2);$$
$$\lambda\vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1). \qquad (2)$$

Три вектори $\vec{e}_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\vec{e}_2 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $\vec{e}_3 = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ **утворюють базис тоді і тільки тоді**, коли визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (3)$$

Розглянемо таку задачу. Нехай дано чотири вектори $\vec{e}_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\vec{e}_2 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $\vec{e}_3 = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Відомо, що вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ утворюють базис.

Потрібно знайти розклад (1) вектора $\vec{a}$ по базису $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. В силу (2), розписуючи рівність (1) покоординатно, отримаємо

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1 x_3 = a_1 \\ \alpha_2 x_1 + \beta_2 x_2 + \gamma_2 x_3 = a_2 \\ \alpha_3 x_1 + \beta_3 x_2 + \gamma_3 x_3 = a_3. \end{cases} \qquad (4)$$

Так як визначник Δ даної системи лінійних рівнянь відносно невідомих x_1, x_2, x_3, не дорівнює нулю, то система має єдиний розв’язок.

Приклад 1. Задано вектори $\vec{e}_1=(1,0,5)$, $\vec{e}_2=(3,2,7)$, $\vec{e}_3=(5,0,9)$, $\vec{a}=(-4,2,-12)$. Переконатися, що вектори $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ утворюють базис і знайти розклад вектора $\vec{a}$ по базису.

Розв'язування. Перевіримо умову (3)

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&3&5\\0&2&0\\5&7&9\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&5\\5&9\end{vmatrix}=2(9-25)=-32\neq 0.$$

Отже, вектори $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ утворюють базис. Координати x_1,x_2,x_3 вектора $\vec{a}$ в базисі $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ знайдемо із відповідної системи (4)

$$\begin{cases}1\cdot x_1+3\cdot x_2+5\cdot x_3=-4\\0\cdot x_1+2\cdot x_2+0\cdot x_3=2\\5\cdot x_1+7\cdot x_2+9\cdot x_3=-12\end{cases}.$$

Розв'язок системи за формулами Крамера

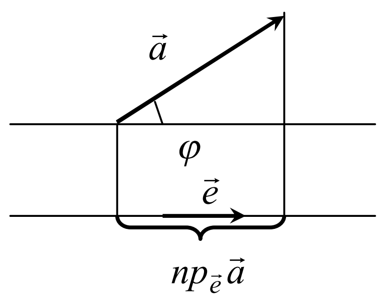
$$\Delta_1=\begin{vmatrix}-4&3&5\\2&2&0\\-12&7&9\end{vmatrix}=64,\ \Delta_2=\begin{vmatrix}1&-4&5\\0&2&0\\5&-12&9\end{vmatrix}=-32,\ \Delta_3=\begin{vmatrix}1&3&-4\\0&2&2\\5&7&-12\end{vmatrix}=32;$$

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=-2,\ x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=1,\ x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=-1.$$

Отже, шуканий розклад має вигляд $\vec{a}=-2\vec{e}_1+\vec{e}_2-\vec{e}_3$.

2.3. Проекція вектора на вектор.

Проекцією вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{e}$ називається число $np_{\vec{e}}\ \vec{a}=|\ \vec{a}\ |\cos\varphi$, де φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{e}$ $(0\le\varphi\le\pi)$.



Очевидно, що якщо $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, то координати x, y, z вектора $\vec{a}$ співпадають з проекціями вектора $\vec{a}$ відповідно на вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Приклад 2. Знайти вектор $\vec{b}$, колінеарний вектору $\vec{a}=3\,\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, якщо $|\ \vec{b}\ |=10$ і вектор $\vec{b}$ утворює тупий кут з віссю Oy.

Розв'язування. Так як вектор $\vec{b}$ колінеарний вектору $\vec{a}$, то

$$\vec{b} = \lambda \vec{a} = 3\lambda \cdot \vec{i} - \lambda \cdot \vec{j} + \lambda \cdot \vec{k}\,.$$

Число λ знайдемо з умови $\left|\vec{b}\right| = 10$:

$$\sqrt{9\lambda^2 + \lambda^2 + \lambda^2} = 10 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm\frac{10}{\sqrt{11}}\,.$$

Знак виберемо такий, щоб вектор $\vec{b}$ утворював тупий кут з віссю Oy, тобто щоб його проекція на вектор $\vec{j}$ була від'ємною $\lambda = \sqrt{11}$ (якщо φ - тупий кут, то $cos\,\varphi < 0$).

Відповідь. $\vec{b} = 3\frac{10}{\sqrt{11}}\vec{i} - \frac{10}{\sqrt{11}}\vec{j} + \frac{10}{\sqrt{11}}\vec{k}$.

2.4. Координати точки в просторі. Нехай в просторі введена прямокутна декартова система координат $Oxyz$. Якщо M - довільна точка простору, то вектор $\overrightarrow{OM}$ називається **радіус-вектором** точки. **Координатами точки** M називаються координати її радіус – вектора $\overrightarrow{OM}$ б тобто $M = M(x,\ y,\ z),$ якщо $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Якщо $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2) -$ дві довільні точки простору, то вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ має координати

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

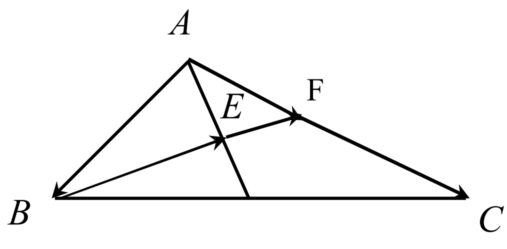
Відстань ρ між точками M_1 і M_2 знаходиться за формулою

$$\rho(M_1M_2) = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

Приклад 3. Задано вершини $A(1,\ 0,\ -1),\ B(2,\ 2,\ 1)$ і точка $E(-1,\ 2,\ 1)$ перетину медіан трикутника ABC. Знайти координати вершини C.
Розв'язування. Так як координати вершини A задані, то, згідно з формулою (5), достатньо знайти координати вектора $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AF} = 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}) = 2(\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BE}),$$

так як точка E ділить медіану в відношенні 2:1.



$\overrightarrow{AB} = (1,\ 2,\ 2),\ \overrightarrow{BE} = (-3,\ 0,\ 0),$ звідки

$$\overrightarrow{AC} = \left(2\left(1 - 3\frac{3}{2}\right), 2\cdot 2, 2\cdot 2\right) = (-7, 4, 4).$$

Нехай $x_c,\ y_c,\ z_c -$ координати точки C. Тоді на основі (5) знайдемо:
$x_c = 1 + (-7) = 6,\ y_c = 0 + 4 = 4,\ z_c = -1 + 4 = 3.$
Відповідь: $C(-6,\ 4,\ 3)$.

2.5 Поділ відрізка в заданому відношенні. Нехай точка M ділить напрямлений відрізок $\overrightarrow{M_1M_2}$ **у відношенні** λ**,** тобто

$$\overrightarrow{M_1M} = \lambda \cdot \overrightarrow{MM_2}\,. \tag{6}$$

Причому, $\lambda > 0$, якщо точка M знаходиться всередині відрізка $\overrightarrow{M_1M_2}$, і $\lambda < 0$, якщо – зовні.

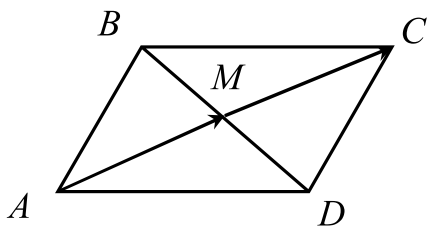
Відношення (6) у першому випадку можна записати у вигляді $\dfrac{\left|\overrightarrow{M_1M}\right|}{\left|\overrightarrow{MM_2}\right|} = \lambda$.

Нехай $M(x, y, z)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Тоді із (6) випливає, що

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \tag{7}$$

Приклад 4. Дано суміжні вершини паралелограма $A(-2,6)$, $B(2,8)$, і точку перетину його діагоналей $M(2,2)$. Знайти дві інші вершини.

Розв'язування. В точці перетину діагоналі паралелограма діляться пополам. Тоді $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{CM} \quad \Rightarrow \quad \lambda = -2$. Нехай $C(x_c, y_c)$, $D(x_D, y_D)$. За формулами (7) знайдемо



$$x_c = \frac{-2-2\cdot 2}{1+(-2)} = 6, \; y_c = \frac{6-2\cdot 2}{1+(-2)} = -2.$$

Аналогічно $x_D = \dfrac{2-2\cdot 2}{1+(-2)} = 2$, $y_D = \dfrac{8-2\cdot 2}{1+(-2)} = -4$.

Відповідь. $C(6,-2)$, $D(2,-4)$.

Приклад 5. Дано трикутник з вершинами $A(1,-1,-3)$, $B(2,1,-2)$, $C(-5,2,-6)$. Обчислити довжину бісектриси його внутрішнього кута при вершині A.

Розв'язування. Відомо, що бісектриса ділить протилежну сторону на частини пропорційні прилеглим до неї сторонам:

$$\frac{\left|\overrightarrow{BM}\right|}{\left|\overrightarrow{MC}\right|} = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}, \; \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(2-1)^2 + (1+1)^2 + (-2+3)^2} = \sqrt{6},$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-5-1)^2 + (2+1)^2 + (-6+3)^2} = 3\sqrt{6}.$$

Отже, $\dfrac{\left|\overrightarrow{BM}\right|}{\left|\overrightarrow{MC}\right|} = \dfrac{\sqrt{6}}{3\sqrt{6}} = \dfrac{1}{3} = \lambda$.

Нехай $M(x, y, z)$. За формулами (7) знайдемо

$$x = \frac{2 - \frac{1}{3}\cdot 5}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}, \quad y = \frac{1+\frac{1}{3}\cdot 2}{1+\frac{1}{3}} = \frac{5}{4}, \quad z = \frac{-2-\frac{1}{3}\cdot 6}{1+\frac{1}{3}} = -3.$$

Отже, $M\left(\frac{1}{4}, \frac{5}{4}, -3\right)$ і $\left|\overrightarrow{AM}\right| = \sqrt{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-1-\frac{5}{4}\right)^2 + (-3+3)^2} = \frac{3}{4}\sqrt{10}$.

Відповідь. $\frac{3}{4}\sqrt{10}$.

2.6. Скалярний добуток векторів. Скалярним добутком векторів $\vec{a}$ **і** $\vec{b}$ називається число

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=|\,\vec{a}\,|\cdot\left|\,\vec{b}\,\right|\cos\varphi \,, \qquad (8)$$

де φ - кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Якщо $\vec{a}=\left(x_1,y_1,z_1\right)$ і $\vec{b}=\left(x_2,y_2,z_2\right)$, то

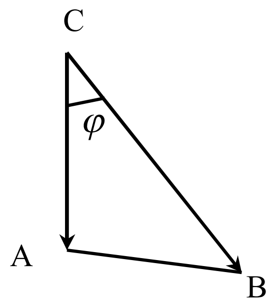
$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2\,. \qquad (9)$$

Із (8) випливає, що $\vec{a}\perp\vec{b} \quad\Leftrightarrow\quad \left(\vec{a},\vec{b}\right)=0$ - умова перпендикулярності векторів.

Із (8) і (9) отримаємо

$$\cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\,\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}. \qquad (10)$$

Приклад 6. Знайти косинус внутрішнього кута φ при вершині B в ΔABC, якщо $A(1,1,0)$, $B(0,-1,0)$, $C(-2,1,1)$.



Розв'язування. За формулою (5) знаходимо

$\overrightarrow{BA}=\left(1-0,1-(-1),0-0\right)=\left(1,2,0\right)$,

$\overrightarrow{BC}=\left(-2-0,1-(-1),1-0\right)=\left(-2,2,1\right)$.

За формулою (10) знайдемо

$$\cos\varphi=\frac{1\cdot(-2)+2\cdot2+0\cdot1}{\sqrt{1^2+2^2+0^2}\,\sqrt{(-2)^2+2^2+1^2}}=\frac{2}{3\sqrt{5}}.$$

2.7. Векторний добуток векторів. Векторним добутком вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який задовольняє умовам:

1) $\vec{c}\perp\vec{a},\ \vec{c}\perp\vec{b};$

2) Вектори $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ утворюють **праву трійку** векторів, тобто якщо дивитися з кінця вектора $\vec{c}$, то найближчий поворот від вектора $\vec{a}$ до вектора $\vec{b}$ здійснюється проти стрілки годинника;

3) $|\,\vec{c}\,|=|\,\vec{a}\,|\cdot\left|\,\vec{b}\,\right|\sin\varphi$, де φ - кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Позначення: $\vec{c}=\left[\vec{a},\vec{b}\right],\ \ \vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}.$

Геометричний зміст векторного добутку: модуль $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|$ векторного добутку дорівнює площі S паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Із означення випливає, що $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=0 \ \Leftrightarrow\ \vec{a}\,\mathrm{II}\,\vec{b}$ тобто якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні вектори.

Алгебраїчні властивості векторного добутку:

1) $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=-\left[\vec{b},\vec{a}\right];$

2) $\left[\lambda\vec{a},\vec{b}\right]=\lambda\left[\vec{a},\vec{b}\right];$

3) $\left[\vec{a}+\vec{b},\vec{c}\right]=\left[\vec{a},\vec{c}\right]+\left[\vec{b},\vec{c}\right].$

Якщо $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$ і $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$, то

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=(y_1z_2-y_2z_1)\vec{i}-(x_1z_2-x_2z_1)\vec{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\vec{k}.$$

Приклад 7. Знайти площу трикутника, побудованого на векторах

$$\vec{a}=2\vec{e}_1-\vec{e}_2,\quad \vec{b}=\vec{e}_1+3\vec{e}_2 \text{ де } |\vec{e}_1|=|\vec{e}_2|=1 \text{ і } \varphi=45^0.$$

Розв'язування.

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|.$$

Знайдемо, враховуючи властивості векторного добутку:

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(2\vec{e}_1-\vec{e}_2)(\vec{e}_1+3\vec{e}_2)=2[\vec{e}_1,\vec{e}_1]+6[\vec{e}_1,\vec{e}_2]-[\vec{e}_2,\vec{e}_1]-3[\vec{e}_2,\vec{e}_2]=$$
$$=2\cdot 0+6[\vec{e}_1,\vec{e}_2]+[\vec{e}_1,\vec{e}_2]-3\cdot 0=7[\vec{e}_1,\vec{e}_2].$$

Отже,

$$\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|=7\left|[\vec{e}_1,\vec{e}_2]\right|=7|\vec{e}_1|\cdot|\vec{e}_2|\,sin\,45^0=\frac{7}{2}\sqrt{2}.$$

Відповідь. $\frac{7}{4}\sqrt{2}$ кв. од.

2.8. Мішаний добуток векторів.

Мішаним добутком векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ називається число

$$\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}=\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right).$$

Із означення випливає, що три вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ **компланарні тоді і лише тоді,** коли $\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}=0.$

Геометричний зміст мішаного добутку: модуль $\left|\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right|$ мішаного добутку дорівнює об'єму $V_{пар.}$ паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c},$ тобто $V=\left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|$

Якщо $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1),\ \vec{b}=(x_2,y_2,z_2),\ \vec{c}=(x_3,y_3,z_3),$ то

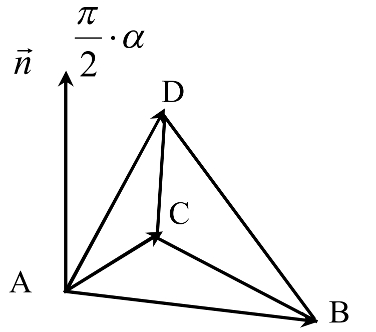
$$\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}.$$

Приклад 8. Задано вершини піраміди

$$A(1,1,2),\ B(-1,2,0),\ D(2,0,3).$$

Знайти: 1) довжину ребра AB; 2) косинус кута між ребрами AB і AD; 3) кут між ребром AD і гранню ABC; 4) площу грані ABC; 5) об'єм піраміди; 6) висоту піраміди, опущену з вершини D на висоту ABC; 7) проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на $\overrightarrow{AD}$.

Розв'язування. 1). Оскільки $\overrightarrow{AB} = (-2, 1, -2)$, то згідно з формулою (5)



$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-1-1)^2 + (2-1)^2 + (0-2)^2} = 3.$$

2) Знайдемо $\overrightarrow{AD} = (1, -1, 1)$ і позначимо φ - кут між $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AD}$, тоді згідно з формулою (10)

$$\cos\varphi = \frac{-2-1-2}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-2)^2}\,\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = -\frac{5}{3\sqrt{3}}.$$

3) Оскільки $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 0)$, то

$$\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\cdot\vec{i} + 2\cdot\vec{j} + 1\cdot\vec{k}.$$

Звідси $\vec{n} = (0, 2, 1)$. Вектор $\vec{n}$ - перпендикулярний до грані ABC. Позначимо кут між гранню ABC і ребром AD через α, тоді $\vec{n}\,{}^\wedge\,\overrightarrow{AD} = \frac{\pi}{2} - \alpha$

$$\cos\left(\vec{n}\,{}^\wedge\,\overrightarrow{AD}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha = \frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\vec{n}|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|} = \frac{0\cdot 1 + 2\cdot(-1) + 1\cdot 1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{15}}.$$

Звідси

$$\alpha = -\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\right).$$

4) Площа грані ABC дорівнює площі $\Delta\, ABC$

$$S_{\Delta\, ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\sin\left(\overrightarrow{AB}\,{}^\wedge\,\overrightarrow{AC}\right).$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = 3,\ \left|\overrightarrow{AC}\right| = 1.$$

Позначимо кут між $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC} = \beta$, тоді

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{2}{3};$$

$$\sin\beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Отже, $S_{\Delta\, ABC}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

5). $V_{nip.}=\dfrac{1}{6}V_{nap.}=\dfrac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}\right|=\dfrac{1}{6}\left\|\begin{matrix}-2 & 1 & -2\\ -1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{matrix}\right\|=\dfrac{1}{6}\left|-(-1)\begin{vmatrix}1 & -2\\ -1 & 1\end{vmatrix}\right|=\dfrac{1}{6}$.

6). Для знаходження висоти піраміди використаємо формулу

$$V_{nip.}=\frac{1}{3}S_{осн.}\cdot h$$

$$\text{Звідси}\qquad h=\frac{3\,V_{nip.}}{S_{\Delta\, ABC}}=\frac{3\cdot\frac{1}{6}}{\frac{\sqrt{5}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

7). Оскільки

$$np_{\overrightarrow{AD}}\overrightarrow{AB}=\left|\overrightarrow{AB}\right|cos\left(\overrightarrow{AB}\,{}^{\wedge}\,\overrightarrow{AD}\right),$$

то

$$np_{\overrightarrow{AD}}\overrightarrow{AB}=\left|\overrightarrow{AB}\right|cos\,\varphi=3\cdot\left(-\frac{5}{3\sqrt{3}}\right)=-\frac{5}{\sqrt{3}}.$$

3. ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

3.1. Пряма на площині. В декартовій прямокутній системі координат Oxy на площині пряма може бути задана рівнянням одного із таких видів:

1) $Ax + By + C = 0$ - загальне рівняння прямої, де $\vec{n} = (A, B) -$ вектор, перпендикулярний до прямої;

2) $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ - рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (A, B)$;

3) $y = kx + b$ - рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом $k = tg\varphi$, де $\varphi -$ кут між прямою та додатним напрямом осі Ox;

4) $y - y_0 = k(x - x_0)$ - рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ і має кутовий коефіцієнт k;

5) $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ - рівняння прямої, яка проходить через точки $M_1(x_1, y_1),\ M_2(x_2, y_2);$

6) $\dfrac{x - x_0}{\ell} = \dfrac{y - y_0}{m}$ - канонічне рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ паралельно напрямному вектору $\vec{s} = (\ell, m);$

7) $\begin{cases} x = x_0 + \ell t \\ y = y_0 + mt \end{cases}, t \in (-\infty, +\infty)$ - параметричні рівняння прямої;

8) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ - рівняння прямої у відрізках, де $(a,\ 0)$ і $(0,\ b)$ - точки перетину прямої з осями координат;

9) $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ - нормальне рівняння прямої, в якому $p > 0$ - довжина перпендикуляра до прямої, опущеного з початку координат; α - кут між перпендикуляром і додатним напрямом осі Ox.

Щоб одержати рівняння (9) з рівняння (1), треба поділити рівняння (1) на $\pm\sqrt{A^2 + B^2}$, вибравши знак протилежний знаку C.

Відстань d від точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої (1) або (9) знаходиться за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = |x_0\cos\alpha + y_0\sin\alpha - p|.$$

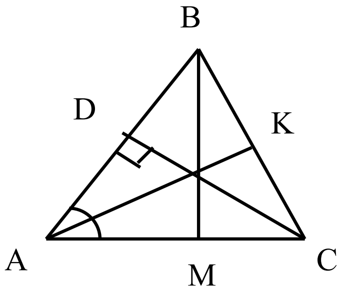
Якщо дві прямі задані рівнянням з кутовими коефіцієнтами k_1 і k_2, то кут φ між ними можна знайти за формулою

$$tg\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|; \qquad (1)$$

звідси випливає **ознака паралельності двох прямих:** $k_1 = k_2$ і **ознака перпендикулярності** $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$.

Приклад 1. Задано трикутник з вершинами в точках $A(1,\ 2),\ B(2,\ -2),\ C(6,\ 1)$. Потрібно:

1) написати рівняння сторони (AB);
2) написати рівняння висоти (CD) і знайти її довжину $|CD|$;
3) знайти кут φ між висотою (CD) і медіаною (BM);
4) записати рівняння бісектриси (AK) внутрішнього кута при вершині A.



Розв'язування.

1) Використовуючи рівняння (5), отримаємо

$$\frac{x-1}{2-1}=\frac{y-2}{-2-2} \Leftrightarrow \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-4} \Leftrightarrow 4x+y-6=0 \ - \ (AB).$$

2) Знайдемо кутовий коефіцієнт прямої (CD):

$$k_{CD}=-\frac{1}{k_{AB}}=-\frac{1}{-4}=\frac{1}{4}.$$

Тепер скористаємося рівнянням прямої (4):

$$y-1=\frac{1}{4}(x-6) \Leftrightarrow x-4y-2=0 \ - \ (CD).$$

Визначимо координати точки D. Для цього розв'яжемо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 4x+y-6=0 \\ x-4y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{26}{17}, \ y=-\frac{2}{17}.$$

Отже, $D\left(\frac{26}{17}, \frac{2}{17}\right)$ і $|CD|=\sqrt{\left(6-\frac{26}{17}\right)^2+\left(1+\frac{2}{17}\right)^2}=\frac{19}{\sqrt{17}}$.

3) Координати точки M:

$$x_M=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{7}{2}, \quad y_M=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{3}{2}.$$

Із рівняння прямої (5) знайдемо, що кутовий коефіцієнт прямої (BM):

$$k_{BM}=\frac{y_M-y_B}{x_M-x_B}=\frac{3/2+2}{7/2-2}=\frac{7}{3}.$$

Для знаходження кута φ скористаємося формулою (1):

$$tg\varphi=\left|\frac{k_{BM}-k_{CD}}{1+k_{BM}k_{CD}}\right|=\frac{7/3-1/4}{1+7/3\cdot 1/4}=\frac{25}{19} \Rightarrow \varphi=arctg\frac{25}{19}.$$

4) За властивістю бісектриси $\frac{|BK|}{|KC|}=\frac{|AB|}{|AC|}$.

$|AB|=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17}$; $|AC|=\sqrt{5^2+1^2}=\sqrt{26}$. Отже, $\frac{|BK|}{|KC|}=\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{26}}=\lambda$.

Далі скористаємося формулами поділу відрізка в заданому відношенні λ і знайдемо координати точки K:

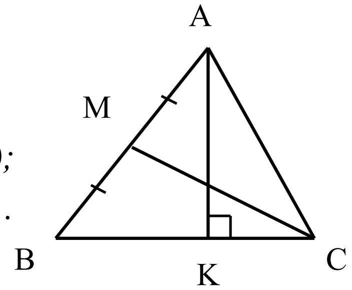
$$x_K=\frac{2+\sqrt{\frac{17}{26}}\cdot 6}{1+\sqrt{\frac{17}{26}}}=\frac{2\sqrt{26}+6\sqrt{17}}{\sqrt{26}+\sqrt{17}};\quad y_K=\frac{-2+\sqrt{\frac{17}{26}}\cdot 1}{1+\sqrt{\frac{17}{26}}}=\frac{-2\sqrt{26}+\sqrt{17}}{\sqrt{26}+\sqrt{17}}.$$

Рівняння бісектриси (AK) запишемо у формі (5):

$$\frac{x-1}{x_K-1}=\frac{y-2}{y_K-2}\iff\frac{x-1}{\sqrt{26}+5\sqrt{17}}=\frac{y-2}{-4\sqrt{26}-\sqrt{17}}\iff$$

$$\iff\left(4\sqrt{26}+\sqrt{17}\right)x+\left(\sqrt{26}+5\sqrt{17}\right)y-6\sqrt{26}-11\sqrt{17}=0\ -\ (AK).$$

Приклад 2. Знайти рівняння сторін трикутника, знаючи одну з його вершин $B(2,-7)$, а також рівняння висоти $3x+y+11=0$ і медіани $x+2y+7=0$, проведених з різних вершин.



Розв'язування.

Нехай (AK) - висота, а (CM) - медіана: $(AK):\ 3x+y+11=0;$
$(CM):\ x+2y+7=0.$

Кутовий коефіцієнт прямої (BC):

$$k_{BC}=-\frac{1}{k_{AK}}=-\frac{1}{-3}=\frac{1}{3}.$$

Скористаємося рівнянням прямої (4), щоб записати рівняння прямої (BC):

$$y+7=\frac{1}{3}(x-2)\iff x-3y-23=0\ -\ (BC).$$

Знайдемо координати точки C, розв'язавши систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases}x+2y+7=0\\ x-3y-23=0\end{cases}\iff x=5,\ y=-6.$$

Отже, $C(5,-6)$.

Нехай $M(x_1,y_1)$ і $A(x,y)$. Тоді $\frac{x+2}{2}=x_1$, $\frac{y-7}{2}=y_1$, так як $|BM|=|MA|$. Оскільки точка M лежить на прямій (BA), а точка A - на (AK), то їх координати задовольняють систему рівнянь:

$$\begin{cases}x_1+2y_1+7=0\\ 3x+y+11=0\\ \frac{x+2}{2}=x_1\\ \frac{y-7}{2}=y_1\end{cases}$$

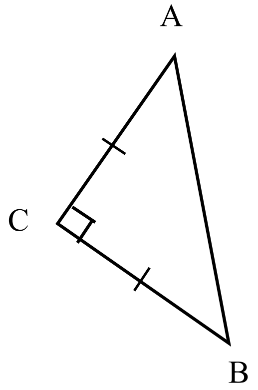
Звідси,

$$\begin{cases}\frac{x+2}{2}+2\frac{y-7}{2}+7=0\\ 3x+y+11=0\end{cases}\iff\begin{cases}x+2y+2=0\\ 3x+y+11=0\end{cases}\iff x=-4,\ y=1.$$

Отже, $A(-4, 1)$.

Так як координати усіх вершин трикутника відомі, то, скориставшись рівнянням прямої (5), можемо записати після перетворень рівняння його сторін:

$$(AC):\ 7x+9y+19=0; \qquad (AB):\ 4x+3y+13=0.$$



Приклад 3. Нехай задані вершина $C(-1, 3)$ прямого кута рівнобедреного прямокутного трикутника ABC і його гіпотенуза $3x-4y-12=0$. Знайти рівняння катетів.

Розв'язування. Нехай гіпотенуза (AB): $3x-4y-12=0$. Тоді її кутовий коефіцієнт $k_{AB}=\frac{3}{4}$.

Так як трикутник рівнобедрений, то $\angle CAB=\angle CBA=45^0$.
Знайдемо кутові коефіцієнти за допомогою формули (1):

$$tg45^0=\left|\frac{k-k_{AB}}{1+k\cdot k_{AB}}\right|=\left|\frac{k-3/4}{1+k\cdot 3/4}\right| \iff 1=\pm\frac{4k-3}{4+3k} \iff k_1=7,\ k_2=-\frac{1}{7}.$$

Використовуючи рівняння прямої (4), можемо записати шукані рівняння катетів:

$$y-3=7(x+1) \iff 7x-y+10=0;$$

$$y-3=-\frac{1}{7}(x+1) \iff x+7y-20=0.$$

3.2. Площина в просторі.

В прямокутній декартовій системі координат $Oxyz$ в просторі площина може бути задана рівнянням одного із наступних видів:

1) $Ax+By+Cz+D=0$ - загальне рівняння площини, де $\vec{n}=(A,B,C)$ - вектор, перпендикулярний до площини;

2) $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)$ - рівняння площини, яка проходить через задану точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}=(A,B,C)$;

3) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ - рівняння площини у відрізках, де $(a,0,0)$, $(0,b,0)$, $(0,0,c)$ - точки перетину площини з осями координат;

4) $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$ - нормальне рівняння площини, де $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ - напрямні косинуси нормального вектора $\vec{n}$, направленого з початку координат в сторону площини; $p>0$ - відстань від початку координат до площини.

Рівняння (1) зводиться до рівняння (4) шляхом ділення на $\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}$, вибравши знак протилежний знаку D.

Відстань d від точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до площини (1) або (4) знаходиться за формулою

$$d=\left|x_0\cos\alpha+y_0\cos\beta+z_0\cos\gamma-p\right|=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Умови паралельності і перпендикулярності двох площин $A_1x+B_1y+C_1z+D=0$ і $A_2x+B_2y+C_2z+D=0$: $(\parallel)\ \frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1}=\frac{C_2}{C_1}$; $(\perp)\ A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

Якщо $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ точки, які не лежать на одній прямій, то рівняння площини, що проходить через ці точки має вигляд:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Приклад 4. Скласти рівняння площини, яка проходить через три точки $M_1(1,1,1)$, $M_2(0,1,2)$, $M_3(-1,3,2)$.

Розв'язування. Позначимо $M(x,y,z)$ - довільну точку площини. Три вектори $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ - компланарні при будь-якому положенні точки M на площині. Тоді їх мішаний добуток дорівнює нулю:

$$\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0-1 & 1-1 & 2-1 \\ -1-1 & 3-1 & 2-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкладаючи визначник по першому рядку, отримаємо

$$-2(x-1)-(y-1)-2(z-1)=0 \quad \Leftrightarrow \quad -2x-y-2z+5=0.$$

Відповідь. $2x+y+2z-5=0$.

Приклад 5. Скласти рівняння площини, яка проходить через задані точки $M_1(1,2,0)$, $M_2(2,1,1)$, паралельно вектору $\vec{a}=(3,0,1)$.

Розв'язування. Задача має єдиний розв'язок, так як вектори $\overrightarrow{M_1M_2}=(1,-1,1)$ і $\vec{a}=(3,0,1)$ неколінеарні (їх координати не пропорційні). За вектор $\vec{n}$, перпендикулярний до площини, можемо взяти вектор

$$\vec{n} = \left[\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}.$$

Отже, $\vec{n}=(-1,2,3)$. Далі, скориставшись рівнянням площини (2), отримаємо

$$-(x-1)+2(y-2)+3z=0 \quad \Leftrightarrow \quad x-2y-3z+3=0.$$

Відповідь. $x-2y-3z+3=0$.

3.3. Пряма в просторі. Пряма в просторі може бути задана одним із наступних рівнянь:

1) $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ - загальне рівняння прямої, як лінії перетину двох площин, де вектори $\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ і $\vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$ - неколінеарні;

2) $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ - канонічні рівняння прямої, де $\vec{s}=(l,m,n)$ - напрямний вектор прямої, $M_0(x_0,y_0,z_0)$ - точка на прямій;

3) $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$ - рівняння прямої, яка проходить через дві точки

$M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

4) $\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$, $t \in (-\infty, +\infty)$ - параметричні рівняння прямої;

Умови паралельності і перпендикулярності двох прямих, заданих рівнянням виду (2):

$$(\text{II})\ \frac{l_2}{l_1} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{n_2}{n_1}: \qquad (\perp)\ l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

Приклад 6. Записати канонічні рівняння прямої, яка задана загальним рівнянням: $L: \begin{cases} 2x - y + 2z - 3 = 0 \\ x + 2y - z - 1 = 0 \end{cases}$.

Розв'язування. Візьмемо будь-яку точку $M_0(x, y, z)$ на прямій L. Для цього покладемо, наприклад, $x = 0$ і розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} -y + 2z - 3 = 0 \\ 2y - z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad y = \frac{5}{3}, \quad x = \frac{7}{3}.$$

Отже, $M_0\left(0, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$.

За напрямний вектор $\vec{s}$ прямої L можемо взяти вектор

$$\vec{s} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k},$$

$\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$ - вектори перпендикулярності до площини.

Отже, $\vec{s} = (-3, 4, 5)$. Крім того $M_0\left(0, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$. Скориставшись рівнянням прямої (2):

$$\frac{x - 0}{-3} = \frac{y - {}^5\!/_3}{4} = \frac{z - {}^7\!/_3}{5}.$$

Відповідь. $\frac{x}{-3} = \frac{y - {}^5\!/_3}{4} = \frac{z - {}^7\!/_3}{5}$.

3.4. Пряма і площина в просторі. Кут між прямою і площиною в просторі вимірюється кутом між прямою та її проекцією на площину. Якщо пряма задана канонічними рівняннями

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

а площина – загальним рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$, то цей кут φ визначається за формулою:

$$\sin\varphi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\ \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Звідси випливає умова паралельності прямої і площини:

$$Al + Bm + Cn = 0.$$

Умова перпендикулярності прямої і площини має вигляд:

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}.$$

Приклад 7. Визначити точку $M(x, y, z)$ перетину прямої $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-5}{2}$ з площиною $2x + 3y - 2z + 2 = 0$.

Розв'язування. Перейдемо до параметричних рівнянь прямої

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t - 1 \\ z = 2t + 5 \end{cases}.$$

Підставимо ці вирази замість x, y, z у рівняння площини:

$$2(2t + 1) + 3(3t - 1) - 2(2t + 5) = 0.$$

Звідси, $t = 1$. Отже, координати точки перетину будуть $x = 3, y = 2, z = 7$.

Відповідь. $M(3, 2, 7)$.

Приклад 8. Довести, що прямі $(L_1)\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4}$ і $(L_2) = \begin{cases} x = 3t + 7 \\ y = 2t + 2 \\ z = -2t + 1 \end{cases}$

лежать в одній площині і скласти рівняння цієї площини.

Розв'язування. Пряма L_1 проходить через точку $M_1(1, -2, 5)$ і має напрямлений вектор $\vec{s}_1 = (2, -3, 4)$. Пряма L_2 проходить через точку $M_2(7, 2, 1)$ і має напрямний вектор $\vec{s}_2 = (3, 2, -2)$. Тоді для того, щоб прямі L_1 і L_2 лежали в одній площині, необхідно щоб вектори $\overrightarrow{M_1 M_2}, \vec{s}_1, \vec{s}_2$ були компланарними. В свою чергу, для цього потрібно, щоб їх мішаний добуток дорівнював нулю. Покажемо це.

$$\overrightarrow{M_1 M_2} \cdot \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} 6 & 4 & -4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 ,$$

так як перший і третій рядки визначника пропорційні. Отже, L_1 і L_2 лежать в одній площині. Складемо її рівняння.

Нехай $M(x, y, z)$ - довільна точка площини. Тоді вектори $\overrightarrow{M_1 M_2}, \vec{s}_1, \vec{s}_2$ - компланарні і їх мішаний добуток має дорівнювати нулю, тобто

$$\overrightarrow{M_1 M_2} \cdot \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-5 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 .$$

Розглянемо визначник по першому рядку, отримаємо

$$-2(x - 1) + 16(y + 2) + 13(z - 5) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2x + 16y + 13z - 31 = 0.$$

Відповідь. $2x - 16y - 13z + 31 = 0$.

3.5. Криві другого порядку. Рівняння кривої другого порядку на площині в прямокутній декартовій системі координат Oxy має вигляд:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Bx + Ey + F = 0 \quad ,$$

де A, B, C, D, E, F - сталі. Якщо крива невироджена (порожня множина, точка, пряма, пара прямих), то для неї знайдеться така прямокутна декартова система координат, в якій рівняння кривої набуває одного із наступних видів:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a \geq b > 0) \text{- **еліпс;**}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a, b > 0) \text{- **гіпербола;**}$$

$$y^2 = 2px \quad (p > 0) \text{ - **парабола.**}$$

Дані рівняння називаються **канонічними.**

Для знаходження канонічного рівняння кривої другого порядку, заданої загальним рівнянням, використовується паралельне перенесення осей координат в деякому напрямку і поворот системи координат на деякий кут.

Якщо точка M має координати (x, y) в системі координат Oxy, а нова система $O'x'y'$ одержана перенесенням початку $O(0,0)$ старої системи в точку $O'(x_0, y_0)$, то нові координати (x', y') точки M зв'язані з старими формулами

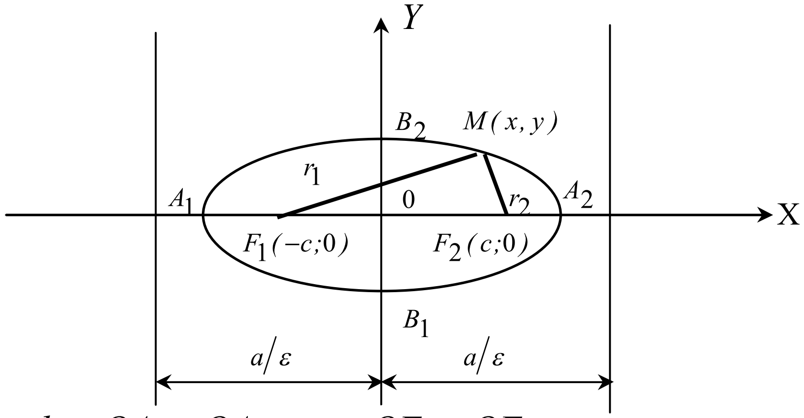
$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}. \qquad (2)$$

ЕЛІПС

Еліпсом називається геометричне місце точок сума відстаней яких від двох заданих точок F_1 та F_2, що називаються фокусами, є величина стала (більша, ніж віддаль між фокусами).

Позначимо цю сталу величину через $2a$; віддаль між фокусами через $2c$; тоді $2a > 2c$, отже $a > c$.

Виберемо систему координат так: вісь абсцис проведемо через фокуси, а початок координат візьмемо в середині відрізка F_1F_2.



$$OB_1 = OB_2 = b; \quad OA_1 = OA_2 = a; \quad OF_1 = OF_2 = c.$$

В цій системі координати фокусів будуть такі $F_1(-c;\ 0),\ F_2(c;\ 0)$. Віддалі для довільної точки $M(x, y)$ еліпса до фокусів називаються **фокальними радіусами** і позначаються:

$$MF_1 = r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\ ; \qquad MF_2 = r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,.$$

За означенням еліпса $r_1 + r_2 = 2a$, тому

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Це і є рівняння еліпса, після спрощення якого одержимо канонічне рівняння еліпса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{3}$$

де $b^2 = a^2 - c^2$ $(a > b)$ у випадку, якщо фокуси лежать на осі Ox, і $b^2 = c^2 - a^2$ $(b > a)$ у випадку, якщо фокуси лежать на осі Oy.

Відрізок $A_1A_2 = 2a$ називається **великою віссю еліпса**, а відрізок $B_1B_2 = 2b$ називається **малою віссю еліпса**.

Точки A_1, A_2, B_1, B_2 називаються **вершинами еліпса**.

Ексцентриситетом еліпса називається відношення фокусної віддалі $2c$ до довжини великої осі еліпса $2a$. Тоді за означенням: $\varepsilon = c/a$; тому, що $c < a$, то $\varepsilon < 1$.

Директрисами еліпса (3) називаються прямі, паралельні до малої осі еліпса і розміщенні симетрично відносно неї на віддалі, рівній a/ε, тому рівняння директрис мають вигляд: $x = \pm a/\varepsilon$ $\left(\varepsilon = c/a\right)$.

Якщо в рівнянні еліпса $b > a$, то рівняння директрис будуть $y = \pm b/\varepsilon$ $\left(\varepsilon = c/b\right)$.

Якщо $a = b$, то рівняння (3) приймає вигляд $x^2 + y^2 = a^2$ і визначає коло з центром в початку координат радіуса a.

Якщо центр еліпса (3) знаходиться в точці $O_1(x_1,\ y_1)$, а осі симетрії паралельні осям координат, то його рівняння має вигляд:

$$\frac{(x-x_1)^2}{a^2} + \frac{(y-y_1)^2}{b^2} = 1. \tag{4}$$

Якщо в рівнянні (4) $a = b$, то одержимо рівняння:

$$(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 = a^2, \tag{5}$$

яке визначає рівняння кола з центром в точці $(x_1,\ y_1)$ і радіусом рівним a.

Приклад 9. Велика вісь еліпса дорівнює 10; фокуси знаходяться в точках $F_1(-4; 0)$, $F_2(4;\ 0)$. Скласти рівняння еліпса, знайти ексцентриситет та написати рівняння директрис.

Розв'язування. За умовою $2a = 10$, $a = 5$, $c = 4$.

$$b^2 = a^2 - c^2;\ \ b^2 = 25 - 16;\ \ \ b^2 = 9;$$

Рівняння еліпса буде: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1;$ $\quad \varepsilon = \dfrac{c}{a};$ $\quad \varepsilon = \dfrac{4}{5};$

Рівняння директрис: $x = \pm a/\varepsilon$, тобто $x = \pm 25/4$.

Приклад 10. Знайти канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип і побудувати графік: $9x^2 + 16y^2 - 90x + 32y + 97 = 0$.

Розв'язування. Згрупуємо доданки, які містять лише x і лише y:

$$9\left(x^2-10x\right)+16\left(y^2+2y\right)+97=0.$$

Доповнимо вирази в дужках до повних квадратів:

$$9\left[(x-5)^2-25\right]+16\left[(y+1)^2-1\right]+97=0,$$

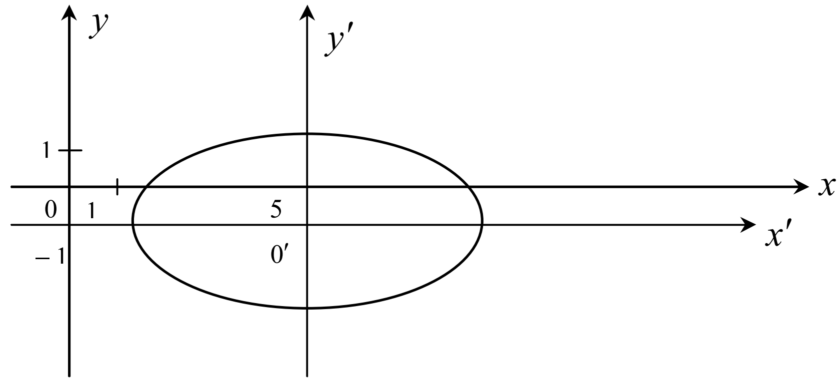
$$9(x-5)^2+16(y+1)^2-144=0.$$

Позначимо $\begin{cases} x'=x-5 \\ y'=y+1 \end{cases}$ або $\begin{cases} x=x'+5 \\ y=y'-1 \end{cases}$.

Порівнюючи дані формули з формулами (2), бачимо, що вони визначають паралельне перенесення старої системи координат Oxy в нову $O'x'y'$ з початком $O'(5,-1)$. В системі координат $O'x'y'$ рівняння кривої набуває вигляду:

$$9(x')^2+16(y')^2-144=0 \text{ або } \frac{(x')^2}{4^2}+\frac{(y')^2}{3^2}=1\,.$$

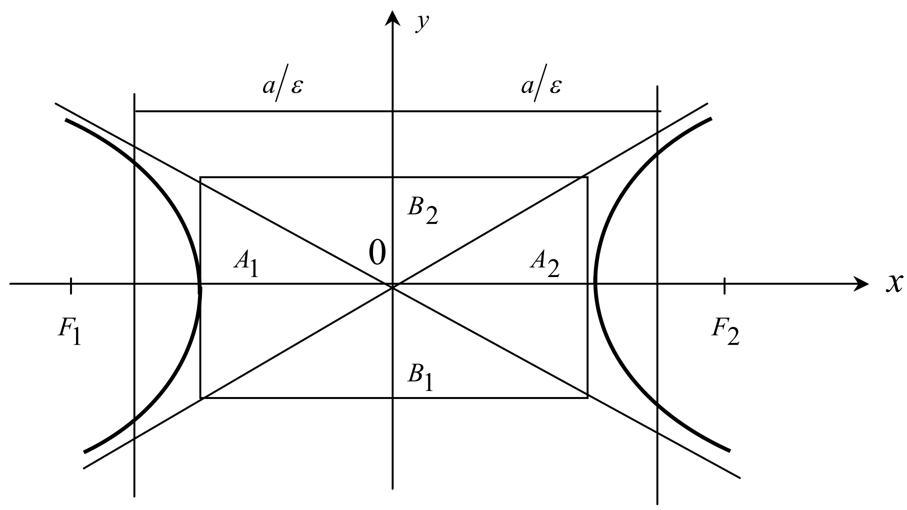
Це канонічне рівняння еліпса з півосями $a=4$ і $b=3$. Зробимо побудову:



ГІПЕРБОЛА

Гіперболою називається геометричне місце точок, різниця віддалей від двох заданих точок F_1 та F_2, що називаються фокусами. є величина стала, менша за віддаль між фокусами.

Позначимо цю сталу величину через $2a$; віддаль між фокусами $F_1F_2=2c$. Причому $2c>2a$, $c>a$. Розташуємо систему координат так, щоб вісь абсцис проходила через фокуси, а початок координат знаходився в середині відрізка F_1F_2.



$$OB_1=OB_2=b; \quad OF_1=OF_2=c; \quad OA_1=OA_2=a.$$

В цьому випадку фокуси будуть мати координати: $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$.

Віддалі до довільної точки $M(x,y)$ гіперболи від фокусів, називаються її **фокальними радіусами** і позначаються:

$$MF_1 = r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\,; \quad MF_2 = r_2\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,.$$

За означенням гіперболи, маємо: $r_1 - r_2 = \pm 2a$, тому

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a,$$

це і є рівняння гіперболи, після спрощення якого одержимо канонічне рівняння гіперболи:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,, \tag{6}$$

де $b^2 = c^2 - a^2 \ \ (c > a)$.

Відрізок A_1A_2 називається **дійсною віссю** гіперболи, а відрізок B_1B_2 - **уявною віссю** гіперболи.

Ексцентриситетом гіперболи називається відношення фокусної віддалі гіперболи $2c$ до довжини дійсної осі $2a$: $\varepsilon = {}^{c}\!/_{a}$; тому, що $c > a$, $\varepsilon > 1$.

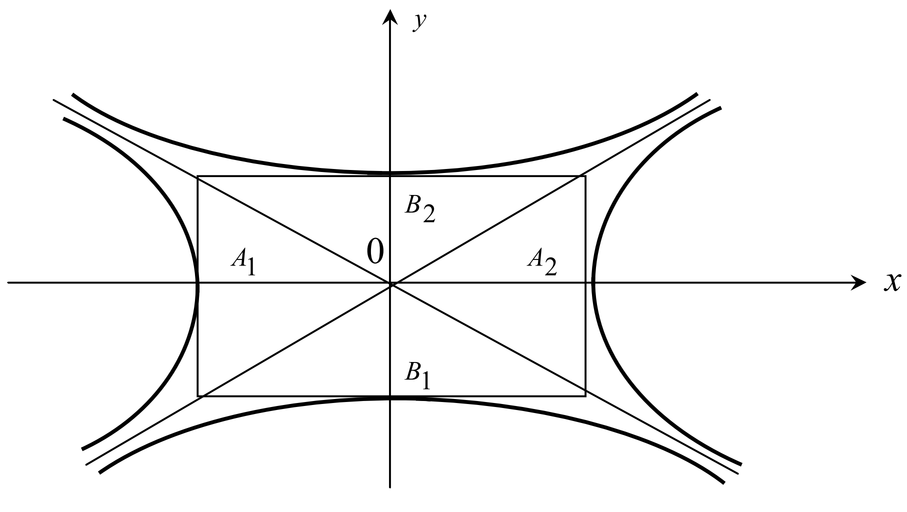
Директрисами гіперболи називаються дві прямі паралельні до уявної осі гіперболи і розміщені симетрично відносно неї на віддалі ${}^{a}\!/_{\varepsilon}$, тому $x = \pm\, {}^{a}\!/_{\varepsilon}$ - рівняння директрис гіперболи.

Асимптотами гіперболи називаються прямі $y = \pm\dfrac{b}{a}x$, до яких наближаються вітки гіперболи, коли $|x|$ необмежено зростає. Асимптоти гіперболи направлені по діагоналях прямокутника, побудованого на дійсній та уявній осях гіперболи.

Дві гіперболи, у яких дійсна вісь одної є уявною віссю другої і навпаки, називаються **спряженими.** Рівняння спряжених гіпербол в одній і тій же системі координат будуть:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,; \qquad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Спряжені гіперболи мають спільний центр і спільні асимптоти.



$$A_1O = A_2O = a; \quad B_1O = B_2O = b.$$

Для гіперболи $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, фокуси якої знаходяться на осі ординат рівняння директрис мають вигляд: $y = \pm b/\varepsilon$, де $\varepsilon = c/b$.

Слід відмітити ще одну важливу властивість гіперболи: відношення віддалі до будь-якої точки гіперболи від фокуса до віддалі цієї точки від відповідної директриси є величина стала і дорівнює ексцентриситету гіперболи:

$$\frac{r_1}{d_1}=\varepsilon, \quad \frac{r_2}{d_2}=\varepsilon.$$

Якщо центр гіперболи (6) знаходиться в точці $O_1(x_1, y_1)$, а осі симетрії паралельні осям координат, то рівняння такої гіперболи має вигляд:

$$\frac{(x-x_1)^2}{a^2}-\frac{(y-y_1)^2}{b^2}=1.$$

Приклад 11. Задано гіперболу $25x^2-9y^2-225=0$.

1) знайти її півосі;
2) знайти фокуси;
3) обчислити ексцентриситет;
4) написати рівняння асимптот і директрис;
5) написати рівняння спряженої гіперболи, обчислити її ексцентриситет і написати рівняння її директриси;
6) побудувати обидві гіперболи.

Розв'язування.

1) $25x^2-9y^2=225, \quad \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=1, \quad a^2=9, \; a=3; \;\; b^2=25, \; b=5;$

2) $c^2=a^2+b^2; \quad c^2=9+25; \quad c^2=34; \quad c=\sqrt{34}.$

$F_1=\left(-\sqrt{34};\, 0\right), \quad F_2=\left(\sqrt{34};\, 0\right);$

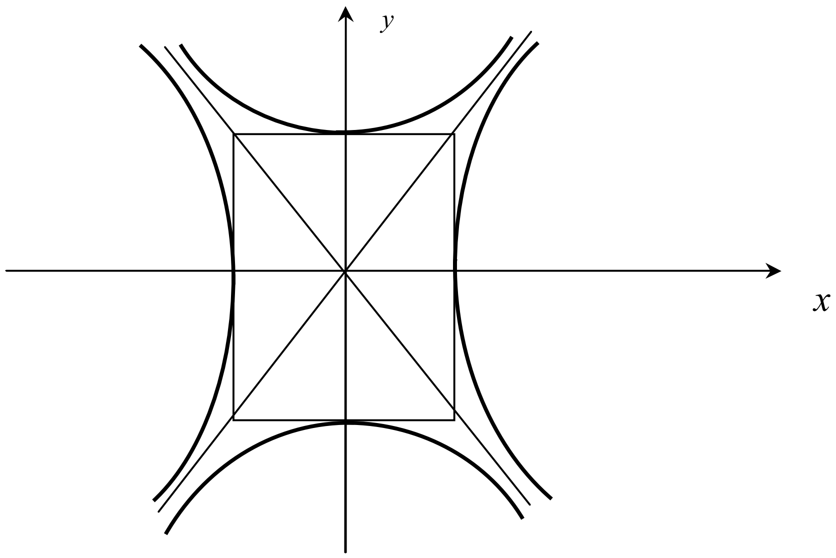
3) $\varepsilon=\frac{c}{a}, \quad \varepsilon=\frac{\sqrt{34}}{3};$

4) Рівняння асимптот: $y=\pm\frac{b}{a}x, \quad y=\pm\frac{5}{3}x;$

Рівняння директрис: $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}, \quad x=\pm\frac{3}{\sqrt{34}/3}, \quad x=\pm\frac{9}{\sqrt{34}};$

5) $-\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ - рівняння спряженої гіперболи; $\varepsilon=\frac{c}{b}, \quad \varepsilon=\frac{\sqrt{34}}{5};$

Рівняння директрис: $y=\pm\frac{b}{\varepsilon}, \quad y=\pm\frac{15}{\sqrt{34}};$



Приклад 12. Знайти канонічне рівняння кривої, визначити її тип і побудувати

$$x^2-4y^2-2x-16y-31=0.$$

Розв'язування.

$$x^2-4y^2-2x-16y=31$$

$$\left(x^2-2x+1-1\right)-4\left(y^2+4y=4-4\right)=31$$

$$(x-1)^2-4(y+2)^2=31+1-16$$

$$(x-1)^2-4(y+2)^2=16$$

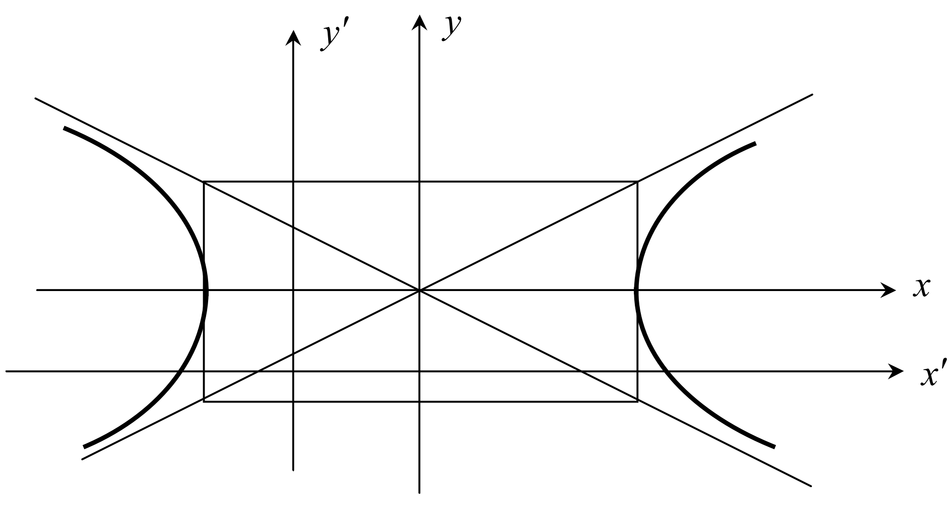
$$\frac{(x-1)^2}{16}-\frac{(y+2)^2}{4}=1$$

Позначимо $\begin{cases} x'=x-1 \\ y'=y+2 \end{cases}$ або $\begin{cases} x=x'+1 \\ y=y'-2 \end{cases}$,

ці формули визначають паралельне перенесення системи координат Oxy в точку $O'(1,2)$. В системі координат $O'x'y'$ рівняння кривої прийме вигляд:

$$\frac{(x')^2}{16}-\frac{(y')^2}{4}=1$$

- це канонічне рівняння гіперболи з півосями $a=4$ і $b=2$. Зробимо рисунок.



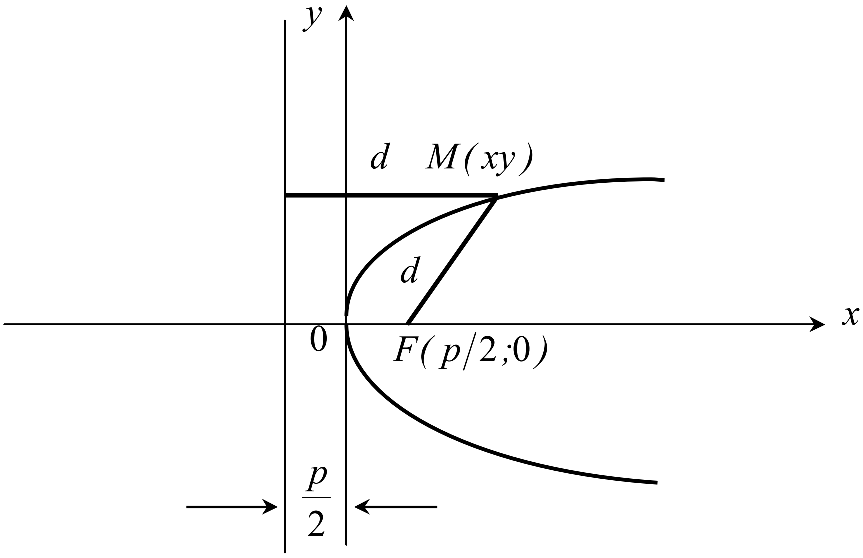
ПАРАБОЛА

Параболою називається геометричне місце точок рівновіддалених від заданої точки, яка називається **фокусом** і від заданої прямої, яка називається **директрисою** параболи.

Вибираємо систему координат так, щоб вісь абсцис проходила через фокус перпендикулярно до директриси, а за початок координат візьмемо середину відрізка, який лежить між фокусом і директрисою, тоді рівняння параболи в цій системі координат буде мати вигляд:

$$y^2 = 2px, \tag{7}$$

де параметр p, як віддаль від фокуса до директриси, є величина додатна.



Рівняння директриси $x = -p/2$;

Якщо вітки параболи направлені вліво, то її рівняння буде

$$y^2 = -2px; \tag{8}$$

рівняння директриси у цьому випадку: $x = p/2$.

Віссю симетрії парабол (7) і (8) є вісь абсцис.

Якщо вісь симетрії параболи є вісь Oy, то її рівняння буде

$$x^2 = \pm 2py, \tag{9}$$

де знак "-" вказує на те, що вітки параболи напрямлені вниз.

Рівняння директрис будуть мати відповідно вигляд: $y = \pm p/2$.

Якщо вершина параболи знаходиться в точці $O_1(x_1, y_1)$, то рівняння параболи набуде вигляду: $(x - x_1)^2 = \pm 2p(y - y_1)$ - у випадку коли вісь симетрії паралельна осі Oy і $(y - y_1)^2 = \pm 2p(x - x_1)$ - у випадку коли вісь симетрії паралельна осі Ox.

Приклад 13. Задано рівняння параболи. Визначити координати вершини параболи, величину параметра p, скласти рівняння директриси та побудувати криву.

а) $2x^2 - x + 2y + 3 = 0;$

$$2\left(x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{16}-\frac{1}{16}\right)+2y+3=0;\quad 2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2=-2y-3+\frac{1}{8};$$

$$2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2=-2y-\frac{23}{8};\quad 2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2=-2\left(y+\frac{23}{16}\right);\quad \left(x-\frac{1}{4}\right)^2=-\left(y+\frac{23}{16}\right),$$

де $O\left(\frac{1}{4},\frac{23}{16}\right)$ - координати вершини.

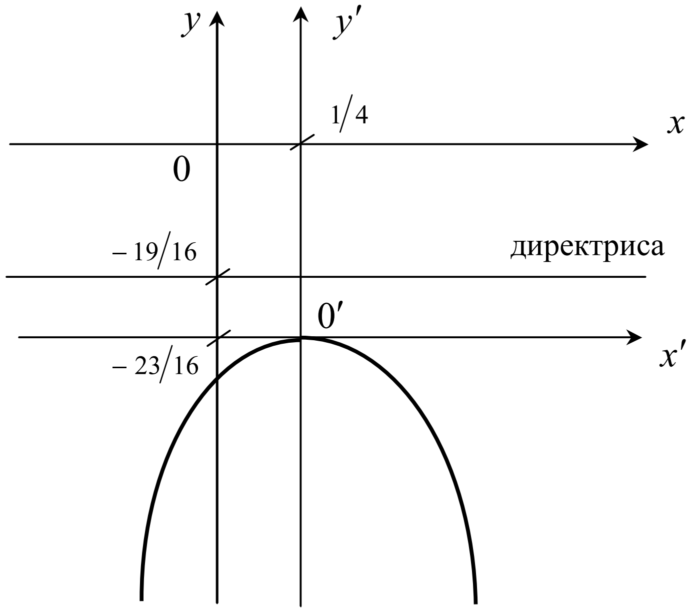
Позначимо $\begin{cases} x-\frac{1}{4}=x' \\ y+\frac{23}{16}=y' \end{cases}$ або $\begin{cases} x=x'+\frac{1}{4} \\ y=y'-\frac{23}{16} \end{cases}$ − ці формули визначають перенесення старої системи координат Oxy, в нову $O'x'y'$, з початком в $0'\left(\frac{1}{4};-\frac{23}{16}\right)$.

В системі координат $O'x'y'$ рівняння параболи набуде вигляду

$$(x')^2=-y',\qquad (x^2=-2py)$$

$$-2py=-1,\qquad p=1/2 - \text{величина параметра}$$

Рівняння директриси $y'=\frac{p}{2}$, але $y'=y+\frac{23}{16}$, тому $y+\frac{23}{16}=\frac{1}{4}$, $y=\frac{1}{4}-\frac{23}{16}$, $y=-19/16$ - рівняння директриси. Побудуємо криву.



б) $y^2-5y+6x+10=0$

$$y^2-5y+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}+6x+10=0$$

$$\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=-6x-10+\frac{25}{4}$$

$$\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=-6x-\frac{15}{4}$$

$$\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=-6\left(x+\frac{15}{24}\right)$$

$0\left(-\frac{15}{24};\frac{5}{2}\right)-$ це вершина параболи.

Позначимо $\begin{cases} x+\frac{15}{24}=x' \\ y-\frac{5}{2}=y' \end{cases}$, або $\begin{cases} x=x'-\frac{15}{24} \\ y=y'+\frac{5}{2} \end{cases}$

В системі координат з початком в точці $0'\left(-\frac{15}{24};\frac{5}{2}\right)$ рівняння параболи має вигляд:

$$(y')^2=-6x'$$

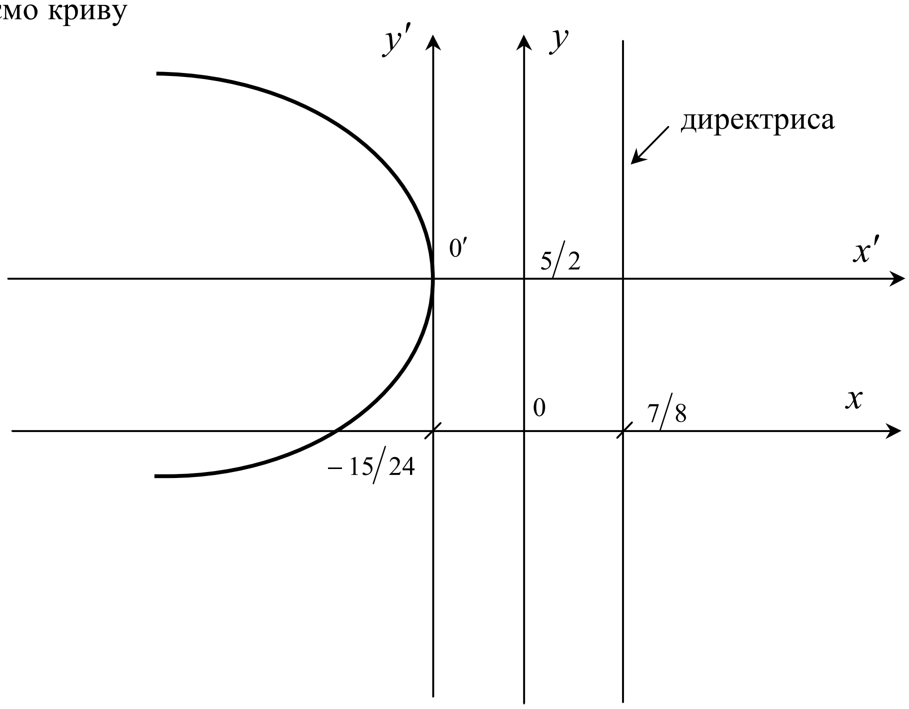
$-2p=-6,\ p=3-$ величина параметра.

Рівняння директриси для параболи $y^2=-2px$ має вигляд $x=\frac{p}{2}$ $(*)$

Якщо $x'=x+\frac{15}{24}$ б підставимо в $(*)$, то одержимо $x+\frac{15}{24}=\frac{3}{2}$.

Звідси маємо $x=\frac{3}{2}-\frac{15}{24};\quad x=\frac{21}{24}=\frac{7}{8};\quad x=\frac{7}{8}-$ рівняння директриси.

Побудуємо криву



4. ВСТУП ДО АНАЛІЗУ

4.1. Числові функції однієї змінної. Якщо кожному числу x з деякої множини дійсних чисел D ставиться у відповідність за певним правилом єдине дійсне число y, то кажуть, що **задано числову функцію** f і пишуть $y = f(x),\ \ x \in D$.

Множина D називається **областю визначення** функції. Множина E усіх чисел y, для яких при деякому $x \in D$ $f(x) = y$, називається **множиною значень** функції.

Приклад 1. Знайти область визначення і множину значень функції:

1) $y = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$; 2) $y = lg(cos(lg\,x))$.

Розв'язування.

1) Підкореневий вираз має бути додатним: $4 - x^2 > 0 \iff |x| < 2$, тобто $D = (-2,\ 2)$.

Множина значень $E = \left[\dfrac{1}{2},\ +\infty\right)$.

2) Зовнішній логарифм має зміст при $cos(lg\,x) > 0$. Косинус додатний при

$$2\pi k - \frac{\pi}{2} < lg\,x < 2\pi k + \frac{\pi}{2},\ \ k \in Z = \{0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ ...\}.$$

Звідси знаходимо, що $10^{2\pi k - \frac{\pi}{2}} < x < 10^{2\pi k + \frac{\pi}{2}},\ k \in Z$. Отже, $\left(10^{2\pi k - \frac{\pi}{2}},\ 10^{2\pi k + \frac{\pi}{2}}\right)$, $k \in Z$. Множина значень $E = (-\infty,\ 0]$.

4.2. Границя функції. Нехай маємо функцію $y = f(x),\ \ x \in D$, і точка x_0 $(x_0 \in D\ \ або\ \ x_0 \notin D)$ така, що в довільному її околі є точки із D, відмінні від неї (скрізь надалі ця умова вважається виконаною).

Означення 1. Число A називається **границею функції** $f(x)$ **в точці** x_0**,** якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що як тільки $0 < |x - x_0| < \delta (x \in D)$, то $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Позначення: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, або $f(x) \to A$ при $x \to x_0$.

Введемо поняття границі функції на нескінченності.

Означення 2. Число A називається **границею функції** $f(x)$ **при** $x \to \infty$**,** якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\Delta = \Delta(\varepsilon) > 0$, що як тільки $|x| > \Delta$, то $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Позначення: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$, або $f(x) \to A$ при $x \to \infty$.

Введемо поняття односторонніх границь.

Означення 3. Число A називається **границею функції** $f(x)$ **в точці** x_0 **справа (зліва),** якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що як тільки $x_0 < x < x_0 + \delta (x_0 - \delta < x < x_0),\ (x \in D)$, то $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Позначення: $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$, або $f(x_0 + 0) = A$; $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$, або $f(x_0 - 0) = A$.

Зауваження 1. Границя функції $f(x)$ в точці x_0 існує **тоді і тільки тоді,** коли $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$.

Введемо поняття функції **нескінченно великої в точці.**

Означення 4. Значення ∞ називається **границею функції** $f(x)$ **в точці** x_0**,** якщо для будь-якого $E > 0$ існує $\delta = \delta(E) > 0$, що як тільки $0 < |x - x_0| < \delta\ (x \in D)$, то $|f(x)| > E$. Позначення: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, або $f(x) \to \infty$ при $x \to x_0$.

Слід пам'ятати наступні дві границі:

- **перша важлива границя** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$**;**
- **друга важлива границя** $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e$**;** де $e \approx 2{,}71828$.

Властивості границь:

Якщо існують скінченні границі $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, то існують границі суми, добутку і частки функцій f і g і дорівнюють відповідно $A + B$, $A \cdot B$, $\frac{A}{B}(B \neq 0)$.

При обчисленні границь часто буває корисним наступне **правило заміни змінної:** нехай існують границі $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ і $\lim\limits_{y \to A} g(y)$, де x_0 і A можуть бути як числами, так і приймати значення ∞; тоді

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{y \to A} g(y), \text{ де } y = f(x). \tag{1}$$

Якщо функція g елементарна (див. нижче зауваження 2) і точка A належить області визначення функції g, то

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \to x} f(x)\right). \tag{2}$$

З формули (2) випливає зокрема таке **правило**: якщо існують границі $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ і $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, де **числа** A **і** B не дорівнюють одночасно нулю, то

$$\lim_{x \to x_0} [f(x)]^{g(x)} = A^B. \tag{3}$$

Приклад 2. Знайти границю $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$.

Розв'язування. Так як чисельник і знаменник дробу прямують до нуля при $x \to 1$, то маємо **невизначеність типу** $\frac{0}{0}$**.** Щоб розкрити невизначеність, розкладемо чисельник і знаменник на множники:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^3 - 1) + (x - 1)}{x^2(x - 1) - (x - 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 2)}{(x - 1)(x^2 - 1)} =$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+2}{x^2-1}=\infty$$

Відповідь. ∞**.**

Приклад 3. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}$.

Розв'язування. Маємо невизначеність типу $\dfrac{0}{0}$. В чисельнику додамо і віднімемо 1:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{1+x^2}-1\right)+\left(1-\sqrt[4]{1-2x}\right)}{x+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x+x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt[3]{\left(1+x^2\right)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)}{\left(x+x^2\right)\left(\sqrt[3]{\left(1+x^2\right)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)}+\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\sqrt[4]{1-2x}\right)\left(1+\sqrt[4]{1-2x}\right)}{\left(x+x^2\right)\left(1+\sqrt[4]{1-2x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x^2\right)-1}{x(1+x)\left(\sqrt[3]{\left(1+x^2\right)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)}+\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\sqrt{1-2x}\right)\left(1+\sqrt{1-2x}\right)}{\left(x+x^2\right)\left(1+\sqrt[4]{1-2x}\right)\left(1+\sqrt{1-2x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{(1+x)\left(\sqrt[3]{\left(1+x^2\right)^2}+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)}+\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-2x)}{(1+x)\left(1+\sqrt[4]{1-2x}\right)\left(1+\sqrt{1-2x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{0}{(1+0)\left(\sqrt[3]{\left(1+0^2\right)^2}+\sqrt[3]{1+0^2}+1\right)}+\frac{2}{(1+0)\left(1+\sqrt[4]{1-2\cdot 0}\right)\left(1+\sqrt{1-2\cdot 0}\right)}=0+\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

Відповідь. $1/2$**.**

При обчисленні останніх двох границь було суттєво використані властивість границі частки двох функцій та формула (2).

Приклад 4. Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+2x^2-7x+6}{2x^3-4x+3}$.

Розв'язування. Так як чисельник і знаменник дробу є нескінченно великим при $x\to\infty$, то маємо невизначеність типу $\dfrac{\infty}{\infty}$. Для її розкриття розділимо чисельник і знаменник на x^3.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+2x^2-7x+6}{2x^3-4x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{2}{x}-\frac{7}{x^2}+\frac{6}{x^3}}{2-\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(5+\frac{2}{x}-\frac{7}{x^2}+\frac{6}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)}=\frac{5}{2}.$$

Відповідь. $5/2$ **.**

Приклад 5. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$.

Розв'язування. Маємо невизначеність типу $\infty-\infty$.

$$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=0$$

Відповідь. 0.

Приклад 6. Обчислити $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{\sin x-\sin\alpha}{x-\alpha}$

Розв'язування. Маємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$. Скористаємось 1-ю важливою границею.

$$\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{\sin x-\sin\alpha}{x-\alpha}=\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{2\sin\frac{x-\alpha}{2}\cos\frac{x+\alpha}{2}}{x-\alpha}=\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{\sin\frac{x-\alpha}{2}}{\frac{x-\alpha}{2}}\cdot\lim\limits_{x\to\alpha}\cos\left(\frac{x+\alpha}{2}\right)=$$

Для обчислення першої границі скористаємося формулою (1). Зробимо заміну $\frac{x-\alpha}{2}=y$. Тоді $y\to 0$ при $x\to\alpha$. Отже, продовжимо

$$=\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\cdot\cos\frac{\alpha+\alpha}{2}=1\cdot\cos\alpha=\cos\alpha\,.$$

При обчисленні другої границі була використана формула (2).

Приклад 7. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$.

Розв'язування. Маємо невизначеність типу 1^∞, так як $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-2}=1$ і $\lim\limits_{x\to\infty}x^2=\infty$.

Тому використати формулу (2) безпосередньо не можемо. Скористаємося спочатку 2-ю важливою границею:

$$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\left(x^2-2\right)+3}{x^2-2}\right)^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-2}{3}}\right)^{\frac{x^2-2}{3}\cdot\frac{3x^2}{x^2-2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-2}{3}}\right)^{\frac{x^2-2}{3}}\right]^{\frac{3x^2}{x^2-2}}$$

Знайдемо окремо дві границі:

$$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x^2-2}{3}}\right)^{\frac{x^2-2}{3}}=\left|\begin{array}{l}\frac{x^2-2}{3}=y\\ y\to\infty\quad при\quad x\to\infty\end{array}\right|=\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}=e$$

(скористалися формулою (1) і 2-ю важливою границею);

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{x^2-2}=3.$$

Тоді згідно з формулою (3) будемо мати $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}=e^3$.

Приклад 8. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+tgx}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

Розв'язування. Маємо невизначеність типу 1^{∞}, так як $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=\lim\limits_{x\to 0}tgx=0$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+tgx}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{tgx-\sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{tgx-\sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1+\sin x}{tgx-\sin x}}\right]^{\frac{tgx-\sin x}{(1+\sin x)\sin x}}.$$

Розглянемо окремо дві границі:

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{tgx-\sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1+\sin x}{tgx-\sin x}}=\left|\begin{array}{l}\frac{tgx-\sin x}{1+\sin x}=y\\ y\to 0\quad при\to 0\end{array}\right.=\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{(1+\sin x)\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{\sin x}=\frac{1}{1+0}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)=\frac{1}{1}-1=0.$$

Отже, згідно з формулою (3)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+tgx}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}=e^0=1.$$

Приклад 9. Обчислити $\lim\limits_{x\to\infty}x\lg\left(\frac{3+x}{2+x}\right)$.

Розв'язування. Маємо невизначеність типу $\infty\cdot 0$, так як $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3+x}{2+x}=1, \lg 1=0$.

$$\lim_{x\to\infty}x\lg\left(\frac{3+x}{2+x}\right)=\lim_{x\to\infty}\lg\left(\frac{(2+x)+1}{2+x}\right)^x=\lg\left(\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{x+2}\right]^{\frac{x}{x+2}}\right)=$$

$$=\lg\left(\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+2}\right)^{x+2}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x+2}}\right)=\lg\left((e)^1\right)=\lg e.$$

4.3. Неперервність і точки розриву функції

Означення 5. Функція $y=f(x)$, визначена в точці x_0 і в деякому її околі, називається **неперервною в точці** x_0 якщо $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

Це означає, що границя функції в точці і її значення в цій точці співпадають.

Зауваження 2. Усі **основні елементарні функції** $(c, x^{\alpha}, a^{x}, \log_a x,$ тригонометричні та обернені тригонометричні$)$ **неперервні в кожній точці своєї області визначення.** Це справедливо і для **елементарних функцій**, які утворені за допомогою скінченого числа алгебраїчних дій і суперпозицій над основними елементарними функціями.

Точка x_0 називається **точкою розриву функції** $f(x)$, якщо $f(x)$ не є неперервною в ній. Класифікуємо точки розриву. Точка x_0 називається:

1) **точкою усувного розриву**, якщо існує $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, але $f(x)$ не визначена в точці x_0, або $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0);$

2) **точкою розриву 1-го роду**, якщо існують односторонні границі $f(x_0-0),\ f(x_0+0),$ але $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$ (див. також зауваження 1);

3) **точкою розриву 2-го роду**, якщо не існує або дорівнює ∞ принаймі одна з границь $f(x_0-0),\ f(x_0+0).$

Приклад 10. Знайти точки розриву функції, дослідити їх характер, в випадку усувного розриву довизначити функцію по неперервності.

а) $f(x)=1-x\sin\dfrac{1}{x};$ б) $f(x)=\dfrac{1}{2^{\frac{1}{1-x}}+1};$ в) $f(x)=\dfrac{\cos x}{x}.$

Розв'язування.

а) точка $x_0=0$ є точкою розриву, так як функція не визначена в цій точці.

Знайдемо границю

$$\lim_{x\to 0}\left(1-x\sin\frac{1}{x}\right)=1-\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\sin\frac{1}{x}\right)=1-0=1.$$

Границя функції в точці $x_0=0$ існує, значить точка $x_0=0$ є точкою усувного розриву. Поклавши $f(0)=1$, отримаємо нову функцію, яка в точці $x_0=0$ є неперервною.

б) функція $f(x)=\dfrac{1}{2^{\frac{1}{1-x}}+1}$ розривна в точці $x_0=1.$

Знайдемо односторонні границі:

$$f(1+0)\ \lim_{x\to 1+0}\frac{1}{2^{\frac{1}{1-x}}+1}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 1+0}2^{\frac{1}{1-x}}+1}=\frac{1}{0+1}=1;$$

$$f(x-0)=\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{2^{\frac{1}{1-x}}+1}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 1-0}2^{\frac{1}{1-x}}+1}=0.$$

Оскільки $f(1+0)\neq f(1-0)$, то в точці $x_0=1$ розрив 1-го роду.

в) функція $f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$ має в точці $x_0=0$ розрив 2-го роду, тому що $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{x}=\infty.$

5. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

5.1. Похідна. Основним поняттям диференціального числення є поняття похідної. Оволодіння технікою диференціювання є необхідною умовою подальшого засвоєння курсу математичного аналізу та застосування його методів до розв'язування технічних задач.

Перш за все потрібно вивчити таблицю похідних основних елементарних функцій, правила знаходження похідної суми, добутку та частки двох функцій, а також правило диференціювання складної функції (суперпозицій функції).

Дамо означення похідної функції $y = f(x)$ яка є визначеною і неперервною на деякому інтервалі $(a,\ b)$.

Похідною функції $y = f(x)$, називається границя відношення приросту функції до приросту аргумента за умови, що приріст аргумента прямує до нуля

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Якщо похідна існує для всіх $x \in (a,\ b)$, то функція $f(x)$ називається диференційовною на інтервалі $(a,\ b)$. Операція знаходження похідної називається **диференціюванням.**

Основні правила диференціювання функції

1. Похідна сталої величини дорівнює нулю: $(C)' = 0$;

   Нехай маємо дві функції $u = u(x),\ v = v(x),$ тоді

2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

3. $(uv)' = u'v + uv'$;

   Наслідок 1. $(cv)' = cv'$;

   Наслідок 2. $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$;

4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$;

   Наслідок 1. $\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2}$;

Диференціювання складної функції. Нехай маємо складну функцію $y = f(\varphi(x))$, тоді $y' = f'(t)\cdot\varphi'(x)$, де $t = \varphi(x)$ або $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$, $(y'_x = y'_t \cdot t'_x)$, після знаходження похідної $f(t)$ потрібно замість t підставити $\varphi(x)$.

Правила обчислення похідної складної функції поширюються на композицію скінченого числа функцій. Наприклад: $r(y(x(t)))$; $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$.

Похідні основних елементарних функцій

1) $C' = 0$, де C - стала;

2) $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$, α - будь-яке число;

3) $x' = 1$; $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$; $\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

4) $(\sin x)' = \cos x$;

5) $(\cos x)' = -\sin x;$

6) $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x};$

7) $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x};$

8) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1;$

9) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1;$

10) $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2};$

11) $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2};$

12) $\left(a^x\right)' = a^x \ln a, \quad a > 0 \ \ i \ \ a \neq 1;$

13) $\left(e^x\right)' = e^x;$

14) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a} = \dfrac{\log_a e}{x}, \quad x > 0;$

15) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}, \quad x > 0;$

Похідні гіперболічних функцій:

16) $(shx)' = chx;$

17) $(chx)' = shx;$

18) $(thx)' = \dfrac{1}{ch^2 x};$

19) $(cthx)' = -\dfrac{1}{sh^2 x};$

Зауваження. Нагадаємо, що

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad thx = \frac{shx}{chx}, \qquad cthx = \frac{chx}{shx}, \qquad ch^2 x - sh^2 x = 1.$$

Приклад 1. Знайти похідну функції $y = \dfrac{arctgx}{1+x^2}$.

Розв'язування. Скористаємось правилом (4):

$$y' = \frac{(arctgx)'\left(1+x^2\right) - arctg\left(1+x^2\right)'}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{\frac{1}{1+x^2}\left(1+x^2\right) - arctgx \cdot (0+2x)}{\left(1+x^2\right)} = \frac{1-2x \cdot arctgx}{\left(1+x^2\right)^2}.$$

Приклад 2. Знайти похідну функції $y = \ln(tgx)$.

Розв'язування. Маємо похідну складної функції. Запишемо $y = \ln t$, $t = tgx$ і скористаємось правилом диференціювання складної функції:

$$y' = (\ln t)'(tgx)' = \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{tgx} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x}.$$

Приклад 3. Знайти похідну функції $y = sin\left(e^{1/x^2}\right)$.

Розв'язування. В даному прикладі маємо суперпозицію трьох основних елементарних функцій і тому скористаємось правилом диференціювання складної функції

$$y' = (sin\,t)'\left(e^{1/x^2}\right)' = cos\left(e^{1/x^2}\right)\left(e^t\right)'\left(x^{-2}\right)' = cos\left(e^{1/x^2}\right)\cdot e^{1/x^2}(-2)x^{-3} = -\frac{2}{x^3}e^{1/x^2}\,cos\left(e^{1/x^2}\right)$$

Приклад 4. Знайти похідну функції $y = 4\,ln^3\,sin^5(3-2x)$.

Розв'язування.

$$y' = 4\cdot 3\,ln^2\,sin^5(3-2x)\cdot\frac{1}{sin^5(3-2x)}\cdot 5\,sin^4(3-2x)\cdot cos(3-2x)\cdot(-2) =$$
$$= -120\,ln^2\,sin^5(3-2x)\cdot ctg(3-2x).$$

Приклад 5. Знайти похідну функції $y = (sin\,x)^{x^2}$.

Розв'язування. Скористаємось методом логарифмічного диференціювання.

$$ln\,y = x^2\,ln\,(sin\,x);$$
$$\frac{1}{y}y' = 2x\,ln(sin\,x) + x^2\,\frac{cos\,x}{sin\,x} = x(2\,ln(sin\,x) + xctgx);$$
$$y' = (sin)^{x^2}\cdot x\cdot(2\,ln(sin\,x) + x\cdot ctgx).$$

Приклад 6. Знайти похідну функції $y = y(x)$ заданої неявно

$$y = x^3 + arctgy.$$

Розв'язування. Розглядаючи в даній рівності y як функцію від x, отримаємо тотожність. Диференціюючи обидві частини тотожності по x, отримаємо

$$y' = 3x^2 + (arctgy)'_y\cdot y' = 3x^2 + \frac{y'}{1+y^2} \quad\Rightarrow\quad y' = \frac{3x^2\left(1+y^2\right)}{y^2}.$$

Приклад 7. Знайти похідну функції $y = y(x)$ заданої параметрично рівнянням

$$\begin{cases} x = ctg\left(2e^t\right) \\ y = ln\left(tge^t\right) \end{cases}.$$

Розв'язування. Скористаємося формулою $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

$$y'_t = \frac{1}{tge^t}\cdot\frac{1}{cos^2\,e^t}\cdot e^t = \frac{e^t}{sin\,e^t\,cos\,e^t} = \frac{2e^t}{sin\left(2e^t\right)};$$
$$x'_t = -\frac{1}{sin^2\left(2e^t\right)}\cdot 2e^t;$$
$$y'_x = \frac{\frac{2e^t}{sin\left(2e^t\right)}}{-\frac{2e^t}{sin^2\left(2e^t\right)}} = -sin\left(2e^t\right).$$

5.2. Диференціал. Похідні вищих порядків.

Головна, лінійна відносно приросту незалежної змінної, частина приросту функції називається **диференціалом** функції:

$$dy = y'\Delta x .$$

Диференціал незалежної змінної x дорівнює її приросту: $dx = \Delta x$. Отже,

$$dy = y'dx , \qquad (1)$$

тобто диференціал функції дорівнює її похідній, помноженій на диференціал незалежної змінної.

З формули (1) випливає, що $y' = \dfrac{dy}{dx}$.

Таким чином, похідну $f'(x)$ можна розглядати, як відношення диференціалу функції до диференціала незалежної змінної.

При знаходженні диференціалу складної функції $y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$, $dy = f(u)du$ слід відмітити, що форма диференціалу не залежить від того, чи є аргумент функції незалежною змінною, чи функцією іншого аргументу. Ця властивість називається інваріантністю форми диференціалу.

Геометричний зміст диференціалу такий: значення диференціалу дорівнює приросту ординати дотичної до кривої $y = f(x)$ в даній точці.

Застосування диференціалу до наближених обчислень грунтується на заміні приросту функції її диференціалом, тобто на використанні наближеної формули

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x .$$

Приклад 8. Знайти диференціал функції

$$y = 7^{sin^5 ln^4\left(\frac{7}{x}-\frac{x}{7}-3\right)} .$$

$$dy = y'(x)dx$$

$$dy = 7^{sin^5 ln^4\left(\frac{7}{x}-\frac{x}{7}-3\right)} \cdot ln7 \cdot 5\,sin^4 ln^4\left(\frac{7}{x}-\frac{x}{7}-3\right)\cdot cos\, ln^4\left(\frac{7}{x}-\frac{x}{7}-3\right)\times$$

$$\times 4\,ln^3\left(\frac{7}{x}-\frac{x}{7}-3\right)\cdot \frac{1}{\frac{7}{x}-\frac{x}{7}-3}\left(-\frac{7}{x^2}-\frac{1}{7}\right)dx;$$

$$dy = 7^{sin^5 ln^4\left(\frac{7}{x}-\frac{x}{7}-3\right)} \cdot ln7 \cdot 5\,sin^4 ln^4\left(\frac{7}{x}-\frac{x}{7}-3\right)\cdot cos\, ln^4\left(\frac{7}{x}-\frac{x}{7}-3\right)\times$$

$$\times 4\,ln^3\left(\frac{7}{x}-\frac{x}{7}-3\right)\cdot \frac{21 - x^2 - 9x}{3x}\cdot\left(-\frac{49 + x^2}{7x^2}\right)dx;$$

$$dy = 7^{sin^5 ln^4\left(\frac{7}{x}-\frac{x}{7}-3\right)} \cdot ln7 \cdot 5\,sin^4 ln^4\left(\frac{7}{x}-\frac{x}{7}-3\right)\cdot cos\, ln^4\left(\frac{7}{x}-\frac{x}{7}-3\right)\times$$

$$\times 4\,ln^3\left(\frac{7}{x}-\frac{x}{7}-3\right)\cdot \frac{\left(x^2 - 9x - 21\right)\left(x^2 + 49\right)}{21x^3}dx;$$

Приклад 9. Обчислити наближено $sin\,60^0 3'$.

Розв'язування. Нехай $y = sin\,x$. В даному випадку $x = 60^0$ або $x = \frac{\pi}{3}$, $\Delta x = 3'$, або

$$\Delta x = \frac{3\pi}{60 \cdot 180} = 0{,}000872\ ;\ sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866025\ ;\quad y' = cos\,x\ ;\quad cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Знаходимо наближене значення Δy, якщо $x = \frac{\pi}{3}$ i $\Delta x = 0{,}000872$

$$\Delta y = y'\Delta x = cos\,x \cdot \Delta x = \frac{1}{2} \cdot 0{,}000872 = 0{,}000436,$$

а отже

$$sin\,60^0 3' = sin\,60^0 + \Delta y \approx 0{,}866025 + 0{,}000436 = 0{,}866461\ .$$

Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна на деякому проміжку $(a,\,b)$. Диференціюючи цю функцію, ми одержимо похідну від функції $f(x)$, тобто $f'(x)$.

Похідна від першої похідної називається **похідною другого порядку**

$$y'' = (y')' = \left(f(x)'\right)' = f''(x).$$

Похідна від другої похідної називається **похідною третього порядку** або третьою похідною і позначається через

$$y'''\ \ або\ \ f'''(x).$$

Похідною n-го порядку від функції $f(x)$ називається **похідна від похідної $(n-1)$-го порядку** і позначається символом

$$y^{(n)}\quad або\quad f^{(n)}(x).$$

Нехай функція $y(x)$ задана параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}\qquad t_0 \le t \le T,$$

причому, функція $x = \varphi(t)$ на відрізку $[t_0,\,T]$ має обернену функцію $t = \Phi(x)$. Для знаходження першої та другої похідної використовують формули:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t};\quad y''_{xx} = \frac{x'_t y''_{tt} - y'_t x''_{tt}}{x'_t}\quad або\quad y''_{xx} = \frac{(y'_x)'}{x'_t}.$$

Приклад 10. Знайти $\frac{dy}{dx}$ i $\frac{d^2y}{dx^2}$ для функції $y = \frac{1}{2}tg^2 x + ln\,cos\,x$.

Розв'язування.

$$y' = \frac{1}{2}2tgx \cdot \frac{1}{cos^2 x} + \frac{1}{cos\,x}(-\,sin\,x) = tgx \cdot \frac{1}{cos^2 x} - tgx = tgx\left(\frac{1}{cos^2 x} - 1\right) =$$

$$= tgx\frac{1 - cos^2 x}{cos^2 x} = tgx\frac{sin^2 x}{cos^2 x} = tg^3 x.$$

$$y'' = 3tg^2 x \cdot \frac{1}{cos^2 x} = \frac{3tg^2 x}{cos^2 x}.$$

Приклад 11. Знайти y''_x і y''_{xx} функції, заданої параметрично:

$$\begin{cases} x = a(\sin t - t\cos t) \\ y = a(\cos t + t\sin t)\ . \end{cases}$$

Розв'язування.

$$x'_t = a(\cos t - (\cos t + t(-\sin t))) = a(\cos t - \cos t + t\sin t) = a\,t\sin t;$$

$$y'_t = a(-\sin t + \sin t + t\cos t) = a\,t\cos t;$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a\,t\cos t}{a\,t\sin t} = ctgt;$$

$$(y'_x)'_t = -\frac{1}{\sin^2 t}; \quad y''_{xx} = \frac{-\frac{1}{\sin^2 t}}{a\,t\sin t} = -\frac{1}{a\,t\sin^3 t}.$$

5.3. Рівняння дотичної та нормалі до кривої.

Нехай функція $f(x)$ диференційовна в точці x, тоді рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці $M(x_1,\ y_1)$ має вигляд:

$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1).$$

Нормаллю до кривої в даній точці називається пряма, яка проходить через дану точку, перпендикулярно до дотичної в цій точці.

З означення нормалі випливає, що $k_H = -\frac{1}{k_Д}$, отже, рівняння нормалі має вигляд

$$y - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)}(x - x_1).$$

Приклад 12. Знайти рівняння дотичної та нормалі до кривої

$$y = 1 + 8x - 2x^2 \text{ в точці } (1,\ -2).$$

Розв'язування.

$y' = 8 - 4x;\quad y'(1) = 8 - 4\cdot 1 = 4;\ k_Д = 4;\ y + 2 = 4(x-1);\ \ 4x - y - 6 = 0$ - рівняння дотичної,

$k_Д = 4$, але оскільки $k_H = -\frac{1}{k_Д}$, то $k_H = -\frac{1}{4}$;

$y + 2 = -\frac{1}{4}(x-1);\quad 4y + 8 = -x + 1;\quad x + 4y + 7 = 0$ - рівняння нормалі.

5.4. Правило Лопіталя.

Якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ диференційовні в деякому околі точки a, за винятком, можливо, самої точки a, причому $\varphi'(x) \neq 0$, і якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 0$, або $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \infty$, то $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ за умови, що $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ існує. Це і є правило Лопіталя. Правило використовують для розкриття невизначеностей типу $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ і у випадку, коли $x \to \infty$. Можливе повторне використання правила Лопіталя.

Розкриття невизначенностей типу $0\cdot\infty$, або $\infty - \infty$ зводяться до розкриття невизначенностей типу $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$ алгебраїчними перетвореннями.

Невизначенності типу $1^{\infty}, \infty^{0}, 0^{0}$ зводиться до вище розглянутих невизначеностей за допомогою попереднього логарифмування, або перетворення $\left[f(x)\right]^{\varphi(x)} = e^{\varphi(x) ln f(x)}$.

Приклад 13. Обчислити границю $\lim\limits_{x \to 0} \frac{chx - 1}{1 - cos\, x}$ за допомогою правила Лопіталя.

(Невизначенність типу $\frac{0}{0}$,)

$$\lim_{x \to 0} \frac{chx-1}{1-cos\, x} = \lim_{x \to 0} \frac{(chx-1)'}{(1-cos\, x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{(shx)'}{(sin\, x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{chx}{cos\, x} = \frac{1}{1} = 1.$$

Приклад 14. Обчислити границю:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{sec\, x + x}{tgx - x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{(sec\, x + x)'}{(tgx - x)'} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{1}{cos\, x} + x\right)'}{\left(tgx - x\right)'} =$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{sin\, x}{cos^2\, x} + 1}{\frac{1}{cos^2\, x} - 1} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{sin\, x + cos^2\, x}{1 - cos^2\, x} = \frac{1}{1} = 1.$$

Приклад 15. Обчислити границю:

$$\lim_{x \to 1} (x-1)^{ln\, x} = (0^0) = \lim_{x \to 1} e^{ln\, x\, ln(x-1)} = e^{\lim\limits_{x \to 1} ln\, x \cdot ln(x-1)} = e^{\lim\limits_{x \to 1} \frac{ln(x-1)}{\frac{1}{ln\, x}}} = e^{\lim\limits_{s \to 1} \frac{\frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{x\, ln^2\, x}}} =$$

$$e^{-\lim\limits_{x \to 1} \frac{x\, ln^2\, x}{x-1}} = e^{-\lim\limits_{x \to 1} \frac{ln^2 - x 2\, ln\, x \cdot \frac{1}{x}}{1}} = e^{-\lim\limits_{x \to 1} (ln^2\, x - 2\, ln\, x)} = e^0 = 1,$$

$$\text{або } \lim_{x \to 1} (x-1)^{ln\, x} = A.$$

Прологарифмуємо обидві частини рівності

$$ln \lim_{x \to 1} (x-1)^{ln\, x} = ln\, A$$

$$ln \lim_{x \to 1} (x-1)^{ln\, x} = \lim_{x \to 1} ln\left((x-1)^{ln\, x}\right) = \lim_{x \to 1} ln\, x\, ln(x-1) = \lim_{x \to 1} \frac{ln(x-1)}{\frac{1}{ln\, x}} =$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{x\, ln^2\, x}} = -\lim_{x \to 1} \frac{x\, ln^2\, x}{x-1} = -\lim_{x \to 1} \frac{ln^2\, x + x \cdot 2\, ln\, x \cdot \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \to 1} (ln^2\, x + 2\, ln\, x) = 0$$

$$ln\, A = 0$$

$$A = e^0;\ A = 1,$$

$$\lim_{x \to 1} (x-1)^{ln\, x} = 1.$$

5.5 Дослідження функцій та побудова їх графіків

Найбільше та найменше значення функції на відрізку. Точки, в яких функція визначена, а похідна дорівнює нулю або не існує, називаються **критичними точками функції.** Для того, щоб знайти найбільше $|M|$ та найменше $|m|$ значення неперервної функції $y = f(x)$ на відрізку $[a, b]$, потрібно знайти її критичні точки на $[a, b]$, а потім обчислити значення функції в цих точках і в точках a, b та вибрати серед них найбільше і найменше.

Приклад 16. Знайти найбільше і найменше значення функції

$y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ на відрізку $[-1,2]$.

Розв'язання. 1) Знаходимо похідну

$y' = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2$.

2) Знаходимо точки, в яких $y' = 0$:

$5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 3$

Точки $0, 1 \in [-1, 2]$, а точки $3 \notin [-1,2]$.

Точок, в яких похідна не існує, немає.

3) Складемо таблицю:

x	-1	0	1	2
$y(x)$	-10	1	2	-7

5) Із таблиці видно, що $M = y(1) = 2,\ m = y(-1) = -10$.

Відповідь. $2; -10$.

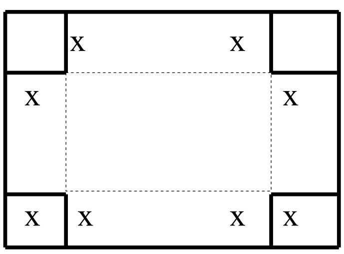
Задачі про найбільші чи найменші значення величин

В багатьох геометричних, фізичних і технічних задачах потрібно знати найбільше чи найменше значення величини, пов'язаної функціональною залежністю з іншою величиною.

Для розв'язування такої задачі слід, виходячи з умови, вибрати незалежну змінну і виразити досліджувану величину через цю змінну, потім знайти шукане найбільше чи найменше значення одержаної функції. Інтервал зміни незалежної змінної, який може бути скінченим чи нескінченим також визначається з умови задачі.

Приклад 17. З прямокутного листа жерсті зі сторонами a і b виготовляють деталь у вигляді прямокутної відкритої коробки, вирізуючи по кутам листа рівні квадрати і згинаючи краї, що утворилися. Якою повинна бути сторона кожного квадрату, щоб об'єм утвореної коробки був найбільшим?

Розв'язування : Позначимо сторону вирізуваного квадрата через x. Тоді об'єм коробки рівний: $V = x(a-2x)(b-2x) = 4x^3 - 2(a+b)x^2 + abx.$



Так як $V \geq 0,$ то $x \geq 0,\ a - 2x \geq 0,$ $b - 2x \geq 0,$ звідси одержуємо $0 \leq x \leq c,$ де c менше з чисел $a/2$ і $b/2$. Потрібно знайти значення x при якому функція V має найбільше значення на відрізку $[0;c]$ рівна нулю, крім того, вона є неперервною і невід'ємною в усіх внутрішніх точках цього відрізку. Звідси випливає, що найбільше значення функції існує і досягається функцією у внутрішній точці. Отже, найбільшим значенням буде один з максимумів функції. Знайдемо похідну функції V :

$V' = 12x^2 - 4(a+b)x + ab;\quad 12x^2 - 4(a+b)x + ab = 0;$

$x_1 = \dfrac{a+b+\sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6},\ x_2 = \dfrac{a+b-\sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6}.$

Дослідимо, чи належить значення x_1 і x_2 інтервалу $(0;c)$.

Припустимо, для визначеності, що $a \geq b$. Тоді

$\sqrt{a^2 - ab + b^2} = \sqrt{a(a-b)+b^2} \geq b$, тобто

$x_1 \geq \frac{b+b+b}{6} = \frac{b}{2}, \quad x_1 \in (0;c), \quad x_2 \geq \frac{a+b-b}{6} = \frac{a}{6};$

Згідно доведеного максимум функції існує і він досягається в точці x_2. При $a = b$, коробка найбільшого об'єму буде, якщо взяти $x = a/6$. Об'єм коробки, в цьому випадку, рівний:

$$V = \frac{2a^3}{27}.$$

Дослідження поведінки функцій за допомогою похідних

За допомогою поняття похідної можна дати якісну характеристику поведінки функції. Диференційовна функція $y = f(x)$ на інтервалі (a,b) зростає (спадає), якщо $f'(x) > 0 \quad (f'(x) < 0), \; x \in (a,b)$.

Точка x_0 називається **точкою локального максимуму** (max) (**мінімуму** (min)), функції, якщо існує окіл точки x_0, для всіх точок якого $f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0))$. Точки максимуму та мінімуму називаються точками **локального екстремуму функції.** Їх слід шукати серед критичних точок. Це лише **необхідна умова.**

Розглянемо **достатні умови екстремуму.** Нехай функція диференційовна в деякому околі критичної точки x_0, окрім, можливо, самої точки x_0 в якій вона неперервна. Тоді x_0 - точка max (min), якщо в деякому її околі точки x_0 $f'(x) > 0 \; (f'(x) < 0)$ при $x < x_0$ і $f'(x) < 0 \; (f'(x) > 0)$ при $x > x_0$.

Кажуть, що графік $y = f(x)$ на (a, b) **опуклий (вгнутий),** якщо він розміщений не вище (не нижче) довільної дотичної до графіка функції на (a, b). Точка x_1 називається **точкою перегину** графіка функції, якщо в деякому її околі по різні сторони від неї маємо опуклий та вгнутий графіки. Точки перегину слід шукати там, де $f''(x) = 0$, або $f''(x)$ не існує. Графік функції на (a, b) буде опуклим (вгнутим), якщо $f''(x) < 0, \; (f''(x) > 0)$, $x \in (a, b)$.

Зауваження 1. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна в точці x_0, але $f'(x_0) = \infty$, то це означає, що графік функції має вертикальну дотичну в точці $(x_0, \; f(x_0))$.

Асимптоти графіка функцій

Перед побудовою графіка функції слід вияснити, чи має графік асимптоти. Якщо для точки розриву x_0 функції $y = f(x)$

$$\lim_{x \to x-0} f(x) = \infty \text{ або } \lim_{x \to x+0} f(x) = \infty,$$

то пряму $x = x_0$ називають **вертикальною асимптотою.**

Якщо існують скінчені границі

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} k, \qquad \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = b,$$

то це означає, що графік функції $y = f(x)$ має асимптоту $y = kx + b$ при $x \to +\infty$ або $x \to -\infty$. Якщо $k \neq 0$,то асимптоту називають **похилою,** а якщо $k = 0$ - **горизонтальною.**

Загальна схема дослідження функції та побудова графіків

Дослідження функцій та їх графіків доцільно проводити за наступною схемою.

1) а) Знайти область визначення функції $y = f(x)$;

б) Встановити чи є функція періодичною $(f(x+T) = f(x))$, парною $(f(-x) = f(x))$ чи непарною $(f(-x) = -f(x))$;

в) Знайти інтервали знакосталості та точки перетину з віссю Ox $(f(x) = 0)$ та віссю Oy $(y = f(0))$;

г) Дослідити функцію на неперервність та вияснити характер точок розриву, якщо вони є.

2) Встановити наявність асимптот графіка функції;

3) Знайти інтервали зростання і спадання функції та точки екстремуму.

4) Знайти інтервали опуклості і вгнутості та точки перегину графіка функції.

5)Побудувати графік функції.

Зауваження 2. Результати досліджень в пунктах 3 і 4 доцільно заносити до спеціальної таблиці.

Зауваження 3. Точки підозрілі на екстремум $(f'(x) = 0$ *або* $f'(x)$ *не існує*$)$, називають ще **критичними точками 1-го роду,** а точки, підозрілі на перегин $(f''(x) = 0$ *або* $f''(x)$ *не існує*$)$ називають **критичними точками 2-го роду.**

Приклад 18. Дослідити функцію і побудувати графік: $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$.

Розв'язування.

1) а) Область визначення функції $D = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$;

б) Функція непарна. Тому можемо обмежитись дослідженням поведінки функції при $x > 0$ так як графік непарної функції симетричний відносно початку координат.

в) При $0 < x < 1$ – $y < 0$, а при $x > 1$ – $y > 0$. Графік функції перетинає осі координат лише у точці $(0, 0)$;

г) Функція є неперервною в кожній точці області D і розривна в точці $x = 1$ $(x > 0)$ так як її значення в цій точці невизначене. Вияснимо характер точки розриву:

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty, \qquad \lim_{x \to 1+0} \frac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty, \tag{2}$$

Отже, це є розрив другого роду.

2) Із (2) випливає, що пряма $x = 1$ є вертикальною асимптотою графіка функції. Вияснимо, чи є невертикальні асимптоти:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2 - 1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = 1, \quad b = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0.$$

Отже, пряма $y = x$ похила асимптота при $x \to +\infty$.

3) Обчислимо y':

$$y' = \frac{3x^2(x^2 - 1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2}.$$

Знаходимо критичні точки 1-го роду:

$$y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 - 3x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2(x^2 - 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{3} \quad (x > 0);$$

y' не існує при $x = 1$ $(x > 0)$, але дана точка не належить.

Отже, маємо одну критичну точку 1-го роду $x = \sqrt{3}$.

4) Обчислимо y'':

$$y'' = \frac{2x\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-1\right)^3}.$$

Знаходимо критичні точки 2-го роду:

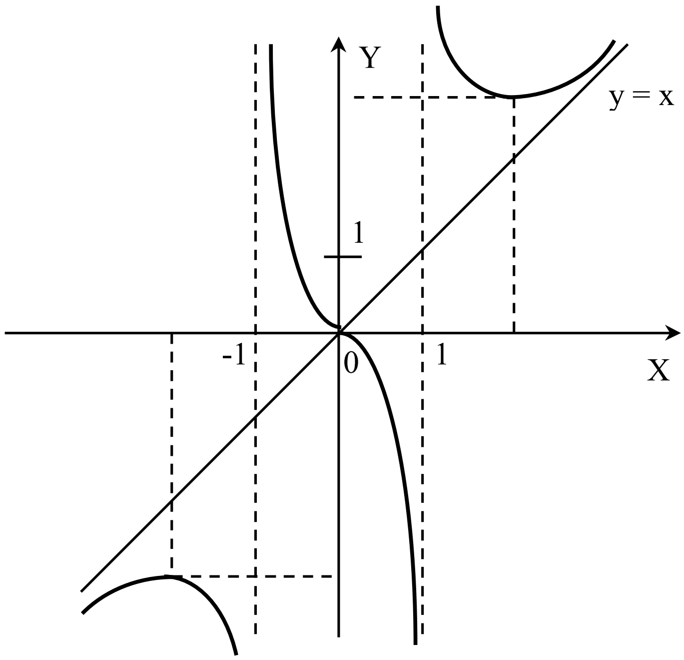
$y''=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x\left(x^2+3\right)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=0 \quad \Rightarrow$ таких точок при $x>0$ немає;

y'' не існує при $x=1$ $(x>0)$, але дана точка не належить D.

Отже, маємо три інтервали $(0,\ 1)$, $\left(1,\ \sqrt{3}\right)$, $\left(\sqrt{3},\ +\infty\right)$ на кожному з яких похідні y' *і* y'' не змінюють знак. Тому для того, щоб визначити які саме знаки мають в кожному із вказаних інтервалів y' *і* y'', достатньо визначити їх знак в якій-небудь одній точці кожного з цих інтервалів. Результати досліджень заносимо в таблицю.

x	$(0,\ 1)$	$(1,\ \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},\ +\infty)$
y'	-	-	0	+
y''	-	+	+	+
y	$\searrow$, $\cap$	$\searrow$, $\cup$	min $y=\frac{1}{2}3\sqrt{3}$	$\nearrow$, $\cup$

5) Будуємо графік.



Приклад 19. Дослідити функцію та побудувати графік: $y = x^2\ ln\, x$.

Розв'язування.

1) а) $D=\left(0,\ +\infty\right)$;

б) Функція не являється ні парною, ні непарною, ні періодичною;

в) При $0<x<1$ – $y<0$, а при $x>1$ – $y>0$. Графік функції перетинає вісь Ox в т. $(1,\ 0)$.

г) Функція є неперервною в кожній точці області D і розривна в точці $x=0$, так як її значення в цій точці невизначене.

Дослідимо характер точки розриву.

$$\lim_{x\to+0} x^2\ ln\, x = \lim_{x\to+0} \frac{ln\, x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+0} \frac{(ln\, x)'}{\left(\frac{1}{x^2}\right)'} = \lim_{x\to+0}\left(-\frac{x^2}{2}\right) = 0$$

(при обчисленні границі було використане правило Лопіталя).

Отже, це точка усувного розриву, так як, якщо покласти $y(0)=0$, то отримаємо функцію, неперервну справа (враховуємо те, що $x=0$ гранична точка області визначення $D=(0,\,+\infty)$.

2) Обчислюємо y': $y'=2x\ln x+x=x(2\ln x+1)$.

Знаходимо критичні точки 1-го роду: $y'=0 \;\Leftrightarrow\; x(2\ln x+1)=0 \;\Leftrightarrow\; x=\frac{1}{\sqrt{e}}$;

Точок, в яких y' не існує, немає.

Отже, маємо одну критичну точку 1-го роду $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$.

4) $y''=2\ln x+3$.

Знаходимо критичні точки 2-го роду: $y''=0 \;\Leftrightarrow\; 2\ln x+3=0 \;\Leftrightarrow\; x=\frac{1}{\sqrt{e^3}}$.

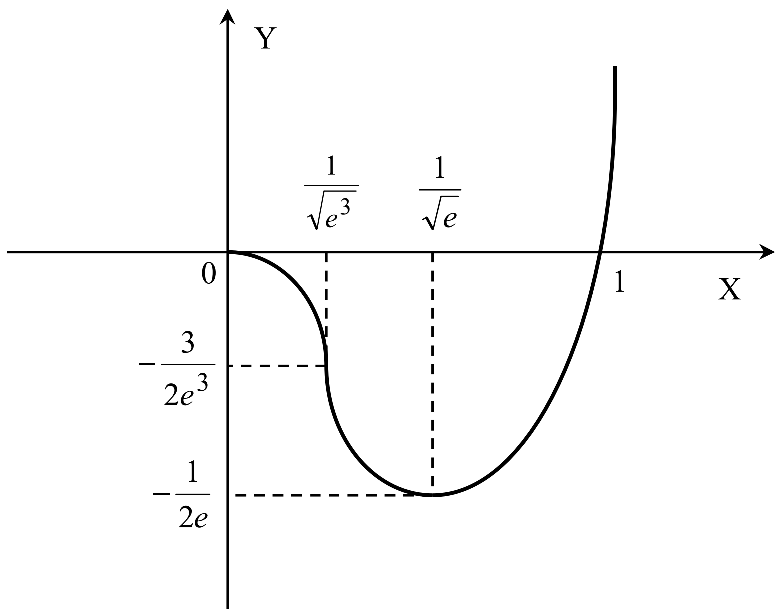
Точок, в яких y'' не існує, немає.

Отже, маємо одну критичну точку 2-го роду $x=\frac{1}{\sqrt{e^3}}$.

Таким чином є три інтервали $\left(0,\,\frac{1}{\sqrt{e^3}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}},\,\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{e}},\,+\infty\right)$, на кожному з яких похідні $y',\,y''$ не змінюють знак. Результати досліджень заносимо в таблицю:

x	$\left(0,\,\frac{1}{\sqrt{e^3}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{e^3}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}},\,\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{e}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt{e}},\,+\infty\right)$
y'	-	-	-	0	+
y''	-	0	+	+	+
y	$\searrow$, $\cap$	точка перегину $y=-\frac{3}{2e^3}$	$\searrow$, $\cup$	min $y=-\frac{1}{2e}$	$\nearrow$, $\cup$

5) Будуємо графік.



ЛІТЕРАТУРА

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии. – М., 1975.
2. Берман А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа для втузов. – М., 1971.
3. Бугров Я.С., Никопольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М., 1980.
4. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. – М., 1975.
5. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М., 1974.
6. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. – Т. 1, 2. – М., 1976.

ЗМІСТ