

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**ТЕРНОПІЛЬСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ**  
**УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ПУЛЮЯ**  
**КАФЕДРА КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК**

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**  
**до лабораторних робіт №5 – №8 з курсу**  
**СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ТА ПРОЕКТУВАННЯ**  
**КОМП'ЮТЕРНИХ ІНФОРМАЦІЙНИХ**  
**СИСТЕМ**

*для студентів напряму підготовки*  
*6.050101 “Комп'ютерні науки”*

**ТЕРНОПІЛЬ 2014**

**УДК 681.3 + 658.511**  
**ББК 32.9**  
**М 54**

**Укладачі:**

канд. техн. наук, доцент Млинко Б.Б.  
канд. техн. наук, доцент Фриз М.Є.

**Рецензент**

докт. техн. наук, професор Щербак Л.М.

**Відповідальний за випуск**

зав. каф. КН доцент, канд. техн. наук О.В.Мацюк

*Методичні вказівки розроблено у відповідності з навчальним  
планом напряму 6.050101 – Комп'ютерні науки.*

*Розглянуто й затверджено на засіданні кафедри комп'ютерних наук  
Протокол № 4 від 07 жовтня 2014р.*

*Схвалено та рекомендовано до друку на засіданні методичної  
комісії факультету комп'ютерно-інформаційних систем і програмної  
інженерії Тернопільського національного технічного університету імені  
Івана Пулюя. Протокол № 25 від 25 жовтня 2014 р.*

М 54    Методичні вказівки до лабораторних робіт №5–№8 з курсу  
«Системний аналіз та проектування комп'ютерних інформаційних  
систем» / Укладачі: М.Б. Млинко, Фриз М.Є. для студентів  
напряму підготовки 6.050101 «Комп'ютерні науки» – Тернопіль :  
Вид-во ТНТУ імені Івана Пулюя, 2014. – 28с.

**УДК 681.3 + 658.511**  
**ББК 32.9**

© Млинко Б.Б., Фриз М.Є., 2014  
© Вид-во ТНТУ імені Івана Пулюя, 2014

## ЗМІСТ

<i>Лабораторна робота №5. Методи комбінаторно-морфологічного аналізу та синтезу.....</i>	4
<i>Лабораторна робота №6. Багатокритеріальна оптимізація за принципом Парето.....</i>	12
<i>Лабораторна робота №7. Методи прийняття рішень у системному аналізі з використанням правила Бейєса .....</i>	19
<i>Лабораторна робота №8. Методи прийняття рішень у системному аналізі з використанням критерію Бейєса .....</i>	22
<i>Використана література .....</i>	27

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №5

### МЕТОДИ КОМБІНАТОРНО-МОРФОЛОГІЧНОГО АНАЛІЗУ ТА СИНТЕЗУ

**Мета роботи:** набути практичного досвіду побудови морфологічних таблиць, проведення морфологічного аналізу та синтезу, здійснення оцінювання міри відповідності синтезованого варіанта початковій меті синтезу

#### Теоретичні відомості

Морфологія — це структурна форма системи, організована відповідно до її функцій. Фактично морфологічний аналіз є методом розвитку творчих здібностей, або, точніше, систематичним допоміжним засобом для творчості. Він зовсім не виключає творчої праці людини, а стимулює її і розширює її можливості, поширюючи на більше число ідей, ніж це було б можливим при класичному підході. Основна ідея морфологічного підходу полягає в тому, щоб знаходити якнайбільшу кількість, або і всі можливі шляхи розв'язання поставленої проблеми шляхом комбінювання основних структурних елементів систем або ознак рішень. У цьому випадку система або проблема може бути піддана декомпозиції різними способами і розглядатися в різних аспектах.

Метод морфологічного дослідження реалізується в два якісно різних етапи. Перший етап - морфологічний аналіз, який полягає в поділі досліджуваної системи на підсистеми та елементи відповідно до поставленої задачі, та формуванні підмножин альтернативних варіантів реалізації кожної з підсистем. Як наслідок отримується опис всіх підсистем, що належать до досліджуваної системи, тобто класифікацію множини підсистем та альтернатив їх реалізації. Другий етап - морфологічний синтез. На даному етапі проводиться оцінювання описів різних підсистем, що належать до досліджуваної системи, і вибір тих, які у тому або іншому наближенні відповідають умовам задачі. В результаті отримується цілісний опис усієї

досліджуваної системи на рівні описів окремих підсистем і відношень між ними.

На етапі морфологічного аналізу розробляються морфологічні таблиці, які дозволяють систематизувати досить великий обсяг знань про морфологію систем у компактному вигляді. Формування конкретних морфологічних таблиць для відображення множини підсистем може реалізуватися шляхом функціонально-елементного аналізу досліджуваної системи або ж з використанням класифікаційних ознак. На підставі функціонально-елементного аналізу формуються рядки морфологічної таблиці, в які записуються функції системи або узагальнені функціональні підсистеми, з яких складається система загалом. Рядки морфологічної таблиці формуються з функцій або УФПС, що належать одному ієрархічному рівню. Найменуваннями стовпців є *альтернативи* — *варіанти реалізації функцій*.

Множина варіантів досліджуваної системи, систематизованих у морфологічних таблицях, може бути відображена за допомогою списку якісних ознак. Перелік ознак визначається для кожної з підсистем. Наявність чи відсутність в альтернатив кожної з ознак формує список ознак, що визначає варіант морфологічної множини (варіант досліджуваної системи), і є його образом у просторі ознак. Кількість образів і власне ознак, що використовуються в конкретному дослідженні, може бути досить великою, а це робить морфологічну множину непридатною для безпосереднього аналізу. Чіткіші результати отримуються при використанні математичних методів, спеціально призначених для стиснення інформації і кількісної характеристики інтегрованих властивостей матеріалу, що аналізується.

Множина образів варіантів систем представляється у вигляді матриці, що має  $n$  стовпців та  $m$  рядків, причому номеру стовпця відповідає найменування варіанта підсистеми (альтернативи)  $V_j, j \in 1, n$ , а номеру рядка — назва ознаки  $Z_i, i \in 1, m$ . У ряді випадків номеру рядка ставиться у відповідність значення ознаки. Інформаційним вмістом матриць є вказівки про присутність або відсутність кожної з ознак, що враховуються, у розглянутих

альтернативах. При цьому якщо  $i$ -та ознака присутня в  $j$ -й підсистемі, то значення елемента матриці  $X : x_{ij} = 1$ , в іншому випадку  $x_{ij} = 0$ .

Задачі опрацювання матриць образів систем включають підбір типів відношень і аналіз структури систем, що породжуються ними. Відношення на множині систем, що досліджуються, породжуються мірами подібності, відмінності та мірами включення.

Мірою подібності (близькості) називається величина  $L(B_j, B_k)$ , що має межу і зростає зі зростанням близькості об'єктів. Міра подібності є дійсною функцією, що має наступні властивості:  $0 \leq L(B_j, B_k) \leq 1, k \neq j; L(B_j, B_k) = 1, j = k; L(B_j, B_k) = L(B_k, B_j)$ , де  $B_j, B_k$  - множини значень ознак, що описують об'єкти, які порівнюються між собою,  $B_j = (x_{ij})^T$ .

Властивості міри подібності має множина еквівалентних мір, що представляються формулою

$$L^{(u)}(B_j, B_k) = \frac{2 \times \text{card}(B_j \cap B_k)}{(1+u) \times (\text{card}(B_j) + \text{card}(B_k) - 2 \times u \times \text{card}(B_j \cap B_k))}$$

де  $\text{card}(B)$ — кардинальне число множини  $B$ , для скінченних множин рівне кількості елементів множини.

Міра відмінності  $D(B_j, B_k)$  має наступні властивості метрики:

$$1 \geq D(B_j, B_k) \geq 0, k \neq j; D(B_j, B_k) = 0, j = k; D(B_j, B_k) = D(B_k, B_j), \\ D(B_j, B_k) \leq D(B_j, B_s) + D(B_k, B_s)$$

Міри подібності і відмінності синтезуються за спеціальними правилами, а вибір конкретних мір залежить, у першу чергу, від основної задачі — мети конкретного дослідження, а також від шкали вимірів. У табл. 5.1 наведені деякі з розповсюджених мір подібності і відмінності, призначені для опрацювання якісних і кількісних ознак.

Таблиця 5.1 - Міри подібності та відмінності

№	Назва міри	Формула для обчислення
1	Міра подібності Чекановського- Серенсена ( $u=0$ )	$L^{(0)}(B_j, B_k) = \frac{2 \times \text{card}(B_j \cap B_k)}{\text{card}(B_j) + \text{card}(B_k)}$
2	Міра подібності Жак- кара ( $u=1$ )	$L^{(1)}(B_j, B_k) = \frac{\text{card}(B_j \cap B_k)}{\text{card}(B_j \cup B_k)}$
3	Міра подібності Сокала-Сніта ( $u=3$ )	$L^{(3)}(B_j, B_k) = \frac{\text{card}(B_j \cap B_k)}{2 \times \text{card}(B_j) + 2 \times \text{card}(B_k) - 3 \times \text{card}(B_j \cap B_k)}$
4	Міра подібності Андрєєва ( $u = -1/2$ )	$L^{(-1/2)}(B_j, B_k) = \frac{4 \times \text{card}(B_j \cap B_k)}{\text{card}(B_j) + \text{card}(B_k) + 2 \times \text{card}(B_j \cap B_k)}$
5	Міра подібності Мульчинського	$L^{(0)}(B_j, B_k) = \frac{1}{2} \times \text{card}(B_j \cap B_k) \left( \frac{1}{\text{card}(B_j)} + \frac{1}{\text{card}(B_k)} \right)$
6	Міра відмінності	$D(B_j, B_k) = \text{card}(B_j) + \text{card}(B_k) - 2 \times \text{card}(B_j \cap B_k)$

Синтез цілісних раціональних систем може здійснюватися з врахуванням визначеної функції мети, подібності варіантів систем до пошукового завдання чи їх оригінальності на морфологічній множині, різного внеску функціональних підсистем у ефективність цілісної системи, на основі якісних класифікаційних ознак, подібності до прототипу. Окрім того, методи синтезу раціональних варіантів систем дозволяють здійснити оцінювання міри відповідності синтезованого варіанту початковій меті синтезу безпосередньо під час процедури побудови пошукового варіанту у процесі нарощування функціональних підсистем.

Морфологічний синтез на основі класифікаційних ознак із врахуванням функції мети, здійснюється наступним чином:

1. Формуємо морфологічну таблицю, у котрій альтернативи  $a_{ij}$  характеризуються множиною ознак  $F_{ij}$ . Наявність у альтернативи тієї чи іншої ознаки із вказаної множини позначається одиницею, а відсутність — нулем. Прототип, відносно котрого обчислюється міра подібності, задається аналогічним чином (прототип формується як

варіант реалізації досліджуваної системи, що володіє ознаками, необхідними для досягнення поставленої задачі, тобто складається з альтернатив – варіантів реалізацій підсистем (функцій), яким притаманна максимальна кількість класифікаційних ознак).

2. Після визначення прототипу здійснюється генерація всіх можливих варіантів системи (пошукових образів) з образів альтернатив, що містяться у морфологічній таблиці з класифікаційними ознаками. Пошукові образи згенерованих варіантів порівнюються із образом прототипу.
3. Порівняння здійснюється наступними чином: для кожної пари, що складається із прототипу та пошукового образу варіанта системи, обчислюється значення міри подібності. Варіанти впорядковуються за мірою близькості до прототипу. Підмножина найближчих до прототипу варіантів остаточно надається експерту для детальнішого аналізу.

### **Порядок виконання роботи**

1. Сформулювати мету дослідження .
2. Вказати основні узагальнені функціональні підсистеми (УФПС), критерії та альтернативи.
3. Кожну узагальнену функціональну підсистему (УФПС) представити у вигляді ієрархічної структури критеріїв.
4. У результаті попереднього аналізу побудувати морфологічну таблицю (на основі попарних порівнянь) для предметної області, що розглядається. У таблиці відобразити основні можливі альтернативи для кожної з узагальнених функціональних підсистем.

У морфологічній таблиці (зразок оформлення див. табл. 5.2) навести результати оцінювань у вигляді векторів пріоритетів альтернатив за кожним з критеріїв, що стосуються узагальнених функцій, а також головні власні вектори (важливості) часткових критеріїв відносно загальних. Цю інформацію отримати шляхом попарних порівнянь альтернатив за критеріями та попарних



порівнянь часткових критеріїв відносно загальних на основі методу аналізу ієрархій.

5. Реалізувати процес морфологічного синтезу, а саме:

5.1 Множину варіантів, систематизованих у морфологічній таблиці 5.2, відобразити за допомогою списку якісних ознак. Для цього для кожної УФПС в якісній шкалі найменувань представити перелік ознак (класифікаційних, функціональних, структурних та ін.) та вказати наявність чи відсутність в альтернатив з морфологічної таблиці кожної з цих ознак (іншими словами описати властивості альтернатив). Тобто сформувати пошукові образи альтернатив та представити у таблиці 5.3.

5.2 Синтезувати прототип із альтернатив, вказаних у таблиці 5.3 та представити результат у таблиці 5.4. Прототип сформувати, взявши з кожної УФПС по одному образу альтернатив, такому, що володіє властивостями, необхідними для рішення поставленої задачі.

5.3 Згенерувати пошукові образи  $R$ -варіантів системи, загальна кількість яких становить  $R = \prod_{i=1}^n k_i$ , де  $k_i$  - кількість альтернатив для однієї УФПС,  $n$  - кількість УФПС. Пошукові образи  $R$ -варіантів системи формуються на основі пошукових образів альтернатив (це всі можливі комбінації образів альтернатив з кожної УФПС) (див. табл. 5.3). Занести їх у таблицю 5.4.

5.4 Обчислити значення міри подібності (згідно табл. 5.1) для кожної пари, що складається із прототипу та пошукового образу варіанта системи. Функція мети при цьому має наступний вигляд: знайти підмножину  $S \in \Omega$ , для елементів котрої

$$L(B_i, B^p) \Rightarrow \max,$$

де  $L(B_i, B^p)$  — міра подібності між описом синтезованого варіанта системи  $B_i$  та прототипом або пошуковим рішенням  $B^p$ .

5.5 Впорядкувати варіанти системи за мірою близькості до прототипу.

Таблиця 5.2 - Морфологічна таблиця

<i>Узагальнені функціональні підсистеми</i>	<i>Альтернативи та вектор пріоритетів альтернатив за критеріями</i>				<i>Вага критерію</i>	<i>Найменування критерію</i>
УФПС <sub>1</sub>	$a_{11}$	$a_{12}$	...	$a_{1k_1}$		
...	...	...	...	...		
УФПС <sub>n</sub>	$a_{n1}$	$a_{n2}$	...	$a_{nk_n}$		

Таблиця 5.3 - Морфологічна таблиця з якісними ознаками

<i>УФПС<sub>i</sub></i>	<i>Ознака <math>f_{ij}</math></i>	<i>Пошукові образи альтернатив</i>		
УФПС <sub>1</sub>				
...				
УФПС <sub>n</sub>				

Таблиця 5.4 - Перелік варіантів системи

<i>УФПС<sub>i</sub></i>	<i>Прототип <math>B^p=(...)</math></i>	<i>Пошуковий образ синтезованих варіантів системи (<math>S_i</math>)</i>			
		$B_1=(...)$	$B_2=(...)$	...	$B_{R-1}=(...)$
УФПС <sub>1</sub>				...	
...				...	
УФПС <sub>n</sub>				...	

Звіт повинен включати:

- тему, мету роботи;
- короткий виклад основних теоретичних положень;
- вказану мету морфологічного дослідження;
- структуру ієрархії критеріїв за узагальненими функціональними підсистемами(УФПС). Вказані основні УФПС, критерії та альтернативи;
- побудовану морфологічну таблицю;
- оформлені таблиці 5.2, 5.3, 5.4;
- обчислені значення мір подібності;
- висновки, в яких необхідно проаналізувати отримані результати;
- додатки.

### **Контрольні запитання**

1. У чому полягає основна ідея морфологічного підходу?
2. Назвіть основні етапи морфологічного дослідження?
3. Що є цілями морфологічного аналізу і синтезу систем?
4. Алгоритм проведення морфологічного аналізу та синтезу.
5. Назвіть основні підходи до формування формалізованих пошукових завдань.
6. Які особливості має формування пошукових завдань на ґрунті якісних ознак?
7. З якою метою будуються морфологічні таблиці?
8. У чому полягає формування морфологічних таблиць за допомогою функціонально-елементного аналізу систем?
9. Як синтезуються морфологічні таблиці з використанням класифікаційних ознак?
10. Яким чином реалізується пошук у морфологічній множині підмножини варіантів систем, що найбільш подібні до прототипу?
11. Розкрийте сенс мір подібності, відмінності.
12. Як синтезувати систему на основі якісних класифікаційних ознак?

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 6

### БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНА ОПТИМІЗАЦІЯ ЗА ПРИНЦИПОМ ПАРЕТО

*Мета роботи: набути практичного досвіду визначення паретової множини та вибору на ній єдиної альтернативи*

#### Теоретичні відомості

Особливе місце серед задач, розв'язком яких займається системний аналіз, посідають задачі прийняття рішень, які можна означити як задачі вибору однієї чи кількох альтернатив (в залежності від розв'язуваної задачі) з наявної множини альтернатив.

Достатньо очевидно, що такі задачі є поширеними при розробці, вдосконаленні, функціонуванні вже створеної і налагодженої будь-якої системи (як, наприклад, в автоматизованих системах).

Задачі прийняття рішень, зазвичай є багатокритеріальними та багатоальтернативними. Необхідно порівняти усі альтернативи між собою та вибрати найбільш оптимальну серед них.

Припустимо, що всі властивості альтернатив мають числову оцінку, тобто є критеріями. Позначимо ці критерії через  $C_i(\chi)$ ,  $i=\overline{1,n}$ . В цьому випадку будь-якій альтернативі  $\chi$  може бути співставлена точка  $n$ -вимірного простору  $E^n$ , координатами якої є значення відповідних критеріїв ( $n$ -кількість критеріїв, які використовуються). Такий простір називається критеріальним. Будемо для визначеності вважати, що чим більше значення  $i$ -го критерію  $C_i(\chi)$ , тим більш переважаючою за властивістю  $i$  є дана альтернатива над іншими альтернативами, що порівнюються за тим же критерієм. Розглянемо дві довільні альтернативи. Можливі дві ситуації:

1) одна альтернатива не гірша за іншу за всіма критеріями:

$$c_i(\chi_2) \geq c_i(\chi_1), i = \overline{1, n} \quad (6.1)$$

(причому хоча б одна нерівність виконується як строга);  
 2) цього стверджувати не можна.

Умова (6.1) – це умова переважання альтернативи  $\chi_2$  над альтернативою  $\chi_1$ . Таким чином, перехід від  $\chi_1$  до  $\chi_2$  покращує наш вибір. Чи існують альтернативи, які не можна покращити? Так, і практично завжди – для цього потрібна лише обмеженість значень критеріїв  $C_i(\chi)$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Для демонстрування найважливіших ідей з композиції оцінок скористаємося зручною графічною інтерпретацією критеріального простору при  $n = 2$ .

На рис. 6.1 точками чи зірочками зображені альтернативи. Непокращуваною альтернативою на рис. 6.1, а очевидним чином є та, яка розміщена вище і правіше від усіх інших (по відповідних осях значення критеріїв  $C_1$  та  $C_2$  для цієї альтернативи є найбільшими). Перевірити її непокращуваність можна так: провести із даної точки промені паралельно додатному напрямку осей і пересвідчитися, що в утвореному куті інших альтернатив немає. Цю властивість непокращуваності легко довести від супротивного.

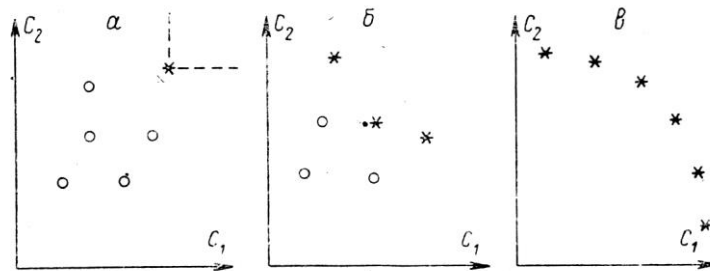


Рис. 6.1 - Критеріальний простір. Множина Парето

Отже, в ситуації рис. 6.1, а ми знайшли єдину непокращувану альтернативу, яку природно вибирати як найкращу. Однак вже рис. 6.1, б демонструє, що таких альтернатив може бути більше, ніж одна, а рис. 6.1, в показує, що можливий випадок, коли всі альтернативи будуть непокращуваними. Однак типовим є саме варіант 6.1, б, на якому кількість непокращуваних альтернатив менша (здебільшого - значно) від кількості вихідних альтернатив.

Множина непокращуваних альтернатив називається *множиною Парето* для даної задачі.

Зрозуміло, що точки, що не належать множині Парето, не претендують на те, щоб вважатися найкращою альтернативою. Виділення множини Парето – це перший крок у порівнянні альтернатив. Можна взагалі обмежитися цим і вважати кращими всі ті альтернативи, які потрапили в цю множину. Однак в абсолютній більшості практичних задач вимагається у результаті вибрати лише одну альтернативу. Як же вибрати на множині Парето?

Методів такого вибору, заснованих на таких же природних припущеннях, як і ті, які привели до виділення множини Парето, на жаль, не існує. Для подальшої формалізації вибору вводяться більш специфічні і часто досить суперечливі методи.

Наведемо найбільш поширені з них.

1. Вибирають альтернативу, у якої сума значень критеріїв максимальна. Розвиток цієї ідеї порівняння значень різних критеріїв веде до максимізації деякої вибраної функції від критеріїв  $f(C_1, C_2, \dots, C_n)$ . Вигляд  $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i C_i$  найбільш використовуваний і називається *лінійною згорткою критеріїв з мірою  $\alpha_i$* ,

де  $C_i$ - значення  $i$ -го критерію для альтернативи (це наприклад, для критерію «площа кімнати» значення  $50 \text{ м}^2$ ),  $\alpha_i$  - вага  $i$ -го критерію для альтернативи (яке значення по відношенню до інших критеріїв відіграє  $i$ -ий) . Тобто, даний метод реалізується наступним чином: для кожної альтернативи вказується числове значення  $C_i$  для  $i$ -го критерію. Також вказується вага  $\alpha_i$  кожного критерію для  $i$ -го критерію по відношенню до інших критеріїв. Знаходиться сума добутків ваги критерію на його значення для кожної альтернативи. В результаті вибирається альтернатива з найбільшою сумою значень критеріїв. На рис. 6.2 альтернативою з максимальною сумою критеріїв (згортка з  $\alpha_i = 1$ ,) буде точка  $\chi_5$ .

Додавання критеріїв один до одного та інші операції над ними рідко бувають фізично обґрунтованими. Дуже штучно

виглядає, скажімо, сума маси і міцності, вартості і ефективності. Введення функції від критеріїв – в більшості випадків вимушений прийом, що веде до необхідності експертного визначення ваг окремих критеріїв.

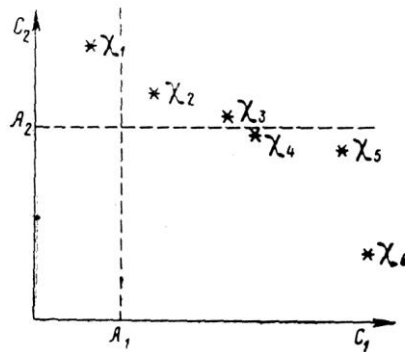


Рис. 6.2 - Приклади вибору на множині Парето

2. *Метод критеріальних обмежень* полягає в наступному: фіксують набір чисел (рівнів, обмежень)  $A_i, i=\overline{2,n}$ , і шукають альтернативу, у якої на всі критерії, крім одного, накладені обмеження  $C_i(\chi) \geq A_i$ , а критерій  $C_1$  максимальний (розглядають по черзі кожен критерій; вибирають альтернативи, для яких числове значення критерію задовольняє заданим для нього обмеженням; альтернативи, які не відповідають обмеженням за одним критерієм відкидаються і для наступного критерію не розглядаються; якщо в результаті залишилось більше однієї альтернативи, то вибирають ту, значення головного критерію для якої більше (краще)). Звичайно, взяття за основного, головного критерію саме  $C_1$  умовне; він, як і важливі у цій задачі рівні  $A_i$ , підлягає спеціальному вибору. На рис. 6.2 при закріпленні рівня  $A_1$  для першого критерію в якості розв'язку отримаємо альтернативу  $\chi_2$ , а при рівні  $A_2$  для другого – альтернативу  $\chi_3$ . Такий прийом називається методом головного критерію чи методом критеріальних обмежень.

Методи 1, 2 мають важливу властивість – попереднє виділення множини Парето в них необов'язкове. Доводиться, що використання цих прийомів на всій множині альтернатив при досить загальних умовах дає той самий результат, що і на множині Парето. Іншими словами, методи згортки і головного

критерію приводять до альтернатив, які належать множині Парето. Хоча призначення цих методів – виділяти єдину альтернативу, висока залежність рішення від мір і рівнів, виду згортки і вибору головного критерію приводить до того, що на практиці вважають за краще розв'язати набір задач з різним вибором усього перерахованого. Одержаний набір розв'язків у випадку їх значної розбіжності далі обробляється аналогічно наведеному нижче методу 4.

3. Точки множини Парето оцінюються за деякою додатковою властивістю, яка не враховувалась раніше. Ця властивість (одна чи більше) може мати фізичний характер чи бути просто математичним прийомом. Так, альтернативи можна порівнювати за вторинними наслідками, за спеціальним чином визначеною стійкістю рішень, за такою геометричною характеристикою, як «серединність». На рис. 6.2 точкою, найменш віддаленою від усіх інших, буде  $\chi_4$ .

4. Точки множини Парето поступають на експертну оцінку, за результатами якої на основі балів, системи пріоритетів, рангування, правила вето і т. д. виділяється єдина альтернатива. Якщо точок множини Парето надто багато, то попередньо проводять їх відбір, в якому також користуються і формальними, і неформальними прийомами. Формальні способи звичайно пов'язані з «рівномірною представлюваністю» точок, а експертні можуть базуватися на виборі цікавих комбінацій значень критеріїв та інших міркуваннях.

### **Порядок виконання роботи**

1. Описати предметну область системного аналізу та поставити задачу прийняття рішень (конкретна область та задача вибираються самостійно або за рекомендацією викладача).
2. Охарактеризувати множину альтернатив (не менше п'яти), серед яких треба зробити вибір. Вказані дані оформити у вигляді таблиці (зразок див. таблицю 6.1).
3. Для кожної альтернативи задати:



необхідні критерії (не менше трьох) та відповідні їм числові значення. Вказані дані аналогічно п.2 оформити у вигляді таблиці (зразок див. таблицю 6.1).

Таблиця 6.1

№	Альтернативи	Критерії та їх числові значення			
		1	2	3	...
1					
2					
3					
4					
5					
·					
·					
·					

4. Визначити множину Парето для даної задачі згідно блок-схеми алгоритму, наведеної на рис. 6.3.
5. На множині Парето вибрати одну альтернативу одним із вищевказаних методів (непарні варіанти – методом лінійної згортки критеріїв з вагами  $\alpha_i$ ; парні варіанти – методом критеріальних обмежень).

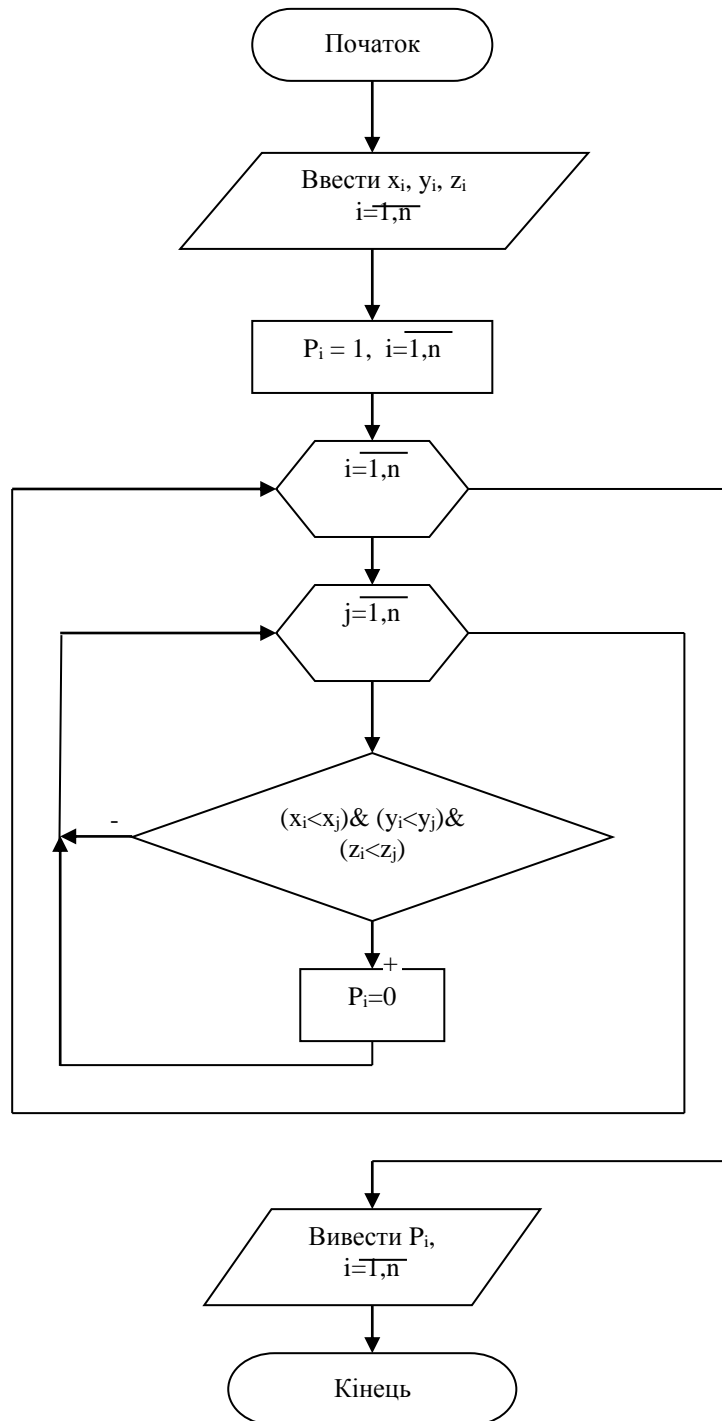


Рис. 6.3 - Блок-схема алгоритму синтезу множини Парето

де  $x_i, y_i, z_i$  – числові значення критеріїв  $i$ -ї альтернативи. В множині Парето ввійдуть альтернативи, для яких  $P_i = 1$ .

Звіт повинен включати:

- тему, мету роботи;
- короткий виклад основних теоретичних положень;
- вказану задачу, яку необхідно розв'язати;
- оформлену таблицю 6.1;
- вибрану множину Парето;
- послідовність вибору альтернативи на множині Парето;
- результати вибору альтернативи на множині Парето;
- висновки, в яких необхідно проаналізувати отримані результати;
- додатки (тексти програм).

### **Контрольні запитання**

1. Що таке множина Парето?
2. У чому суть методу вибору альтернатив за критерієм оптимальності за Парето?
3. Які існують методи вибору альтернатив на множині Парето?
4. Охарактеризуйте вибір альтернативи на множині Парето методом лінійної згортки критеріїв з вагами  $\alpha_i$ .
5. У чому полягає вибір альтернативи на множині Парето методом головного критерію (методом критеріальних обмежень)?

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 7

### МЕТОДИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ У СИСТЕМНОМУ АНАЛІЗІ З ВИКОРИСТАННЯМ ПРАВИЛА БЕЙЄСА

*Мета роботи:* набути практичного досвіду використання правила Бейєса при прийнятті рішень

#### Теоретичні відомості

При розв'язуванні задач діагностики (медичної, технічної та ін.) можна виділити множину ознак (симптомів), які однозначно визначають стан досліджуваного об'єкта або навпаки, виключають той чи інший стан. Однак подібна детермінованість представляє собою швидше виняток, ніж правило. Будь-яка ознака (симптом) може зустрічатися з деякою частотою при різних станах, тому для прийняття рішення найчастіше використовують ймовірнісні методи.

Нехай необхідно провести диференціальну діагностику між станами досліджуваного об'єкта (надалі гіпотезами)  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Для кожної із цих гіпотез характерним є розподіл умовних ймовірностей  $P(B_i|A_j)$  появи тої чи іншої ознаки (надалі симптому) чи симптомокомплексу (групи симптомів)  $B_i$  – можливі симптоми.

*Якщо задано:*

- 1) розподіли умовних ймовірностей  $P(B_i|A_j)$ ;
- 2) апіорні ймовірності гіпотез  $P(A_j)$ ,

то задача диференціальної діагностики зводиться до *статистичної задачі вибору гіпотез*, оптимальне діагностичне правило для якої неважко побудувати з допомогою відомого **правила Бейєса**, яке для апостеріорної ймовірності гіпотези  $A_j$  має вигляд:

$$P(A_i|B_j) = \frac{P(B_j|A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^n P(B_j|A_i)P(A_i)}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}.$$

де  $P(A_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , – апіорна ймовірність гіпотези  $A_i$ ,  $\sum_{i=1}^n P(A_i) = 1$ ;

$P(A_i|B_j)$  – ймовірність гіпотези  $A_i$  при умові, що з'явився симптом чи симптомокомплекс  $B_j$ ;

$P\{B_j|A_i\}$  – ймовірність появи симптому чи симптомокомплексу при умові, що істинною є гіпотеза  $A_i$ .

Якщо для якої-небудь гіпотези  $A'_j$ : ймовірність  $P(A'_j|B_j) \gg P(A_i|B_j)$  для інших  $j \neq j'$ , то оптимальне правило приписує досліджуваному об'єкту гіпотезу  $A'_j$ .

Часто ймовірності  $P(A_i)$  називають *апіорними*, оскільки вони характеризують міру можливості появи події  $A_i$  до появи події  $B_j$ . Поява події  $B_j$ , очевидно, приводить до зміни міри можливості появи події  $A_i$ , тому, ймовірності  $P(A_i|B_j)$  називають *апостеріорними*.

### Порядок виконання роботи

1. Описати предметну область системного аналізу та поставити задачу прийняття рішень, яку необхідно розв'язати (конкретна область та задача вибираються самостійно або за рекомендацією викладача).
2. Задати:
  - гіпотези  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , серед яких необхідно здійснити вибір однієї;
  - апіорні ймовірності гіпотез  $P(A_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ ;
  - можливі симптоми  $B_1, B_2, \dots, B_m$ ;
  - для кожної із гіпотез задати розподіл умовних ймовірностей  $P\{B_j|A_i\}$  появи симптомокомплексу.
3. Провести обстеження заданого об'єкту, виявити відповідні симптоми (симптоми, що підтверджуються).
4. Використовуючи правило Бейеса, здійснити вибір однієї гіпотези серед множини вказаних (за формулою Бейеса

розрахувати апостеріорні ймовірності для кожної з гіпотез, реальною буде та гіпотеза, значення апостеріорні ймовірності для якої є найбільше).

5. Оформити звіт по виконаній роботі.

Звіт повинен включати:

- тему, мету роботи;
- короткий виклад основних теоретичних положень;
- представити гіпотези та їх апріорні ймовірності, можливі симптоми та розподіл умовних ймовірностей появи симптомокомплексу для кожної із гіпотез;
- представити симптом чи симптомокомплекс, виявлений після обстеження;
- обчислені значення апостеріорних ймовірностей згідно правила Бейєса;
- висновки, в яких необхідно проаналізувати отримані результати.

### **Контрольні запитання**

1. Що таке сценарій, політики, цілі, актори?
2. Назвіть етапи проведення передбачень.
3. Опишіть етап написання сценаріїв.
4. Як оцінити сценарії з точки зору їх реальності?
5. Назвіть кроки застосування правила Бейєса.
6. За яким критерієм, використовуючи правило Бейєса, здійснюють вибір однієї гіпотези серед множини вказаних?

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 8

### МЕТОДИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ У СИСТЕМНОМУ АНАЛІЗІ З ВИКОРИСТАННЯМ КРИТЕРІЮ БЕЙЄСА

*Мета роботи:* набути практичного досвіду використання критерію Бейєса при прийнятті рішень

#### Теоретичні відомості

Нехай, маємо вибірку  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ , кожен елемент якої залежить від дійсного невідомого параметра  $\theta$ .

Нехай, маємо  $K$  гіпотез, висунутих відносно невідомого параметра  $\theta$ : (гіпотези полягають в тому, що даний параметр набуде деякого значення)  
 $H_0: \theta = \theta_0, H_1: \theta = \theta_1, H_2: \theta = \theta_2, \dots, H_{K-1}: \theta = \theta_{K-1}$ , причому, гіпотези  $H_0, H_1, H_2, \dots, H_{K-1}$  є випадковими подіями з відомими апріорними ймовірностями

$p_j = \mathbf{P}\{H_j\}, j = \overline{0, K-1}, \sum_{j=0}^{K-1} p_j = 1$ . Нам потрібен критерій,

відповідно до якого, на основі аналізу вибірки  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ , можна було б приймати одну з висунутих гіпотез і відхилити решту.

Для цього вводиться статистика (правило прийняття рішення)  $d_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ , яка набуває значень з множини  $\{0, 1, 2, \dots, K-1\}$  (тобто,  $d_n = j$ , якщо приймається гіпотеза  $H_j, j = \overline{0, K-1}$ ).

Функція втрат  $L(d_n; \theta)$  - це статистика, яка набуває значень з множини  $\{c_{ij} : c_{ij} \geq 0, i, j = \overline{0, K-1}\}$ ,  $c_{ij}$  - втрати, які отримуються, якщо приймається гіпотеза  $i$ , а насправді істинною є  $j$ . Тобто, маємо матрицю втрат розмірністю  $K \times K$ :

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} & c_{02} & \cdots & c_{0,K-1} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1,K-1} \\ c_{20} & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2,K-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{K-1,0} & c_{K-1,1} & c_{K-1,2} & \cdots & c_{K-1,K-1} \end{pmatrix}.$$

Причому, будемо вважати, що втрати від помилкових рішень мають бути більшими, ніж втрати від правильних рішень, тобто  $c_{ij} > c_{jj}$ ,  $i \neq j$ ,  $i, j = \overline{0, K-1}$ .

Умовні ризики  $r_j(d_n) = \mathbf{M}(L(d_n; \theta) | \theta = \theta_j)$  правила  $d_n$  за умови істинності, відповідно, гіпотез  $H_j$ ,  $j = \overline{0, K-1}$  визначаються наступним чином:

$$r_j(d_n) = \sum_{i=0}^{K-1} c_{ij} \mathbf{P}(H_i' | H_j), \quad j = \overline{0, K-1}. \quad (8.1)$$

Ризик правила  $d_n$  - це  $R(d_n) = \mathbf{M}\mathbf{M}(L(d_n; \theta) | \theta) = \sum_{j=0}^{K-1} r_j(d_n) p_j$ .

З урахуванням (8.1), його можна зобразити у вигляді:

$$R(d_n) = \sum_{j=0}^{K-1} \sum_{i=0}^{K-1} c_{ij} p_j \mathbf{P}(H_i' | H_j). \quad (8.2)$$

Якщо  $\xi$  - неперервна випадкова величина, то вибірка  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  є неперервним  $n$ -вимірним випадковим вектором, що характеризується  $n$ -вимірною щільністю розподілу  $p(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$ . Якщо ж  $\xi$  - дискретна випадкова величина, що набуває значень з деякої дискретної множини  $X$ , то вибірка  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  є дискретним випадковим вектором, що характеризується  $n$ -вимірним розподілом  $\mathbf{P}\{\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, \dots, \xi_n = x_n; \theta\}$ ,  $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ .

*Означення.* Статистика  $L_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n; \theta)$ ,  $\theta \in \Theta$ , що визначається як:



-  $L_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n; \theta) = p(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) \Big|_{x_1=\xi_1, x_2=\xi_2, \dots, x_n=\xi_n}$ , якщо  
вибірка  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  має неперервний розподіл  
або

-  $L_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n; \theta) = \mathbf{P}\{\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, \dots, \xi_n = x_n; \theta\} \Big|_{x_1=\xi_1, x_2=\xi_2, \dots, x_n=\xi_n}$   
, якщо вибірка  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  має дискретний розподіл,  
називається функцією правдоподібності.

Якщо  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  - повторна вибірка, то

$$L_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n; \theta) = \prod_{k=1}^n L_1(\xi_k; \theta). \quad (8.3)$$

Означення. Статистика

$$l_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \frac{L_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n; \theta_1)}{L_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n; \theta_0)},$$

$$\mathbf{P}\{L_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n; \theta_0) \neq 0\} = 1,$$

називається відношенням правдоподібності.

Легко бачити, що завжди  $l_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \geq 0$ .

Якщо  $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  - повторна вибірка, то, згідно (8.3),

$$l_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \frac{\prod_{k=1}^n L_1(\xi_k; \theta_1)}{\prod_{k=1}^n L_1(\xi_k; \theta_0)} = \prod_{k=1}^n \frac{L_1(\xi_k; \theta_1)}{L_1(\xi_k; \theta_0)} = \prod_{k=1}^n l_1(\xi_k), \quad (8.4)$$

де  $l_1(\xi_k) = \frac{L_1(\xi_k; \theta_1)}{L_1(\xi_k; \theta_0)}$ ,  $k = \overline{1, n}$  - елементарне відношення  
правдоподібності.

Для кожної гіпотези  $H_j$ ,  $j = \overline{1, K-1}$  введемо відношення  
правдоподібності

$$l_n^{(j)}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \frac{L_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n; \theta_j)}{L_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n; \theta_0)}, \quad j = \overline{1, K-1}.$$

Оптимальне бейєсівське правило  $d_n^*$ , що мінімізує ризик  $R(d_n)$ , має вигляд:

- гіпотеза  $H_k, k = \overline{1, K-1}$  приймається (решта гіпотез відхиляються), якщо має місце система нерівностей:

$$\sum_{j=1}^{K-1} (c_{ij} - c_{kj}) \frac{p_j}{p_0} l_n^{(j)} \geq c_{k0} - c_{i0}, \quad i = \overline{0, K-1}, \quad i \neq k; \quad (8.5)$$

- якщо для жодного  $k = \overline{1, K-1}$  не виконуються відповідні співвідношення (8.5), то гіпотези  $H_1, H_2, \dots, H_{K-1}$  відхиляються, а приймається гіпотеза  $H_0$ .

### Порядок виконання роботи

1. Вихідними даними для виконання роботи є файл, у якому записано реалізацію вибірки  $x_j, j = \overline{1, n}$ , кожний елемент якої має гауссівський розподіл.
2. Задано:
  - гіпотези (параметри гауссівського розподілу – гіпотеза полягає в тому, що математичне сподівання заданої вибарки набуде певного значення)  $H_0 : a_0 = 1, H_1 : a_1 = 2, H_2 : a_2 = 3, H_3 : a_3 = 4, H_4 : a_4 = 5$ , серед яких, згідно критерію Бейєса, необхідно здійснити вибір однієї;
  - апріорні ймовірності появи гіпотез  $p_0 = 0,1, p_1 = 0,3, p_2 = 0,25, p_3 = 0,15, p_4 = 0,2$ ,
3. Задати матрицю втрат  $C$  (описати як).
4. Для кожної із гіпотез побудувати відношення правдоподібності згідно формули:

$$l_n^{(j)} = \exp \left[ \frac{1}{2\sigma^2} \left( 2(a_j - a_0) \sum_{k=1}^n \xi_k - n(a_j^2 - a_0^2) \right) \right], \quad j = \overline{1, K-1}$$

де  $\sigma = const = 2, n = 10$ ;

5. Перевірити, при якому значенні  $a_j$  виконується нерівність (8.5).
6. Оформити звіт по виконаній роботі.

Звіт повинен включати:

- тему, мету роботи;
- короткий виклад основних теоретичних положень;
- представити матрицю втрат  $C$ ;
- представити для кожної із гіпотез відношення правдоподібності;
- результати перевірки оптимального бейєсівського правила  $d_n^*$ ;
- висновки, в яких необхідно проаналізувати отримані результати.

### **Контрольні запитання**

1. Що таке функція правдоподібності?
2. Що таке відношення правдоподібності?
3. Що таке функція втрат, матриця втрат?
4. Що таке ризик статистичного правила?
5. Охарактеризуйте критерій Бейєса для вибору з двох, більше двох гіпотез.

### **ВИКОРИСТАНА ЛІТЕРАТУРА**

1. Волкова В.Н., Денисов А.А. Основы теории систем и системного анализа: Учебник, издание 2. – СПб.: Издательство СПбГТУ, 1999.
2. Губанов и др. Введение в системный анализ. – Л.: Из-во ЛГУ, 1979.
3. Перегудов Ф.И., Тарасенко Ф.П. Введение в системный анализ. – М.: Высшая школа, 1989.
4. Бабак В.П., Марченко Б.Г., Фриз М.Є. Теорія ймовірностей, випадкові процеси та математична статистика. – К.: Техніка, 2004. – 288 с.
5. Конспект лекцій.

*Редактор Гриценко Є.І.  
Коректор Радик М.Д.  
Комп'ютерне макетування Капаціли Б.Ю.*

Формат 60×90 Папір ксероксний.  
Обл.вид.арк. 1,79  
Наклад 100 прим. Зам. № 2468

Видавництво Тернопільського національного  
технічного університету імені Івана Пулюя

вул. Руська, 56, м. Тернопіль, 46001  
**E-mail :vydavnytstvo@tu.edu.te.ua**

© Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя  
Навчально-методична література