

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ТЕРНОПІЛЬСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ  
УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ПУЛЮЯ**

**Кафедра економічна кібернетика**



**УПРАВЛІННЯ**

**НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНА**

**МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ**

**по опорному конспекту лекцій з дисципліни  
«Моделювання економічної динаміки»  
для студентів спеціальності 051 «Економіка»  
денної та заочної форми навчання**

**Тернопіль-2017**

**Методичні рекомендації опорного конспекту лекцій з дисципліни «Моделювання економічної динаміки» для студентів спеціальності 051«Економіка» денної та заочної форми навчання / доцент Н.М. Гарматій – Тернопіль, ТНТУ ім. І. Пулюя, 2017. – 67 с.**

У методичних рекомендаціях на основі діючого законодавства та освітньо-професійної програми з підготовки магістрів, розкрито суть лекційних матеріалів з дисципліни «Моделювання економічної динаміки»; використання літературних джерел для розкриття та обґрунтування досліджуваної проблеми в науковому та економічному аспекті; використання фактичних даних про результати моделювання динамічних процесів; використання економічних методів для дослідження закономірностей динаміки діяльності підприємств у всіх сферах економіки;

**Укладачі:** Гарматій Н.М., кандидат економічних наук, доцент кафедри економічної кібернетики.

**Рецензенти:** Рогатинський Роман Михайлович, д.т.н., професор, проректор з наукової роботи

Федорович Роман Володимирович, кандидат економічних наук, професор, завідувач кафедри промислового маркетингу.

**Відповідальний за випуск:** Гарматій Наталія Михайлівна, кандидат економічних наук, асистент кафедри економічної кібернетики.

Методичні рекомендації розглянуті і затверджені на засіданні кафедри економічної кібернетики

Протокол № 8 від 24 березня 2017р.

Схвалені на засіданні методичної комісії факультету економіки та підприємницької діяльності

Протокол № від 2017 р.

## Зміст

Тема1. Моделювання економічних процесів методикою кластерного аналізу.....	4
Тема2. Формалізація стійкості динамічних систем.....	9
Тема3. Застосування методів стохастичного програмування динаміки економічних процесів на основі ланцюгів Маркова.....	12
Тема4. Критерії оцінки стійкості динаміки. Моделювання запасів динамічних виробничих систем.....	16
Тема5. Моделювання забезпечення ресурсами при динамічному розвитку регіонів.....	23
Тема 6. Лінійні динамічні моделі. Модель Харрода-Домара.....	24
Тема7. Динамічна модель Леонтьєва.....	30
Тема8. Лінійні моделі попиту і пропозиції.....	37
Тема9. Нелінійні моделі динамічні моделі. Моделі економічних циклів.....	45
Тема10. Моделювання ефективності інвестиційних проектів з використанням теорії нечіткої логіки.....	58
Рекомендована література.....	66

# Лекція 1. Моделювання економічних процесів методикою кластерного аналізу.

## 1. АЛГОРИТМ КЛАСТЕРНОГО АНАЛІЗУ

Кластерний аналіз - це сукупність методів класифікації багатомірних спостережень або об'єктів, заснованих на визначенні поняття відстані між об'єктами з наступним виділенням з них груп, "згустків" спостережень (кластерів, таксонів). При цьому не потрібно апріорної інформації про розподіл генеральної сукупності.

Вибір конкретного методу кластерного аналізу залежить від мети класифікації.

Кластерний аналіз використовується при дослідженні структури сукупностей соціально-економічних показників або об'єктів: підприємств, регіонів, соціологічних анкет, колективів і под.

Від матриці вихідних даних

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{i1} & x_{i2} & x_{i3} & x_{i4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & x_{n4} \end{pmatrix}$$

переходимо до матриці нормованих значень  $Z$  з елементами

$$z_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{s_j}, \quad (1)$$

де  $j = 1, 2, 3, 4$  – номер показника,  $i = 1, 2, \dots, n$  – номер спостереження;

$$\bar{x}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij}; \quad (2)$$

$$s_j = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2} = \sqrt{(\overline{x_{ij}^2}) - (\bar{x}_j)^2}. \quad (3)$$

В якості відстані між двома спостереженнями  $z_i$  і  $z_v$  використовують "зважену" евклідову відстань, яка визначається по формулі

$$\rho_{BE}(z_i, z_v) = \sqrt{\sum_{\ell}^4 w_{\ell} (z_{i\ell} - z_{v\ell})^2}, \quad (4)$$

де  $w_{\ell}$  – “вага” показника;  $0 < w_{\ell} \leq 1$ .

Якщо  $w_{\ell} = 1$  для всіх  $\ell = 1, 2, 3, 4$ , то отримуємо звичайну евклідову відстань

$$\rho_{BE}(z_i, z_v) = \sqrt{\sum_{\ell}^4 (z_{i\ell} - z_{v\ell})^2}, \quad (5)$$

Отримані значення зручно представити у вигляді матриці відстаней

$$R = \begin{pmatrix} 0 & \rho_{12} & \rho_{13} & \dots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 0 & \rho_{23} & \dots & \rho_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{i1} & \rho_{i2} & 0 & \dots & \rho_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \rho_{n3} & \dots & 0 \end{pmatrix}; \quad \rho_{iv} = \rho_{vi}.$$

Так як матриця  $R$  симетрична, тобто  $\rho_{iv} = \rho_{vi}$ , то досить обмежитися записом наддіагональних елементів матриці.

Використовуючи матрицю відстаней, можна реалізувати агломеративну ієрархічну процедуру кластерного аналізу. Відстані між кластерами визначають за принципом "найближчого сусіда" чи "далекого сусіда". У першому випадку за відстань між кластерами приймають відстань між найближчими елементами цих кластерів, а в другому - між найбільш віддаленими один від одного.

Принцип роботи ієрархічних агломеративних процедур складається в послідовному об'єднанні груп елементів спочатку найближчих, а потім все більш віддалених один від одного.

На першому кроці алгоритму кожне спостереження  $z_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) розглядається як окремий кластер. Надалі на кожному кроці роботи алгоритму відбувається об'єднання двох

найближчих кластерів, і знову будується матриця відстаней, розмірність якої знижується на одиницю. Робота алгоритму закінчується, коли всі спостереження об'єднані в один клас.

## Приклад класифікації економічних об'єктів за допомогою алгоритму кластерного аналізу

Провести класифікацію п'яти підприємств АПК (табл. 4), кожне з яких характеризується наступними економічними показниками:  $X_1$  - прибуток від реалізації (млн. грн.);  $X_2$  - питома вага продукції вищої категорії якості (%);  $X_3$  - виробіток товарної продукції на одного працівника промислово-виробничого персоналу (тис. грн.);  $X_4$  - середньорічна вартість основних виробничих фондів (млн. грн.).

Таблиця 4

Значення основних економічних показників підприємств АПК

Номер підприємства	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$
1	3,338	78,46	5,013	7,312
2	1,909	50,83	3,423	17,785
3	6,653	26,12	3,314	21,544
4	2,105	72,11	2,534	8,125
5	6,178	13,70	1,863	1,780

Для усунення розходження в одиницях виміру показників нормуємо їх. В результаті розрахунків за формулами (1-3) одержуємо матрицю нормованих вихідних даних

$$Z = \begin{pmatrix} -0,34776501 & 1,1996448 & 1,688891 & -0,55050379 \\ -1,0591251 & 0,1026702 & 0,1833199 & 0,89186241 \\ 1,3024511 & -0,8783738 & 0,0801078 & 1,4095607 \\ -0,96155583 & 0,9475352 & -0,6584743 & -0,43853551 \\ 1,0699948 & -1,3714763 & -1,2938443 & -1,3123838 \end{pmatrix},$$

а також середні значення показників  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ ,  $X_4$  і їх середні квадратичні відхилення:

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= 4,0366; & s_1 &= 2,0088277; \\ \bar{x}_2 &= 48,244; & s_2 &= 25,187455; \\ \bar{x}_3 &= 3,2294; & s_3 &= 1,0560776; \\ \bar{x}_4 &= 11,3092; & s_4 &= 7,2609854.\end{aligned}$$

В якості відстані між об'єктами візьмемо зважену евклідову відстань, причому "ваги"  $w_j$  задамо пропорційно ступеню важливості економічного показника:  $w_1 = 0,4$ ;  $w_2 = 0,3$ ;  $w_3 = 0,2$ ;  $w_4 = 0,1$ . За формулами (4 – 5) розраховуємо матрицю відстаней між усіма п'ятьма підприємствами:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1,159804 & 1,9283079 & 1,1311047 & 2,2980731 \\ & 0 & 1,6262618 & 0,77977305 & 1,8968315 \\ & & 0 & 1,9581917 & 1,1126867 \\ & & & 0 & 1,9881173 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

З матриці  $R_1$  випливає, що об'єкти 2 і 4 найбільш близькі ( $\rho_{2,4} \approx 0,78$ ) і тому поєднуються в один кластер. Після об'єднання маємо чотири кластери:

Номер кластера	1	2	3	4
Состав кластера	(1)	(2,4)	(3)	(5)

Відстань між кластерами будемо знаходити за принципом "найближчого сусіда". За відстань між кластерами  $S_1$  і  $S_{2,4}$  беремо мінімальну з відстаней  $\rho_{12} = 1,159804$  і  $\rho_{14} = 1,1311047$ . Аналогічно знаходимо відстані між  $S_3$ ,  $S_5$  і  $S_{(2,4)}$ , які відповідно рівні:  $\rho_{3(2,4)} = 1,6262618$  і  $\rho_{5(2,4)} = 1,8968315$ . Відстань між іншими кластерами залишається без зміни. Таким чином, одержуємо матрицю відстаней

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1,1311047 & 1,9283079 & 2,2980731 \\ & 0 & 1,6262618 & 1,8968315 \\ & & 0 & 1,1126867 \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

З матриці  $R_2$  випливає, що кластери  $S_3$  і  $S_5$  найбільш близькі ( $\rho_{35} =$

1,1126867) і тому поєднуються в новий кластер  $S_{(3,5)}$ . Після об'єднання будемо мати три кластери  $S_1$ ,  $S_{(2,4)}$  і  $S_{(3,5)}$ . Відстані між новим кластером  $S_{(3,5)}$  і кластерами  $S_1$ ,  $S_{(2,4)}$  відповідно рівні:  $\rho_{1,(3,5)} = 1,9283079$  ( $\rho_{13} = 1,9283079$  менше  $\rho_{15} = 2,298073$ ) і  $\rho_{(2,4)(3,5)} = 1,6262618$ . Матриця відстаней має вигляд:

$$R_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1,1311047 & 1,9283079 \\ & 0 & 1,6262618 \\ & & 0 \end{pmatrix} . .$$

З цієї матриці випливає, що кластери  $S_1$  і  $S_{(2,4)}$  поєднуються в новий кластер  $S_{(1,2,4)}$ , тому що відстань між ними мінімальна  $\rho_{1(2,4)} = 1,1311047$ . Тоді одержимо матрицю відстаней:

$$R_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1,6262618 \\ & 0 \end{pmatrix} .$$

Таким чином на відстані  $\rho_{(1,2,4)(3,5)} = 1,6262618$  два кластери  $S_{(1,2,4)}$  і  $S_{(3,5)}$ , поєднуються в один.

Результати ієрархічної класифікації спостережень представлені на рис. 1 у вигляді дендрограми, де по осі ординат приводяться відстані між поєднуваними на даному етапі кластерами.

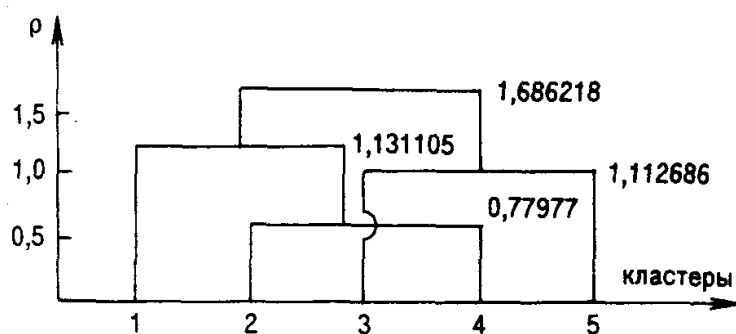


Рис. 1. Дендрограма

У задачі перевагу варто надати передостанньому етапу класифікації, коли всі об'єкти об'єднані в два кластери  $S_{(1,2,4)}$  і  $S_{(3,5)}$ , що наочно видно на рис. 1.

### Контрольні питання:

1. Для чого використовується модель кластеризації в економіці?
2. В чому полягає метод найближчого сусіда?



3. Як формується матриця нормованих вхідних змінних?
4. Методика побудови дендрограми.
5. Що відображає дендрограма?

## 2.2. Формалізація стійкості динамічних систем

Для складних систем, зокрема економічних, стійкість означає, що при виникненні обурення, що злегка виводить систему із стану рівноваги, система прагнучиме до відновлення колишнього стану, тобто все її подальші стани знаходитимуться поблизу стану рівноваги (рис. 1). Формалізація питань стійкості реалізується у вигляді декількох означень.

Розглянемо систему, що описується диференціальним рівнянням (системою диференціальних рівнянь) вигляду

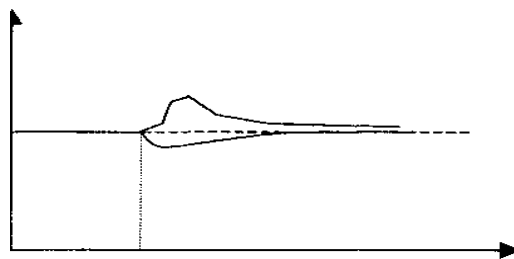


Рис.. 1. Стійкість для динамічної системи

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1)$$

Означення 1. Система (1) називається *автономною*, якщо змінна часу  $t$  не входить в її праву частину безпосередньо. Інакше система називається *неавтономною*.

Припустимо, що функція  $f(x, t)$  має необхідні властивості для того, щоб система (1) мала єдиний розв'язок

$$x(t) = \varphi(t, t_0, x_0). \quad (2)$$

Означення 2. Стан системи  $x_e$  називається *станом рівноваги* для системи (1), якщо

$$f(x_e, t) = 0, \quad \forall t \quad (3)$$

або

$$\varphi(t, t_0, x_e) = x_e. \quad (4)$$

Це означення означає, що система сама по собі не покине стан рівноваги.

Означення 3. Стан рівноваги  $x_e$  динамічної системи (1) називається стійким по Ляпунову (стабільним), якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon, t_0) > 0: \|x_0 - x_e\| < \delta \Rightarrow \|\varphi(t, t_0, x_0) - x_e\| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0..$$

Це означення означає, що завжди можна вибрати таке початкове положення системи  $x_0$ , відмінне від стану рівноваги менш, ніж на  $\delta$ , що всі точки траєкторії системи знаходяться від стану рівноваги не далі  $\varepsilon$  (мал. 2).

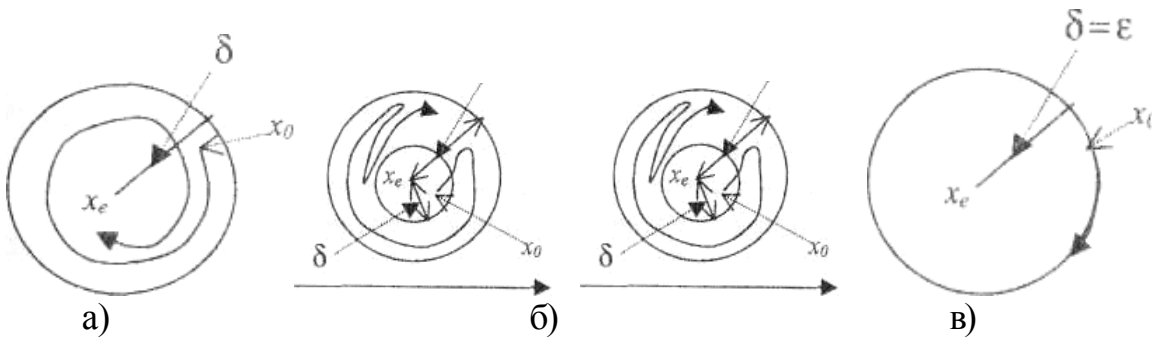


Рис. 2. Стійкість по Ляпунову

Означення 4. Точка рівноваги  $x_e$  динамічної системи (1)

Називається асимптотично стійкою, якщо:

- 1) вона є стійкою в значенні означення 3;
- 2) виконано

$$\forall m > 0 \exists T(m, t_0, x_0) > 0:$$

$$\|x_0 - x_e\| \leq r(t_0) \Rightarrow \|\varphi(t, t_0, x_0) - x_e\| \leq m, \quad \forall t \geq t_0 + T,$$

де  $r(t_0) > 0$  — константа.

Іншими словами

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, t_0, x_0) = x_e.$$

Таким чином, до асимптотично стійкої точки рівноваги збігається будь-яка траєкторія, що починається істотно близько до неї (мал. 3).

Асимптотично стійка точка називається *аттрактором* («притягаюча»), а нестабільна — *репеллером* (рис. 4).

Число  $r(t_0)$  називається базисом аттрактора.

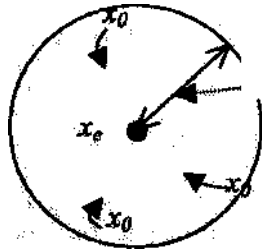


Означення 5. Стан рівноваги  $x_e$  динамічної системи (1) називається *в цілому асимптотично стійким*, якщо

- 1) він є стійким;
- 2) будь-яка траєкторія при  $t \rightarrow \infty$  збігається до  $x_e$ , якщо  $\|x_0 - x_e\| \leq r$ , де  $r > 0$  — постійне, достатньо велике число (рис..5).

Якщо константи у означеннях 3, 4, 5 ( $\delta, T, r$ ) не залежать від  $t_0$ , то говорять про однорідну стійкість.

Для система (1) має



простоти викладення надалі вважатимемо, що нульове рішення.

Рис. 5. В цілому асимптотично стійкий стан

Теорема Ляпунова про стійкість.

Нехай для системи (1) існує така неперервно диференційована в околиці точки  $x = 0$  функція  $V(x)$ , що  $V(0) = 0$ ,  $V(x) > 0$  і  $V'(x) < 0$  при  $x \neq 0$ .

Тоді рішення системи  $x(t) \equiv 0$  є стійким.

### **Лекція 3. Застосування методів стохастичного програмування для дослідження динаміки економічних процесів на основі ланцюгів Маркова.**

#### **Мета лекційного матеріалу:**

Навчитись будувати економічні системи визначені імовірнісними параметрами та розробляти стратегії функціонування систем обслуговування на основі Марковських процесів

#### **Стислі теоретичні відомості**

Випадкова функція  $X(t)$ , аргументом якої є час, називається *випадковим*

*процесом*. Марковські процеси є особливим видом випадкових процесів. Особливе місце марковських процесів серед інших класів випадкових процесів обумовлено наступними обставинами: для марковських процесів добре розроблений математичний апарат, що дозволяє вирішувати багато практичних задач; за допомогою марковських процесів можна описати поведінку досить складних систем.

**Визначення.** Випадковий процес, що протікає в якій-небудь системі  $S$ , називається марковським (або процесом без післядії), якщо він має наступну властивість: для будь-якого моменту часу  $t_0$  імовірність будь-якого стану системи в майбутньому (при  $t > t_0$ ) залежить тільки від її стану в сьогодні (при  $t = t_0$ ) і не залежить від того, коли і яким образом система  $S$  прийшла в цей стан.

**Класифікація марковських процесів.** Класифікація марковських випадкових процесів виробляється залежно від безперервності або дискретності множини значень функції  $X(f)$  і параметра  $t$ . Розрізняють наступні основні види марковських випадкових процесів:

- с дискретними станами й дискретним часом (ланцюг Маркова);
- с безперервними станами й дискретним часом (марковські послідовності);
- с дискретними станами й безперервним часом (безперервний ланцюг Маркова);
- с безперервним станом і безперервним часом.

**Граф станів.** Марковські процеси з дискретними станами зручно ілюструвати за допомогою так названого графа станів (рис. 1), де кружками позначені стани  $S_1, S_2, \dots$  системи  $S$ , а стрілками - можливі переходи зі стану в стан. На графі відзначаються тільки безпосередні переходи, а не переходи через інші стани. Можливі затримки в колишньому стані зображують «петлею», тобто стрілкою, спрямованою з даного стану в нього ж. Число станів системи може бути як кінцевим, так і нескінченним (але рахунковим). Приклад графа станів системи  $S$  представлений на рис. 12.

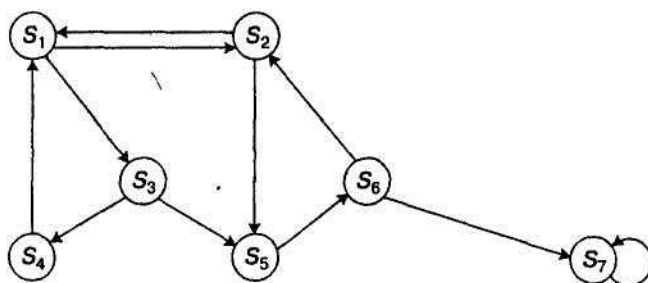


Рис. 12. Граф станів системи  $S$

Марковський випадковий процес із дискретними станами - дискретним часом називають марковським ланцюгом. Для такого процесу моменти  $t_1, t_2, \dots$ , коли система  $S$  може міняти свій стан, розглядають як послідовні кроки процесу, а як аргумент, від якого залежить процес, виступає не час  $t$ , а номер кроку  $1, 2, \dots$ , до, ... Випадковий процес у цьому випадку характеризується послідовністю станів  $S(0), S(1), S(2), \dots, S(k), \dots$ , де  $S(0)$  - початковий стан системи (перед першим кроком);  $S(1)$  - стан системи після першого кроку;  $S(k)$  - стан системи після  $k$ -го кроку...

Подія  $\{S(k) = S_i\}$ , суть якої полягає в тому, що відразу після  $k$ -го кроку система перебуває в стані  $S_i (i=1, 2, \dots)$ , є випадковою подією. Послідовність станів  $S(0), S(1), \dots, S(k), \dots$  можна розглядати як послідовність випадкових подій. Така випадкова послідовність подій називається марковським ланцюгом, якщо для кожного кроку ймовірність переходу з будь-якого стану  $S$ , у будь-яке  $S$  не залежить від того, коли і як система прийшла в стан  $S$ . Початковий стан  $S(0)$  може бути заданим заздалегідь або випадковим.

Імовірностями станів ланцюга Маркова називаються ймовірності  $P_i(k)$  того, що після  $k$ -го кроку ( $i$  до  $\{до + 1\}$ -го) система  $S$  буде перебувати в стані  $S (i=1, 2, \dots, n)$ . Очевидно сума імовірностей буде дорівнювати:

$$\sum_{i=1}^n P_i(k) = 1.$$

Початковим розподілом імовірностей марковського ланцюга називається розподіл імовірностей станів на початку процесу:

$$P_1(0), P_2(0), \dots, P_i(0), \dots, P_n(0).$$

В окремому випадку, якщо початковий стан системи  $S(0)$  у точності відомо  $S(0) = S(i)$ , те початкова ймовірність  $P(0) = 1$ , а всі інші дорівнюють нулю. Імовірністю переходу (перехідною ймовірністю) на  $k$ -му кроці зі стану  $S$ , у стан  $S_i$  називається умовна ймовірність того, що система  $S$  після  $k$ -го кроку виявиться в

стані  $S_i$  за умови, що безпосередньо перед цим (після до-1 кроку) вона перебувала в стані  $S_i$ .

Оскільки система може перебувати в одному з  $n$  станів, то для кожного моменту часу  $t$  необхідно задати  $n^2$  імовірностей переходу  $P_{ij}$  які зручно представити у вигляді наступної матриці:

$$\|P_{ij}\| = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{i1} & P_{i2} & \dots & P_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{bmatrix},$$

де  $P_{ij}$  - імовірність переходу за один крок зі стану  $S_i$  у стан  $S_j$ ,  $P_{ii}$  - імовірність затримки системи в стані  $S_i$ .

Матриця називається перехідною або матрицею перехідних імовірностей. Перехідні ймовірності однорідного марківського ланцюга  $P_{ij}$  утворюють квадратну матрицю розміру  $n \times n$ . Відзначимо деякі її особливості:

1. Кожен рядок характеризує обраний стан системи, а її елементи являють собою ймовірності всіх можливих переходів за один крок з обраного (з  $i$ -го) стану, у тому числі й перехід у саме себе.
2. Елементи стовпців показують імовірності всіх можливих переходів системи за один крок у задане ( $j$ -е) стан (інакше кажучи, рядок характеризує ймовірність переходу системи зі стану, стовець - у стан).
3. Сума ймовірностей кожного рядка дорівнює одиниці, тому що переходи утворюють повну групу неспільних подій:

$$\sum_{j=1}^n P_{ij} = 1, i = \overline{1, n}.$$

4. По головній діагоналі матриці перехідних імовірностей коштують імовірності  $P_{ii}$  того, що система не вийде зі стану  $S_i$ , а залишиться в ньому.

Якщо для однорідної марковського ланцюга задані початковий розподіл імовірностей і матриця перехідних імовірностей, то ймовірності станів системи  $P_i\{k\}$  визначаються по рекуррентній формули:

$$P_i(k) = \sum_{j=1}^n P_j(k-1) \cdot P_{ji} \quad (i = \overline{1, n}; j = \overline{1, n}).$$

### Приклад аналізу Марківського процесу

Розглянемо стан кредитної спілки за величиною відсотків по кредитах: 2%, 3%, 4%, які встановлюються на початку кожного кварталу і є фіксованими. Якщо кредитну спілку розглядати як систему, то она в кожний момент часу може знаходитись у трьох станах : S1 — процентная ставка 2%, S2 — процентная ставка 3%, S3 — процентная ставка 4%. Зміна перехідних імовірностей на протязі часу незначна.

Так як множина станів кінцева, в яких може перебувати система S, звичайно (три стани), то процес у системі S випадковий процес - дискретний. З певним ступенем погрішності можна припустити, що ймовірність перебування кредитної спілки в одному зі своїх станів у майбутньому залежить в істотному тільки від стану в сьогодні й не залежить від його станів у минулому. А тому розглянутий випадковий процес можна вважати марковским. Оскільки залежністю перехідних імовірностей від часу можна зневажити, то розглянутий процес буде однорідним.

Таким чином, у системі S протікає однорідний марковский дискретний випадковий процес із дискретним часом, тобто маємо однорідний марковский ланцюг.

#### **Лекція 4.**

##### **Критерії оцінки стійкості економічної динаміки. Моделювання запасів динамічних виробничих систем.**

**Засвоїти основні прийоми визначення параметрів**

**Мета роботи: стійкості лінійних динамічних економічних систем та умов рівноважного стану запасів у виробничих системах.**

##### **Теоретичні відомості**

В дослідженнях економічних систем одними із основних характеристик є визначення їх стійкості та рівноваги.

Процес руху економічного процесу у часі є послідовним переходом функціонування процесу з деякими значеннями параметрів у період часу ( $t_0$ ) до функціонування у період часу ( $t_1$ ) зі зміненими параметрами і у подальшому від стану у час  $t_1$  до стану у час  $t_n$ .

Розглянемо простий процес формування запасів товару на підприємстві.

Процес формування запасу буде мати наступні характеристики:

- Підприємство здійснює реалізацію певних видів товарів, цей процес характеризується видачею товарів зі складу і описується відповідною функцією  $x(t)$ . Значення даної функції змінюється у часі.

- Для того, щоб здійснювати видачу товарів зі складу їх необхідно закупити і там зберігати. Процес закупки товарів буде описувати функція надходження товарів  $\tilde{x}(t)$ , яка теж змінює свої значення у конкретні терміни часу.

- Якщо на складі зберігається кількість товару, це означає, що закуплено більше ніж необхідно продати. При цьому утворюється запас, який описується функцією  $y(t)$ . При цьому значення функції будуть додатними і виконуватиметься умова  $\tilde{x}(t) > x(t)$ , або  $\tilde{x}(t) - x(t) > 0$ . Різниця  $\tilde{x}(t) - x(t)$  і є запасом  $y(t)$ , тобто  $y(t) = \tilde{x}(t) - x(t)$ , а для даного випадку  $y(t) > 0$ .

- Якщо необхідно продати товар, що зберігається на складі, а він відсутній, значення запасу буде від'ємним, тобто надходження менші ніж видача зі складу. При цьому запас перетворюється у дефіцит товару і відповідно  $\tilde{x}(t) - x(t) < 0$  і  $y(t) < 0$ .

Функція видачі товарів є невідомою, оскільки вона охоплює попит на товар і не може бути чітко визначеною підприємством. В зв'язку з цим більший вплив на запаси буде здійснювати функція закупок або надходжень, її можна відкорегувати таким чином, щоб здійснювати закупки тих товарів, що необхідні при від'ємних значеннях запасів.

Таким чином, процес поповнення запасів є процесом періодичним і залежить від періодичності закупок.

Розвиток процесу у часі є динамічним. У період часу  $t_0$  запас буде дорівнювати  $y(t_0)$ , а надходження при цьому будуть дорівнювати  $\tilde{x}(t_0)$ . Такий стан процесу будемо називати –  $q_0$ . По проходженню деякого часового періоду  $\Delta t$  процес формування запасу перейде у часовий період  $t_1$ . При цьому запас змінює своє значення і буде дорівнювати  $y(t_1)$ , а надходження на склад –  $\tilde{x}(t_1)$ . Стан в який перейшов процес формування запасу будемо характеризувати як  $q_1$ . Тоді при переході у  $n$ -й часовий період система буде змінювати свої параметри і



переходити у наступні стани  $q_2, q_3, \dots, q_n$ . Процес, коли система буде знаходитись у одному із станів будемо називати стаціонарним, перехід системи із одного стану в інший будемо називати динамічним. Таким чином, динамічний процес є категорією, яка характеризується змінами часу і змінами параметрів.

Система утворення запасу описується параметрами:

$x(t)$  – інтенсивність видачі товарів зі складу;

$\tilde{x}(t)$  – інтенсивність надходження товарів на склад;

$y(t)$  – функція запасів на складі;

$y(t) < 0$  – дефіцит товару;

$y(t) > 0$  – запас товару на складі.

Функція запасу представлена у наступному вигляді:

$$\Delta y = (\tilde{x} - x)\Delta t, \text{ або } \frac{dy}{dt} = \tilde{x} - x.$$

Тоді  $\frac{dy}{dt} = f(x, t)$ , тобто буде існувати деякий процес зміни запасів у часі.

Значенням запасу для даного процесу буде  $y = f(t)$  на проміжку часу  $[t_0, \infty[$ , тобто у деякому часовому просторі обмеженому початковим  $t_0$ . Це значення буде **стійким** тільки у тому випадку, коли для любого числа  $\epsilon > 0$  знайдеться таке  $\delta$ , при якому вектор значень початкового стану  $f^*(t_0)$  буде задовольняти умові:

$$|f(t_0) - f^*(t_0)| < \delta,$$

а значення  $VR = f^*(t)$  з початковими умовами  $VR(t_0) = f^*(t_0)$  існує на інтервалі  $[t_0, \infty[$  і задовольняє умові:

$$|f(t) - f^*(t)| < \epsilon,$$

для всіх  $t \geq t_0$ .

Дане визначення є характеристикою стійкості лінійної динамічної системи, яка описується у загальному рівнянні  $\frac{dx}{dt} = f(x, t)$ .

Система буде **нестійкою** у тому випадку, коли не буде виконуватись умова  $|f(t) - f^*(t)| < \epsilon$ , для всіх  $t \geq t_0$ . Тобто,  $|f(t) - f^*(t)| > \epsilon$ .

Стійкість системи гарантує те, що вона при переході із одного стану в інший буде мати тенденцію до встановлення конкретних значень параметрів.

Якщо ж система є не стійкою, то при переході із одного стану в інший вона буде мати схильність до відхилень та коливань у значеннях параметрів.

Поняття стійкості невід'ємно пов'язане із поняттям рівноваги. **Рівноважним** будемо вважати такий стан системи, при якому всі його характеристики прагнуть набути постійних значень, таким чином, щоб тенденції змін вхідних і вихідних параметрів були однаковими. Наприклад, при дослідженні попиту та пропозиції та товар, рівноважним є стан при якому значення функції пропозиції будуть збігатись зі значеннями функції попиту, або при збільшенні значень функції попиту на величину  $\alpha$ , значення функції пропозиції будуть змінюватись на цю ж величину.

В системі запасів, можна визначити стан рівноваги, як відповідність процесу надходження товарів на склад процесу видачі товарів зі складу. У такому разі умовою рівноваги буде наближення рівня запасів до нуля.

Рівновага системи не є її стійкістю, оскільки в реальних процесах вхідні параметри не мають спільної синхронізації значень, але прагнуть набути деякої чіткої тенденції змін.

Розглянемо процес поведінки системи утворення запасу. Цільовою функцією системи є рух запасу, оскільки функція видачі товарів є невідомою, а функцію поставок можна відкорегувати за допомогою запасів на складі.

Існує два варіанти:

### 1 варіант.

Зміна обсягів поставок пропорційна кількості запасів. Так при величині дефіциту кількість поставок збільшується, при існуючому рівні запасів кількість поставок буде зменшуватись.

$$\Delta \tilde{x} = -a_0 y \Delta t, \text{ для } a_0 > 0.$$

### 2 варіант

Зміна інтенсивності обсягів поставок пропорційна як кількості запасів, так і швидкості їх зміни в часі. У разі коли запас існує, то інтенсивність поставок зменшується. При дефіциті (від'ємне значення запасу) інтенсивність поставок збільшується. При позитивній зміні швидкості поповнювання запасів інтенсивність поставок зменшується, при від'ємній швидкості інтенсивність

поповнювання запасів зростає.

$$\Delta \tilde{x} = -(a_0 y + a_1 \frac{dy}{dt}) \Delta t, \text{ для } a_0 > 0, a_1 > 0, a_0 > \frac{a_1^2}{4}.$$

### Аналітичний розв'язок:

#### 1 варіант

Вираз  $\Delta \tilde{x} = -a_0 y \Delta t$  характеризує зміну поставок на склад у часі і запишеться у вигляді  $\frac{\Delta \tilde{x}}{\Delta t} = -a_0 y$ . Величину  $\frac{\Delta \tilde{x}}{\Delta t}$  знайдемо взявши похідну від обох частин виразу

$$\frac{dy}{dt} = \tilde{x} - x. \text{ Тоді } \left( \frac{dy}{dt} \right)' = \tilde{x}' - x' \text{ звідки } \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d\tilde{x}}{dt} - \frac{dx}{dt}, \text{ тоді } \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = \frac{d\tilde{x}}{dt}. \text{ Зміна}$$

інтенсивності запасів  $\frac{\Delta \tilde{x}}{\Delta t} = \frac{d\tilde{x}}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dx}{dt}$ . Підставимо даний вираз у рівняння

$\frac{\Delta \tilde{x}}{\Delta t} = -a_0 y$ . В результаті отримуємо диференціальне рівняння другого порядку:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = -a_0 y, \text{ або } \frac{d^2 y}{dt^2} + a_0 y = -\frac{dx}{dt}.$$

Отримане рівняння є рівнянням елементу коливання

$(a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = \sum_{i=0}^m b_i x_i)$  з коефіцієнтами  $a_0, a_1=0, a_2=1$ . Дискримінант рівняння

від'ємний  $D = -4a_0 < 0$ . Характеристичне рівняння має вигляд:

$$\lambda^2 + a_0 = 0$$

Корені даного рівняння є уявними:  $\lambda_1 = +i\sqrt{a_0}, \lambda_2 = -i\sqrt{a_0}$ , де  $i = \sqrt{-1}$ .

#### Розглянемо поведінку системи.

У початковий момент часу  $t = 0, y = 0, y'(0) = 0$ . Інтенсивність видачі товарів зі складу  $x(t) = x = \text{const}$ . Таким чином, графічно вона буде мати вигляд (рис.1.):



Алгебраїчно її можна записати через функцію Хевісайда, яка приймає значення:  $\chi(t) = \begin{cases} 1, \text{ для } t > 0 \\ 0, \text{ для } t < 0 \end{cases}$ , тоді  $x(t) = x \times \chi(t)$ . Похідна  $\frac{dx}{dt} = x \times \chi'(t) = x \times \delta(t)$ , де  $\delta(t)$  – функція Дірака.

В результаті рівняння  $\frac{d^2y}{dt^2} + a_0y = -\frac{dx}{dt}$  буде мати вигляд  $\frac{d^2y}{dt^2} + a_0y = -x \times \delta(t)$ .

Розв'яжемо дане рівняння операторним методом за допомогою перетворень Лапласа. Застосуємо перетворення Лапласа для обох частин даного рівняння, тоді воно буде мати вигляд:  $(s^2 + a_0)Y(s) = -x$ .

Звідки знайдемо образ Лапласа для функції виходу:  $Y(s) = \frac{-x}{(s^2 + a_0)}$ .

Замінивши  $a_0 = \omega^2$ , будемо мати  $Y(s) = \frac{-x}{(s^2 + \omega^2)}$ .

Скористаємось стандартною таблицею зворотніх перетворень (табл. 1) знайдемо функцію виходу сигналу:

$$y(t) = -\frac{x}{\omega} \sin(\omega t).$$

Таким чином, при постійній інтенсивності видачі товарів зі складу процес поповнення запасу на складі буде мати вигляд незатухаючих гармонічних коливань з амплітудою  $-\frac{x}{\omega}$ .

У таких випадках будуть спостерігатись чіткі періодичні випадки наявності запасу та дефіциту запасу. Зауважимо, що випадки дефіциту будуть негативно впливати на фінансову політику підприємства.

Таблиця 8

Стандартні функції перетворень Лапласа

$f(t), t \geq 0$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$\chi(t)$	$\frac{1}{s}$
$t$	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
$te^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$

## 2 варіант.

Продиференціюємо рівняння  $\Delta \tilde{x} = -(a_0 y + a_1 \frac{dy}{dt}) \Delta t$ . В результаті отримаємо диференціальне рівняння другого порядку  $\frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = -\frac{dx}{dt}$ . Характеристичне рівняння буде мати вигляд:

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

Корені рівняння будуть комплексні з від'ємною дійсною частиною:

$$\lambda_1 = -\frac{a_1}{2} + i\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}, \quad \lambda_2 = -\frac{a_1}{2} - i\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}.$$

Якщо в момент часу  $t = 0$ ,  $y = 0$ ,  $y'(0) = 0$  інтенсивність видачі товарів зі

складу  $x(t) = x = \text{const}$ , то рівняння буде мати вигляд:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = -x \times \delta(t).$$

Застосувавши операторний метод отримуємо:  $(s^2 + a_1 s + a_0)Y(s) = -x$ .

Звідки отримуємо:  $Y(s) = \frac{-x}{(s^2 + a_1 s + a_0)}$ . Знайдемо функцію виходу за

допомогою зворотніх перетворень Лапласа:

$$y(t) = -\frac{x}{\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}} e^{-\frac{a_1}{2}t} \sin\left(\sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}t\right).$$

Таким чином, рух запасів описується затухаючими коливаннями в часі, що характеризує перехідний стан системи із стану дефіциту в стан поповнення складів.

### **Лекція 5. Моделювання забезпечення ресурсами при динамічному розвитку регіонів, моделювання використання регіонального внутрішнього продукту.**

Під макроекономічними системами забезпечення та розподілу ресурсів розуміють сукупність об'єктів, які функціонують у сфері народного господарства з метою раціонального надходження і використання витрат певного виду для забезпечення виходу продукції в регіоні на задоволення потреб держави чи конкретного регіону.

Критерієм ефективності таких систем можна визначити максимізацію доходної частини галузей в регіоні (прибуток, доход, випуск продукції) чи мінімізацію загальних витрат ресурсів на випуск продукції в регіоні.

В зв'язку з цим витрати, які несе кожен об'єкт системи мають бути приведені по принципу "розрахунок до одиниці", тобто перехідна матриця витрат має містити коефіцієнти витрат на одиницю виготовленого продукту по конкретному об'єкту діяльності. Тоді сукупні витрати по певному виду можна представити як суму витрат по кожному об'єкту.

Математична формалізація системи (математична модель) представляється у вигляді цільової функції (критерій ефективності) і системи обмежень (формалізація структурних зрушень у системі по використанню ресурсів).

Припустимо, що система забезпечення та розподілу ресурсів функціонує в певному регіоні. Кінцевою метою економічної діяльності в регіоні є процес випуску долі валового внутрішнього продукту в загальній економіці держави. В регіоні функціонує певна кількість галузей економічної діяльності, позначимо її через змінну  $N$ . Кожну галузь характеризує загальний випуск валового продукту, позначимо його через змінну  $x_i$  ( $i$  – галузь народного господарства в регіоні). Тоді загальний випуск внутрішнього валового продукту в регіоні складе:  $x_1+x_2+x_3+\dots+x_N$ . В регіоні проживає певна кількість населення, позначимо її через змінну  $V$ . Тоді критерієм ефективності регіонального виробництва можна обрати цільову функцію ( $K_{\text{ефект}}$ ) – максимізація випуску валового продукту в розрахунку на 1 населення в регіоні:

$$K_{\text{ефект}} = \frac{1}{V}(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_N) \longrightarrow (\max)$$

Ефективність виробництва по всіх галузях забезпечує раціональний механізм використання витрат на випуск продукції. Позначимо через змінну  $b_{ij}$  – коефіцієнт норми витрат  $j$ -го виду на випуск одиниці валового внутрішнього продукту по  $i$ -му виду економічної діяльності (галузі) по регіону. Для кожного  $j$ -го виду витрат існує конкретна наявна кількість загальних виділених ресурсів до використання у регіоні. Її можна позначити через змінні, наприклад:  $A$  – кількість виділених енергетичних витрат;  $B$  – кількість виділеного природного газу;  $C$  – кількість виділених інвестицій, спрямованих на розвиток виробництва;  $D$  – кількість вакансій по галузях виробництва (попит на робочу силу) тощо.

Тоді для оптимального визначення випуску валового внутрішнього продукту необхідним є виконання обмежень по використанню наявних ресурсів:

$$\begin{cases} b_{11}x_1 + & b_{21}x_2 + & \dots + & b_{N1}x_n \leq A \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{1M}x_1 + & b_{2M}x_2 + & \dots + & b_{NM}x_n \leq D \end{cases}$$

## Лекція 6. Лінійні динамічні моделі

### 6.1. Модель Харрода-Домара

Як приклад динамічної моделі з безперервним часом, представленої лінійним диференціальним рівнянням, розглянемо модель макроекономічної динаміки, запропонованої Харродом і Домаром. Модель описує динаміку доходу  $Y(t)$ , який розглядається як сума споживання  $C(t)$  і інвестицій  $I(t)$ . Економіка вважається закритою, тому чистий експорт рівний нулю і державні витрати не виділяються. Основна передумова моделі зростання – формула взаємозв'язку між інвестиціями і швидкістю росту доходу. У моделі передбачається, що швидкість росту доходу пропорційна інвестиціям

$$I(t) = B \frac{dY}{dt},$$

де  $B$  – коефіцієнт капіталоємкості приросту доходу, або коефіцієнт прірістної капіталоємкості. Зворотна йому величина  $1/B$  називається прірістною капіталовідачею.

Тим самим, в модель фактично включаються наступні передумови:

- інвестиції миттєво перетворюються на приріст капіталу. Формально це означає, що  $\Delta K(t) = I(t)$ , де  $K(t)$  - безперервна функція приросту капіталу за часом.
- вибуття капіталу відсутнє
- виробнича функція в моделі лінійна. Це витікає з пропорційності приросту доходу приросту капіталу

Лінійна виробнича функція

$$Y(t) = aL(t) + bK(t) + c$$

де  $b=1/B$  цією властивістю в тому випадку, якщо  $a=0$ , або  $L(t)=\text{Const}$ .

- витрати праці постійні в часі, або випуск не залежить від витрат праці, оскільки праця не є дефіцитним ресурсом.
- модель не враховує технічного прогресу.

Ці передумови, звичайно, істотно огрублюють опис динаміки реальних макроекономічних процесів, роблять проблематичним застосування цієї моделі, наприклад, для прогнозування величини сукупного випуску, або доходу. У теж час, її відносна простота дозволяє більш глибоко вивчити взаємозв'язок динаміки інвестицій і зростання випуску, одержати точні формули траєкторій даних параметрів.

У цій моделі передбачається, що динаміка споживання  $C(t)$  є заданою функцією. Простий варіант моделі вийде, якщо вважати, що  $C(t) \equiv 0$ . Цей варіант абсолютно нереалістичний з практичної точки зору, проте в ньому всі ресурси



прямують на інвестиції, внаслідок чого можуть бути визначені максимально можливі темпи зростання. В цьому випадку одержуємо

$$Y(t) = C(t) + I(t) = 0 + B \frac{dY}{dt} = BY'(t).$$

Це лінійне однорідне диференціальне рівняння першого порядку. Легко перевірити безпосереднім диференціюванням, що його рішення має вигляд:

$$Y(t) = Y(0)e^{(1/B)t}.$$

Безперервний темп приросту доходу  $y(t) = \frac{Y'(t)}{Y(t)}$  в цьому випадку рівний  $1/B$ . Це максимально можливий технологічний темп приросту.

Хай тепер  $Z(t)=C$  постійно в часі. В цьому випадку одержуємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння

$$Y(t) = BY'(t) + C.$$

Його частковим рішенням, очевидно, є функція  $y_r = C$ , а загальним рішенням – сума загального рішення однорідного рівняння і знайденого часткового рішення

$$Y(t) = Ae^{(1/B)t} + C.$$

Константу інтегрування  $A$  знайдемо, підставивши в цю функцію задану початкову умову

$$Y(0) = Ae^{(1/B)0} + C = A + C,$$

звідки  $A = Y(0) - C$ . Значить, рішенням рівняння є функція

$$Y(t) = (Y(0) - C)e^{(1/B)t} + C.$$

Безперервний темп приросту доходу  $y(t) = \frac{Y'(t)}{Y(t)}$  у цьому рішенні рівний  $y(t) = \frac{1}{B} \cdot \left[ 1 - \frac{C}{Y(t)} \right]$ . Він складає  $\frac{1}{B} \cdot \left[ 1 - \frac{C(0)}{Y(0)} \right]$  у початковий момент часу (при  $t = 0$ ) і, зростаючи, прагне до  $1/B$  при  $t > ?$ , що зрозуміле, оскільки дохід росте, а постійний об'єм споживання складає все меншу його частку.

Величина  $\alpha(t) = \left[ 1 - \frac{C}{Y(t)} \right]$  - норма накопичення у момент часу  $t$ , і темп приросту доходу виявляється пропорційним цій величині, як і показнику прірістної капіталовіддачі  $1/B$ .

Отже, за інших рівних умов зростання норми накопичення пропорційно збільшує темпи приросту доходу. В той же час це знижує рівень поточного споживання, і для дозволу проблеми узгодження конкурентних цілей збільшення темпів зростання і рівня поточного добробуту в модель звичайно включають елементи оптимізації. В цьому випадку розв'язується оптимізаційна задача на максимум загального об'єму споживання за кінцевий або нескінченний період часу. Для віддзеркалення переваги раніше отриманого результату в модель включається тимчасове дисконтування, при якому раніший результат враховується в критерії з великою «вагою».

Нарешті, розглянемо варіант моделі з показником споживання  $C(t)$ , що росте з постійним темпом  $r$ :  $C(t) = C(0) \cdot e^{rt}$ . Диференціальне рівняння цієї моделі має вигляд:

$$Y(t) = BY'(t) + C(0) \cdot e^{rt}.$$

Рішення цього рівняння таке:

$$Y(t) = \left[ y(0) - \frac{C(0)}{1 - Br} \right] \cdot e^{\frac{1}{B}t} + \left[ \frac{C(0)}{1 - Br} \right] \cdot e^{rt}.$$

З аналізу формули ясно, що темп приросту споживання  $r$  повинен бути більше максимально можливого загального темпу приросту  $1/B$ , оскільки інакше споживання займатиме все велику і врешті-решт - переважну частину доходу, що зведе до нуля спочатку інвестиції, а потім і дохід. Ясно це з формули рішення моделі, оскільки у випадку  $r > \frac{1}{B}$  коефіцієнт  $\frac{1}{1 - Br}$  негативний, а  $e^{rt}$  росте швидше, ніж  $e^{(1/B)t}$ , отже, другий доданок за цих умов негативно і через деякий час «переважить» перший.

У рішенні даної моделі зростання при  $r < \frac{1}{B}$  багато що залежить від співвідношення між  $r$  і  $\rho_0 = \frac{\alpha_0}{B}$  (у чисельнику  $\alpha_0 = 1 - \frac{C(0)}{Y(0)}$  стоїть норма накопичення в початковий момент часу  $t=0$ ). Якщо  $r = \rho_0$ , то темп приросту доходу рівний темпу приросту споживання, і рішенням є

$$Y(t) = Y(0) \cdot e^{(\alpha_0/B)t}.$$

Норма накопичення  $\alpha(t)$  в цьому випадку постійна в часі і рівна  $\alpha_0$ , а темп приросту доходу пропорційний нормі накопичення і обернено пропорційний прірістної капіталоємкості. Саме ця модифікація моделі економічного зростання, в якій норма накопичення постійна, називається *моделлю Харрода - Домара*.

Якщо в даній моделі зростання  $\frac{1}{B} > r > \rho_0$ , то необхідний темп приросту споживання виявляється дуже високим для економіки. В цьому випадку

коефіцієнт  $\left[ Y(0) - \frac{C(0)}{1 - Br} \right]$ . негативний, оскільки  $\frac{1}{B} > r$ , перший негативний доданок в рішенні «переважає» зрештою другий. Тому темп приросту доходу падає і стає з деякого моменту негативним. Через деякий час сам дохід стає рівним нулю, після чого модель втрачає економічне значення. Це аналогічно випадку  $r \geq \frac{1}{B}$ , хоча в даному випадку вже річ не в тому, що потрібний темп приросту споживання у принципі недосяжний за тривалий період. У цій ситуації дуже низькою виявляється початкова норма накопичення  $\alpha_0$ . Якщо  $r < \rho_0$ , то норма накопичення, а разом з нею і темп приросту доходу ростуть, причому останній в межі наближається до  $1/B$ . Проте в цьому випадку відбувається накопичення ради накопичення, бо споживання росте заданим темпом  $r$ , а темп приросту доходу вдається збільшити за рахунок швидшого зростання інвестицій. Норма накопичення  $\alpha_0$  перевищує  $Br$ , і якщо виходити із задачі максимізації об'єму споживання, то ця норма дуже висока. Вищий її рівень вимагає збільшення інвестицій  $I(0)$  за рахунок скорочення споживання  $C(0)$  у початковий момент, що при фіксованому темпі приросту споживання  $r$  обумовлює нижчий його рівень на всій траєкторії. В той же час потрібний темп приросту споживання  $r < \frac{1}{B}$  можна підтримувати, як показано вище, при  $\alpha_0 = Br$ .

Таким чином, якщо вимагається підтримувати постійний темп приросту споживання  $r$ , не перевищуючий технологічного темпу, то для максимізації об'єму споживання за будь-який період потрібно встановити початкову норму накопичення  $\alpha_0 = Br$ .

Складнішим є питання про те, який рівень темпу  $r$  більш переважний. Велика його величина дозволяє забезпечити великий об'єм споживання за тривалий період, але це відбувається за рахунок скорочення споживання на початковому етапі.

Приклад. Розглянемо варіанти траєкторій основних макроекономічних показників в моделі Харрода - Домара за різних умов темпу споживання.

Нехай динаміка споживання  $C(t) = C(0) \cdot e^{rt}$  а динаміка ВВП

$$Y(t) = \left[ y(0) - \frac{C(0)}{1 - Br} \right] \cdot e^{\frac{1}{B}t} + \left[ \frac{C(0)}{1 - Br} \right] \cdot e^{rt}. \text{ Початкові умови } Y(0) = 1000 \text{ і } C(0) = 200. \text{ Тоді}$$

$$\text{норма споживання } \alpha_0 = 1 - \frac{C(0)}{Y(0)} = 1 - \frac{200}{1000} = 1 - 0,2 = 0,8$$

Коефіцієнт прірістної капіталоємкості  $B = 2$ .

*Варіант а)* - темп приросту споживання  $r = 0,75$ .

Траєкторія ВВП за заданих умов

$$Y(t) = \left[ 1000 - \frac{200}{1 - \frac{3}{2}} \right] \cdot e^{\frac{1}{2}t} + \frac{200}{1 - \frac{3}{2}} \cdot e^{\frac{3}{4}t}.$$

Знайдемо момент часу, коли  $Y(t)=0$ . Розв'язуючи це рівняння, одержимо  $1400 \cdot e^{\frac{1}{2}t} = 400 \cdot e^{\frac{3}{4}t}$  або  $e^{\frac{1}{4}t} = 3,5$ , де  $t = 5,01105$ . Знайдемо момент часу, коли випуск продукції буде максимальним тобто  $Y'(t)=0$ . Розв'язуючи рівняння  $Y'(t)=0$ , одержимо

$$Y'(t) = 1400 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}t} - 400 \cdot \frac{3}{4} \cdot e^{\frac{3}{4}t} = 0, \text{ або } 700 \cdot e^{\frac{1}{2}t} = 300 \cdot e^{\frac{3}{4}t}.$$

Таким чином, можна визначити момент часу, при якому рівень ВВП буде максимальним,  $e^{\frac{1}{4}t} = 2,333$ , або  $t = 3,389$ . Рівняння, що відображає динаміку інвестицій

$$I(t) = B \cdot Y'(t) = 2 \cdot (700 \cdot e^{\frac{1}{2}t} - 300 \cdot e^{\frac{3}{4}t}).$$

Момент часу, при якому інвестиції будуть рівні 0, тобто  $I(t)=0$ , рівний  $t = 3,389$ . Траєкторії основних показників приведені на рис. 1.

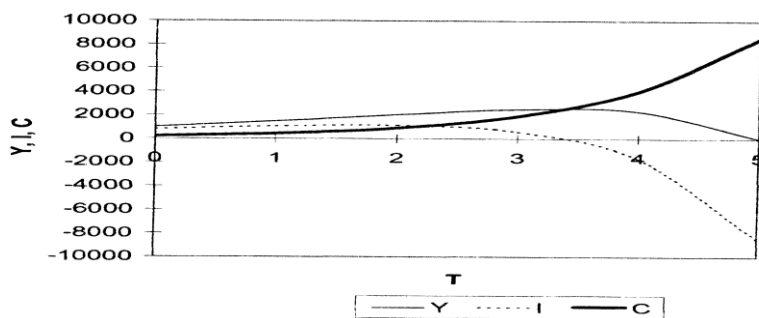


Рис 6.1. Траєкторії функцій випуску продукції, інвестицій і споживання при значенні темпу приросту споживання  $r = 0,75$ .

*Варіант б)* — темп приросту споживання  $r = 0,45$ .

Таким чином, виконується умова  $\frac{\alpha_0}{B} < r < \frac{1}{B}$ . Траєкторія ВВП за цих умов

$$Y(t) = \left[ 1000 - \frac{200}{1 - 2 \cdot 0,45} \right] \cdot e^{0,5t} + \frac{200}{1 - 2 \cdot 0,45} \cdot e^{0,45t}.$$

Знайдемо момент часу, коли  $Y(t)=0$ , тобто

$$\left[ 1000 - \frac{200}{0,1} \right] \cdot e^{0,5t} + \frac{200}{0,1} \cdot e^{0,45t} = 0, \text{ або}$$

$$-1000 \cdot e^{0,5t} + 2000 \cdot e^{0,45t} = 0.$$

Тоді  $e^{0,05t} = 2$  і  $t = 13,86 \approx 14$ . Знайдемо момент часу, коли випуск продукції буде максимальним, тобто  $Y'(t)=0$ .

Тоді

$$Y'(t) = -1000 \cdot 0,5 \cdot e^{0,5t} + 2000 \cdot 0,45 \cdot e^{0,45t} = 0, \text{ або} \\ -500 \cdot e^{0,5t} + 900 \cdot e^{0,45t} = 0.$$

В цьому випадку  $e^{0,05t} = 1,8$  або  $t = 11,75 \approx 12$ . Траєкторії основних показників приведені на рис.2. Як видно з малюнка і результатів розрахунку, період «існування» даної економічної системи за нових умов збільшився, проте темп приросту споживання все ще високий в порівнянні з оптимальним.

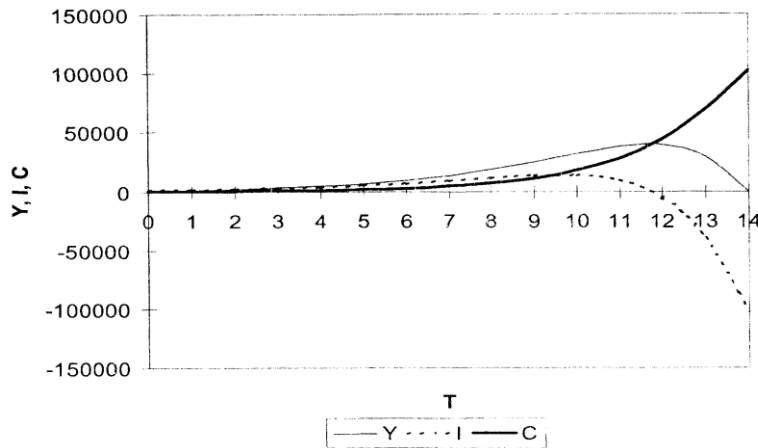


Рис.6. 2. Траєкторії функцій випуску продукції при  $r = 0,45$

*Варіант в)* - темп приросту споживання  $r = 0,4$ .

Таким чином, темп приросту споживання співпадає з оптимальним, тобто  $r = \frac{\alpha_0}{B} = 0,4 (\alpha_0 = 0,8; B = 2)$ . Траєкторія випуску продукції буде відображена моделлю  $Y'(t) = 100 \cdot e^{0,4t}$ . Динаміка інвестицій - відповідно  $I(t) = B \cdot Y'(t) = 2 \cdot 1000 \cdot 0,4 \cdot e^{0,4t}$ , а рівняння споживання виглядатиме як  $C(t) = C(0) \cdot e^{rt} = 200e^{0,4t}$ . Траєкторії основних показників приведені на рис. 3.

Оскільки функції випуску, інвестицій і споживання безперервні в часі, то представляє інтерес порівняння накопичених (сумарних) за певний період часу показників  $Y^H$ ,  $I^H$  і  $C^H$  (значення певних інтегралів для представлених варіантів моделі а — в).

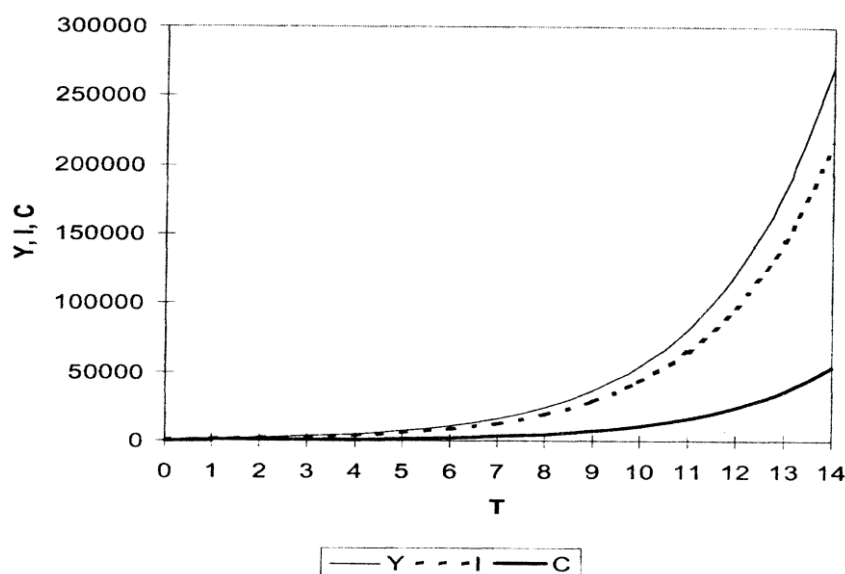


Рис.6.3. Траєкторії функцій випуску продукції, інвестицій і споживання при значенні темпу приросту споживання  $\gamma = 0,4$

### Лекція 7. Динамічна модель Леонтьєва

Динамічна модель Леонтьєва є деталізованою моделлю зростання валового суспільного продукту і національного доходу. Базою для динамічної моделі В. Леонтьєва служить статична модель міжгалузевого балансу в грошовому виразі, яка відображає виробництво і розподіл валового суспільного продукту в галузевому розрізі, міжгалузеві виробничі зв'язки, використання матеріальних і трудових ресурсів, створення і розподіл національного доходу (НД). Кожна галузь в балансі розглядається двічі - як споживач і як виробник. Це і визначає матричну структуру балансу. У балансі розглядаються як галузі, так і підгалузі. В окремих випадках баланс може включати до декількох сотень позицій.

У основі статичної моделі лежить припущення про взаємозв'язок між накопиченням і приростом валового продукту.

При побудові динамічної моделі В. Леонтьєва, як і для моделі міжгалузевого балансу, робляться наступні припущення:

- 1) у кожній галузі (або підгалузі) є єдина технологія виробництва;
- 2) норми виробничих витрат не залежать від об'єму продукції, що випускається;
- 3) не допускається заміщення у виробництві одних видів продукції іншими.

При цих припущеннях величина міжгалузевого потоку доводиться пов'язаній з валовою продукцією галузі таким чином

$$\begin{aligned}
 x_{ij} &= a_{ij}X_j; \\
 a_{ij} &= \frac{x_{ij}}{X_j}
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

де  $a_{ij}$  - коефіцієнт прямих матеріальних витрат, за допомогою якого вимірюються технологічні зв'язки між галузями. Коефіцієнт  $a_{ij}$  показує, скільки одиниць продукції і-тої галузі безпосередньо витрачається на випуск одиниці валової продукції j-тої галузі. Так, при  $i = j$  маємо коефіцієнт витрат власної продукції галузі на одиницю її валового випуску.

Всі коефіцієнти прямих матеріальних витрат утворюють квадратну матрицю  $A_{n \times n}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]
 \tag{2}$$

Статична модель міжгалузевого балансу в матричній формі має вигляд:

$$X = AX + Y, \quad (3)$$

де  $A$  — матриця коефіцієнтів прямих матеріальних витрат;

$X$ - вектор-стовпець валових об'ємів випуску (ВОП);

$Y$ - вектор-стовпець кінцевого продукту (НД).

У основі динамічної моделі лежить припущення про взаємозв'язок між накопиченням і приростом валової продукції. Цей взаємозв'язок реалізується за допомогою матриці капіталоємкості приростів виробництва. Крім того, вважається миттєвість перетворення капіталовкладень в приріст основних фондів і миттєвість віддачі цих фондів в об'єми виробництва (що, взагалі кажучи, невірно). Час вважається безперервним, що і визначає застосування диференціальних рівнянь.

Основне співвідношення моделі має вигляд

$$X(t) = AX(t) + B \frac{dX}{dt} + C(t) \quad (4)$$

де  $X(t)$  - вектор об'ємів валового випуску продукції по галузях у момент часу  $t$ ;

$\frac{dX}{dt}$  - вектор абсолютних приростів за малу одиницю часу;

$A$  - матриця коефіцієнтів прямих витрат, включаючи витрати на відшкодування вибуття основних фондів;

$AX(t)$  - виробниче споживання, що забезпечує просте відтворення;

$U$  - матриця коефіцієнтів капіталоємкості приростів виробництва ( $b_{ij}$  - витрати виробничого накопичення  $i$ -го виду продукції на одиницю приросту  $j$ -го виду продукції);

$C(t)$  - вектор-стовпець, що характеризує споживання по галузях.

Рівняння моделі (4) записане у векторно-матричній формі щодо ВОП.

Щодо величин, що беруть участь в рівнянні (4), передбачається виконання наступних умов.

1. Матриця  $A$  продуктивна і нерозкладна.

*Означення.* Нехай  $N = \{1, \dots, n\}$  — множина всіх галузей. Підмножина галузей  $S \in N$  *ізолювана*, якщо  $a_{ij} = 0$ , при всіх  $i \notin N$  і  $j \in N$ . Це означає, що галузі з множини  $S$  не потребують продукції, вироблюваної іншими галузями, навіть побічно.

Якщо в множині галузей існує ізолювана підмножина, то за допомогою перестановок рядків і стовпців матрицю  $A$  *можна* привести до вигляду

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix} \quad (5)$$

*Означення.* Матриця  $A$  називається *нерозкладною*, якщо її не можна привести до вигляду (5) тільки перестановкою рядків і стовпців.

Одна з основних властивостей нерозкладних матриць описується теоремою Фробеніуса — Перону:

1) Нерозкладна матриця  $A$  має позитивне власне число  $\lambda_A > 0$ , яке перевершує по модулю всі інші її власні числа.

2) Власному числу  $\lambda_A$  відповідає єдиний (з точністю до ненульового множника) цілком позитивний власний вектор  $x_A$ .

Отже, матриця коефіцієнтів повних витрат строго позитивна:  $(E - A)^{-1} > 0$ ,  $\det(B) \neq 0$ .

2. Матриці  $A$  і  $B$  постійні в часі.

3. Капіталовкладення (інвестиції) виступають єдиним джерелом зростання виробництва. Тобто, ні в одній галузі немає резервних виробничих потужностей.

При таких припущеннях тими, що змістовно інтерпретуються в рамках даної моделі можуть бути тільки стани, для яких  $\frac{dX}{dt} \geq 0$ . Такі стани системи називатимемо *допустимими*.

Траєкторії, що не виводять систему з області допустимих станів також називатимемо *допустимими*.

Використовуючи взаємозв'язок між ВОП і НД в статичній моделі

$$X(t) = (E - A)^{-1} Y(t),$$

де вектор  $Y(t)$  характеризує галузеву структуру НД, одержимо рівняння моделі Леонт'єва щодо НД:

$$Y(t) = B(E - A)^{-1} \frac{dY}{dt} + C(t) \quad (6)$$

Позначимо  $B(E - A)^{-1} = \bar{B}$ . Коефіцієнт цієї матриці -  $\tilde{b}_{ij}$  характеризує величину виробничого накопичення продукції  $i$ -го вигляду на одиницю приросту  $j$ -го елемента НД, а сама вона називається матрицею коефіцієнтів повної прірістної капіталоемкості.

Для з'ясування можливостей системи проаналізуємо модель (6) при різних траєкторіях споживання.

Визначимо технологічні можливості системи, які визначаються параметрами  $A$  і  $B$ . Для цього покладемо  $C(t) = 0$ . В цьому випадку (6) прийме вигляд

$$Y(t) = B(E - A)^{-1} \frac{dY}{dt} \quad (7)$$

Вираз (7) - це система лінійних однорідних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами першого ряду. Загальне рішення цієї системи згідно теорії диференціальних рівнянь має вигляд

$$Y(t) = \sum_1^l d_1 K_1 e^{s_1 t} \quad (8)$$



де  $s_1$  — власні числа матриці повної прірістної капіталоємкості;

$K_1$  - відповідні їм власні вектори;

$d_1$  - коефіцієнти, які визначаються з початкової умови ( $Y(0) = \sum d_1 K_1$ ).

Траєкторія, що виходить з  $Y(0)$ , є комбінацією експонент з різними темпами приросту ( $(1/s_1)$ ). Отже, в загальному випадку розвиток по траєкторії  $Y(t) = Y_0 e^{kt}$ , тобто з єдиним для всіх галузей темпом, неможливо, і воно відбувається постійними структурними змінами. Проте існує певна схожість між рішенням макроекономічної моделі і рішенням структурної моделі. Ця схожість обумовлена наявністю у матриці коефіцієнтів повної прірістної капіталоємкості власного числа Фробеніуса - Перону.

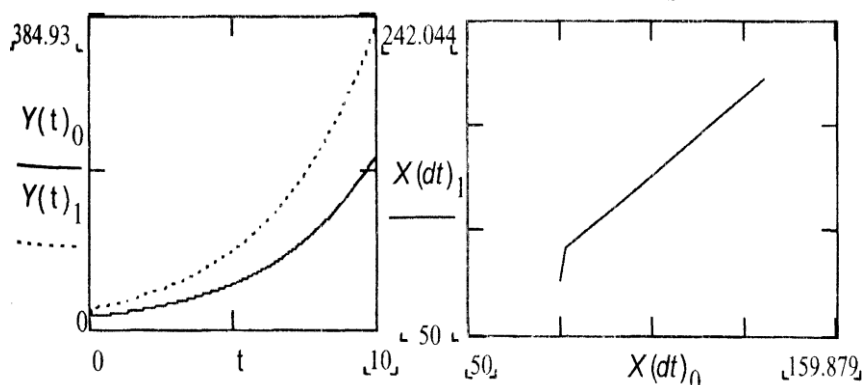
Унаслідок допущень моделі матриця  $\tilde{B} = B(E - A)^{-1} > 0$ , отже, у неї існує коріння Фробеніуса - Перону,  $s$ . Величина цього коріння знаходиться в межах:

$$\min_j \sum_i \tilde{b}_{ij} \leq s \leq \max_j \sum_i \tilde{b}_{ij}.$$

Величина  $\tilde{b}_{ij} = \sum_i \tilde{b}_{ij}$  називається *повною прірістною капіталоємкістю*  $j$ -тої галузі.

Можливі два випадки поведінки траєкторії (8).

У першому випадку в траєкторії (8) домінує (переважає) експонента з показником ступеня, який пов'язаний з корінням Фробеніуса — Перону. В цьому випадку з часом темп приросту кожного елементу НД починає наближатися до темпу, визначуваного даною експонентою, тобто  $1/s$ . Таким чином, на нескінченному періоді часу кожний з елементів НД починає розвиватися з темпом  $1/s$ . Таким чином, технологічний *темп приросту має* вигляд:  $\rho = \frac{1}{s}$ . Структура НД прагне в тому разі до власного вектора, відповідного  $K_s$  (мал. 4)



Мал. 4. Допустимі траєкторії розвитку

У другому випадку в (8) домінує експонента з показником ступеня, відмінним від  $1/s$ . Це відбувається, коли існує позитивне власне число, відмінне від  $s$ . Позначимо домінуючий показник  $1/s_0$ . В цьому випадку власний вектор, відповідний  $s_0$ , обов'язково має негативні компоненти і, оскільки

$s_0 K_{S_0} = \tilde{B} K_{S_0} = B(E - A)^{-1} K_{S_0}$ , стовпець  $(E - A)^{-1} K_{S_0}$  також містить негативні компоненти. Враховуючи (8), запишемо  $X(1)$  таким чином:

$$X(t) = \sum_1 d_1 (E - A)^{-1} K_1 e^{\frac{1}{s_1} t}.$$

У останній рівності в правій частині присутні негативні компоненти, причому із збільшенням  $t$  вони збільшуються по абсолютній величині. Отже, з часом вони з'являться і в лівій частині рівності. Таким чином, траєкторія виходить в неприпустиму зону (рис. 5).

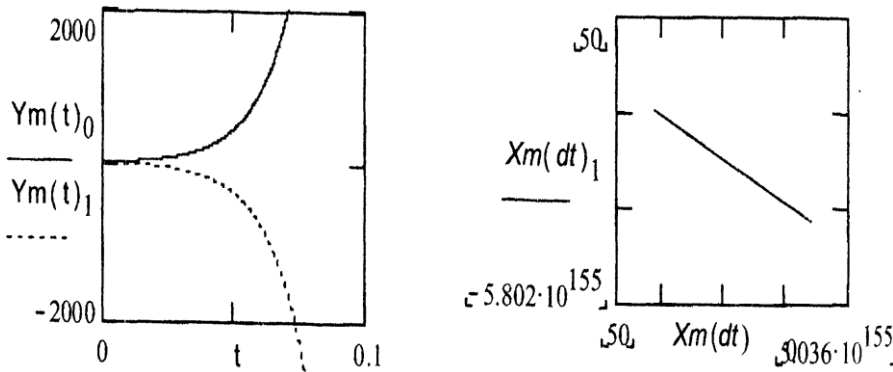


Рис.5. Неприпустимі траєкторії розвитку

*Зауваження.* Траєкторія системи в першому випадку є допустимою, хоча початковий стан системи може бути і неприпустимим. І, навпаки, в другому випадку, хоча початковий стан системи є допустимим, траєкторія розвитку може виходити за межі допустимої області.

*Приклад.* Розглянемо умовний приклад для динамічної моделі В. Леонтьєва. Нехай економіка агрегована до двох галузей, відомі матриці прямих матеріальних витрат, прірістної капіталоємкості і початковий стан системи:

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,9 \\ 0,5 & 0,4 \end{pmatrix}, X(0) = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \end{pmatrix}, Y(0) = \begin{pmatrix} 25 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Визначимо траєкторію розвитку системи. Для цього обчислимо матрицю повної прірістної капіталоємкості:

$$E - A = \begin{pmatrix} 0,9 & -0,2 \\ -0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$$

$$(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,19 & 0,34 \\ 0,34 & 1,53 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B} = B(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,25 & 1,64 \\ 0,73 & 0,78 \end{pmatrix}$$

Знаходимо власні числа цієї матриці, вирішуючи характеристичне рівняння

$$\begin{aligned} |E - \lambda \tilde{B}| &= \lambda^2 - 2,03\lambda - 0,22 = 0 \\ \lambda_1 &= 2,14; \lambda_2 = -0,10 \end{aligned}$$

Отже, показники експонент в рішенні рівні

$$\rho = \frac{1}{\lambda_1} = 0,47, \frac{1}{\lambda_2} = -9,69.$$

Відповідні власні вектори з точністю до множника рівні

$$K_{S_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,54 \end{pmatrix}, K_{S_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,83 \end{pmatrix}$$

Очевидно, що траєкторія системи є допустимою, оскільки єдиний доданок з позитивним показником ступеня складається з позитивних компонент.

Визначимо, виходячи з початкових умов, коефіцієнти  $d_1$ :

$$d_1 K_1 + d_2 K_2 = Y(0) \Leftrightarrow \begin{cases} d_1 + d_2 = 25 \\ 0,54d_1 - 0,83d_2 = 15 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} d_1 = 26,09 \\ d_2 = 1,09 \end{cases}$$

Остаточно траєкторія розвитку системи має вигляд

$$Y(t) = 26,09 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0,54 \end{pmatrix} e^{0,475t} - 1,09 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -0,83 \end{pmatrix} e^{-9,69t}$$

Графічно зміну структури ВОП можна представити так, як зображено на рис. 4. Похила виділена лінія відповідає структурі ВОП при нескінченному  $t$ :  $(E - A)^{-1} K_{\lambda_1}$ .

*Зауваження.* Зміна структурних параметрів може привести до якісно іншого розвитку системи, хоча параметри макромоделі збережуться.

Дослідження моделі Леонтєва дозволяє зробити наступний висновок: *на відміну від макроекономічної моделі, яка при нульовому споживанні завжди має допустиму траєкторію, траєкторія структурної моделі навіть при нульовому споживанні може бути неприпустимою унаслідок певних структурних параметрів.*

Нехай тепер екзогенний задана траєкторія споживання  $C(t) = C_0 e^{rt}$ . В цьому випадку рішення системи (4) є сумою загального рішення однорідної системи (8) і часткового рішення неоднорідної і має вигляд:

$$Y(t) = \sum_1 d_1 K_1 e^{\frac{1}{s}t} + (E - rB(E - A)^{-1})^{-1} C_0 e^{rt} \quad (9)$$

де коефіцієнти  $d_1$  визначаються виходячи з початкової умови:

$$Y(0) = \sum_1 d_1 K_1 + (E - rB(E - A)^{-1})^{-1} C_0$$

Матриця  $(E - rB(E - A)^{-1})^{-1}$  є структурним аналогом коефіцієнта скалярної моделі

$$\frac{1}{1 - Br} = \frac{1}{1 - \left(\frac{br}{1 - a}\right)}$$

З'ясуємо, чи можливе в моделі при заданій траєкторії споживання зростання без обмеження, іншими словами, чи існують обмеження на темп  $r$ . (У макроекономічній моделі обмеження було пов'язане з технологічним темпом і початковою нормою накопичення.).

Нехай в першому доданку домінує темп, відповідний корінню Фробеніуса — Перону:  $\rho = \frac{1}{s}$ . Нехай  $r > 1/s$ . Тоді з часом другий доданок в (5) починає домінувати, оскільки перше тяжіє до темпу  $1/s$ . Отже,  $Y(t)$  все більшою мірою починає визначатися вектором  $(E - rB(E - A)^{-1})^{-1}$ . Позначимо  $V^* = rB(E - A)^{-1}$ . Узагальнюючи умову продуктивності, забезпечувану теоремою Фробеніуса - Перону, для матриці  $V^*$  одержуємо

$$r < \frac{1}{s} \quad (10)$$

У даному випадку  $V^*$  непродуктивна. Оскільки  $C_0 > 0$ , то одержуємо, що вектор  $(E - V^*)^{-1} C_0$  містить негативні компоненти. Це значить, що рано чи пізно в  $Y(t)$  з'являться негативні компоненти і траєкторія вийде в неприпустиму із змістовної точки зору область.

Таким чином, за наявності екзогенний заданій траєкторії споживання вигляду  $C_0 e^{rt}$  у структурній моделі існування допустимої траєкторії визначається співвідношенням (10).

Якщо домінує експонента з темпом, не відповідним темпу Фробеніуса — Перону, то за наслідками аналізу при  $C(t) = 0$  траєкторія все одно вийде в неприпустиму із змістовної точки зору область.

З'ясуємо, чи можливе в структурній моделі таке зростання, при якому всі становлячи елементи НД ростуть з однаковим темпом аналогічно тому, як це

відбувається в макромоделі Харрода - Домара (тобто в моделі розвитку з постійною нормою накопичення і постійним темпом приросту).

Нехай споживання задане у вигляді  $C(t) = C_0 e^{rt}$ . У моделі (6) перший доданок є сумою експонент, що ростуть з різними темпами, тому єдиний темп зростання можливий тільки у випадку, якщо перший доданок тотожно рівний нулю. Це можливо тільки, якщо все  $d_1 = 0$ . Запишемо (6) у такому вигляді:

$$\sum_1 d_1 K_1 = Y(0) - (E - r\tilde{B})^{-1} C_0 = 0.$$

Звідси одержуємо систему рівнянь щодо  $r$ :

$$(E - r\tilde{B})Y(0) = C_0 \quad (11)$$

У загальному випадку ця система перевизначена. Таким чином, якщо відомий початковий заданий стан економіки  $Y_0$ ,  $C_0$  і задані технологічні параметри, то не завжди можливе зростання з постійним темпом всіх галузей. Проте можна задати  $r_0$  і з системи (11) визначити  $C_0$  так, щоб розвиток йшов із заданим темпом.

## Лекція 8 . Лінійні моделі попиту і пропозиції

Розглянемо спочатку дискретну модель на прикладі павутиноподібної. Нехай ринок якого-небудь окремого товару характеризується функціями попиту і пропозиції:  $D = D(P), S = S(P)$ .

Для існування рівноваги ціна повинна бути такою, щоб товар на ринку був розпроданий, або  $D(P) = S(P)$ .

Ціна рівноваги  $\bar{P}$  задається цим рівнянням (яке може мати безліч рішень), а відповідний об'єм купівель-продажів, що позначається через  $\bar{X}$ , - наступним рівнянням:

$$\bar{X} = D(\bar{P}) = S(\bar{P}).$$

Динамічна модель виходить за наявності запізнювання попиту або пропозиції. Проста модель в дискретному аналізі включає незмінне запізнювання або відставання пропозиції на один інтервал:  $D_t = D(P_t)$  і  $S_t = S(P_{t-1})$ .

Це може трапитися, якщо для виробництва даного товару потрібен певний період часу, вибраний за інтервал. Дія моделі така: при заданому  $P_{t-1}$  попереднього періоду обсяг пропозиції на ринку в поточному періоді буде  $S(P_{t-1})$  і величина  $P_t$  повинна встановитися так, щоб був куплений весь обсяг запропонованого товару. Іншими словами,  $P_t$  і обсяг купівель-продажів  $X_t$  характеризуються рівнянням:

$$X_t = D(P_t) = S(P_{t-1}).$$

Отже, знаючи початкову ціну  $P_0$ , за допомогою цих рівнянь ми можемо набути значення  $P_1$  і  $X_1$ . Потім, використовуючи наявну ціну  $P_1$  з відповідних рівнянь набудемо значення  $P_2$  і  $X_2$  і т.д. Загалом, зміна  $P_t$  характеризується різницеvim рівнянням першого порядку (одноінтервальне відставання):

$$D(P_t) = S(P_{t-1}).$$

Рішення можна проілюструвати діаграмою, представленою на мал. 6, де  $D$  і  $S$  — відповідно криві попиту і пропозиції, а положення рівноваги (із значеннями  $\bar{P}$  і  $\bar{X}$ ) відповідає точці їх перетину  $Q$ . У динамічній моделі  $D$  має той же сенс, що і в статичній, але ордината кривої  $S$  показує обсяг пропозицій в даний період часу залежно від цін, що управляють ринком в попередній момент часу. Ціна в початковий момент часу рівна  $P_0$ .

Відповідна точка  $Q_0$  на кривій  $S$  дає обсяг пропозиції в період 1. Весь цей запропонований обсяг товару розкуповується при ціні  $P_1$ , заданою точкою  $Q_1$  на кривій  $D$  з тією ж ординатою ( $X_1$ ), що і  $Q_0$ . У другий період часу рух відбувається спочатку по вертикалі від крапки  $Q_1$  до точки на кривій  $S$ , що дає  $X_2$ , а потім по горизонталі - до точки  $Q_2$  на кривій  $D$ . Остання точка характеризує  $P_2$ . Продовження цього процесу і дає графік павутини, показаний на рис.6.

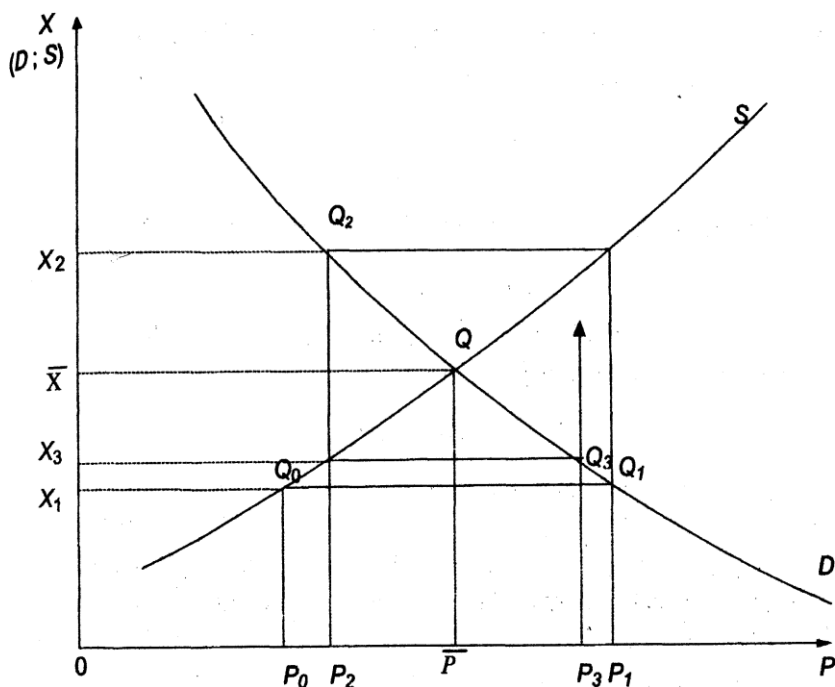


Рис. 6. Графічне рішення павутиноподібної моделі попиту і пропозиції

Ціни і обсяги (купівель — продажів) в послідовні періоду часу є відповідно координатами точок  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_n$  на кривій попиту  $D$ . У даному випадку послідовність крапок прагне до  $Q$ . При цьому крапки по черзі розташовуються на лівій і правій стороні від  $Q$ . Отже, і значення ціни  $P_t$  прагнуть до  $\bar{P}$ , розташовуючись по черзі по обидві сторони від  $\bar{P}$ . Так само йде справа і з об'ємами покупок-продажів ( $X_t$ ). Припустимо, що  $D$  йде вниз, а  $S$  - вгору. Тоді

інтуїтивно ясно, що рух із затухаючими коливаннями виникне, якщо крива  $D$  в точці рівноваги  $Q$  опускається до осі абсцис  $OP$  крутіше (під великим кутом), ніж крива  $S$ . Вибуховий коливальний рух виникає у разі, коли крива  $D$  менш крута по відношенню до осі  $OP$ , ніж  $S$  (кут нахилу кривої  $D$  до осі  $OP$  менше кута нахилу  $S$ ). При рівних кутах нахилу  $D$  і  $S$  виникають регулярні коливання, тобто, незгасаючі і невибухові.

Рішення можна одержати алгебраїчно для випадку лінійних функцій попиту і пропозиції:  $D = \alpha + aP, S = \beta + bP$ . Значення рівноваги  $\bar{P}$  і  $\bar{X}$  будуть задані рівняннями:  $\bar{X} = \alpha + a\bar{P} = \beta + b\bar{P}$ , тобто

$$\bar{P} = \frac{\alpha - \beta}{b - a}, \bar{X} = \frac{b\alpha - a\beta}{b - a} \quad (12)$$

Дискретна динамічна модель задається рівнянням:

$$X_t = \alpha + aP_t = \beta + bP_{t-1}. \quad (13)$$

Шукаємо спочатку рішення, що дає рівновагу. Для цього покладемо  $P_t = \bar{P}$  і  $X_t = \bar{X}$  Для всіх значень  $t$

$$\bar{X} = \alpha + a\bar{P} = \beta + b\bar{P}, \quad (14)$$

Набуваємо ті ж значення  $\bar{P}$  і  $\bar{X}$ , що і в (12). Отже, якщо в якому-небудь періоді існували ціни і об'єми, що забезпечують рівновагу, то в динамічній моделі (13) вони зберігаються і в подальших періодах. Статична рівновага узгоджується з цією моделлю. Віднімемо рівняння (14) з (13) і покладемо

$$p_t = P_t - \bar{P}, x_t = X_t - \bar{X}.$$

Тоді

$$x_t = ap_t = bp_{t-1}. \quad (15)$$

Рівняння (15) аналогічні (13), за винятком того, що вони описують відхилення від рівнів рівноваги (тепер уже відомо, що такі існують). Обидва ці рівняння є різницевиими рівняннями першого порядку. Покладемо  $c = b/a$  і підставимо його в рівняння (15), так що різницеве рівняння відносно  $p_t$  буде:  $p_t = cp_{t-1}$ . При даному значенні  $p_0$  у момент  $t = 0$  рішення легко знаходиться шляхом ітерації:

$$p_t = p_0 c^t, P = \bar{P} + (P_0 - \bar{P})c^t.$$

Об'єми купівель-продажів в кожен період визначаються з рівняння (15). Звичайно крива попиту йде вниз ( $a < 0$ ), а крива пропозиції - вгору ( $\beta > 0$ ), тобто  $c = b/a < 0$ . В цьому випадку покладемо  $r = |c| = b/(-a)$ , так що  $r$  буде позитивне. Тоді  $p_t = p_0(k)r^t$  і послідовні значення  $p_t$ , при  $t = 0, 1, 2, \dots$  будуть відповідно  $p_0, -p_0r, -p_0r^2, -p_0r^3, \dots$ , отже  $p_t$  приймає по черзі позитивні і негативні значення. Отже, чергуються і знаки  $P_t$ , які по черзі розташовуватимуться вище і нижче  $\bar{P}$ . Існує наступні три можливості:

1)  $b > (-a)$  - кут нахилу  $S$  (к  $OP$ ) більше, ніж кут нахилу  $D$ . В цьому випадку  $r > 1$ , і ряд послідовних значень  $p_t$  є нескінченно зростаючим по абсолютній величині. Отже,  $P \rightarrow \infty$ , і має місце вибухове коливання (при чергуванні знаків);

2)  $b = (-a)$  - кути нахилу  $D$  і  $S$  рівні. В цьому випадку  $r = 1$ , і ряд значень  $p_t$  просто складатиметься з чергування  $p_0$  і  $(-p_0)$ . Тому  $P_t$  буде послідовно більше і менше  $P$  на одну і ту ж величину, рівну первинній розбіжності  $(P_0 - \bar{P})$ , тобто матиме місце регулярне коливання (з чергуванням знаків).

3)  $b < (-a)$  - кут нахилу  $D$  (до  $OP$ ) більше, ніж  $S$ . В цьому випадку  $r < 1$ , і послідовність  $p_t$ , зменшується по абсолютній величині. Значить,  $P_t \rightarrow \bar{P}$  послідовно зліва і справа, тобто прагне із затухаючими коливаннями до рівня рівноваги.

У випадку (3), чим більше буде  $a$  по відношенню до  $b$ , тобто чим крутіше  $D$  порівняно з  $S$ , тим швидше затухатимуть коливання і тим швидше  $P_t$  прагнутиме до  $\bar{P}$ . Початкові збурення також роблять вплив на амплітуду коливання. Чим далі  $P_0$  від  $\bar{P}$ , тим більше буде розмах коливань і тим більший проміжок часу, необхідний для їх припинення.

Слід зазначити, що випадок (2) з коливаннями, що продовжуються, настільки рідкісний, що його можна вважати майже тривіальним - на базі його не можна побудувати ніякої теорії циклу.

Проведемо аналіз випадку (3). Не дивлячись на можливе заперечення, що полягає у тому, що затухаючі коливання «нереальність», можна запропонувати дуже простий розвиток моделі (3) із затухаючими коливаннями, яке дозволяє представити рух  $P_t$  з коливаннями, що продовжуються, в часі. Для цього замість кривих попиту і пропозиції, незмінних в часі, візьмемо криві, які під впливом зовнішніх сил змінюються в часі або регулярно, або циклічно, або випадково, або абияк інакше. Тоді ще до припинення коливань, показаних на рис 6.6, яке-небудь зрушення в кривій  $D$  або  $S$  приведе до збурення і коливання з'являться знову. Наприклад,  $Q_0$  могла знаходитися в точці рівноваги або поблизу неї до зрушення вгору кривою  $D$  до положення, показаного на мал. 4. Тоді коливання відбуватимуться вище - описаним чином, продовжуючись, скажімо, до точки  $Q_3$ , де коливальний рух буде порушений зрушенням вгору кривій  $S$ . Виникне, отже, коливальний рух з ще більшою амплітудою, яке поступово припиниться до появи якогось нового збурення. Для лінійної моделі можливе тлумачення алгебри у разі паралельного переміщення кривих попиту і пропозиції. Рівняння (13) тоді матиме вигляд:

$$X_t = \alpha_t + aP_t = \beta_t + bP_{t-1},$$



де  $\alpha_t, \beta_t$ , характеризують зрушення в момент  $t = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Різницеvim рівнянням щодо ціни буде:

$$P_t = \frac{b}{a} P_{t-1} + \frac{\beta_t - \alpha_t}{a} \quad (16)$$

Для вирішення рівняння (16) необхідно лише визначити різницю зміщень в часі попиту і пропозиції.

У безперервній моделі ціна є функція часу  $P(t)$ . Попит і пропозиція (потоки в одиницю часу) суть також функції часу. Попередня павутиноподібна модель враховувала запізнювання пропозиції. Цьому грубо відповідатиме передумова про зміну ціни на стороні попиту, а не пропозиції. Тоді одержимо модель, рівносильну моделі з безперервним запізнюванням пропозиції. Це запізнювання має просту показову форму.  $D(t)$  залежить від  $P$  і  $dP/dt$ , а  $S(t)$  - тільки від  $P$ . Модель діє, як і у попередньому випадку, а саме: у кожен момент ціна  $P$  встановлюється так, щоб попит повністю поглинаючи пропозиція, тобто  $X(t)$  і  $P(t)$  задовольняли рівнянню:

$$X = D\left(P, \frac{dP}{dt}\right) = S(P)$$

Якщо функції лінійні, то

$$X = \alpha + aP + a_1 \frac{dP}{dt} = \beta + bP. \quad (17)$$

Покладемо  $P(t) = \bar{P}$  і  $X(t) = \bar{X}$  для всіх  $t$ , тобто для сумісного положення рівноваги обох змінних:

$$\bar{X} = \alpha + a\bar{P} = \beta + b\bar{P}. \quad (18)$$

Віднімемо (18) з (17) і покладемо  $p = P - \bar{P}$  і  $x = X - \bar{X}$ . Оскільки  $dp/dt = dP/dt$ , то

$$x = ap + a_1 \frac{dp}{dt} - bp. \quad (19)$$

Рівняння (17) і (18) є диференціальними рівняннями першого порядку. Покладемо  $c = \frac{b-a}{a_1}$ . Тоді диференціальне рівняння відносно  $P(t)$  матиме вигляд:

$$\frac{dp}{dt} = cp.$$

Для вирішення помітимо, що  $\frac{1}{p} \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} \ln p$ . Тоді  $\frac{d}{dt} \ln p = c$ , тобто,

$\ln p = \text{const} + ct$ , тобто  $p = p_0 e^{ct}$ , або  $P = \bar{P} + (P_0 - \bar{P})e^{ct}$ .

У звичайному випадку, якщо  $a < 0$ ,  $a_1 < 0, b > 0$ , то  $a < 0$ , де  $c = \frac{b-a}{a_1}$ . Отже, ціна  $P(t)$  рухається в часі монотонно до  $\bar{P}$  - ціні рівноваги, оскільки різниця  $p \rightarrow 0$  подібно показовій функції  $e^{-t}$ . Менш звичний випадок, коли також  $b < 0$ . Але якщо тільки  $-b < -a$ , тобто кут нахилу  $D$  до осі  $OP$  в площині  $OPX$  більше, ніж кут нахилу  $S$ , то приходимо до того ж результату, що і в першому випадку. Диференціальне рівняння цієї моделі має менше рішень, ніж відповідне звичайно-різницеве рівняння, приведене вище.

Розглянуті павутиноподібна і безперервна моделі дуже прості і добре відомі. Вони є частково динамічними, оскільки встановлюють співвідношення на ринку тільки одного товару і враховують ціну лише його одного, а не ціни інших товарів і доходи. Проте, вони містять основні формулювання динаміки і дозволяють розкрити деякі найважливіші властивості, загальні для всіх динамічних моделей попиту і пропозиції. Перерахуємо ці особливості.

### **1. Модель припускає деякі функціональні співвідношення.**

В даному випадку це — ринковий попит покупців і пропозиція продавців. Кожне з них представляє функцію ціни. Ці функції є по суті побудовами на основі минулого або очікуваного. Ціна або дана покупцям і продавцям ззовні, або передбачається ними. Попит представляється як планована або передбачувана величина покупок, пропозиція — як планована або передбачувана величина продажів, причому всі ці пропозиції приурочуються до початку проміжку часу  $t$ . Продавці чекають, що ціна буде такою ж, як і в попередній період  $P_{t-1}$  і відповідно припускають продати  $S = S(P_{t-1})$ . Покупці зважають лише на фактичну ціну і відповідно до цього планують свої покупки в розмірі  $D_t = D(P_t)$ .

**2. Форма функції також задана.** Задачу можемо спростити, розглядаючи окремий випадок при певній формі функції (наприклад, лінійної  $D = \alpha + aP$ ), або ж узявши наближення до даної форми функції (наприклад, лінійну апроксимацію в обмеженій області біля точки рівноваги). Це можна здійснити за допомогою розкладання в ряд Тейлора функції попиту з малою різницею  $P - \bar{P}$ :

$$D(P) = D(\bar{P}) + D'(\bar{P})(P - \bar{P}) = \alpha + aP.$$

Прийнята в задачі лінійна (або будь-яка інша) форма повинна бути відповідною і бути або хорошою апроксимацією, або зручним спрощенням. Так, коефіцієнт  $a$ , позначений вище, може бути або коефіцієнтом при  $P$  в лінійній функції попиту, або нахилом прямої попиту в точці рівноваги. У останньому випадку він може приблизно відобразити малі варіації  $P$  навколо  $\bar{P}$ .

**3. Необхідно точно визначити умови, при яких діє модель.** Це припускає перехід від очікуваних і планованих величин на основі минулого до реалізованих фактично. Необхідно точно визначити специфічну природу зв'язків між фактичними значеннями змінних і механізм переходу передбачуваних величин у фактичні. У даній моделі з рухом даного товару на одному ринку відносини, що фактично склалися, характеризуються рівністю покупок і продажів ( $X_t$ , за визначенням). Далі, в даному випадку перехід від очікуваних величин до фактичних здійснюється «методом рівноваги», де ціна  $i$  є «врівноважуючою» змінною. На початку періоду продавці чекають, що ціна буде  $P_{t-1}$  і пропонують

для продажу продукцію  $s_t$ . Зміна запасів не передбачається (хоча можливо, що товар є швидкопсувним), так що пропозиція повинна бути рівне  $X_t$  (продажі = купівлям). В процесі встановлення ринкової рівноваги попит, отже, стає рівним пропозиції (= продажам = купівлям), оскільки ціна досягає такого рівня, при якому пропозиція повністю поглинається. Всі економічні очікування реалізуються. Виняток становить лише ціна  $P_{t-1}$ , яку чекали продавці. Вона не співпадає з реалізованою ціною  $P_t$ , управляючої ринком в даному періоді.

За допомогою дуже невеликої модифікації цієї дискретної моделі можна абсолютно змінити умови її дії, ввівши ступінчасту функцію (метод послідовного порушення рівноваги). У момент  $t-1$  виробники випускають кількість товарів, відповідну домінуючій у цей момент ціні  $P_{t-1}$ . В кінці періоду цю масу товарів придбавають торговці, так що її можна продати протягом наступного періоду  $t$  (як  $s_t$ ). На початку періоду  $t$  на основі всіх відомих на той момент даних торговці встановлюють ціни продажів  $P_{t-1}$ . Покупці тоді вирішують, скільки вони куплять за цими цінами ( $D_t$ ). У моделі передбачається, що торговці вгадують завжди правильно і встановлюють ціни на такому рівні, при якому вони можуть збути весь запас товарів:  $S_t = D_t =$  об'єм купівель-продажів.

У моделі необхідно передбачити і варіювання — як запобіжний засіб проти неправильних передугадавань цін торговцями. Нехай встановлена ними ціна  $P_t$  така, що  $D_t$  перевершує кількість товарів, що продаються  $s_t$ . За наявності торгових запасів попит (рівний купівлям-продажам) можна покрити за рахунок їх зменшення. Пропозиція, що тоді очікувалася  $s_t$  буде менше фактичних продажів і різниця доведеться покрити за рахунок запасів. В результаті покупці реалізують свої плани (попит, що припустить = фактичним покупкам), але продавцям доведеться виробити несподівані вилучення запасів. З другого боку, якщо відсутні або малі запаси (наприклад, швидкопсувних товарів), то попит не вдасться задовольнити, і його вимушене скорочення зажадає обмеження споживання або інших подібних заходів. Тоді передбачуваний попит буде урізаний до величини фактичних покупок, і у покупців виникнуть незаплановані заощадження, продавці ж реалізують свої плани. У більшості моделей звичайно приймається, що плани покупок реалізуються (очікуваний попит рівний фактичним закупівлям), а можливий «розрив» компенсується вкладеннями. Таке припущення може бути розумним або зручним, але, як показує приведений приклад, воно, звичайно, є необхідним.

**4. Умова дії моделі, що задовольняється у фактичних ринкових відносинах, записується у вигляді рівняння з відповідною змінною.** В даному випадку ціна є такою врівноважуючою змінною. Задача полягає в тому, щоб позбавитися інших змінних ( $D_t$ ,  $S_t$  і звично фактичного значення  $X_t$ ) і зосередити найбільшу увагу на одній ( $P_t$ ). Решта змінних (наприклад,  $X_t$ ) можна знайти, коли скоро визначена найважливіша змінна ( $P_t$ ). Рівняння павутиноподібної моделі є простою формою різницевого рівняння з одноінтервальним запізнюванням ( $P_t$  і  $P_{t-1}$  явно входять в рівняння). Шукається рішення цього рівняння. У разі рівноваги без запізнювання питання зводиться до знаходження одного або декількох значень  $P$ , сумісних з умовами рівноваги. За наявності запізнювання в звичайно-

різницевого рівнянні рішення припускає, що задані і визначені якісь початкові значення або умови, в даному випадку початкова ціна  $P_0$ . Рівняння характеризує дію моделі в кожен проміжок часу, але результат впродовж часу, узятого в цілому, залежить від існуючої початкової конфігурації, подібно тому, як опущена в автомат монета приводить його в дію. Модель може «стартувати» лише з когось початкового положення. Економічно це означає, що зміну ціни в часі можна визначити, лише знаючи початкове порушення рівноваги або відхилення її від положення рівноваги. Той факт, що в даному прикладі вимагається знати лише одне початкове значення, є випадковим. Він є результатом існування тільки одноінтервального запізнювання, того, що відповідне звичайно-різницеve рівняння буде першого порядку. При багатократному або розподіленому запізнюванні звичайно-різницеve рівняння матиме вищий порядок і потрібно буде знати не одне, а декілька початкових значень.

**5. Рішення різницеvих рівнянь у ряді випадків може бути зведене до методики рішення і аналізу диференціальних рівнянь.** Рішення істотно спрощується рекурсивній моделі. Це значить, що якщо дані всі змінні до  $((t-1))$ , то модель забезпечує і отримання одного за іншим значень змінних для інтервалу  $t$ . У даному випадку при заданих  $P_{t-1}$ , виходить спочатку  $X_t = S_t$ , а потім  $P_t$ .

При дослідженні рішень моделей попиту і пропозиції виникають питання, пов'язані з економічною інтерпретацією. Першим завжди виникає наступне питання: чи існує положення рівноваги, сумісне з рівнянням? Відповідь дається підстановкою в рівняння  $P_t = \bar{P}$  для всіх  $t$ . В даному випадку таке  $\bar{P}$  існує, і це є статичний рівень. У інших випадках такого  $\bar{P}$  може не існувати. Застосовується і інший штучний прийом: визначаючи  $\bar{P}$  прослідити не зміну первинної величини  $P_t$ , а її відхилення від положення рівноваги,  $p_t = P_t - \bar{P}$ . Це має економічний сенс, оскільки інтерес представляє саме відхилення від положення рівноваги. Математично якнайкращий спосіб такого перемикавання зводиться до віднімання рівняння, що характеризує точку  $\bar{P}$ , з рівняння, що виражає  $P_t$ .

Модель зі всією очевидністю показує, що статика і динаміка тісно взаємозв'язані. Динамічна модель типу павутинової розглядає рухи навколо положення рівноваги або відхилення від нього. Проте стійке існування положення рівноваги (тобто одного разу досягнуте, воно зберігається постійно), сумісної з моделлю, зовсім не припускає, що за всяким відхиленням слідуватиме повернення в початкове статичне положення. Рух може віддалятися від початкового статичного положення або бути направленим до якогось іншого, відмінного від початкового. І, навпаки, питання про «стійкість» положення рівноваги в статичному випадку повинне і може розглядатися лише з погляду динамічної моделі. Положення рівноваги стійке, якщо початкове обурення породжує поворотний динамічний рух до положення рівноваги, а не убік від нього і не до якого-небудь іншого положення.

Безперервна модель має, загалом, ті ж властивості, відрізняючись головним чином в акцентуванні або в деталях. Функції моделі представляють попит і пропозицію залежно від ціни і швидкості зміни останньої. Припущення і плани покупців і продавців представляються тими, що безперервно пристосовуються в часі до руху цін. Ці очікування, щоб бути сумісними, повинні бути ланками одного ланцюга. Виражаючи співвідношення очікуваних величин попиту і

пропозиції модель діє знову-таки по методу наближення до положення рівноваги. Ринкові сили безперервно змінюють ціни так, щоб пропозиція була повністю реалізована. Ціна є змінною, що забезпечує рівновагу, змінюється від одного моменту до іншого для підтримки рівності попиту і пропозиції, будучи загальною для покупок і продажів (потоків у відповідний момент часу). Основна відмінність полягає в інтерпретації моделі з погляду рішень покупців і продавців. У дискретному аналізі одиницею часу був вибраний інтервал ухвалення рішень або перегляду планів, характерною межею була відмінність між очікуваннями (намірами) і їх здійсненням (реалізаціями). Все це загалом зникає в безперервній моделі, оскільки передбачається, що ухвалення рішень, перегляд їх і пристосування до обстановки, що змінилася, відбувається безперервно. Проте багато властивостей дискретної моделі можна ввести і в безперервну, наприклад запізнювання або зміни запасів.

З математичної точки зору безперервна модель веде до диференціального рівняння щодо якої-небудь змінної (в даному випадку  $P(t)$ ) а не до звичайно-різницевого.

## **Лекція 9. Нелінійні динамічні моделі**

### **9.1. Моделі економічних циклів**

#### **1.1 Загальна характеристика економічних циклів**

Будь-якій формі руху характерна нестабільність. Економічний розвиток теж є певною формою руху, а тому цей закон поширюється і на нього. Поки зміни в кожній системі накопичуються поступово, а стабілізуючі механізми цієї системи за своєю потужністю перевищують коливання, спричинені цими змінами, система ці зміни сприймає спокійно, тобто знаходиться у стані рівноваги. За своїм змістом поняття «економічна рівновага» є досить простим і відображає такий стан взаємодіючих структур, за якого протидіючі елементи економічної системи компенсують один одного [4, с. 276].

Але настає такий момент, коли стабілізуючі фактори за своєю силою починають поступатися змінам, зв'язки, що утримували систему у спокійному стані починають руйнуватися, а коливання стають все більш відчутними. Періодичність цих коливань та їх глибина залежить від самої системи, сили її стабілізуючих механізмів.

У багатьох країнах з ринковою економікою на протязі останніх двох століть відбувалося економічне зростання, а з ним і підвищенні рівня життя населення. Але їх економіка розвивалася нерівномірно, проте економічний розвиток мав не хаотичний, а хвилеподібний характер: піднесення неминуче чергувалося зі спадами, інколи наставали глибокі економічні депресії з великим безробіттям.

*Економічний цикл* – це періодичний підйом або спад реального ВВП на фоні загальної тенденції до зростання. Це регулярні коливання рівня ділової активності.

Характерною рисою циклічності є рух не по колу, а по спіралі, тобто вона є формою прогресивного розвитку. Кожна фаза наступного циклу за показниками рівня ділової активності вища, ніж аналогічна фаза попереднього циклу (рисунок 1).

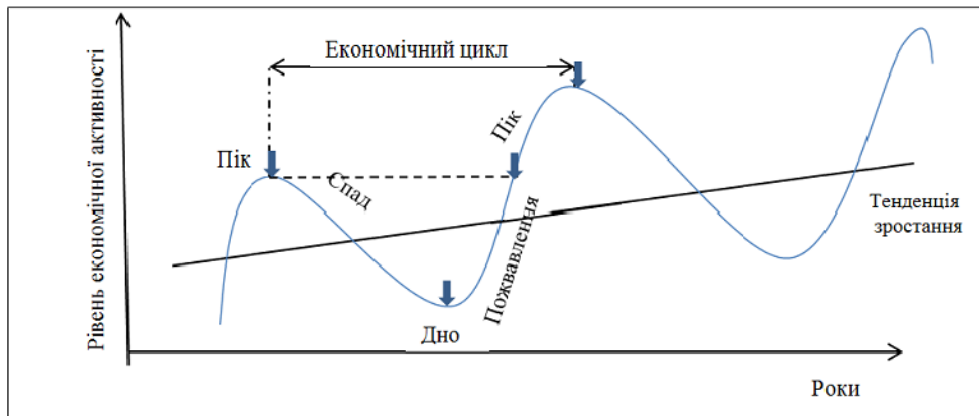


Рисунок 9.1 – Модель економічного циклу

Рівень економічної активності у циклі з плином часу то підіймається, то спадає, подібно до хвилі. Цикл має тенденцію зростання, яка показує нам, що у однакових фазах сусідніх циклів рівень ділової активності не однаковий: з кожним новим циклом він все вище і вище.

В класичному економічному циклі відносно чітко виділяються чотири періоди, або *фази*:

1. *Спад (криза)*. Вона характеризується скороченням обсягів виробництва і зниженням ділової та інвестиційної активності, проте ціни не завжди мають тенденцію до зниження. Вони падають тільки в тому випадку, коли спостерігається депресія (глибокий і тривалий спад). Спад зазвичай супроводжується зростанням безробіття і масовим банкрутством. Зростає відсоткова ставка, скорочується реальна заробітна платня. Спостерігається недостатність грошової маси, обезцінення основного капіталу, падіння курсу акцій. Офіційно фазою економічного спаду, або рецесією, вважають ситуацію падіння ділової активності, яка триває понад три місяці поспіль.

2. *Дно (депресія, застій)* - найнижча точка спаду (депресії): виробництво і зайнятість досягають найнижчого рівня. Критична точка в економіці. Найбільша кількість банкрутств, дуже висока відсоткова ставка, низький попит, а нові інвестиції майже відсутні; поступово починають зменшуватись товарні запаси.

3. *Пожвавлення*. Характеризується поступовим зростанням зайнятості та виробництва. Починає оновлюватись капітал, модернізується виробництво. Багато економістів вважають, що даній стадії притаманні невисокі темпи інфляції. Відбувається впровадження інновацій в економіці з коротким терміном окупності. Реалізується попит, відкладений під час попереднього спаду. Коли виробництво досягає передкризового рівня, економіка входить до фази піднесення (піка).

4. *Пік (піднесення)* є «вищою точкою» економічного підйому. У цій фазі безробіття зазвичай досягає найнижчого рівня, виробничі потужності працюють з максимальним або близьким до максимального навантаженням, тобто у виробництво залучаються практично всі наявні в країні матеріальні і трудові ресурси. Зазвичай, хоча і не завжди, під час піків посилюється інфляція. Поступове насичення ринків посилює конкуренцію, що знижує норму прибутку і збільшує середній термін окупності. Зростає потреба в довгостроковому кредитуванні з поступовим зниженням можливостей погашення кредитів. Все це призводить до «перегріву» економіки, виникнення дисбалансу, що створює передумови до входження економіки у новий економічний цикл.

Тобто, ми бачимо, що економічний цикл характеризується:

- самовідтворенням;
- безперервністю;
- хвилеподібним характером динаміки макроекономічних показників.

Головним індикатором фаз циклу виступає показник темпу економічного зростання (rate of growth -  $g$ ), який виражається у відсотках і розраховується за формулою:

$$g = \frac{Y_t - Y_{(t-1)}}{Y_{(t-1)}} \times 100\% \quad (1.1)$$

де  $Y_t$  - реальний ВВП поточного року,

$Y_{(t-1)}$  - реальний ВВП попереднього року [3].

Таким чином, цей показник характеризує процентну зміну реального ВВП (сукупного випуску) у кожному наступному році в порівнянні з попереднім. Тобто дана формула (1) насправді визначає не темп зростання (growth), а темп приросту ВВП. Якщо ця величина позитивна, це означає, що економіка знаходиться у фазі підйому, а якщо негативна, то у фазі спаду. Цей показник розраховується за один рік і характеризує темп економічного розвитку, тобто короткострокові (щорічні) коливання фактичного ВВП, на відміну від показника середньорічного темпу зростання, використовуваного при підрахунку швидкості економічного зростання, тобто довгострокової тенденції збільшення потенційного ВВП [27].

## 1.2 Види економічних циклів

*Залежно від поведінки економічних величин на різних фазах циклу виділяють показники:*

– *проциклічні*, які збільшуються в фазі підйому і знижуються у фазі спаду (реальний ВВП, розмір сукупних доходів, обсяг продажів, прибуток фірм,

величина податкових надходжень, обсяг трансфертних виплат, обсяг імпорту);

– *контрциклічні*, які збільшуються у фазі спаду і знижуються у фазі підйому (рівень безробіття, обсяг запасів фірм);

– *ациклічні*, які не мають циклічного характеру і величина яких не пов'язана з фазами циклу (обсяг експорту, ставка податку, норма амортизації) [16, с. 374].

Основними ознаками, які характеризують економічні цикли, є тривалість циклу а також його рушійні сили, які зумовлюють генезис і механізм його проходження. З цього погляду всі економічні цикли поділяються таким чином:

1) Цикли Кондратьєва, або довгохвильові цикли, тривалість яких дорівнює сорок-шістдесят років. Їхня головна рушійна сила – радикальні зміни в технологічній базі суспільного виробництва, його структурна перебудова;

2) Цикли Кузнеца – їхня тривалість складає двадцять років, а рушійними силами є зрушення у відтворюваній структурі виробництва;

3) Цикли Джаглера з періодичністю сім-одинадцять років як підсумок взаємодії багатьох грошово-кредитних факторів;

4) Цикли Кітчина з тривалістю три-п'ять років, що обумовлюються динамікою відносної величини запасів товарно-матеріальних цінностей на підприємствах;

5) Приватні господарські цикли, що охоплюють період від одного до двох років та існують у зв'язку з коливаннями інвестиційної активності.

Залежно від тривалості виділяють наступні *види економічних циклів*:

– короткі;

– середні;

– довгі.

*Короткі* цикли (3-4 роки) ще називають *циклами Кітчина*, на честь англійського економіста, статистика Джозефа Кітчина, який пов'язував короткі цикли з коливанням запасів золота. Він вважав, що їх період дорівнює три роки і чотири місяці [6].

Короткі цикли пов'язані з порушенням та відновленням рівноваги на споживчому ринку. В цьому випадку вони виступають як механізм саморегуляції ринку у зв'язку з тривалим дефіцитом: відбувається перепрофілювання виробництва, створюється нова структура економіки на основі вже сформованих продуктивних сил. Кожен цикл завершується новою рівновагою при вже змінених пропорціях в попиті на споживчі товари. Цикли Кітчина пояснюються тимчасовим проміжком між виділенням інвестицій та введенням в дію нових засобів праці, в результаті чого рівновага відновлюється.



Більшість сучасних економістів, що підтримують ідею існування короткострокових економічних циклів, схильна розглядати їх як невід'ємну частину загальної циклічної системи, основу якої складають середньострокові економічні цикли.

*Середньострокові цикли* (8-12 років) часто називають циклами Клемента Жугляра (французького вченого-економіста, який досліджував середні цикли у другій половині XIX століття). Він пов'язував причину середніх циклів зі сферою кредиту на основі фундаментального аналізу коливань ставок відсотка і цін. Як виявилось, ці коливання співпали з циклами інвестицій, які, у свою чергу ініціювали зміну ВВП, інфляції і зайнятості.

У структурі економіки середні цикли виражені найбільш рельєфно, у зв'язку з чим їх прийнято називати базисними. Їх матеріальною основою, згідно з марксистською теорією, є періодичне оновлення основного капіталу, який фізично зношуються приблизно через 10-11 років після введення у експлуатацію, тому середні цикли також називають *промисловими*.

За своїм змістом середні цикли являють собою економічні цикли відтворювального процесу; вони відображають циклічність розвитку не лише виробництва, а й обміну, розподілу та споживання в їхній органічній єдності.

Розробка теорії *довгих циклів* (45-60 років) була почата в 1847 р., коли англійський учений Х. Кларк, звернувши увагу на 54-річний розрив між кризами 1793 і 1847 рр., висловив думку, що цей розрив не випадковий. У. Джевонс вперше залучив до аналізу довгих хвиль статистику коливань для пояснення нового для науки явища. Але створення теорії довгих хвиль в економіці пов'язується з ім'ям російського вченого М.Д. Кондратьєва. На початку 20 років XX століття він опублікував ряд важливих досліджень з цієї теми, опираючись на аналіз статистичного матеріалу за 140 років. Його дослідження охоплює розвиток Англії, Франції та США щодо динаміки виробництва чавуну, свинцю, вугілля, а також середнього рівня цін, заробітної плати та ставки відсотка, зовнішньоторговельного обороту та інших показників за період із 80-х рр. XVIII ст. до 20-х рр. XX ст.

*Матеріальну основу* довгих хвиль становить структурне оновлення технологічної бази суспільного виробництва. Здійснюється воно двома шляхами, які доповнюють і замінюють один одного:

1. Еволюційно, коли поліпшуються і вдосконалюються існуючі технології.
2. Револьюційно, коли відбуваються якісні зміни в матеріалізації наукових знань.

У результаті цих досліджень Н.Д. Кондратьєв виділив два етапи розвитку - низхідну і висхідну хвилі, або фази [17].

*Низхідна фаза великого циклу* - це період, коли стара структура економіки не може забезпечити економічний розвиток, але ще не готова до змін. Ця фаза триває 20-25 років.

*Висхідна фаза великого циклу* триває 25-30 років - це період піднесення економічного та науково-технічного розвитку суспільства. Відбувається оновленням основного капіталу, масовим поширенням нових технологій, зародженням і розвитком нових галузей економіки. Характерними для цієї фази є

соціальні потрясіння (війни, революції), внаслідок яких змінюється влада і соціально-політична структура суспільства.

Підйом першого циклу Кондратьєв пов'язував з промисловою революцією в Англії; підйом другого – з розвитком залізничного транспорту, третього – з винаходами та впровадженням електроенергії, телефону, радіо; четвертого – з автомобілебудуванням.

Хвилі великих циклів також здійснюють вплив на інші цикли. У висхідних хвилях інтенсивні піднесення переважають над депресіями, які мають незначний характер; у низхідних хвилях спостерігаються зворотні явища.

Великі цикли притаманні як країнам з розвинутою ринковою економікою, так і країнам командно-адміністративної системи. Глибина кризових потрясінь економіки колишнього СРСР і східноєвропейських країн, яка припала на другу половину 80-х - початок 90-х років, зумовлена не тільки деформаціями командно-адміністративної системи. Ці економічні потрясіння були пов'язані з необхідністю докорінного технологічного переозброєння виробництва, викликаного новим етапом науково-технічної революції [19].

Відкриття Кондратьєвим великих хвиль мало велике значення. Вивчення особливостей і закономірностей довгих хвиль дає змогу прогнозувати зміни у господарстві у майбутньому, визначати тривалість цих змін.

Циклічні коливання важливо відрізнити від нециклічних коливань. Для економічного циклу характерно те, що змінюються всі показники, і що цикл охоплює всі галузі (або сектора). Нециклічні коливання відображають:

– зміну ділової активності лише *в деяких галузях*, що мають сезонний характер робіт (зростання ділової активності, наприклад, у сільському господарстві восени в період збору врожаю; в будівництві - навесні і влітку і спад ділової активності в цих галузях взимку);

– у зміні лише *деяких економічних показників* (наприклад, різке зростання обсягу роздрібних продажів перед святами і зростання ділової активності у відповідних галузях).

### 9.3 Моделі економічних циклів

Для характеристики циклічного розвитку розглядають ряд моделей, серед яких виділяють модель Калдора, Крафта-Вайзе, модель Гудвіна, Слуцького.

В основі розмежування поглядів на економічні коливання є різне розуміння того, що є об'єктом коливань: природний рівень виробництва чи фактичні показники, які відхиляються від природних (рівноважних). Розглянемо деякі моделі.

*Неокласичний підхід* ґрунтується на тому, що економічні коливання є наслідком змін природного рівня виробництва. Відхилення ж від природного рівня виробництва в короткому періоді, якщо й спостерігаються, то є такими незначними, що ними не можна пояснити природу коливань.

Неокласична модель «реального економічного циклу», яка виходить з

існування «циклічного тренду» і коливань природного рівня виробництва, розглядає як вирішальний чинник технологічні зміни та міжчасове заміщення у пропозиції праці різною мотивацією працівників під впливом неоднакових рівнів заробітної плати і ставки відсотка.

Неокейнсіанські уявлення, які ґрунтуються на визнанні відхилень від стану рівноваги у процесі коливань, акцентують увагу на принципах негнучкості цін, що унеможлиблює саморегулювання. Кейнсіанська традиція пояснення кон'юнктурних змін знайшла продовження у моделі Калдора і моделі мультиплікатора-акселератора.

*Модель Калдора* пояснює відхилення і наближення до стану рівноваги різними співвідношеннями заощаджень і інвестицій за неоднакових рівнів доходів. Досліджуючи ці співвідношення, автор моделі дійшов висновку про нестійкість рівноваги за будь-якого рівня доходів.

*Модель мультиплікатора-акселератора* пов'язує модифікацію коливань з тим, що витрати впливають на обсяги виробництва за різних співвідношень показників інвестиційних витрат ( $i$ ) та граничної схильності до інвестування ( $k$ ). Із зростанням граничної схильності до інвестування ( $k$ ) посилюється тенденція до збільшення амплітуди коливань і дедалі більшого відхилення від рівноважного стану.

*Модель політичного кон'юнктурного циклу*, або так званого «виборчого» циклу, запропонована В. Нордхаузом у 1975 р., репрезентує теоретичний напрям, у межах якого увага зосереджується на взаємозалежності економічних і політичних змін. Як основний фактор у моделі розглядається зацікавленість уряду у зміні обсягів витрати до і після виборів.

Спад у період переходу від командної економіки до ринкової (трансформаційний спад) є особливою формою економічних коливань. Спільною причиною трансформаційного спаду в перехідній економіці є те, що в певний період механізми адміністративної економіки уже перестають діяти, а ринкові - ще не почали. Спад спричиняють такі специфічні обставини, як обмеження виробничих можливостей на початку ринкових перетворень, необхідність структурної перебудови економіки і відсутність механізму координації економічних дій суб'єктів.

**Імпульсно-поширювальний підхід.** Основи імпульсно-поширювального підходу до пояснення циклів були закладені українським економістом Євгеном Слуцьким у праці „Нагромадження випадкових причин як джерело циклічних процесів“ (1927). Подібні дослідження проводились норвезьким економістом Рагнарсом Фрішем, від праці якого „Проблеми поширення імпульсів в економіці“ (1937), власне, і запозичена назва „імпульсно-поширювальний підхід“.

Імпульсно-поширювальний підхід припускає, що економічні цикли є наслідком випадкових впливів (імпульсів), що викликають в економіці циклічну модель відгуку. Сила такого відгуку згодом слабшає (тобто цикл “згасає”), проте ділові цикли виникають знову внаслідок появи нових імпульсів. Таким чином, циклічність розвитку економіки є результатом впливу серії незалежних імпульсів або шоків, що послідовно виникають. Розрізняють три типи шоків, які викликають економічні потрясіння:

- 1) шоки пропозиції;

2) політичні шоки;

3) шоки в попиті приватного сектора.

По-перше, шоки пропозиції, що спрямовані насамперед на виробничо-технологічний бік економічної системи. До них відносять технологічні зрушення, кліматичні зміни, відкриття нових джерел сировини, коливання світових цін на сировину. По-друге, політичні шоки, які впливають переважно на попит, пов'язані з діями урядів, з розробкою і реалізацією макроекономічної політики, що впливає переважно на попит шляхом регулювання грошової маси, обмінного курсу, фіскальної політики. По-третє, шоки в попиті спричиняються змінами компонентів приватного попиту – видатків інвесторів або домогосподарств, які викликаються зміною очікувань, смаків і уподобань та ін. Усі три види шоків можуть мати як внутрішні, так і зовнішні корені й джерела.

Отже, економіка, як і будь-яка інша система, розвивається нерівномірно: періоди спаду в ній чергуються з періодами піднесення. Такі коливання називають економічними циклами, для яких характерною є тенденція до зростання. В класичному економічному циклі виділяють 4 фази, які поступово змінюють одна одну: спад, дно, пожвавлення та пік. В залежності від тривалості економічні цикли бувають: 1) короткі (3-4 роки); 2) середні (8-12 років); 3) довгі (45-60 років). Проте важливо відрізнити економічні цикли від нециклічних коливань.

Перейдемо тепер до складніших, нелінійних, моделей, що описують виникнення циклічних коливань в економічному розвитку. Починаючи з простої моделі, запропонованої Гудвіном, будемо послідовно її ускладнювати, враховуючи всю більшу кількість чинників.

Будемо вважати, що у будь-який момент часу  $t$  економіка має в своєму розпорядженні основний капітал  $K$ , який включає заводи, устаткування і т.д. його об'єм міняється з швидкістю, рівною відношенню справжніх капіталовкладень до загального зносу за даний період часу. Джерелом економічного доходу є об'єм виробництва  $Y$  і споживання  $C$ . Ці величини зв'язані між собою відносинами

$$C = aY + \beta; \quad (1)$$

$$Y = C + \frac{dK}{dt} \quad (2)$$

де  $a$  і  $\beta$  — дійсні константи, такі, що  $a < 0$ ,  $\beta < C$ . З рівняння (1) видно, що між об'ємом виробництва і споживанням існує лінійна залежність. Рівняння (2) означає, що вся продукція, що випускається, або споживається, або йде на розширення виробництва. Припустимо далі, що основним капіталом До управляють так, щоб підтримувати його на рівні, пропорційному об'єму виробництва. Якщо  $R$  — бажаний рівень основного капіталу у момент часу  $t$ , то

$$R = \gamma Y \quad (3)$$

де  $\gamma$  — деякий параметр.

Представимо перший варіант моделі. З рівнянь (1) і (2) витікає, що

$$Y - \beta Y = \gamma + \frac{dK}{dt}, \quad (4)$$

звідки

$$Y = \frac{\gamma + K'}{1 - \beta} \quad (5)$$

Із співвідношення (3) видно, що періодичну поведінку величини  $Y$  (або  $Do$ ) може виникнути як наслідок коливань в капіталовкладенні  $Do$ . У свою чергу, ці коливання виникають з прагнення зрівняти величини  $Z$  і  $R$  (бажаний рівень основного капіталу). Нехай проводиться екстремальна політика капіталовкладень:

$$\frac{dK}{dt} = \begin{cases} K_1 > 0, & \text{если } K < R \\ 0, & \text{если } K = R \\ -K_2 < 0, & \text{если } K > R \end{cases}, \quad (6)$$

де  $K_1$ , і  $K_2$ , не залежать від часу  $t$ .

Розглянемо суть формули (6). Якщо основний капітал менше бажаного рівня, то умова (6) відповідає максимальному рівню капіталовкладень (перша умова в (6)). Якщо ж бажаний рівень перевищений, то капіталовкладення нульові, а основний капітал амортизується з швидкістю  $K_2$  (третя умова (6)). Розумно допустити, що при максимальному рівні капіталовкладень швидкість, з якою можуть будуватися нові підприємства більше швидкості амортизації і старіння, тобто

$$K_1 > K_2. \quad (7)$$

З рівнянь (3) - (6) витікає, що

$$R = \begin{cases} R_1 = \gamma \frac{\beta + k_1}{1 - a}, & \text{якщо } K < R \\ R_0 = \frac{\beta}{1 - a}, & \text{якщо } K = R \\ R_1 = \gamma \frac{\beta + k_2}{1 - a}, & \text{якщо } K > R \end{cases} \quad (8)$$

Нехай  $R_2 < K < R_1$ , так що при  $t=0$  виконується  $R=R_1$ . Тоді рівень капіталовкладень рівний  $k_1 > 0$ , величина  $K_0$  росте, а  $Y$  залишається постійною (мал. 1) до тих пір, поки не досягається рівність  $K=R_1$ . Тоді  $R$  приймає значення  $R_0$ , оскільки  $K=R$ . Тепер  $K=R_1 > R=R_0$ , і величина  $R$  миттєво стає рівною  $R_2$ . Таким чином,  $K_0$  миттєво міняється від величини  $k_1$  до  $-k_2$ , а  $R$  — від  $R_1$  до  $R_2$ . У той же самий момент, згідно формулі (5), різко падає об'єм виробництва. Тепер  $K_0$  спадає до величини  $R_2$ . Аналогічні міркування показують, що  $R$  при цьому стає рівним  $R_1$ , так що  $K=R_2 < R=R_1$ , і величина  $K_0$  знову стає рівною  $k_1$ .

Основний капітал До знову зростає до  $R_1$ , і цикл замикається. Таким чином, обидві величини -  $K$  і  $Y$  — здійснюють коливання, як показано на рис. 1.

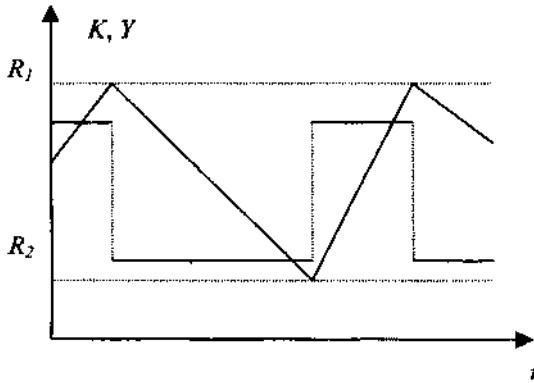


Рис. 9.2 Коливання величин  $K$  і  $Y$  в часі.

Розглянемо поведінку моделі на фазовій площині  $(K, K')$ , представленої на рис.2. Рух відбувається по прямолінійних відрізках  $BC$  і  $DA$ , де  $K = k_1$ , і  $K = -K_2$  відповідно. Скачки від  $A$  до  $B$  і від  $D$  до  $C$  відповідають розривам функції  $Y$ , показаним на мал. 1.

Описана модель добре відображає економічний цикл. Під час періодів капіталовкладення об'єм виробництва високий і економіка знаходиться в періоді підйому. Коли ж капіталовкладення відсутні, об'єм виробництва падає, і економіка знаходиться в стані депресії. Проте у розглянутій моделі є багато недоліків. Так, стрибки в капіталовкладенні і миттєва реакція на них з боку об'єму виробництва  $Y$  (див. формулу (5)) не відповідають дійсності. Крім того, з умови  $k_1 = k_2$  витікає, що періоди спаду значно перевищують періоди підйому, чого в реальності не спостерігається. Більш того, в моделі відсутнє загальне зростання економіки, оскільки об'єм виробництва, основний капітал і інші показники періодично приймають колишні значення.

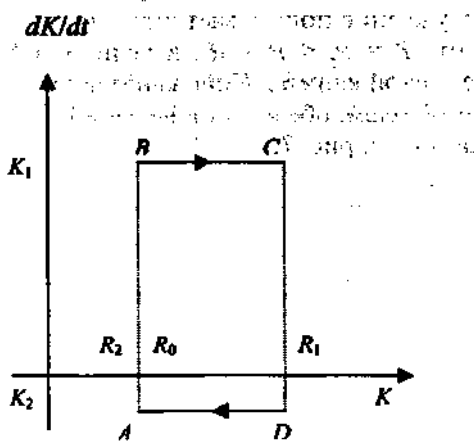


Рисунок. 9.3. Представлення стану економіки на фазовій площині

Приведемо другий варіант моделі. Модифікуємо модель, враховуючи такі чинники:

- 1) вплив капіталовкладень на зростання об'єму виробництва;

2) відсутність стрибкоподібних змін в капіталовкладенні. Для обліку першого чинника змінимо рівняння (5) так, щоб у функції  $Y$  не було стрибків навіть у тому випадку, коли величина  $K_0$  їх має. Це можна зробити, замінивши рівняння (5) на

$$Y = \frac{1}{1-a} \left( \beta + \frac{dK}{dt} - \varepsilon \frac{dY}{dt} \right), \quad (9)$$

де  $\varepsilon$  — деяка позитивна константа.

Зрозуміло, що новий доданок в (9) породжує затримку в реакції функції  $Y$  на зміну  $K$ . З рівняння (9) знаходимо:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dY}{dt} + (1-a)Y &= \beta + k_1, & \text{якщо } K > R, \\ \varepsilon \frac{dY}{dt} + (1-a)Y &= \beta - k_1, & \text{якщо } K < R. \end{aligned} \quad (10),(11)$$

Припустимо, що у момент часу  $t = t_1$  депресія закінчується і відбувається миттєвий перехід від (11) до рівняння (10). Тоді залежність величини  $Y$  від часу  $t$  для фази підйому матиме вигляд

$$Y(t) = \frac{\beta + k_1}{1-a} \left( 1 - e^{-\frac{\alpha-1}{\varepsilon}(t-t_1)} \right) + Y(t_1) e^{-\frac{\alpha-1}{\varepsilon}(t-t_1)}.$$

З рішення (12) видно, що величина  $Y$  не зростає миттєво до значення  $(\beta + k_1)/(1-a)$ , а прагне до нього при  $t \rightarrow \infty$ . Помітимо, що час, який потрібен для того, щоб функція  $Y(t)$  із заданою точністю стала рівній цій величині, цілком залежить від параметра  $\varepsilon$ . Аналогічним чином, рівняння (11) згладжує стрибкоподібне падіння  $Y(t)$  (див. мал. 1) в кінці періоду підйому. Ліквідуємо тепер розриви в капіталовкладенні, тобто «пом'якшимо» раптовий перехід від  $K = k_1$  до  $K = -k_2$  (і навпаки), виникаючий, коли  $K$  стає рівним  $R$ .

Розглянемо ту частину капіталовкладень, яка виникає із зміною об'єму виробництва. Зміни в капіталовкладенні відбувається тому, що ми хочемо підтримувати основний капітал на рівні бажаного капіталу. Зміна величини  $Y$  викликає зміну  $R$ , що, у свою чергу, вабить зміну  $D_0$ . Ясно, що якби нам вдалося підтримувати  $K = \gamma Y$ , то виконувалося б і співвідношення  $K = R$ . Але такого бути не може, оскільки рівність не може виконуватися при всіх значеннях  $t$ , оскільки величина  $D_0$  має верхню межу  $k_1$  і нижню межу  $(-k_2)$ . Тому ми припустимо, що  $K = \psi(Y)$ . Вид функції  $\psi(Y)$  зображений на мал. 3.

Як видно з малюнка, вимушені капіталовкладення  $\psi(Y)$  близькі до ідеального рівня  $\gamma Y$  для малих величин  $Y$ , а при великих  $|Y|$  вони обмежені величинами  $k_1$  до  $(-k_2)$ . Відмітимо, що функція  $\psi(Y) - \varepsilon Y$  немонотонна (тобто має «горби») і схожа

на кубічну параболу. Коли капіталовкладення досягають свого максимального значення, основний капітал перестає задовольняти вимозі  $K = \gamma Y$ .

Це означає, що  $K$  треба вибрати у вигляді

$$\frac{dK}{dt} = L + \psi\left(\frac{dY}{dt}\right), \quad (13)$$

де  $\psi(Y)$  - індуковані капіталовкладення, викликані зміною об'єму виробництва,  $L$  — вплив інших капіталовкладень.

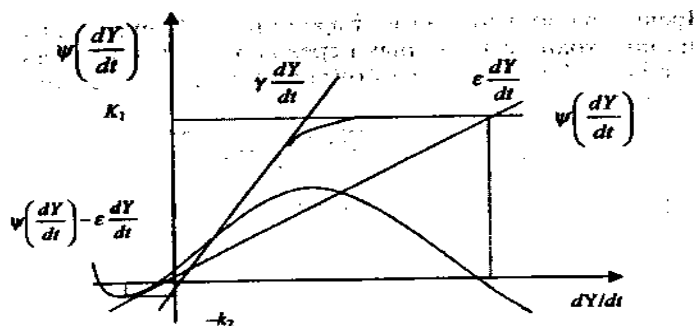


Рис. 3. Вимушені капіталовкладення  $\psi(Y)$

Тоді рівняння (9) треба замінити на

$$Y = \frac{1}{1-a} \left[ \beta + L + \psi\left(\frac{dY}{dt}\right) - \epsilon \frac{dY}{dt} \right]. \quad (14)$$

Щоб одержати графік функції  $Y'$  залежно від  $Y$ , потрібно зсунути функцію  $\psi(Y) - \epsilon Y$ , зображену на рис. 3, на величину  $\beta + L$  і розділити на  $(1-a)$ . Якщо величина  $\beta + L$  достатньо велика, то вийде графік, подібний приведенному на рис.4.

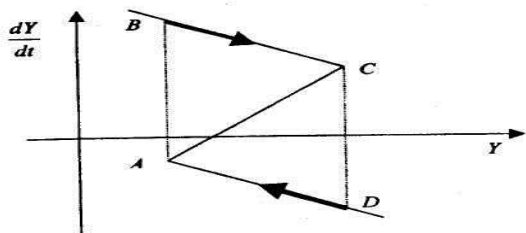


Рис.4. Поведінка другої моделі на фазовій площині

Ця крива, разом з пропозицією про скачки, повністю описує поведінку другої моделі. Крапки, відповідні всім можливим станам моделі, лежать на цій кривій, і знак показує, зростає або спадає величина  $Y$ . Таким чином, рух точки, що визначає стан системи, повинен відбуватися в напрямках, вказаних стрілками. Точка  $(\beta + L; 0)$  є, отже, нестійкою нерухомою точкою системи. З точок  $C$  і  $A$  по аналогії з мал. 2 повинні відбуватися скачки. Припустивши, що скачки відбуваються з  $A$  у  $B$  і із  $C$  в  $D$ , одержимо коливання релаксації для  $Y$ .

Тепер розглянемо третій варіант моделі. Врахуємо тепер запізнювання реальних капіталовкладень щодо ухвалення рішення про їх необхідність. Це



означає, що індуковані вкладення у момент часу  $t$  *насправді* залежать не від  $Y(t)$ , а від  $Y(t - v)$ , де  $v$  — запізнювання.

Тоді замість рівняння (14) треба писати:

$$\varepsilon \frac{dY(t)}{dt} + (1-a)Y(t) - \psi \left( \frac{dY(1-v)}{dt} \right) = \beta + L. \quad (15)$$

Якщо ввести  $\tau = t - v$ , то з (15) одержимо

$$\varepsilon \frac{dY(\tau+v)}{d\tau} + (1-a)Y(\tau+v) - \psi \left( \frac{dY(\tau)}{d\tau} \right) = \beta + L.$$

Розкладемо ліву частину рівняння (16) по ступенях  $v$  і збережемо лише члени першого порядку по  $v$ . Тоді знаходимо:

$$\varepsilon \frac{dY(\tau)}{d\tau} + \varepsilon v \frac{d^2 Y(\tau)}{d\tau^2} + (1-a)v \left[ Y(\tau) + v \frac{dY(\tau)}{d\tau} \right] - \psi \left( \frac{dY(\tau)}{d\tau} \right) = \beta + L. \quad (17)$$

Або

$$\varepsilon v \frac{d^2 Y(\tau)}{d\tau^2} + [\varepsilon + (1-a)v] \frac{dY(\tau)}{d\tau} + (1-a)Y(\tau) - \psi \left( \frac{dY(\tau)}{d\tau} \right) = \beta + L. \quad (18)$$

Якщо вважати, що  $\beta + L = \text{const}$  і ввести

$$y = \frac{Y - (\beta + L)}{1-a}, \quad (19)$$

то (18) можна переписати у вигляді:

$$\varepsilon v \frac{d^2 y(\tau)}{d\tau^2} + [\varepsilon + (1-a)v] \frac{dy(\tau)}{d\tau} - \psi \left( \frac{dy(\tau)}{d\tau} \right) + (1-a)y(\tau) = 0 \quad (20)$$

Введемо нові залежну і незалежну змінні співвідношеннями

$$x = y \sqrt{\frac{1-a}{\varepsilon v}} \quad (21)$$

і

$$t = \tau \sqrt{\frac{1-a}{\varepsilon v}} \quad (22)$$

Тоді замість (20) маємо

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \chi \left( \frac{dx}{dt} \right) + x = 0, \quad (23)$$

де

$$\chi\left(\frac{dx}{xt}\right) = \frac{1}{\sqrt{(1-a)\varepsilon\upsilon}} \left\{ [\varepsilon + (1-a)\upsilon] \frac{dx}{dt} - \psi\left(\frac{dy(\tau)}{dt}\right) \right\}. \quad (24)$$

Якщо  $[\varepsilon + (1-a)\upsilon] < \gamma$ , то функція  $\chi(x)$  схожа на кубічну параболу, а (23) – рівняння типу рівняння Релея.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon \left[ 1 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \right] \frac{dx}{dt} + x = 0, \quad (25)$$

І у нього є стійкий граничний цикл, тобто мають місце автоколивання.

## Лекція 10. 10. Моделювання ефективності інвестиційних проектів з використанням теорії нечіткої логіки

Одним з нових та перспективних напрямів дослідження оцінки ефективності інвестицій є використання апарату нечіткої логіки. Нечітка логіка почала розвиватися на початку 60-их років після появи робіт Л.Заде, в яких було введено поняття нечіткої множини. Звичайна множина задається за допомогою своєї характеристичної функції, що приймає значення 1, коли дана точка належить множині, і 0 – в протилежному випадку. Теорія нечітких множин використовується для опису понять, принциповою властивістю яких є існування деякої нечіткої границі між різними градаціями тої чи іншої характеристики. Для опису таких понять у нечіткій логіці використовують нечіткі множини, характеристичні функції яких можуть приймати значення зі всього інтервалу від 0 до 1, тобто точка характеризується мірою її належності множині. Такий підхід дає можливість краще реалізувати метод експертної оцінки вхідної інформації, ніж традиційна теорія ймовірності.

Формули розрахунку класичних показників ефективності інвестиційних проектів ґрунтуються на використанні елементарних арифметичних операцій, тому, представивши значення вхідних параметрів для їхнього обчислення нечіткими величинами, самі показники можна розрахувати, використовуючи принцип розширення Заде до їхніх формул. При цьому показники ефективності будуть також нечіткими величинами. Це дає можливість управляти проектом з урахуванням можливих змін умов його реалізації.

Для зручності представлення та виконання обчислень використовують нечіткі величини у вигляді набору  $\alpha$ -рівнів. Це дає можливість задавати очікувані значення грошових потоків у вигляді набору інтервалів з урахуванням можливості попадання значення досліджуваного параметра у цей інтервал. Значення показників ефективності інвестиційного проекту, що очікують отримати в результаті його реалізації, визначають у вигляді набору таких самих інтервалів на основі простих правил, що використовують елементарні арифметичні операції. Це представлення дає змогу кількісно оцінювати та аналізувати ризики, пов'язані з проектом, та прогнозувати можливі сценарії розвитку проектів.

Модель чистої теперішньої вартості передбачає порівняння додатних і від'ємних грошових потоків проекту і приведення чистого грошового потоку до моменту інвестування.

Доходи і видатки в кожному періоді реалізації проекту можуть відображатися за допомогою нечітких величин у вигляді набору  $\alpha$ -рівнів. Нечітка величина доходів в  $i$ -тому періоді

$\tilde{D}_i = \langle R, \mu_{\tilde{D}_i} \rangle$  відображається як множина відрізків  $\left\{ \left[ D_{i*}^{\alpha}, D_i^{\alpha*} \right] \right\}$ , де  $R$  – множина дійсних чисел.

Кожний відрізок  $\left[ D_{i^*}^\alpha, D_{i^*}^{\alpha^*} \right]$  представляє собою  $\alpha$ -рівень нечіткої величини  $\tilde{D}_i$  а число  $\alpha \in [0,1]$  характеризує можливість попадання фактичного значення доходів у цей інтервал. Кількість відрізків може бути будь-якою і визначатися залежно від наявної інформації. Нульовий  $\alpha$ -рівень  $\left[ D_{i^*}^0, D_{i^*}^{0^*} \right]$  зручно трактувати, як інтервал всіх можливих значень доходів в  $i$ -тий період,  $\alpha$ -рівень  $\left[ D_{i^*}^1, D_{i^*}^{1^*} \right]$ , для якого  $\alpha=1$  – як інтервал значень, які гарантовано матимуть місце в результаті реалізації проекту. Для двох  $\alpha$ -рівнів  $\left[ D_{i^*}^{\alpha_1}, D_{i^*}^{\alpha_1^*} \right]$  і  $\left[ D_{i^*}^{\alpha_2}, D_{i^*}^{\alpha_2^*} \right]$ , де  $\alpha_1 \leq \alpha_2$  виконується відношення  $\left[ D_{i^*}^{\alpha_1}, D_{i^*}^{\alpha_1^*} \right] \subseteq \left[ D_{i^*}^{\alpha_2}, D_{i^*}^{\alpha_2^*} \right]$ . Геометрично рівні, що відповідають великим значенням  $\alpha$ , входять в рівні з меншими  $\alpha$ . Мається на увазі, що рівні з великими  $\alpha$  уточнюють (звужують) множину можливих значень  $\alpha$ . При цьому чим меншим є  $\tilde{D}_i = \langle R, \mu_{\tilde{D}_i} \rangle = \left\{ \left[ D_{i^*}^\alpha, D_{i^*}^{\alpha^*} \right] \right\}$ , тим більшою є впевненість у тому, що фактичне значення доходу попадає у цей інтервал, оскільки цей інтервал є ширшим.

Витрати за проектом в  $i$ -тий період представляють у вигляді нечіткої величини  $\tilde{P}_i = \langle R, \mu_{\tilde{P}_i} \rangle = \left\{ \left[ P_{i^*}^\alpha, P_{i^*}^{\alpha^*} \right] \right\}$ . Інтерпретація цієї величини аналогічна до трактування нечіткої величини  $\tilde{D}_i$ .

Нечітку величину чистої теперішньої вартості  $\tilde{NPV} = \langle R, \mu_{NPV} \rangle = \left\{ \left[ NPV_*^\alpha, NPV^{\alpha^*} \right] \right\}$  так само, як і вхідні параметри, представляють набором  $\alpha$ -рівнів і визначають за допомогою принципу розширення до формул розрахунку цього показника:

$$\mu_{\tilde{NPV}}(NPV) = \sup_{\substack{D_1, \dots, D_T \\ P_1, \dots, P_T}} \left\{ \min_i \left\{ \mu_{\tilde{D}_i}(D_i), \mu_{\tilde{P}_i}(P_i) \right\} \right\} NPV = f(D_1, \dots, D_T, P_1, \dots, P_T), \quad (4.1)$$

де  $NPV \in R$ ,  $D_i \in R$ ,  $P_i \in R \forall i$ , а функція  $NPV = f(D_1, \dots, D_T, P_1, \dots, P_T)$  описує залежність між показником чистої теперішньої вартості і грошовими потоками за періодами для кожного можливого сценарію.

На основі (4.1) можна визначити формулу для розрахунку  $\tilde{NPV}$ . Оскільки функція  $NPV$  монотонно не спадає по  $D_i$  та монотонно не зростає по  $P_i$  для  $\forall i$ , то границі  $\alpha$ -зрізів для нечіткої величини  $\tilde{NPV}$  можуть бути розраховані так:

$$NPV_*^\alpha = \sum_{i=1}^T \frac{D_{i^*}^\alpha - P_{i^*}^{\alpha^*}}{(1+r)^i} - C_0, \quad (4.2)$$

$$NPV^{\alpha^*} = \sum_{i=1}^T \frac{D_{i^*}^{\alpha^*} - P_{i^*}^\alpha}{(1+r)^i} - C_0. \quad (4.3)$$

Отриману нечітку величину, що відповідає чистій теперішній вартості інвестиційного проекту, трактують так. Носій нечіткої множини  $\tilde{NPV}$ , що відповідає нульовому  $\alpha$ -рівню, тобто відрізьку  $\left[ NPV_*^0, NPV^{0^*} \right]$  представляє інтервал, що включає всі можливі значення показника чистої теперішньої вартості. Значення  $NPV_*^0$  відповідає найбільш песимістичному сценарію розвитку подій, оскільки це найменш можливе значення чистої теперішньої вартості.

Його обчислюють на основі максимальних значень видатків  $P_i^{0*}$  по кожному  $i$ -му періоду та мінімальних значень доходів  $D_i^{0*}$ . Значення  $NPV_i^{0*}$  відповідає найбільш оптимістичному сценарію, оскільки це найбільш можливе значення чистої теперішньої вартості. Воно обчислюється на основі найменших значень видатків  $P_i^0$  по кожному  $i$ -му періоду та найбільших значень доходів  $D_i^{0*}$ . Ядро нечіткої множини  $\tilde{NPV}$ , тобто  $\alpha$ -рівень  $[NPV_*^1, NPV^{1*}]$ , представляє інтервал, що включає значення чистої теперішньої вартості, які відповідають найбільш ймовірним сценаріям.

На основі нечіткої величини  $\tilde{NPV}$  можна виконувати кількісну оцінку ризиків, пов'язаних із реалізацією інвестиційного проекту. Величина  $\tilde{NPV}$  може включати як позитивні, так і негативні результати (див. рис. 32).

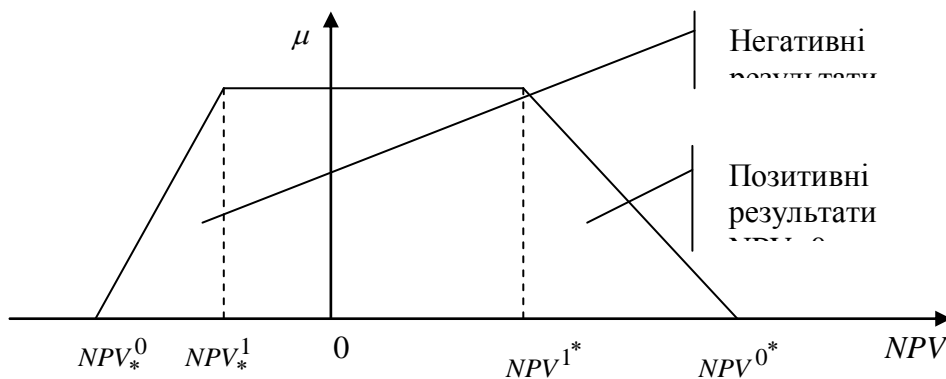


Рис.32. Оцінка ризику на основі нечіткої величини  $\tilde{NPV}$

Кількісний показник ризику збитковості проекту характеризує співвідношення позитивних і негативних результатів із урахуванням їхніх степенів можливості:

$$g = \begin{cases} \frac{\int_{-\infty}^0 \mu_{\tilde{NPV}}(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{\tilde{NPV}}(x) dx}, & \text{якщо } \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{\tilde{NPV}}(x) dx \neq 0, \\ 1, & \text{якщо } \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{\tilde{NPV}}(x) dx = 0, \quad \tilde{NPV} < 0, \\ 0, & \text{якщо } \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{\tilde{NPV}}(x) dx = 0, \quad \tilde{NPV} \geq 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Геометрично вираз (4.4) інтерпретується так:  $\int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{\tilde{NPV}}(x) dx$  — це площа фігури, що містить всі можливі результати із урахуванням ступенів їхньої можливості,  $\int_{-\infty}^0 \mu_{\tilde{NPV}}(x) dx$  — це площа фігури, що містить негативні результати,  $g$  — відношення площі, що містить негативні результати, до площі, що містить всі можливі результати, тобто частка негативних результатів у всій множині можливих результатів.

Для моделі розрахунку нечіткої величини чистої теперішньої вартості інвестиційного проекту, в якій вхідні та вихідні дані представлені за допомогою двох  $\alpha$ -рівнів (ядра і носія), формула (4.4) набуде вигляду:

$$g = \begin{cases} 0, & \text{якщо } NPV_*^0 > 0; \\ \left( \frac{NPV_*^0 \cdot NPV_*^0}{NPV_*^1 - NPV_*^0} \right) / \left( NPV^{1*} - NPV_*^1 + NPV^{0*} + NPV_*^0 \right), & \text{якщо } NPV_*^0 \leq 0 < NPV_*^1; \\ \left( -NPV_*^1 - NPV_*^0 \right) / \left( NPV^{1*} + NPV_*^1 + NPV^{0*} + NPV_*^0 \right), & \text{якщо } NPV_*^1 \leq 0 < NPV^{1*}; \\ 1 - \left( \frac{NPV^{0*} \cdot NPV^{0*}}{NPV^{0*} - NPV^{1*}} \right) / \left( NPV^{1*} - NPV_*^1 + NPV^{0*} + NPV_*^0 \right), & \text{якщо } NPV^{1*} \leq 0 < NPV^{0*}; \\ 1, & \text{у інших випадках.} \end{cases}$$

Важливою характеристикою інвестиційного проекту (критерієм його ефективності), яка має вплив на прийняття рішення щодо його реалізації, є величина періоду окупності (*PBP*). Строк окупності інвестицій у проект, який повинен бути реалізований за *T* періодів (років, місяців і т.д.), визначається на основі аналізу нагромадженої суми прибутку  $CF_t$  до кожного моменту часу *t*, де  $t=1,2,\dots,T$ . Вона обчислюється за формулою:

$$CF_t = \sum_{i=1}^t \frac{D_i - P_i}{(1+r)^i} - C_0, \quad (4.5)$$

де  $D_i$  – доходи в *i*-му періоді (позитивний грошовий потік);  
 $P_i$  – видатки в *i*-му періоді (негативний грошовий потік);  
*r* – ставка дисконтування;  
 $C_0$  – сума інвестицій.

У цій формулі величина  $(D_i - P_i)$  є прибутком в *i*-му періоді, а  $\frac{D_i - P_i}{(1+r)^i}$  – це величина прибутку, приведена до моменту початку реалізації інвестиційного проекту, тобто до нульового моменту часу.  $CF_t$  – загальна сума прибутку, отримана за весь строк реалізації проекту від нульового до *t*-го моменту часу.

Період окупності інвестиційного проекту оцінюють за допомогою співвідношення:

$$PBP = \begin{cases} \min t, & \text{якщо } CF_T \geq 0, \\ \text{інвестиції не окупляться,} & \text{якщо } CF_T < 0, \end{cases} \quad (4.6)$$

де  $t=1,2,\dots,T$  – номер періоду;  
*T* – кількість періодів.

Ця формула означає, що строк окупності дорівнює періоду часу, за який нагромаджений прибуток від реалізації проекту прийме додатне значення.

Таким чином, для розрахунку періоду окупності інвестиційного проекту необхідно оцінювати грошові потоки в кожний період його реалізації. З огляду на практику розроблення інвестиційних проектів, на момент розрахунків отримати точну інформацію про ці значення неможливо, оскільки мова йде про оцінку очікуваних величин доходів і видатків у майбутньому.

Нагромаджений прибуток до закінчення *t*-го періоду реалізації проекту, який розраховується на основі нечітких величин  $\tilde{D}_i$  та  $\tilde{P}_i$ ,  $i=1,2,\dots,t$ , а також ставки дисконтування *r* та величини початкових інвестицій  $C_0$ , є нечіткою величиною  $\tilde{CF}_t = \left\{ \left[ CF_t^\alpha, CF_t^{\alpha*} \right] \right\}$ .

Оскільки  $CF_i$ , що розраховують за формулою (4.5), монотонно неспадна функція по  $D_i$  для  $\forall i$  та монотонно незростаюча функція по  $P_i$  для  $\forall i$ , розрахунок  $\alpha$ -рівнів для нечіткої величини можна здійснювати відповідно до:

$$CF_{t^*}^\alpha = \sum_{i=1}^t \frac{D_i^\alpha - P_i^{\alpha*}}{(1+r)^i} - C_0, \quad (4.7)$$

$$CF_t^{\alpha*} = \sum_{i=1}^t \frac{D_i^{\alpha*} - P_i^\alpha}{(1+r)^i} - C_0. \quad (4.8)$$

Величина  $\tilde{CF}_t$  описує значення нагромадженого прибутку до кінця  $t$ -го періоду при всіх сценаріях з урахуванням можливості їх використання. При цьому відрізок, який відповідає нульовому  $\alpha$ -рівню  $\left\{ \left[ CF_{t^*}^0, CF_t^{0*} \right] \right\}$ , описує всі можливі значення нагромадженого прибутку до кінця  $t$ -го періоду, а  $\left\{ \left[ CF_{t^*}^1, CF_t^{1*} \right] \right\}$  – найбільш ймовірні. Графічно нечіткі величини нагромадженого прибутку зображено на рис. 33.

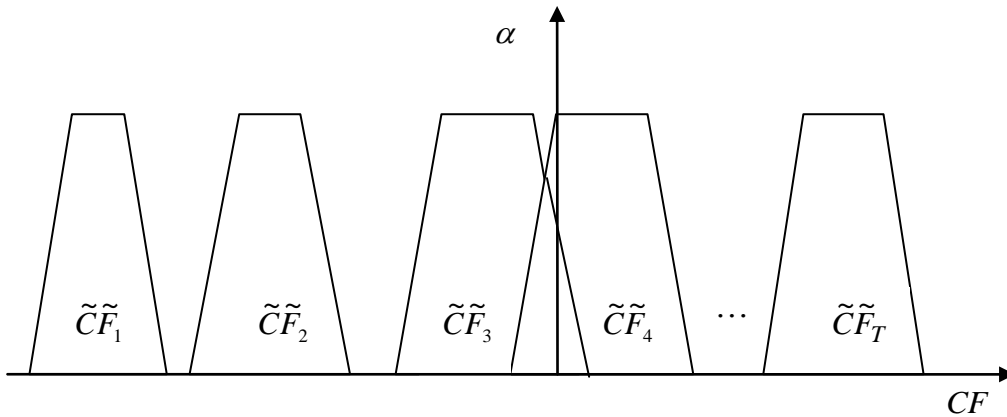


Рис. 33. Розрахунок нагромадженого прибутку по роках

Зауважимо, що при розрахунках для нульового  $\alpha$ -рівня за формулами (4.7)–(4.8) величини  $D_i^0, P_i^{0*}$  та результат  $CF_{t^*}^0$  представляють найбільш песимістичний сценарій розвитку подій, а  $D_i^{\alpha*}, P_i^0$  та  $CF_t^{0*}$  – оптимістичний. Це є свідченням того, що запропонований метод узагальнює підхід до розрахунку показників ефективності на основі аналізу сценаріїв і відповідає інтуїтивним уявленням про поведінку показника ефективності, якщо вхідні параметри задані у вигляді наборів оптимістичних і песимістичних значень.

Знаючи нечіткі величини нагромадженого прибутку, можна визначити можливі значення періоду окупності інвестиційного проекту. Якщо всі можливі значення нагромадженого прибутку до  $t$ -го року від’ємні, то до цього року проект не окупиться ні при яких сценаріях розвитку подій. Геометрично це відповідає ситуації, коли фігура, котра відображає нечітку величину нагромадженого прибутку до  $t$ -го року, знаходиться лівіше осі  $OX$ , тобто  $CF_k^\alpha \leq 0$ ,

$CF_k^{\alpha*} \leq 0$  для  $\forall \alpha$  (наприклад, значення  $\tilde{CF}_1$  та  $\tilde{CF}_2$  на рис. 33). Випадок, коли нагромаджений прибуток до  $t$ -го року додатний для всіх можливих ситуацій, характеризується тим, що інвестиція окупиться до цього року при всіх варіантах розвитку подій. Фігура, яка відображає

нечітку величину нагромадженого прибутку до  $t$ -го року, знаходиться правіше осі  $OX$  (наприклад, фігура  $\tilde{C}\tilde{F}_T$  на рис.33).

Існує ще один випадок, коли при одних сценаріях проект може окупитися, а при інших – ні. Цей випадок є відмінною рисою запропонованої моделі порівняно із детермінованою. Геометрично це означає, що фігура, яка відображає нагромаджений прибуток до  $t$ -го року, перетинається віссю  $OX$  (розбивається нею на дві частини). Частина цієї фігури, розміщена лівіше від  $OX$ , включає негативні наслідки, які відповідають сценаріям, при яких інвестиції не окупляться до  $t$ -го року, а та, що правіше – позитивні, при яких інвестиції окупляться. На рис. 33 в якості прикладу можна вказати фігури  $\tilde{C}\tilde{F}_3$  та  $\tilde{C}\tilde{F}_4$ . При цьому фігура, що відповідає  $\tilde{C}\tilde{F}_4$ , включає більше позитивних наслідків, ніж  $\tilde{C}\tilde{F}_3$ . Звідси випливає, що можливість того, що інвестиції окупляться до четвертого року, більша, ніж до третього. Цей факт можна виразити за допомогою функції окупності інвестицій  $PB(t)$ , яка ставить у відповідність кожному періоду  $t$  число з інтервалу  $[0;1]$ , що відображає можливість того, що проект окупиться до цього року. Формально цю функцію можна визначити так:

$$PB(t) = \begin{cases} \frac{\int_{-\infty}^0 \mu_{\tilde{C}\tilde{F}_t}(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{\tilde{C}\tilde{F}_t}(x) dx}, & \text{якщо } \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{\tilde{C}\tilde{F}_t}(x) dx \neq 0; \\ 0, & \text{якщо } \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{\tilde{C}\tilde{F}_t}(x) dx = 0, \quad \tilde{C}\tilde{F}_t < 0; \\ 1, & \text{якщо } \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{\tilde{C}\tilde{F}_t}(x) dx = 0, \quad \tilde{C}\tilde{F}_t \geq 0. \end{cases} \quad (4.9)$$

Геометрично ця функція є відношенням площі фігури, що включає позитивні наслідки, до площі фігури, яка включає всі можливі наслідки. Вона може приймати значення з інтервалу  $[0;1]$ . Якщо  $PB(t)=0$ , то до  $t$ -го року проект не окупиться ні при яких сценаріях розвитку подій; якщо  $PB(t)=1$  – окупиться в будь-якому випадку; якщо  $0 < PB(t) < 1$ , то існують такі сценарії, при яких проект може окупитися, а може і не окупитися. Чим більшим є значення  $PB(t)$ , тим ймовірніше, що проект окупиться до  $t$ -го року. На рис. 34 показано різні види функцій окупності інвестиційного проекту з періодом реалізації  $T$ .

Випадок (а) характеризується тим, що можна точно визначити строк окупності і стверджувати, що проект окупиться до року  $t$ . Якщо  $t < T$ , то з точки зору критерію окупності проект є прийнятним, якщо  $t > T$  – неприйнятним. У випадку (б) строк окупності точно визначити не можна, можна лише зробити висновок, що він окупиться не раніше року  $t_1$  і не пізніше  $t_2$ . За критерієм окупності цей проект є прийнятним. У випадку (в) бачимо, що проект може окупитися до року  $t_1$  ( $t_1 < T$ ), але може і не окупитися до моменту завершення його реалізації. Можливість того, що проект не окупиться становить  $(1-\eta)$ . Цей проект є ризиковим, а показник  $1-\eta$  можна розглядати як показник ризику неокупності проекту. Функцію окупності проекту можна порівнювати не тільки з періодом реалізації  $T$ , але й з іншим періодом, наприклад, періодом окупності альтернативного проекту і т.д.

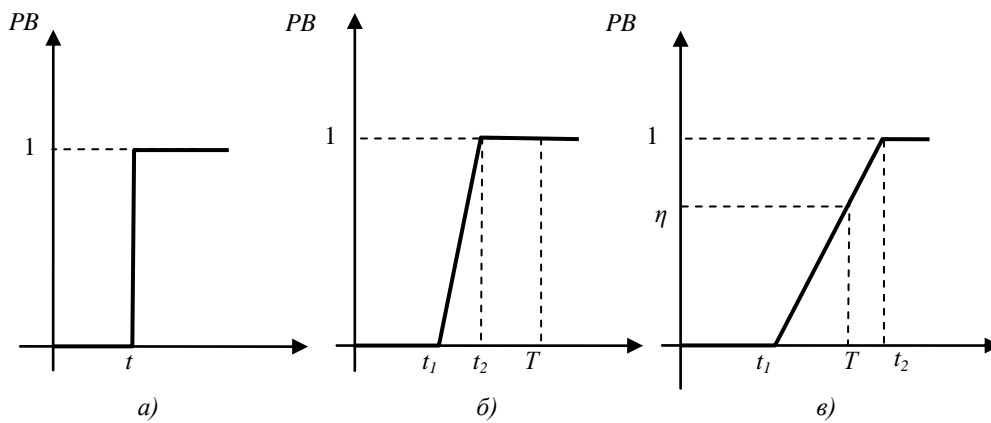


Рис. 10.1 Функція окупності інвестицій

Моделі решти показників ефективності інвестицій будуються так само. Зазначимо, що подібно можна обробляти невизначеності вхідних даних, що пов'язані із поняттям переваг.

Властивості нечіткої логіки забезпечують те, що для побудови моделей майже не використовують апріорну інформацію, що не залежить від суджень експерта. Це дає змогу уникнути недоліків, що характерні для методу експертних оцінок, який ґрунтується на традиційній теорії ймовірності. Процедура отримання інформації від експерта є достатньо простою та дає можливість використовувати весь обсяг інформації, яким він оперує. З точки зору обчислень цей метод має хорошу властивість: складність обчислень мало залежить від конкретного виду розподілу, що дає змогу відмовитись від необхідного спрощення реальності. Окрім цього цей метод дає змогу врахувати взаємозв'язок зовнішніх чинників впливу, шляхом побудови їхнього спільного розподілу. Складність побудови такого розподілу не є суттєво більшою, ніж під час побудови однофакторного розподілу.

Отже, цей метод має низку позитивних властивостей, що стосуються методик отримання вхідної інформації моделей, обчислювального процесу, відображення дійсності у моделі та інтерпретації отриманих результатів.

#### Контрольні запитання:

1. Як відбувається представлення доходів та видатків у кожному періоді реалізації проекту за допомогою нечітких величин?
2. Запишіть формулу визначення нечіткої величини чистої теперішньої вартості.
3. Опишіть метод визначення ризику проекту на основі нечіткої величини чистої теперішньої вартості.
4. Опишіть метод визначення нечіткої величини періоду окупності інвестиційного проекту.
5. Запишіть функцію окупності інвестицій.
6. Які переваги мають моделі оцінки ризиків, побудовані на основі нечітко заданих вхідних величин?

#### Метод управлінських опціонів

Одними з нових методів оцінки ефективності інвестиційних проектів є опціонні методи. Незаперечним є факт, що після схвалення інвестиційні проекти та умови їхнього функціонування можуть змінюватися. Це дає можливість на деякому етапі реалізації вносити зміни, які впливають на подальші грошові потоки, ризик діяльності, тривалість життєвого циклу. Нехтування можливими змінами в процесі впровадження проекту призводить до неможливості адаптивного управління інвестиційним процесом, що в свою чергу зумовлює ризик зниження ефективності діяльності.



Управлінські (реальні) опціони – це наявність у керівника можливості вибору, яка дає змогу у майбутньому приймати рішення, що впливають на очікувані грошові потоки, тривалість життєвого циклу та навіть майбутню ефективність проекту.

Наявність певних управлінських опціонів підвищує привабливість інвестиційного проекту. Застосовуючи опціонні методи, привабливість інвестиційного проекту можна розглядати як його чисту теперішню вартість, обчислену традиційним методом, разом з вартістю будь-яких реальних опціонів. Цінність проекту можна записати так:

$$V = NPV + V_o, \quad (4.10)$$

де  $V$  – економічний ефект від впровадження проекту;

$NPV$  – чиста теперішня вартість проекту;

$V_o$  – вартість опціонів.

Чим більшою є кількість управлінських опціонів (можливостей вибору різних варіантів) та невизначеність, що пов'язана з їхнім використанням, тим більшою є величина другого доданку у рівності (4.10) і тим більшою є привабливість інвестиційного проекту. Це пояснюють так: чим більшою є невизначеність, тим більше шансів, що той чи інший управлінський опціон буде використаний і, як наслідок, тим більшою є вартість відповідного варіанту.

Розрізняють такі типи управлінських опціонів:

1. *Опціон розширення (або скорочення)*. Можливість того, що підприємство може розширити виробництво під час настання сприятливих умов і, навпаки, скоротити його, якщо умови стануть несприятливими.
2. *Опціон відмови*. Якщо від реалізації проекту можна у будь-який момент відмовитися, керівник з більшою готовністю погоджується на його впровадження.
3. *Опціон відтермінування*. Деякі проекти можуть бути відтерміновані, що дає змогу отримати додаткову інформацію про умови реалізації проекту.

Іноді під час оцінювання ефективності того чи іншого інвестиційного проекту ці опціони неформально інтерпретують як якісні чинники. Інтерпретація цих можливостей може бути не більш, ніж визнанням того, що „якщо відбудеться те чи інше, то у нас з'явиться можливість зробити так-то і так-то”.

Оцінити реальні опціони є суттєво важче, ніж фінансові. Традиційні методи оцінки опціонів, зазвичай, не дають адекватних результатів. Тому під час аналізу реальних опціонів найчастіше використовують менш точні методи: побудова дерева рішень та імітаційне моделювання.

Використання опціонних методів для оцінки ефективності інвестиційних проектів є достатньо перспективним напрямком, оскільки ці методи дають змогу оцінювати у грошовій формі наявні можливості підприємства та очікувані ризики.

#### **Контрольні запитання:**

1. Що розуміють під терміном управлінський опціон?
2. У чому полягає сутність оцінки ефективності проекту за допомогою методу опціонів?
3. Які типи управлінських опціонів розрізняють?
4. Які переваги застосування методу управлінських опціонів під час оцінювання ефективності інвестиційних проектів?

#### **Теми для обговорень та рефератів:**

1. Порівняльний аналіз моделей оцінки ризику інвестиційного проекту.
2. Некласичні імовірності та нерівність Чебишева.

Програмне забезпечення оцінки ефективності проектів

### Рекомендована література

1. Агапова Т.М., Бехренс Д., Курран Д. Динамические системы в экономике.- Донецк. ДонГУ, 2000.- 140с.
2. Арнольд В. И. Теория катастроф.- М.: Наука, 1990.- 128 с.
3. Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М. Наука, 1976.- 496 с.
4. Бибииков Ю. Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений.
5. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф.— М.: Мир, 1984.— 350 с.
6. Гранберг А.Г. Динамические модели народного хозяйства.— М.: Экономика, 1985.- 240 с.
7. Данич В. Н. Идентификация быстрых процессов. Методы и модели.— М.: Арт-Бизнес-Центр, 1999.— 230 с.
8. Занг В.-Б. Синергетическая экономика.- М.: Мир, 1999.-336 с.
9. Капица СП. Общая теория роста человечества (неограниченные возможности и возможные ограничения).— М.: Наука, 1999.
10. Капица СП., Курдюмов СП., Малинецкий Г.Г. Синергетика и прогнозы будущего. — М: Эдиориал УРСС, 2003.- 288с.
11. Колемаев В.А. Математическая экономика: Учебник для вузов.- М.: ЮНИТИ, 1998.- 240 с.
12. Красе И.А. Математические модели экономической динамики.- М.: Сов. радио, 1985.- 280 с.
13. Курдюмов СП, Ахромеев Т.С, Малинецкий Г.Г. Парадоксы мира нестационарных структур.- М.: Знание, 1985.- 48 с.
14. Курдюмов СП., Галактионов В.А., Самарский А.А. Процессы в открытых диссипативных системах.— М.: Знание, 1987.
15. Курдюмов СП., Малинецкий Г.Г. Синергетика — теория самоорганизации. Идеи, методы, перспективы.— М.: Знание, 1983.— 64 с.
16. Курдюмов СП., Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б. Синергетика — новые направления.— М.: Знание, 1989.— 48 с.
17. Кушнер Г.Дж. Стохастическая устойчивость и управление.— М.: Мир, 1969.- 200 с.
18. Лысенко Ю. Г., Петренко В. Л., Забродский В. А., Овечко В. С, Христиановский В. В., Бир Ст., Москардини А. Экономическая кибернетика. Уч пос. Дон.ун-т.— Донецк, ДонГУ, 1999.- 397с.
19. Лысенко Ю. Г., Петренко В.Л., Тимохин В.Н., Филиппов А.В. Экономическая динамика: Уч. пособие.- Донецк: Изд-во ДонГУ, 2000.- 176 с.
20. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б., Современные проблемы нелинейной динамики. — М: Эдиориал УРСС, 2002.— 360 с.
21. Милованов В.П. Неравновесные социально — экономические системы: синергетика и самоорганизация,— М: Эдиориал УРСС. 2001.- 264 с.
22. Милованов В.П., Пупков К.А. Качественные методы анализа соц-экон. явлений.: Отчет МИЭМ / гос.регистр № 01814003622, инв.№0281.8005273. М., 1981.- 320 с.
23. Моисеев Н.Н. Алгоритмы развития. М. Наука, 1987, — 304с.
24. Никайдо Х Выпуклые структуры и математическая экономика.- М.: Мир, 1972.- 520 с.
25. Николис Г., Пригожий И. Самоорганизация в неравновесн эгх системах. От диссипативных структур к упорядоченности через флуктуации.— М.: Мир, 1979.
26. Перегудов Ф.И., Тарасенко В.А. Введение в системный анализ.— М.: Высшая школа, 1989.— 320 с.
27. Петере Э. Хаос и порядок на рынках капитала. Новый аналитический взгляд на циклы, цены и изменчивость рынка. Пер. с англ.- М. Мир, 2000, - 333с.
28. Постон Т., Стюарт Й. Теория катастроф и ее приложения.-М.: Мир, 1980.- 576 с.
29. Пригожий И., Стенгерс И. Время, хаос, квант: к решению парадокса времени.— М.: Прогресс, 1994.— 266 с.
30. Пригожий И., Стенгерс И. Порядок из хаоса. Новый диалог человека с природой. — М: Эдиориал УРСС, 2001.— 312 с.
31. Пригожий И., Стенгерс И. Порядок из хаоса: новый диалог человека с природой.- М.: Прогресс, 1986.
32. Рейссич Р., Сенсоне Г., Конти Р. Качественная теория нелинейных диф. ур-ний. М. Наука, 1974, - 318 с.
33. Сидоренко В.Н. Системная динамика.- М.: Экономический ф-тет МГУ; ТЕИС, 1998.- 208 с.
34. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям.- 5-е изд.- М.: Наука, 1979.
35. Хакен Г. Синергетика.- М.: Мир, 1980.

36. Хакен Г. Синергетика. Иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах.— М.: Мир, 1985.
37. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла.- М.: Мир, 1985.
38. Цисарь И.Ф., Нейман В.Г. Компьютерное моделирование экономики.- М.: Диалог-МИФИ, 2002.- 304 с.
39. Шустер Х. Детерминированный хаос. Введение.- М.: Мир 1988.