

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ТЕРНОПІЛЬСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ПУЛЮЯ

Кафедра економічна кібернетика



НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНА

СЕРІЯ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання лабораторних робіт з дисципліни
« Методи оптимального управління в економіці»
для студентів спеціальності 051 « Економіка»»
денної та заочної форми навчання

Тернопіль-2017

Методичні вказівки для виконання лабораторних робіт з дисципліни « Методи оптимального управління в економіці» для студентів спеціальності 051« Економіка» денної та заочної форми навчання / к.е.н., доцент Н.М. Гарматій – Тернопіль, ТНТУ ім. І. Пулюя, 2017. – 54 с.

У методичних рекомендаціях на основі діючого законодавства та освітньо-професійної програми з підготовки магістрів, розкрито методику для виконання лабораторних робіт з дисципліни « Методи оптимального управління в економіці»; використання літературних джерел для розкриття та обґрунтування досліджуваної проблеми в науковому та економічному аспекті; використання фактичних даних про результати моделювання процесів ринкової економіки; використання економічних методів для дослідження закономірностей поведінки суб'єктів економіки.

Укладачі: Гарматій Н.М., кандидат економічних наук, доцент кафедри економічної кібернетики.

Рецензенти: Рогатинський Роман Михайлович, доктор технічних наук, професор, проректор з наукової роботи
Федорович Роман Володимирович, кандидат економічних наук, професор, завідувач кафедри промислового маркетингу.

Відповідальний за випуск: Гарматій Наталія Михайлівна, кандидат економічних наук, доцент кафедри економічної кібернетики.

Методичні рекомендації розглянуті і затверджені на засіданні кафедри економічної кібернетики

Протокол №8 від 24 березня 2017р.

Схвалені на засіданні методичної комісії факультету економіки та підприємницької діяльності

Протокол № від 201 р.

Зміст

1. Вступ	4
2. Лабораторна робота №1	5
3. Лабораторна робота №2.....	16
4. Лабораторна робота №3.....	27
5. Лабораторна робота №4.....	36
6. Лабораторна робота №5.....	44
7. Лабораторна робота №6.....	48
8. Питання з курсу " Методи оптимального управління в економіці"	53
9. Список використаної літератури	55

ВСТУП

Методи оптимального управління в економіці є однією із фахових дисциплін підготовки фахівців зі спеціальності " Економіка". Вивчення дисципліни направлене на формування системи теоретичних знань і практичних навичок побудови та аналізу математичних моделей ринкової економіки та розвитку економічних процесів.

Завданням даного курсу є оволодіння теоретичними знаннями та інструментарієм моделювання економічних процесів; набуття вмінь постановки і самостійного розв'язання задач аналізу, прогнозування, прийняття рішень та управління ризиком з використанням моделей.

Предметом вивчення курсу є методи і моделі ринкової економіки.

Під час вивчення дисципліни студентом мають бути засвоєні основні принципи моделювання економічних процесів ринкової економіки в ході виконання 6 лабораторних робіт.

Для виконання лабораторних робіт з даного курсу студент повинен володіти базовими знаннями з дисциплін "Економетрія", "Дослідження операцій", "Математичне програмування", "Системний аналіз", "Прогнозування соціально-економічних процесів", "Моделювання економіки". Під час виконання лабораторних робіт студент досліджує конкретний економічний процес формалізований на основі математичних змінних, систематизує основні тенденції та формулює висновки щодо напрямків розвитку економіки у динаміці.

Лабораторне заняття 1

Тема: Економіко-математичне моделювання портфеля комерційного банку за моделлю Марковіца.

Мета: Набуття навичок математичного моделювання оптимального портфеля цінних паперів комерційної структури використовуючи Excel та програму Matcat.

Хід роботи:

1. Вхідні дані по цінних паперах одного із банків для виконання лабораторної роботи наведені в табл. 1, табл. 2

Табл. 1

	дохідність	Частка%	Сума, тис. грн
векселі			
Акції кооперації	32	19,1	47336
Облігові корпорації	25,1	77,82	192861
Державні облігації	18	3,08	12897
Облігації місцевих позик			
інші	1,55		
Загалом портфель	26,58	100	205757

Табл. 2

Показники дохідності (тис.грн)

	01.2006	01.2007	01.2008	01.2009
векселі	39,8	42	36	32
Акції кооперації	24,1	23,8	22,7	25
Облігові корпорації	28,2	27,2	20,4	25,1
Державні облігації	19,2	18,7	18,2	18
Облігації місцевих позик				

2. Розрахувати коефіцієнт регресії для всіх цінних паперів, та провести відповідний економічний аналіз та ступінь кореляції між собою цінних паперів.
3. Представити відповідні графіки по регресійній залежності(згідно таблиці 2).
4. Визначити за моделлю Марковіца оптимальну дохідність інвестиційного портфеля, використовуючи леційні матеріали по моделюванні інвестиційного портфеля банку за моделлю Марковіца.
5. Визначити за моделлю Марковіца ризик інвестиційного портфеля при вхідному представленні цінних паперів, використовуючи леційні матеріали по моделюванні інвестиційного портфеля банку за моделлю Марковіца.
6. До останньої цифри вхідних даних студенти додають першу цифру із залікової книги.
7. Розрахунки здійснити в Matlab.
8. Економічний аналіз представити у висновках.

Лабораторне заняття №2

«Моделювання портфеля комерційного банку за класично моделлю Марковіца при зазначених сценаріях розвитку»

Мета лабораторного заняття: дістати навички моделювання оптимального складу портфелю банку, та визначення рівня прибутковості портфеля банку при заданих рівнях дохідності та ризику цінних паперів.

Завдання лабораторного заняття:

- 1.Визначити очікувану дохідність акцій А та В.
- 2.Обчислити сподівану норму прибутку портфеля.
- 3.Визначити ступінь ризику дохідності акцій виду А та В.
- 4.Визначити загальний ризик портфелю за відповідною формулою.

Вхідні дані для виконання лабораторного заняття.

Інвестор є власником інвестиційного портфеля, який складається з двох видів акцій А та В. Прогнозують, що у майбутньому періоді економічна система може розвиватись згідно з п'ятьма прогнозованими сценаріям. Сподівані норми

дохідності цінних паперів відповідно до сценаріїв розвитку та ймовірність цих сценаріїв подано у табл. 1

Таблиця 1

Сценарії розвитку економіки	Очікувана дохідність		Ймовірність сценарію розвитку економіки
	Акції виду А, m_1	Акції виду В, m_2	
Сценарій 1	18,6	35,0	0,3
Сценарій 2	16,7	26,7	0,3
Сценарій 3	12,5	21,5	0,2
Сценарій 4	11,3	18,3	0,1
Сценарій 5	9,6	11,5	0,1

Визначити дохідність і ризик портфелю, складеного з цих двох акцій, якщо частка акцій виду А становить x_1 35%.

Алгоритм виконання лабораторного заняття

1. Визначимо частку паперів виду В у портфелі. $x_2 = 1 - x_1$

2. Визначимо очікувану дохідність акцій А.

$$\mu_1 = M(m_1) = \sum_{l=1}^L P_l m_{1l}$$

де P_l - ймовірність по певному виду сценарію.

3. Таким же чином визначимо очікувану дохідність акцій В.

4. Ступінь ризику дохідності акцій А визначимо як дисперсію їхньої дохідності.

за такою формулою:

$$\delta_1^2 = \delta^2(m_1) = \sum_{l=1}^L P_l (m_{1l} - \mu_1)^2$$

де m_{1l} - вид акцій А відповідно сценарію.

μ_1 - очікувана дохідність акцій А.

5. Величину ризику портфеля слід розрахувати за формулою.

$$\delta_p = \sqrt{x_1^2 \delta_1^2 + x_2^2 \delta_2^2 + 2x_1 x_2 \delta_1 \delta_2 \rho_{12}}$$

Якщо p_{12} - коефіцієнт кореляції, який = 0,97.

5. Результати розрахунків викласти у висновках.

Лабораторне заняття 3

Тема: Економіко-математичне моделювання портфеля комерційного банку за моделлю Шарпа.

Мета: Набуття навичок математичного моделювання оптимального портфеля за цінних паперів за моделлю Шарпа в програмі Matcat.

Хід роботи:

1. Використовуючи лекційний матеріал (моделювання оптимального портфеля цінних паперів за моделлю Шарпа) моделюванню за визначеною моделлю Шарпа провести розрахунки складу портфеля цінних паперів комерційного банку.

1. Вхідні дані для виконання лабораторної роботи наведені в табл.1, табл.2

Табл.1

	дохідність	Частка%	Сума, тис. грн
векселі			
Акції кооперації	32	19,1	47336
Облогові корпорації	25,1	77,82	192861
Державні облігації	18	3,08	12897
Облігації місцевих позик			
інші	1,55		
Загалом портфель	26,58	100	205757

Табл.2

Показники дохідності (тис.грн)

	01.2006	01.2007	01.2008	01.2009
векселі	39,8	42	36	32
Акції кооперації	24,1	23,8	22,7	25
Облогові корпорації	28,2	27,2	20,4	25,1
Державні облігації	19,2	18,7	18,2	18
Облігації				

місцевих позик				

2. Визначити за моделлю Шарпа оптимальну дохідність інвестиційного портфеля за такою формулою: $R_i = \bar{R}_i + B_i(R_{sp} - \bar{R}_{sp})$

де R_i - дохідність цінного паперу.

R_{sp} - дохідність одиничного портфелю.

β - коефіцієнт регресії.

\bar{R} середня дохідність цінного паперу за минулі періоди.

\bar{R}_{sp} - середня дохідність одиничного портфеля за минулі періоди.

Модель набуде математичного представлення:

$$\sum_{i=1}^N (\bar{R}_i W_i) + (R_{sp} - \bar{R}_{sp}) * \sum_{i=1}^N (B_i W_i) \longrightarrow \max$$

при обмеженні $\sum_{i=1}^N w_i = 1$

За дохідність одиничного портфеля у період t береться середнє значення дохідності цінних паперів, що його складають, за цей же період:

$$R_{sp}^T = \frac{\sum_{i=1}^N R_i^t}{T}$$

3. Розрахувати коефіцієнт регресії для всіх цінних паперів.

4. Визначити оптимально- дохідний склад інвестиційного портфеля.

5. Розрахунки здійснити в Matlab.

6. Економічний аналіз представити у висновках.

Лабораторне заняття 4.

РОЗВ'ЯЗОК ТРАНСПОРТНИХ ЗАДАЧ ЗАСОБАМИ EXCEL ТА МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПЕРЕВЕЗЕНЬ

Мета роботи: Навчитись розв'язувати транспортні задачі з допомогою редактора Excel

1. Основні теоретичні відомості

Загальна постановка транспортної задачі полягає в визначенні оптимального плану перевезень деякого однорідного вантажу з m пунктів відправлення A_1, A_2, \dots, A_m в n пунктів призначення B_1, B_2, \dots, B_n . При цьому в якості критерію оптимальності, як правило, береться мінімальна вартість перевезень всього вантажу, або мінімальний час його доставки. Розглянемо транспортну задачу, в якій, в якості критерію оптимальності використано мінімальну вартість перевезень всього вантажу. Позначимо c_{ij} тарифи перевезення одиниці вантажу з i -го пункту відправлення в j -й пункт призначення, через a_i – запаси вантажу в i -му пункті відправлення, через b_j – потреби в вантажі в j -му пункті призначення, а через x_{ij} – кількість одиниць вантажу, перевезеного з i -го пункту відправлення в j -й пункт призначення. Математична постановка задачі в даному випадку полягає в визначенні мінімального значення функції:

$$F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}, \quad (1)$$

за наступних умов:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = 1, \dots, n. \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = 1, \dots, m. \quad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Оскільки змінні $x_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ задовольняють системи лінійних рівнянь (2) і (3) і граничні умови (4), то забезпечується доставка необхідної кількості вантажу в кожний з пунктів призначення, вивіз наявного вантажу зі всіх пунктів відправлення, а також виключаються зворотні перевезення.

Загальна наявність вантажів в постачальників складає $\sum_{i=1}^m a_i$, а загальна

потреба в вантажі в пунктах призначення дорівнює $\sum_{j=1}^n b_j$ одиниць. Якщо загальна

потреба у вантажах в пунктах призначення дорівнює запасу вантажів в пунктах відправлення, тобто:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j. \quad (5)$$

то модель такої транспортної задачі називається закритою. Якщо наведена вище умова не виконуються – відкритою.

В випадку перевищення запасу над потребою, тобто:

$$\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$$

вводиться фіктивний $(n+1)$ споживач (або пункт призначення) з потребою рівною b_{n+1} , а відповідні транспортні тарифи від всіх постачальників до фіктивного споживача приймаються рівними нулю. Одержують закриту транспортну задачу, для якої виконується рівність (5).

В випадку перевищення потреби певного споживача над загальними запасами, тобто

$$\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$$

вводиться фіктивний $(m+1)$ пункт відправлення з запасом вантажу в ньому, який рівний потребі $a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$, а відповідні транспортні тарифи від фіктивного постачальника до всіх споживачів приймаються рівними нулю.

Отримана задача стає закритою транспортною задачею, для якої виконується рівність (5).

Приклад розв'язку задачі

Чотири підприємства даного економічного району для виробництва продукції одержують сировину від трьох постачальників. Потреба кожного з підприємств в сировині дорівнює відповідно 900, 600, 800 і 600 од. Сировина зосереджена в трьох місцях її одержання, її запаси дорівнюють відповідно 600, 800 і 1000 од. На кожне з підприємств сировина може завозитись з будь-якого пункту його одержання. Тарифи перевезень є відомими величинами і задаються матрицею:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 9 \\ 3 & 6 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Скласти такий план перевезень, за якого загальна вартість перевезень є мінімальною.

Побудова математичної моделі

Позначимо через x_{ij} кількість одиниць сировини, що перевозиться з i -го пункту на j -те підприємство. Задача є відкритою, тому що сума запасів вантажів $600+800+1000 = 2400$ в місцях відправлення, не дорівнює сумі потреб вантажів в місцях призначення $900+600+800+600=2900$. Оскільки потреби в вантажах перевищують їх запаси, то вводимо фіктивного постачальника з номером 4, в якого запас вантажів дорівнює $2900 - 2400 = 500$. в цьому випадку загальний запас стане рівним 2900 і ми одержимо закрити транспортну задачу. При цьому всі тарифи від фіктивного постачальника до всіх споживачів вантажу приймають рівними нулю, в матриці тарифів з'явиться четвертий рядок, в який вводяться всі нулі. Цільова функція не зміниться.

Умови доставки і вивозу необхідної і наявної сировини забезпечуються за рахунок виконання наступних рівностей:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 600 \quad (6)$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 800 \quad (7)$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1000 \quad (8)$$

$$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 500 \quad (9)$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 900 \quad (10)$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 600 \quad (11)$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 800 \quad (12)$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 600 \quad (13)$$

За наявного плану перевезень $x_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, 3; j = 1, \dots, 4$, їх загальна вартість становитиме: $F = 4x_{11} + 3x_{12} + 2x_{13} + 1x_{14} + 2x_{21} + 1x_{22} + 7x_{23} + 9x_{24} + 3x_{31} + 6x_{32} + 8x_{33} + 4x_{34} \rightarrow \min$. (14)

Розв'язок поставленої задачі засобами Microsoft Excel

Microsoft Excel - Книга1								
Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно ?								
Аrial Cyr 14 Ж К И								
КОРЕНЬ X ✓ = =СУММПРОИЗВ(B15:E18;B4;E7)								
	A	B	C	D	E	F	G	
1								
2	Пункти відправлення	Пункти призначення						
3		1	2	3	4	Запаси	Обмеження	
4	1					600	0	
5	2					800	0	
6	3					1000	0	
7	4					500	0	
8	Попит	900	600	800	600			
9	Обмеження	0	0	0	0			
10								
11								
12		Матриця витрат на перевезення						
13								
14	Пункти відпра	1	2	3	4			
15	1	4	3	2	1			
16	2	2	1	7	9			
17	3	3	6	8	4			
18	4	0	0	0	0			
19	Цільова функція	0						
20								

Рис. 1. Фрагмент робочого аркушу Microsoft Excel з вихідними даними

Таким чином, математична постановка задачі полягає в побудові такого розв'язку системи лінійних рівнянь (6)–(13), за якого цільова функція (14) прийме мінімальне значення.

Вихідні дані задачі

Починаючи з комірки A1 вікна Excel побудуємо наступну таблицю (рис. 1.):

Комірки з адресами B4:E7 резервуються для змінних $x_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, 4; j = 1, \dots, 4$, (рис. 1). В комірки F4:F7 заносяться запаси вантажів в пунктах відправлення, включаючи і фіктивний, в комірки B9:E9 заносяться потреби (попит) в вантажах в пунктах призначення. Після занесення в комірки чисел чи формул необхідно натиснути клавішу ENTER.

В комірки з адресами B15:E18 занесені коефіцієнти матриці витрат на перевезення вантажів.

Комірки G4:G7 містять формули для розрахунку обмежень (6) – (9). Формула обмеження (6) занесена в комірки G4 і має вигляд =СУМ(B4:E4). Відповідно обмеження (7), (8) і (9) занесені в комірки G5, G6 і G7 в вигляді формул =СУМ(B5:E5), =СУМ(B6:E6) і =СУМ(B7:E7).

В комірках A10:E10 містяться формули обмежень (9)–(12), що відповідно мають вигляд: =СУМ(B4:B7), =СУМ(C4:C7), =СУМ(D4:D7), =СУМ(E4:E7).

В комірку B15:E18 занесена матриця витрат на перевезення між всіма пунктами відправлення вантажу і призначення. Четвертий рядок цієї матриці відповідає перевезенням від фіктивного постачальника.

Формула для розрахунку цільової функції (13) занесена в комірку C19 і має вигляд: =СУММПРОИЗВ(B15:E18;B4:E7), в цю ж комірку буде занесене обчислене значення цільової функції.

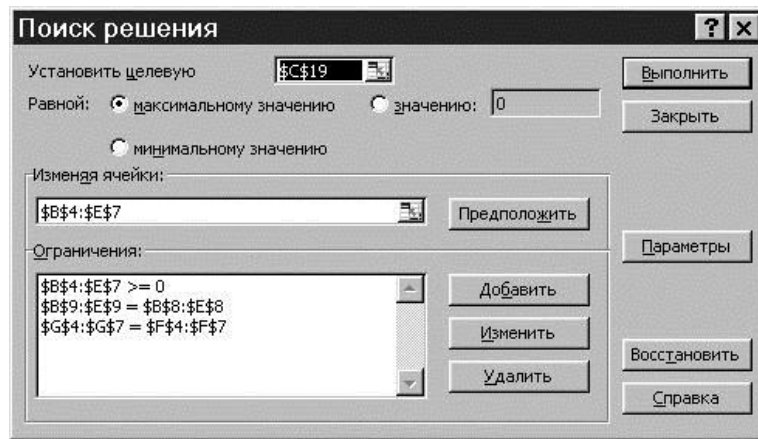


Рис. 2. Діалогове вікно Поиск решения із введеними обмежувачими формулами

Розв'язок задачі

Поставити курсор мишки в комірку С19, в якій міститься обчислене значення цільової функції, і натиснути на ліву кнопку.

Ввійти в меню Сервис, вибрати в ньому Поиск решения і клацнути на ньому лівою кнопкою миші. На екрані з'явиться діалогове вікно Поиск решения (рис. 2).

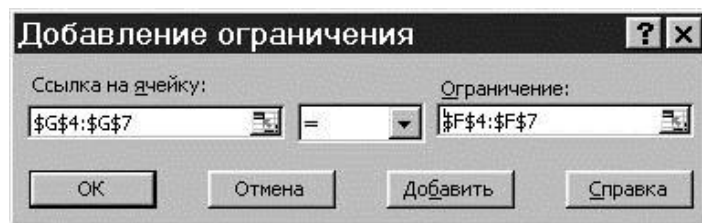


Рис. 3. Діалогове вікно Добавление ограничения із введеними обмеженнями

В поле Установить целевую ячейку заноситься \$C\$19. Для цього найпростіше встановити курсор миші всередині комірки, клацнути в ній лівою кнопкою миші, потім клацнути мишею на комірці С17.

Оскільки шукаємо мінімум цільової функції, то в полі Равной виділимо Минимальное значение, клацнувши в кружечку мишею.

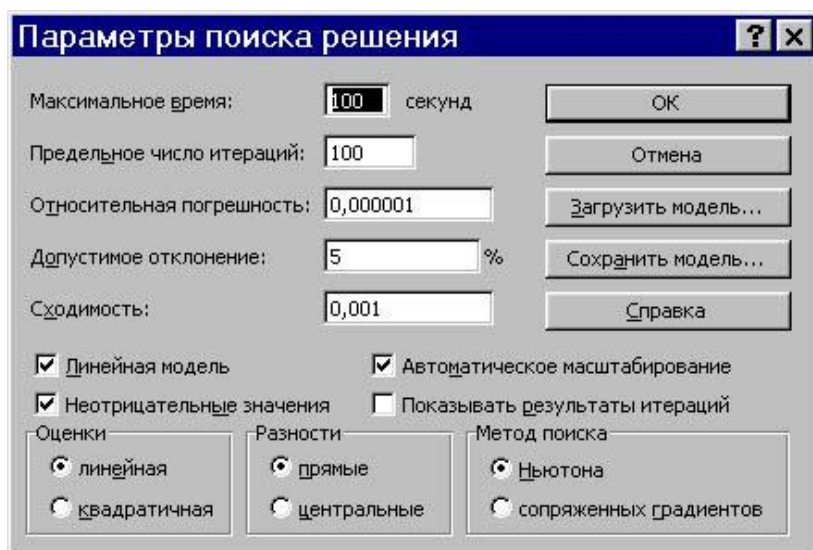


Рис. 4. Діалогове вікно Параметри поиска решения

В поле Изменяя ячейки занесемо діапазон $B\$4:\$E\$7$, тому що саме ці комірки відведені під значення обчислюваних змінних. Для цього поставимо курсор в поле Изменяя ячейки, потім поставимо курсор на комірці B4 і при натиснутій лівій кнопці миші переведемо курсор на комірку E7. В полі Изменяя ячейки з'явиться необхідний діапазон комірок.

В поле Ограничения занесемо обмеження (6)–(12), (14), а також умови незаперечності змінних. Для цього клацнемо мишею на кнопці Добавить.

З'явиться діалогове вікно Добавление ограничения (рис. 3). Третє обмеження (рис. 2) заносимо наступним чином: в вікні Поиск решения клацнути на кнопці Добавить. Відкриється діалогове вікно Добавление ограничения. В поле Ссылка на ячейки поставити курсор миші і натиснути на ліву її кнопку. Потім поставити курсор миші на комірку G4, де введене обмеження і при натиснутій кнопці миші провести аж до комірки з адресою G7. В середньому полі вікна Добавление ограничения вибираємо знак рівності, а в останнє поле описаним вище способом заносимо комірки F4:F7, що містять запаси постачальників. Аналогічно заносяться й інші обмеження (рис. 2).

Знову в поле Поиск решения (рис. 2) клацнути мишею на кнопці Параметры. На екрані з'явиться діалогове вікно Параметры поиска решения. в цьому вікні (рис. 4) установлюються параметри пошуку розв'язку. Тут слід відмітити

квадратики Линейная модель, Неотрицательные значения, Автоматическое масштабирование. Клацнемо на кнопці ОК.



Рис. 5. Діалогове вікно Результаты поиска решения

Знову потрапляємо в діалогове вікно Поиск решения, в цьому вікні (рис. 2) клацнемо лівою кнопкою миші на кнопку Выполнить. На екран виводиться вікно Результаты поиска решения (рис. 5).

Одночасно на екрані також з'являються результати розв'язку задачі (рис. 6): в стовпці і рядку Ограничения виводяться їх розраховані значення. В комірках В4:Е7 містяться значення розрахованих змінних – обсяги перевезень від кожного пункту відправлення до кожного пункту призначення. В комірці з цільовою функцією С19 – розраховане значення цільової функції.

Отже одержано наступний результат: $F_{\min} = 5200$, $x_{11} = 0$, $x_{12} = 0$, $x_{13} = 300$, $x_{14} = 300$, $x_{21} = 200$, $x_{22} = 600$, $x_{23} = 0$, $x_{24} = 0$, $x_{31} = 700$, $x_{32} = 0$, $x_{33} = 0$, $x_{34} = 300$, і фіктивні змінні $x_{41} = x_{42} = x_{44} = 0$, $x_{43} = 500$.

Книга1.xls								
	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2	Пункти	Пункти призначення						
3	відправлення	1	2	3	4	Запаси	Обмеження	
4	1	0	0	300	300	600	600	
5	2	200	600	0	0	800	800	
6	3	700	0	0	300	1000	1000	
7	4	0	0	0	0	500	500	
8								
9	Попит	900	600	800	600			
10	Обмеження	900	600	800	600			
11								
12		Матриця витрат на перевезення						
13	Пункти	Пункти призначення						
14	відправлення	1	2	3	4			
15	1	4	3	2	1			
16	2	2	1	7	9			
17	3	3	6	8	4			
18	4	0	0	0	0			
19	Цільова		5200					
20	функція							

Рис. 6. Результати розв'язку транспортної задачі з використанням електронних таблиць

Примітка. Перш ніж приступати до розв'язку транспортної задачі згідно індивідуального варіанту, необхідно перевірити баланс між загальним запасом вантажу в постачальників і загальною потребою в споживачів. Якщо відповідні суми не рівні між собою, необхідно ввести або фіктивного постачальника, або фіктивного споживача (див. вище).

Індивідуальні завдання:

Варіант № 1.

Необхідно розв'язати транспортну задачу мінімізувавши витрати на доставку продукції замовникам зі складів фірми. Враховуючи витрати на доставку однієї одиниці продукції, обсяг замовлення і кількість продукції, що зберігається на кожному складі. Тарифи на перевезення одиниці продукції, обсяги запасів продукції на складах, а також обсяги замовленої продукції наведені в таблиці:

Склад	Магазини - замовники					Запаси на складі (од. прод.)
	“Анна” ”	“Вада”	“Єва”	“Алла” ”	“Мех” ”	
Паланка	1	3	4	5	2	20
Вишківці	2	1	1	4	5	15
Забужжа	1	3	3	2	1	40
Брацлав	3	1	4	2	3	15
Обсяг замовлення (од. прод.)	15	10	25	5	9	

Варіант № 2

Необхідно розв’язати транспортну задачу, мінімізувавши витрати на доставку продукції замовникам зі складів фірми, з огляду на наступні витрати на доставку однієї одиниці продукції: обсяг замовлення і кількість продукції, що зберігається на кожному складі на основі таблиці тарифів на перевезення продукції, обсягів запасів на складі та замовлень:

Магаз./склад.	“Укртек”	“Шер”	“ТК”	“Мода”	“Віта” ”	Запаси на складі (од. пр.)
Бровари	12	14	32	20	3	54
Київ	8	10	12	24	12	32
Ірпінь	6	8	12	24	8	85
Васильків	10	18	4	8	9	162
Обсяг замовлення (од. прод.)	100	70	30	45	50	

Варіант № 3

Необхідно розв'язати транспортну задачу: мінімізувати витрати на доставку продукції замовникам зі складів фірми, з огляду на витрати на доставку однієї одиниці продукції, обсяг замовлення і кількість продукції, що зберігається на кожному складі.

Таблиця тарифів на перевезення продукції, обсяг запасів на складі та замовлень:

Магаз/склад.	“Все для дому”	“Здоровий сон”	“Фея”	“Нічне сяйво”	“Мех”	Запаси на складі (од. пр.)
Микулинці	1	3	4	5	2	20
Хоростків	2	1	1	4	5	15
Дружба	1	3	3	2	1	40
Кровінка	3	1	4	2	3	15
Обсяг замовлення (од.прод)	15	10	25	5	9	

Варіант № 4

Необхідно вирішити транспортну задачу: мінімізувати витрати на доставку продукції замовникам зі складів фірми, з огляду на наступні витрати на доставку однієї одиниці продукції, обсяг замовлення і кількість продукції, що зберігається на кожному складі.

Таблиця тарифів на перевезення продукції та обсяг запасів на складі та замовлень:

Магаз/склад у місті	Рязань	Іваново	Філі	Арбатськ	Сокольники	Запаси на складі (од. прод.)
Пролетарське	10	8	3	15	16	60
Мітіно	7	5	9	4	6	30

Строгіно	2	10	14	5	20	40
Обсяг замовлення (од.прод)	10	20	40	30	65	

Варіант № 5.

Необхідно вирішити транспортну задачу: мінімізувати витрати на доставку продукції замовникам зі складів фірми, з огляду на наступні витрати на доставку однієї одиниці продукції, обсяг замовлення і кількість продукції, що зберігається на кожному складі.

Таблиця тарифів на перевезення продукції, обсяг запасів на складі та замовлень:

Магаз/склад.	Твер	Рязань	Тула	Чехов	Запаси на складі (ед.прод)
Москва	5	3	7	2	25
Санкт-Петербург	2	6	4	5	36
Саратов	3	7	1	9	40
Самара	6	4	8	3	50
Обсяг замовлення (од.прод)	20	45	15	25	

Лабораторне заняття 5.

Кластерний аналіз в економічних процесах

Мета роботи:

Засвоїти методику класифікації економетричних об'єктів за допомогою алгоритму кластерного аналізу.

Хід роботи:

Для класифікації шести підприємств, які характеризуються чотирма економічними показниками (Y_1, Y_2, Y_3, X_1), потрібно:

- 1) знайти матрицю нормованих значень вихідних даних Z ;
- 2) побудувати матрицю відстаней між спостереженнями;
- 3) реалізувати ієрархічну агломеративну процедуру кластерного аналізу;
- 4) побудувати дендрограму;
- 5) описати економічне значення отриманих результатів.

Варіанти завдань

Варіанти завдань дані в таблиці 2.

Таблиця 2

Номер варіанта	Номер підприємства	Номер варіанта	Номер підприємства
1	3, 5, 6, 7, 8,10	14	1, 3, 4, 5, 7, 13
2	2, 3, 5, 6, 7,13	15	2, 3, 4, 5,12,13
3	1, 3, 6,7, 8,15	16	1, 2, 4, 6,13,14
4	2,6,7,8,10,13	17	2,4,5,10,11, 13
5	1, 8,9,10,11,15	18	1, 4, 6, 9,13,15
6	2, 7, 9, 13,14,15	19	1, 4, 9,10,14,15
7	3, 6, 7, 9,13,15	20	4, 8,9,10,13,15
8	1, 6, 7,10, 12,15	21	3, 4, 7,8,10,13
9	2,5, 9,13.15,14	22	2, 5,8,10,11,15
10	7,9,10,11,12,13	23	3, 4, 8,10,12,15
11	2,3,7,11,13, 14	24	1, 4, 6, 7,10,13
12	3, 4, 6, 8, 10,15	25	1, 2, 3, 6, 8,11
13	4, 5, 6,10,13, 15		

Значення показників виробничо-господарської діяльності підприємств АПК

приводяться в таблиці 3.

ОСНОВНІ ПОКАЗНИКИ ВИРОБНИЧО-ГОСПОДАРСЬКОЇ ДІЯЛЬНОСТІ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКИХ ПІДПРИЄМСТВ

Позначення і найменування показників:

Y_1 - продуктивність праці, тис. грн./чол.;

Y_2 - індекс зниження собівартості продукції;

Y_3 - рентабельність, %;

X_1 - трудомісткість одиниці продукції, чол. - год.

Таблиця 3

Значення показників виробничо-господарської діяльності
машинобудівних підприємств

Номер підприємства	Y_1	Y_2	Y_3	X_1
1	9,4	62,0	10,6	0,23
2	9,9	53,1	9,1	0,43
3	9,1	56,5	23,4	0,26
4	5,5	30,1	9,7	0,43
5	6,6	18,1	9,1	0,38
6	4,3	13,6	5,4	0,42
7	7,4	89,8	9,9	0,30
8	6,6	76,6	19,1	0,37
9	5,5	32,3	6,6	0,34
10	9,4	199,6	14,2	0,23
11	5,7	90,8	8,0	0,41
12	5,2	82,1	17,5	0,41
13	10,0	76,2	17,2	0,22
14	6,7	37,1	12,9	0,31
15	9,4	51,6	13,2	0,24

АЛГОРИТМ КЛАСТЕРНОГО АНАЛІЗУ

Кластерний аналіз - це сукупність методів класифікації багатомірних спостережень або об'єктів, заснованих на визначенні поняття відстані між об'єктами з наступним виділенням з них груп, "згустків" спостережень (кластерів, таксонів). При цьому не потрібно апріорної інформації про розподіл генеральної сукупності.

Вибір конкретного методу кластерного аналізу залежить від мети класифікації.

Кластерний аналіз використовується при дослідженні структури сукупностей соціально-економічних показників або об'єктів: підприємств, регіонів, соціологічних анкет, колективів і под.

Від матриці вихідних даних

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{i1} & x_{i2} & x_{i3} & x_{i4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & x_{n4} \end{pmatrix}$$

переходимо до матриці нормованих значень Z з елементами

$$z_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{s_j}, \quad (1)$$

де $j = 1, 2, 3, 4$ – номер показника, $i = 1, 2, \dots, n$ – номер спостереження;

$$\bar{x}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij}; \quad (2)$$

$$s_j = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j)^2} = \sqrt{(\overline{x_{ij}^2}) - (\bar{x}_j)^2}. \quad (3)$$

В якості відстані між двома спостереженнями z_i і z_v використовують "зважену" евклідову відстань, яка визначається по формулі

$$\rho_{BE}(z_i, z_v) = \sqrt{\sum_{\ell}^4 w_{\ell} (z_{i\ell} - z_{v\ell})^2}, \quad (4)$$

де w_{ℓ} – “вага” показника; $0 < w_{\ell} \leq 1$.

Якщо $w_{\ell} = 1$ для всіх $\ell = 1, 2, 3, 4$, то отримуємо звичайну евклідову відстань

$$\rho_{BE}(z_i, z_v) = \sqrt{\sum_{\ell}^4 (z_{i\ell} - z_{v\ell})^2}, \quad (5)$$

Отримані значення зручно представити у вигляді матриці відстаней

$$R = \begin{pmatrix} 0 & \rho_{12} & \rho_{13} & \dots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 0 & \rho_{23} & \dots & \rho_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{i1} & \rho_{i2} & 0 & \dots & \rho_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \rho_{n3} & \dots & 0 \end{pmatrix}; \quad \rho_{iv} = \rho_{vi}.$$

Так як матриця R симетрична, тобто $\rho_{iv} = \rho_{vi}$, то досить обмежитися записом наддіагональних елементів матриці.

Використовуючи матрицю відстаней, можна реалізувати агломеративну ієрархічну процедуру кластерного аналізу. Відстані між кластерами визначають за принципом "найближчого сусіда" чи "далекого сусіда". У першому випадку за відстань між кластерами приймають відстань між найближчими елементами цих кластерів, а в другому - між найбільш віддаленими один від одного.

Принцип роботи ієрархічних агломеративних процедур складається в

послідовному об'єднанні груп елементів спочатку найближчих, а потім все більш віддалених один від одного.

На першому кроці алгоритму кожне спостереження z_i ($i = 1, 2, \dots, n$) розглядається як окремий кластер. Надалі на кожному кроці роботи алгоритму відбувається об'єднання двох найближчих кластерів, і знову будується матриця відстаней, розмірність якої знижується на одиницю. Робота алгоритму закінчується, коли всі спостереження об'єднані в один клас.

Приклад класифікації економічних об'єктів за допомогою алгоритму кластерного аналізу

Провести класифікацію п'яти підприємств АПК (табл. 4), кожне з яких характеризується наступними економічними показниками: X_1 - прибуток від реалізації (млн. грн.); X_2 - питома вага продукції вищої категорії якості (%); X_3 - виробіток товарної продукції на одного працівника промислово-виробничого персоналу (тис. грн.); X_4 - середньорічна вартість основних виробничих фондів (млн. грн.).

Таблиця 4

Значення основних економічних показників підприємств АПК

Номер підприємства	X_1	X_2	X_3	X_4
1	3,338	78,46	5,013	7,312
2	1,909	50,83	3,423	17,785
3	6,653	26,12	3,314	21,544
4	2,105	72,11	2,534	8,125
5	6,178	13,70	1,863	1,780

Для усунення розходження в одиницях виміру показників нормуємо їх. В результаті розрахунків за формулами (1-3) одержуємо матрицю нормованих вихідних даних

$$Z = \begin{pmatrix} -0,34776501 & 1,1996448 & 1,688891 & -0,55050379 \\ -1,0591251 & 0,1026702 & 0,1833199 & 0,89186241 \\ 1,3024511 & -0,8783738 & 0,0801078 & 1,4095607 \\ -0,96155583 & 0,9475352 & -0,6584743 & -0,43853551 \\ 1,0699948 & -1,3714763 & -1,2938443 & -1,3123838 \end{pmatrix},$$

а також середні значення показників X_1, X_2, X_3, X_4 і їх середні квадратичні відхилення:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= 4,0366; & s_1 &= 2,0088277; \\ \bar{x}_2 &= 48,244; & s_2 &= 25,187455; \\ \bar{x}_3 &= 3,2294; & s_3 &= 1,0560776; \\ \bar{x}_4 &= 11,3092; & s_4 &= 7,2609854. \end{aligned}$$

В якості відстані між об'єктами візьмемо зважену евклідову відстань, причому "ваги" w_j задамо пропорційно ступеню важливості економічного показника: $w_1 = 0,4$; $w_2 = 0,3$; $w_3 = 0,2$; $w_4 = 0,1$. За формулами (4 – 5) розраховуємо матрицю відстаней між усіма п'ятьма підприємствами:

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1,159804 & 1,9283079 & 1,1311047 & 2,2980731 \\ & 0 & 1,6262618 & 0,77977305 & 1,8968315 \\ & & 0 & 1,9581917 & 1,1126867 \\ & & & 0 & 1,9881173 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

З матриці R_1 випливає, що об'єкти 2 і 4 найбільш близькі ($\rho_{2,4} \approx 0,78$) і тому поєднуються в один кластер. Після об'єднання маємо чотири кластери:

Номер кластера	1	2	3	4
Состав кластера	(1)	(2,4)	(3)	(5)

Відстань між кластерами будемо знаходити за принципом "найближчого сусіда". За відстань між кластерами S_1 і $S_{2,4}$ беремо мінімальну з відстаней $\rho_{12} = 1,159804$ і $\rho_{14} = 1,1311047$. Аналогічно знаходимо відстані між S_3 , S_5 і $S_{(2,4)}$, які відповідно рівні: $\rho_{3(2,4)} = 1,6262618$ і $\rho_{5(2,4)} = 1,8968315$. Відстань між іншими кластерами залишається без зміни. Таким чином, одержуємо матрицю відстаней

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1,1311047 & 1,9283079 & 2,2980731 \\ & 0 & 1,6262618 & 1,8968315 \\ & & 0 & 1,1126867 \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

З матриці R_2 випливає, що кластери S_3 і S_5 найбільш близькі ($\rho_{35} = 1,1126867$) і тому поєднуються в новий кластер $S_{(3,5)}$. Після об'єднання будемо мати три кластери S_1 , $S_{(2,4)}$ і $S_{(3,5)}$. Відстані між новим кластером $S_{(3,5)}$ і кластерами S_1 , $S_{(2,4)}$ відповідно рівні: $\rho_{1,(3,5)} = 1,9283079$ ($\rho_{13} = 1,9283079$ менше $\rho_{15} = 2,298073$) і $\rho_{(2,4)(3,5)} = 1,6262618$. Матриця відстаней має вигляд:

$$R_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1,1311047 & 1,9283079 \\ & 0 & 1,6262618 \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

З цієї матриці випливає, що кластери S_1 і $S_{(2,4)}$ поєднуються в новий кластер $S_{(1,2,4)}$, тому що відстань між ними мінімальна $\rho_{1(2,4)} = 1,1311047$. Тоді одержимо матрицю відстаней:

$$R_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1,6262618 \\ & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким чином на відстані $\rho_{(1,2,4)(3,5)} = 1,6262618$ два кластери $S_{(1,2,4)}$ і $S_{(3,5)}$, поєднуються в один.

Результати ієрархічної класифікації спостережень представлені на рис.1 у вигляді дендрограми, де по осі ординат приводяться відстані між поєднуваними

на даному етапі кластерами.

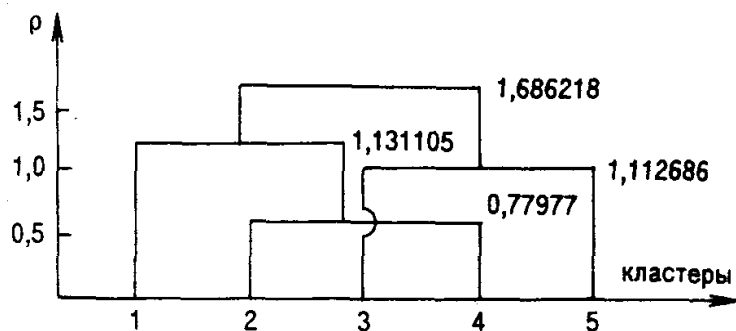


Рис. 1. Дендрограма

У задачі перевагу варто надати передостанньому етапу класифікації, коли всі об'єкти об'єднані в два кластери $S_{(1,2,4)}$ і $S_{(3,5)}$, що наочно видно на рис. 1.

Контрольні питання:

1. Для чого використовується модель кластеризації в економіці?
2. В чому полягає метод найближчого сусіда?
3. Як формується матриця нормованих вхідних змінних?
4. Методика побудови дендрограми.
5. Що відображає дендрограма?

Лабораторна робота № 6 (2 год.)

Формалізація динаміки економічних процесів ринкової економіки на основі лінійних моделей

Мета роботи: Оволодіти методикою дослідження лінійних динамічних моделей на основі рекурентних співвідношень, навчитись застосовувати комп'ютерну техніку при розробці та аналізі лінійних моделей динаміки економічних систем

Хід роботи:

1. Дослідити методику розробки динамічної моделі фінансування підприємства на основі контрольного прикладу.

Контрольний приклад:

Початкові дані діяльності. Корпорація формує план інвестиційних вкладень на наступні 2 роки. В поточний час вона може інвестувати 2 млн. грн. Через 6, 12 і 18 місяців очікується отримати прибуток від інвестування. Існує два інвестиційних проекти. Дані наведені у таблиці 5.

Таблиця 5

Початкові дані

Період	Початкові інвестиції	6 місяців	12 місяців (1 рік)	18 місяців	24 місяці (2 рік)
Прибуток від попередніх інвестувань, грн.	0	500000	400000	380000	0
Прибуток проекту А, грн.	-1000000	-700000	1800000	400000	600000
Прибуток проекту Б, грн.	-800000	500000	-200000	-700000	2000000

Умови проекту:

1. При 100% участі у проекті А корпорація має забезпечити початкові вкладення у сумі 1 млн. грн.

2. При 100% участі у проекті Б корпорація має забезпечити початкові вкладення у сумі 800 тис. грн.

3. Корпорація може розділити участь у проектах з іншими підприємствами. У такому разі, долі учасників будуть пропорційними щодо вкладених коштів.

4. Дана фінансова політика корпорації не передбачає залучених коштів у вигляді кредитів та інших. Проте, на початку кожних 6 місяців всі вільні кошти можливо покласти у банк на депозит відсоток якого складе 7% за 6 місяців.

Проблема: Корпорації необхідно визначитись, яку частину наявних коштів у розмірі 2 млн. грн. інвестувати в кожний із проектів, а також покласти на депозит пів 7% піврічних. Метою фінансової політики є максимізація грошових коштів по закінченні 24 місяців (2 років).

Розв'язок проблеми.

1. Побудова економіко-математичної моделі.

Визначимо змінні моделі:

F – доля участі у проекті А;

M – доля участі у проекті Б;

S1 – вільні кошти, що депонуються під 7% піврічних;

S2 – вільні кошти, що депонуються під 7% піврічних через 6 місяців;

S3 – вільні кошти, що депонуються під 7% піврічних через 12 місяців;

S4 – вільні кошти, що депонуються під 7% піврічних через 18 місяців.

Побудова обмежень.

1. Необхідно зазначити, що на початку кожного 6-місячного періоду інвестовані кошти не повинні перевищувати тих, що є в наявності. Обмеження має вигляд:

$$1000000F + 800000M + S1 \leq 2000000.$$

2. Після виплати відсотків по депозитному вкладу після 6 місяців сума S1 збільшиться на 7%, тобто буде становити 1,07S1. Тому аналогічні обмеження на не перевищення наявних коштів для S2, S3, S4 будуть мати вигляд:

$$700000F + S2 \leq 500000M + 1,07S1 + 500000$$

$$200000M + S3 \leq 1800000F + 1,07S2 + 400000$$

$$700000M + S4 \leq 400000F + 1,07S3 + 380000$$

Ці обмеження визначають рівняння грошового балансу при переході від

одного часового інтервалу до іншого.

Цільова функція.

Визначимо цільову функцію, як максимізацію грошових коштів наприкінці 24 місяців (без дисконтування) $600\,000F + 2\,000\,000M + 1,07S_4$.

Таким чином, загальний вигляд економіко-математичної моделі матиме вигляд:

Модель.

Максимізувати функцію:

$$g(F, M, S) = 600\,000F + 2\,000\,000M + 1,07S_4 \uparrow \max$$

При обмеженнях:

$$1\,000\,000F + 800\,000M + S_1 \leq 2\,000\,000,$$

$$700\,000F - 500\,000M - 1,07S_1 + S_2 \leq 500\,000,$$

$$-1\,800\,000F + 200\,000M - 1,07S_2 + S_3 \leq 400\,000,$$

$$-400\,000F + 700\,000M - 1,07S_3 + S_4 \leq 380\,000.$$

$$F \leq 1, M \leq 1, F \geq 0, M \geq 0, S_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4.$$

2.Рішення із застосуванням ПЕОМ.

Введення вхідних даних

Для розв'язку задачі необхідно сформувати масив вхідної інформації. Для цього введіть у комірки B2:I4 інформацію, яка наведена у таблиці 1 як показано на рис. 2.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Проекти інвестування корпорації									
2	Депозит,%	0,07	Початкові інвестиції	6 місяців	12 місяців (1 рік)	18 місяців	24 місяці (2 рік)			
3	Проект А, тис. грн.		-1000	-700	1800	400	600			
4	Проект Б, тис. грн.		-800	500	-200	-700	2000			
5										

Рис. 2 Електронна форма вводу початкових даних моделювання

Формування розрахункової таблиці

Дані для вихідних розрахунків сформуєте у відповідності із рис. 3.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	
1		Проекти інвестування корпорації								
2		Депозит,%	0,07	Початкові інвестиції	6 місяців	12 місяців (1 рік)	18 місяців		24 місяці (2 рік)	
3		Проект А, тис. грн.		-1000	-700	1800	400		600	
4		Проект Б, тис. грн.		-800	500	-200	-700		2000	
5										
6		Розподіл грошових коштів інвестицій								
7		Інвестиції	Відсоток участі	Початкові інвестиції	6 місяців	12 місяців (1 рік)	18 місяців		Прибуток після 24 місяців (2 років)	
8		Проект А, тис. грн.	1	=-C8*D3	=-C8*E3	=-C8*F3	=-C8*G3		=C8*I3	
9		Проект Б, тис. грн.	1	=-C9*D4	=-C9*E4	=-C9*F4	=-C9*G4		=C9*I4	
10		Вклади в депозит, тис. грн.			=-D13	=-E13	=-F13		=G13	
11		Прибуток від депозиту, тис. грн.			=-D13*C\$2	=-E13*C\$2	=-F13*C\$2		=G13*C2	
12		Необхідно коштів:		=СУММ(D8:D11)	=СУММ(E8:E11)	=СУММ(F8:F11)	=СУММ(G8:G11)		=СУММ(I8:I11)	
13		Вклади в депозит, тис. грн.		200	514	2550	2808			
14		Інвестування, тис. грн.		=D12+D13	=E12+E13	=F12+F13	=G12+G13			
15		Наявні кошти, тис. грн.		2000	500	400	380			
16										

Рис. 3 Електронна форма розрахунку економіко-математичної моделі між наявними коштами та вкладеними коштами у проект А і проект Б (200 тис. грн., оскільки в наявності 2 млн. грн.):

Вклади в депозит = Наявні кошти – Вклад у проект А – Вклад у проект Б;

Вклади в депозит = 2 000 000 – 1 000 000 – 800 000 = 200 000 грн.

2. На наступних етапах сума депозиту обчислюється з урахуванням прибутків попередніх періодів (сума на депозиті має покрити поточні збитки, а попередні прибутки можна покласти на депозит).

Депозит для періоду 6 місяців = Попередній прибуток 6 місяців - поточний прибуток 6 місяців; (514 тис. грн. = 500 тис. грн. – (- 14 тис. грн.)). По аналогії розраховуємо депозитні вклади для всіх періодів:

Депозит для періоду 12 місяців = Депозит для періоду 6 місяців
Депозит для періоду 6 місяців = 2550 тис. грн.;

Депозит для періоду 18 місяців = 2808 тис. грн.

3. В інші комірки введіть формули згідно міркувань описаних у постановці економіко-математичної моделі.

Пошук оптимального рішення в Excel

Для пошуку оптимальних значень інвестиційної політики скористаємось пунктом меню "Сервис" → "Поиск решения".

У вікні "Поиск решения" необхідно вказати заповнення параметрів по аналогії з рис. 4.

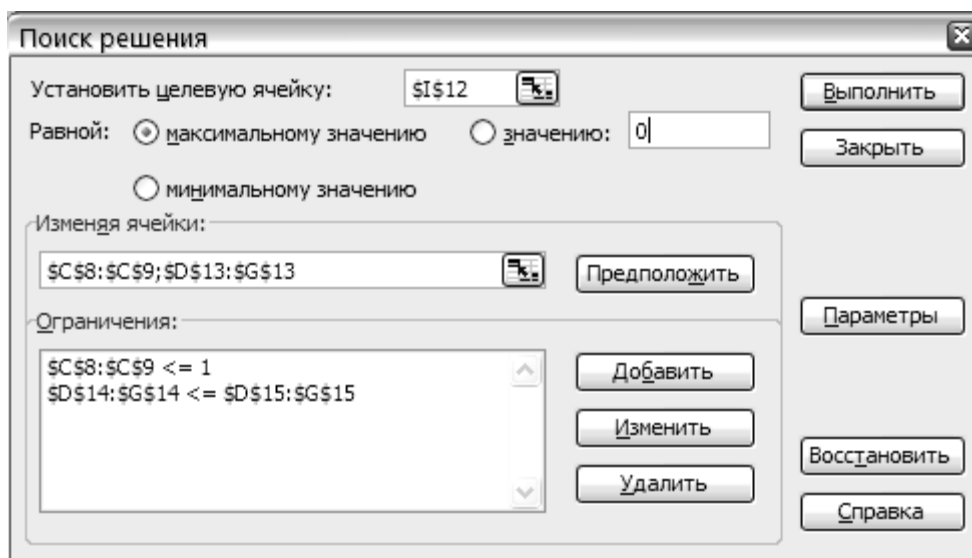


Рис. 4 Електронна форма вводу умов моделювання

Після виконаних дій натисніть кнопку "Выполнить". Після виконаних операцій комп'ютер наведе у таблиці оптимальне рішення (рис. 5).

Проекти інвестування корпорації						
		Початкові інвестиції	6 місяців	12 місяців (1 рік)	18 місяців	24 місяці (2 рік)
Депозит, %	0,07					
Проект А, тис. грн.		-1000	-700	1800	400	600
Проект Б, тис. грн.		-800	500	-200	-700	2000
Розподіл грошових коштів інвестицій						
Інвестиції	Відсоток участі	Початкові інвестиції	6 місяців	12 місяців (1 рік)	18 місяців	Прибуток після 24 місяців (2 років)
Проект А, тис. грн.	1	1 000	700	-1 800	-400	600
Проект Б, тис. грн.	1	800	-500	200	700	2000
Вклади в депозит, тис. грн.			-200,00	-514,00	-2 549,98	2 808
Прибуток від депозиту, тис. грн.			-14,00	-35,98	-178,50	197
Необхідно коштів:		1 800	-14	-2 150	-2 428	5605
Вклади в депозит, тис. грн.		200,00	514,00	2 549,98	2 808,48	
Інвестування, тис. грн.		2 000	500	400	380	
Нааявні кошти, тис. грн.		2 000	500	400	380	

Рис. 5 Електронна форма отриманих результатів моделювання

Аналіз чутливості

При записі результатів моделювання отримайте два звіти "Устойчивость" та "Пределы". Складіть звіт про стійкість процесу (таблиця 6). Охарактеризуйте отримані результати.

Таблиця 6

Результати аналізу чутливості моделі

Комірка	Інвестиції	Значення	Тіньова ціна	Граничне значення
\$D\$14	Інвестування, тис. грн. Початкові інвестиції	2 000	1	200,00
\$E\$14	Інвестування, тис. грн. 6 місяців	500	1	514,00
\$F\$14	Інвестування, тис. грн. 12 місяців (1 рік)	400	1	2 549,98
\$G\$14	Інвестування, тис. грн. 18 місяців	380	1	2 808,48

Як видно, за результатами моделювання, максимальний отриманий прибуток при даному плані фінансування за 2 роки складе 5605 тис. грн. Прибуток від депозиту буде становити 197 тис. грн. при сумарному депозиті 2808 тис. грн. Як видно із наміченої політики – депозитні вклади є одним із суттєвих прийомів використання власних коштів.

2. Сформууйте власну методику динамічної моделі управління фінансовими активами відповідно до власного варіанту (таблиця 7).

Методика моделювання має включати:

- економічну постановку задачі з описом умов;
- формалізовану економіко-математичну модель;
- розрахунок з характеристикою оптимальних показників (загального прибутку і схеми фінансування);

- аналіз стійкості моделі;
- змініть задану депозитну ставку в сторону збільшення на 1% і покажіть, яким чином буде змінюватись оптимальний прибуток;
- змініть задану ставку депозиту в сторону зменшення на 1% і покажіть, чому буде дорівнювати оптимальний прибуток;
- зміни оптимального прибутку від ставки депозиту наведіть у вигляді графіку.

Початкові дані діяльності. Підприємство формує план використання власних коштів на наступні 2 роки. В поточний час можна використати W млн. грн. Через 6, 12 і 18 місяців очікується отримати прибуток від вкладених коштів. Існує два проекти використання коштів. Дані наведені у таблиці 7.

Таблиця 7

Початкові дані

Період	На початок етапу використання	6 місяців	12 місяців	18 місяців	24 місяці
Нерозподілений прибуток минулих періодів, тис. грн.	0	W_1	W_2	W_3	0
Прибуток проекту А, грн.	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
Прибуток проекту Б, грн.	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5

Завдання:

Відповідно до свого варіанту та умов задачі контрольного прикладу розробити із застосуванням табличного процесору Excel (таблиця 17):

- граф-схему системи кредитної спілки;
- розрахувати перехідні імовірності системи;

- провести аналіз внутрішнього стану системи відповідно до процентної політики спілки.

- розробити проект системи дій спілки у разі поступового збільшення розміру кредитних ставок на 2% щоквартально при максимальному розмірі 20%.

Таблиця 17

№	Розмір процентної ставки за 1 квартал	Розмір процентної ставки за 2 квартал	Розмір процентної ставки за 3 квартал	Розмір процентної ставки за 4 квартал
1	4	5	10	12
2	2	10	9	10
3	3	12	5	11
4	5	14	6	14
5	4	7	12	17
6	7	9	14	10
7	2	8	10	5
8	5	4	3	6
9	4	5	2	7
10	8	2	5	8
11	5	8	7	10
12	2	7	10	4
13	3	12	14	5
14	8	15	9	10
15	10	6	4	8

Умови проекту:

1. При 100% участі у проекті А початкові вкладення складають D1.
2. При 100% участі у проекті Б початкові вкладення складають Q1.
3. На початку кожних 6 місяців всі вільні кошти можливо покласти у банк на депозит відсоток якого складе r за 6 місяців.

Проблема: Визначити, яку частину наявних коштів у розмірі W млн. грн. використати в проектах, а також покласти на депозит під r піврічних. Метою фінансової політики є максимізація грошових коштів по закінченні 24 місяців.

Таблиця 7

Варіанти завдань:

Варіант 1 ($r = 5\%$; $W = 1,7$)				
W 1		W 2		W 3
380		400		100
D1	D2	D3	D4	D5
-500	-300	1200	-200	300
Q1	Q2	Q3	Q4	Q5
-1000	200	-50	50	1500
Варіант 2 ($r = 3\%$; $W = 0,42$)				
W 1		W 2		W 3
10		25		40
D1	D2	D3	D4	D5
-200	-150	-100	400	700
Q1	Q2	Q3	Q4	Q5
-150	50	-50	300	20
Варіант 3 ($r = 7\%$; $W = 0,05$)				
W 1		W 2		W 3
5		2		2
D1	D2	D3	D4	D5
-10	-10	2	-10	40
Q1	Q2	Q3	Q4	Q5
-5	-15	5	20	3
Варіант 4 ($r = 5\%$; $W = 0,005$)				
W 1		W 2		W 3
1,0		0,5		0,6

D1	D2	D3	D4	D5
-2,0	3,2	1,0	-0,5	4
Q1	Q2	Q3	Q4	Q5
-3,0	-0,5	0,7	0,8	5
Варіант 5 (r = 6%; W = 0,015)				
W 1		W 2		W 3
2,0		3,0		9,0
D1	D2	D3	D4	D5
-7,0	1,6	-0,2	0,8	12
Q1	Q2	Q3	Q4	Q5
-3,0	0,9	-0,9	1,2	4
Варіант 6 (r = 9 %; W = 0,003)				
W 1		W 2		W 3
2		3		9
D1	D2	D3	D4	D5
-0,9	0,4	0,8	0,7	1,2
Q1	Q2	Q3	Q4	Q5
-0,5	0,2	-0,4	1,6	2,9
Варіант 7 (r = 9 %; W = 2,2)				
W 1		W 2		W 3
1		2		1
D1	D2	D3	D4	D5
-1000,0	500,0	-300,0	200,0	500
Q1	Q2	Q3	Q4	Q5
-600,0	-200,0	600,0	800,0	1800
Варіант 8 (r = 4 %; W = 1,4)				
W 1		W 2		W 3
1		2		4
D1	D2	D3	D4	D5

-800,0	200,0	-300,0	100,0	500
Q1	Q2	Q3	Q4	Q5
-600,0	-200,0	300,0	100,0	1100
Варіант 9 ($r = 5\%$; $W = 0,7$)				
W 1		W 2		W 3
5		7		4
D1	D2	D3	D4	D5
-100,0	200,0	-70,0	50,0	360,0
Q1	Q2	Q3	Q4	Q5
-500,0	-50,0	100,0	250,0	350,0
Варіант 10 ($r = 3\%$; $W = 1,1$)				
W 1		W 2		W 3
10		15		20
D1	D2	D3	D4	D5
-500,0	200,0	200,0	100,0	100
Q1	Q2	Q3	Q4	Q5
-300,0	100,0	400,0	-150,0	250
Варіант 11 ($r = 6\%$; $W = 1,3$)				
W 1		W 2		W 3
50		60		90
D1	D2	D3	D4	D5
-1000,0	500,0	500,0	-120,0	800
Q1	Q2	Q3	Q4	Q5
-300,0	200,0	150,0	-50,0	500
Варіант 12 ($r = 5\%$; $W = 0,5$)				
W 1		W 2		W 3
10		15		20
D1	D2	D3	D4	D5
-100,0	5,0	10,0	90,0	110

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5
-400,0	100,0	20,0	300,0	50
Варіант 13 ($r = 7\%$; $W = 0,9$)				
W 1		W 2		W 3
250		400		600
D1	D2	D3	D4	D5
-500,0	200,0	-10,0	180,0	180
Q1	Q2	Q3	Q4	Q5
-80,0	-50,0	60,0	90,0	20
Варіант 14 ($r = 6\%$; $W = 0,008$)				
W 1		W 2		W 3
5		8		12
D1	D2	D3	D4	D5
-400,0	50,0	-100,0	700,0	750,0
Q1	Q2	Q3	Q4	Q5
-260,0	200,0	-150,0	450,0	80
Варіант 15 ($r = 6\%$; $W = 1,9$)				
W 1		W 2		W 3
10		12		6
D1	D2	D3	D4	D5
-900,0	100,0	800,0	-150,0	900
Q1	Q2	Q3	Q4	Q5
-700,0	-150,0	300,0	400,0	1200
Варіант 16 ($r = 6\%$; $W = 0,005$)				
W 1		W 2		W 3
3		5		10
D1	D2	D3	D4	D5
-270,0	50,0	80,0	-20,0	170
Q1	Q2	Q3	Q4	Q5

-70,0	-50,0	150,0	-30,0	60
-------	-------	-------	-------	----

Контрольні питання:

1. Поняття динаміки економічного процесу;
2. Види економічних процесів;
3. Поняття економічних систем і їх класифікація;
4. Принципи побудови лінійних моделей економічної динаміки;
5. Загальна формалізація лінійних моделей економічної динаміки;
6. Рекурентні співвідношення і їх характеристика;
7. Методика дослідження динамічних лінійних моделей;
8. Поняття чутливості моделі до змін вхідних параметрів.

Лабораторна робота №7 (2 год.)

Застосування ланцюгів Маркова в моделюванні економічних процесів.

Мета роботи:

Навчитись будувати економічні системи визначені імовірнісними параметрами та розробляти стратегії функціонування систем обслуговування на основі Марковських процесів

Стислі теоретичні відомості

Випадкова функція $X(t)$, аргументом якої є час, називається випадковим процесом. Марковські процеси є особливим видом випадкових процесів. Особливе місце марковських процесів серед інших класів випадкових процесів обумовлено наступними обставинами: для марковських процесів добре розроблений математичний апарат, що дозволяє вирішувати багато практичних задач; за допомогою марковських процесів можна описати поведінку досить складних систем.

Визначення. Випадковий процес, що протікає в якій-небудь системі S , називається марковським (або процесом без післядії), якщо він має наступну

властивість: для будь-якого моменту часу t_0 імовірність будь-якого стану системи в майбутньому (при $t > t_0$) залежить тільки від її стану в сьогодні (при $t = t_0$) і не залежить від того, коли і яким образом система S прийшла в цей стан.

Класифікація марковських процесів. Класифікація марковських випадкових процесів виробляється залежно від безперервності або дискретності множини значень функції $X(t)$ і параметра t . Розрізняють наступні основні види марковських випадкових процесів:

- с дискретними станами й дискретним часом (ланцюг Маркова);
- с безперервними станами й дискретним часом (марковські послідовності);
- с дискретними станами й безперервним часом (безперервний ланцюг Маркова);
- с безперервним станом і безперервним часом.

Граф станів. Марковські процеси з дискретними станами зручно ілюструвати за допомогою так названого графа станів (рис. 1), де кружками позначені стани S_1, S_2, \dots системи S , а стрілками - можливі переходи зі стану в стан. На графі відзначаються тільки безпосередні переходи, а не переходи через інші стани. Можливі затримки в колишньому стані зображують «петлею», тобто стрілкою, спрямованою з даного стану в нього ж. Число станів системи може бути як кінцевим, так і нескінченним (але рахунковим). Приклад графа станів системи S представлений на рис. 12.

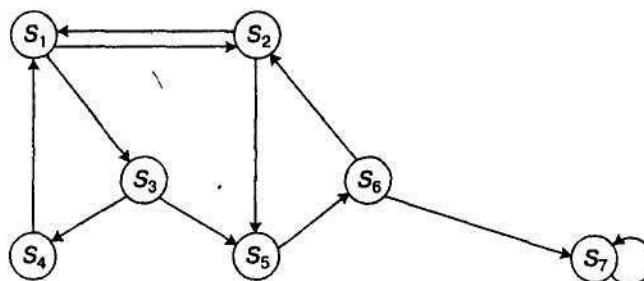


Рис. 12. Граф станів системи S

Марковський випадковий процес із дискретними станами - дискретним часом називають марковським ланцюгом. Для такого процесу моменти t_1, t_2, \dots , коли система S може міняти свій стан, розглядають як послідовні кроки процесу,

а як аргумент, від якого залежить процес, виступає не час t , а номер кроку $1, 2, \dots$, до, ... Випадковий процес у цьому випадку характеризується послідовністю станів $S(0), S(1), S(2), \dots, S(k), \dots$, де $S(0)$ - початковий стан системи (перед першим кроком); $S(1)$ - стан системи після першого кроку; $S(k)$ - стан системи після k -го кроку...

Подія $\{S(k) = S_i\}$, суть якої полягає в тому, що відразу після k -го кроку система перебуває в стані S_i ($i=1, 2, \dots$), є випадковою подією. Послідовність станів $S(0), S(1), \dots, S(k), \dots$ можна розглядати як послідовність випадкових подій. Така випадкова послідовність подій називається марковським ланцюгом, якщо для кожного кроку ймовірність переходу з будь-якого стану S , у будь-яке S не залежить від того, коли і як система прийшла в стан S . Початковий стан $S(0)$ може бути заданим заздалегідь або випадковим.

Ймовірностями станів ланцюга Маркова називаються ймовірності $P_i(k)$ того, що після k -го кроку (i до $\{до + 1\}$ -го) система S буде перебувати в стані S ($i=1, 2, \dots, n$). Очевидно сума ймовірностей буде дорівнювати:

$$\sum_{i=1}^n P_i(k) = 1.$$

Початковим розподілом ймовірностей марковського ланцюга називається розподіл ймовірностей станів на початку процесу:

$$P_1(0), P_2(0), \dots, P_i(0), \dots, P_n(0).$$

В окремому випадку, якщо початковий стан системи $S(0)$ у точності відомо $S(0) = S(i)$, те початкова ймовірність $P(0) = 1$, а всі інші дорівнюють нулю. Ймовірністю переходу (перехідною ймовірністю) на k -му кроці зі стану S , у стан S_i називається умовна ймовірність того, що система S після k -го кроку виявиться в стані S_i за умови, що безпосередньо перед цим (після до-1 кроку) вона перебувала в стані S_i .

Оскільки система може перебувати в одному з n станів, то для кожного моменту часу t необхідно задати n^2 ймовірностей переходу P_{ij} які зручно представити у вигляді наступної матриці:

$$\|P_y\| = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{i1} & P_{i2} & \dots & P_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{bmatrix},$$

де P_{ij} - імовірність переходу за один крок зі стану S_i у стан S_j , P_{ii} - імовірність затримки системи в стані S_i .

Матриця називається перехідною або матрицею перехідних імовірностей. Перехідні ймовірності однорідного марківського ланцюга P_{ij} утворюють квадратну матрицю розміру $n \times n$. Відзначимо деякі її особливості:

1. Кожен рядок характеризує обраний стан системи, а її елементи являють собою ймовірності всіх можливих переходів за один крок з обраного (з i -го) стану, у тому числі й перехід у саме себе.

2. Елементи стовпців показують імовірності всіх можливих переходів системи за один крок у задане (j -е) стан (інакше кажучи, рядок характеризує ймовірність переходу системи зі стану, стовпець - у стан).

3. Сума ймовірностей кожного рядка дорівнює одиниці, тому що переходи утворюють повну групу неспільних подій:

$$\sum_{j=1}^n P_{ij} = 1, i = \overline{1, n}.$$

4. По головній діагоналі матриці перехідних імовірностей коштують імовірності P_{ii} того, що система не вийде зі стану S_i , а залишиться в ньому.

Якщо для однорідної марковського ланцюга задані початковий розподіл імовірностей і матриця перехідних імовірностей, то ймовірності станів системи $P_i\{k\}$ визначаються по рекуррентній формули:

$$P_i(k) = \sum_{j=1}^n P_j(k-1) \cdot P_{ji}, \quad (i = \overline{1, n}; j = \overline{1, n}).$$

Приклад аналізу Марківського процесу

Розглянемо стан кредитної спілки за величиною відсотків по кредитах: 2%, 3%, 4%, які встановлюються на початку кожного кварталу і є фіксованими. Якщо кредитну спілку розглядати як систему, то вона в кожний момент часу може

знаходиться у трьох станах : S1 — процентная ставка 2%, S2 — процентная ставка 3%, S3 — процентная ставка 4%. Зміна перехідних імовірностей на протязі часу незначна.

Так як множина станів кінцева, в яких може перебувати система S, звичайно (три стани), то процес у системі S випадковий процес - дискретний. З певним ступенем погрішності можна припустити, що ймовірність перебування кредитної спілки в одному зі своїх станів у майбутньому залежить в істотному тільки від стану в сьогодні й не залежить від його станів у минулому. А тому розглянутий випадковий процес можна вважати марковским. Оскільки залежністю перехідних імовірностей від часу можна зневажити, то розглянутий процес буде однорідним.

Таким чином, у системі S протікає однорідний марковський дискретний випадковий процес із дискретним часом, тобто маємо однорідний марковський ланцюг.

Приклад виконання лабораторної роботи по ланцюгах Маркова

Тема. Моделювання економічних процесів застосовуючи ланцюга Маркова та спрогнозувати обсяги реалізованої продукції підприємства.

Мета. Виявити зміни економічної підсистеми за законом Марківського процесу через прохідні стани систем.

Завдання:

Нехай за угодою з покупцем ТОВ «Купідон» якому підприємство продавець ТОВ «Пролісок» реалізує продукцію на умовах комерційного товарного кредиту відомі щомісячні обсяги реалізації V, відомі суми коштів що надійшли на рахунок оплати та реалізовані щомісячні простроченої дебіторської заборгованості без врахування відстрочки. Спрогнозувати обсяги реалізованої продукції та заборгованість на 15,18,24 крок.

Місяць		Місячний обсяг реалізації (V)	Оплата за місяць	Прострочена деб. Заб. (Z)
Січень	0	15008	11008	4008
Лютий	1	15008	9008	6008
Березень	2	10000	6008	4008
Квітень	3	5008	3008	2008
Травень	4	5008	3008	2008

Червень	5	10008	6008	4008
Липень	6	5008	3008	2008
Серпень	7	10008	6008	4008
Вересень	8	15008	9008	6008
Жовтень	9	10008	6008	4008
Листопад	10	10008	8008	2008
Грудень	11	15008	11008	4008

Є такі пари показників (V) і (Z)

A1	(5008-2008)
A2	(10008-2008)
A3	(10008-4008)
A4	(15008-4008)
A5	(15008-6008)

Вносим в таблицю номера угод і перехід з стану в стан , кількість кроків і імовірності настання. Отримаємо.

№ кроку	Місячний обсяг реалізації	Простро чена деб. Заб.	Угод а	Перехід		Кількі сть кроків	Імовірні сть
0	15008	4008	A4	-	-	-	-
1	15008	6008	A5	A4	A5	1	0,0909090 9
2	10000	4008	A3	A5	A3	2	0,1818181 8
3	5008	2008	A1	A3	A1	3	0,2727272 7
4	5008	2008	A1	A1	A1		
5	10008	4008	A3	A1	A3	5	0,4545454 5
6	5008	2008	A1	A3	A1		
7	10008	4008	A3	A1	A3		
8	15008	6008	A5	A3	A5		
9	10008	4008	A3	A5	A3		
10	10008	2008	A2	A3	A2	10	0,9090909 1
11	15008	4008	A4	A2	A4	11	1

Напрямок $P(t_0) = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$

Знайдемо стохастичну матрицю :

	A1	A2	A3	A4	A5
A1	0,54545455	0	0,454545455	0	0
A2	0	0	0	1	0
A3	0,27272727	0	0,727272727	0	0
A4	0	0	0	0,909091	0,090909091
A5	0	0	0,181818182	0	0,818181818

Всі вхідні дані, які потрібні для розрахунків в Матлабі в нас є. Тому вносим в Матлаб.

В дані програмі записується таким чином.

$A = [[0.5454; 0; 0.2727; 0; 0] [0; 0; 0; 0; 0] [0.4545; 0; 0.7272; 0; 0.1818] [0; 1; 0; 0.9090; 0] [0; 0; 0; 0.0909; 0.8181]]$

Отримаємо матрицю:

$A =$

0.5454	0	0.4545	0	0
0	0	0	1.0000	0
0.2727	0	0.7272	0	0
0	0	0	0.9090	0.0909
0	0	0.1818	0	0.8181

Вносимо вектор:

$p = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$

$p =$

0 0 0 1 0

Знайдемо прогнозні значення обсягів реалізованої продукції та заборгованість на 15,18,24 крок. Отримаємо:

$p_{15} = [p_{14} * A]$

$p_{15} =$

0.0045 0 0.0406 0.7511 0.2035

На 15 кроці система буде знаходитися ще в угоді A_4 - (15008-4008) тому що, імовірність прогнозованого значення найбільша -0,7511 Оплата за місяць становитиме -11008грн.

$p_{18} = [p_{17} * A]$

$p_{18} =$

0.0411 0 0.1298 0.5641 0.

На 18 кроці система буде продовжувати знаходитися в угоді A_4 -(15008-4008)тому що значення рівне -0,5641 і оплата за місяць рівна 11008грн

$$p_{24}=[p_{23} * A]$$

$$p_{24} =$$

0.1467 0 0.3055 0.3182 0.2284

На кроці 24 система буде також в угоді A_4 -(15008-4008) з імовірність 0,3182 і оплата за місяць становитиме 11008 грн. Імовірність, що система на даному кроці перейде з угоди A_4 в A_3 -0,3055 і місячний обсяг реалізації продукції і прострочена дебіторська заборгованість становитиме - (10008-4008) в дані угоді оплата за місяць становитиме 6008грн.

Питання з курсу " Математичні методи ринкової економіки"

1. Поняття моделі економічного процесу.
2. Принципи моделювання економічних процесів.
3. Класифікація економічних систем.
4. Класифікація зв'язків в економічних системах.
5. Принцип ієрархічності в економічних системах.
6. Принцип загальної мети в економічних системах.
7. Принцип системного підходу в аналізі економічних систем.
8. Принцип модульності при моделюванні економічних процесів.
9. Поняття структурної схеми моделей економічних процесів.
10. Модель Марковіца в оптимізації інвестиційного портфелю цінних паперів банку.
11. Математичне представлення дохідності і ризику у моделі Марковіца.
12. Моделювання оптимальної структури портфелю цінних паперів на основі моделі Шарпа.
13. Особливості моделювання оптимальної структури портфелю цінних паперів на основі моделі Квазі-Шарпа.
14. Принцип моделювання портфелю цінних паперів банку на основі теорії VALUE at RISK.
15. Моделювання портфелю активів банку при нечітких вхідних та вихідних параметрів(нечітка логіка).

16. Особливості моделювання та прогнозування економічних процесів на основі ланцюгів Маркова.
17. Поняття та аналіз чутливості в економічних моделях.
18. Принципи оцінки соціально-економічних систем.
19. Принципи побудови шкал вимірювання.
20. Вагові коефіцієнти та методика багатовимірного шкалування.
21. Стохастична природа та критерії її оцінки в економічних процесах.
22. Дискретний марківський процес з дискретним часом в економічних процесах.
23. Дискретний марківський процес з безперервним часом в економічних процесах.
24. Основні ознаки та застосування методів теорії масового обслуговування при формалізації економічних процесів.
25. Поняття економічних змін в економічних процесах.
26. Зміни та оцінка тенденції основних економічних характеристик на макрорівні.
27. Зміни та оцінка основних економічних характеристик на мікрорівні.
28. Класифікація ознак в економічних процесах на основі кластеризації та побудови дендрограми.
29. Метод найближчого сусіда та поняття кластерних відстаней.

Використаної літератури

1. Є.В. Кочура, М.В. Косарев Моделювання макроекономічної динаміки - Київ: Центр навчальної літератури, 2003. - 236 с.
2. Е.В. Бережная, В.И. Бережной Математические методы моделирования экономических систем- Москва: Финансы и статистика, 2003 - 368 с.
3. А.В. Катренко Системний аналіз об'єктів та процесів комп'ютеризації - Львів: Новий світ, 2003 - 424 с.
4. Э.Ферстер, Б.Ренц Методы корреляционного и регрессионного анализа., М.:Финансы и статистика, 1983. - 186 с.

5. Шимко П.Д. Оптимальное управление экономическими системами – Санкт-Петербург: Издательский дом "Бизнес-пресса", 2004. – с. 43-76.

6. В.В. Федосеев, А.Н. Гармаш, Д.М. Дайитбегов и др. Экономико-математические методы и прикладные модели / Под ред. В.В. Федосеева – М.: ЮНИТИ, 2002. – 456 с.

7. Албанская Л.В., Бабешко Л.О., Баусов Л.И и др. Экономико-математическое моделирование / Под ред. И.Н. Дрогобыцкого – М.: Экзамен, 2004. – 246 с.

