УДК 531

Куран Я. –ст. гр. МБс-31
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

ВИКОРИСТАНННЯ МЕТОДУ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РЯДІВ РІБ'ЄРА-ФАЙЛОНА ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ БІГАРМОНІЧНОЇ ФУНКЦІЇ НАПРУЖЕНЬ

Науковий керівник: к.т.н., доцент Федак С.І.

У визначенні функції напружень $\varphi(x, y)$ розв'язку плоскої задачі теорії пружності можна застосовувати тригонометричні ряди. З цією метою використаємо тригонометричну функцію $\varphi = Y \cdot \cos \alpha x,$ де Y - функція, що залежить тільки від координати у; $\alpha = n\pi / l;$ n — будь-яке ціле число; l — довжина пластинки в напрямку осі x.

З'ясуємо, при яких умовах функція φ є бігармонічною, тобто задовольняє рівняння $\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4} = 0 \cdot$

Четверті похідні функції φ: $\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} = \alpha^4 Y \cos\alpha x;$ $\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2} = -\alpha^2 Y^n \cos\alpha x;$ $\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4} = Y^{IV} \cos\alpha x.$

Підставляючи їх у зазначене рівняння, одержуємо
$\alpha^4 Y \cos\alpha x - 2\alpha^2 Y'' \cos\alpha x + Y^{IV} \cos\alpha x = 0,$ або $\cos\alpha x\left(Y^{IV} - 2\alpha^2 Y'' + \alpha^4 Y\right) = 0.$

Це рівняння перетворюється в тотожність при будь-яких значеннях аргумента x, якщо $Y(y)$ задовольняє диференціальне рівняння $Y^{IV} - 2\alpha^2 Y'' + \alpha^4 Y = 0$. Розв'язок цього рівняння можна представити за допомогою гіперболічних функцій: $Y = A_n \cdot ch\alpha y + B_n \cdot y \cdot ch\alpha y + C_n \cdot sh\alpha y + D_n \cdot y \cdot sh\alpha y$. Підставивши у вираз функції $\varphi(x, y)$, отримуємо бігармонічну функцію у вигляді $\varphi(x, y) = \cos\alpha x\left(A_n ch\alpha y + B_n y ch\alpha y + C_n sh\alpha y + D_n y sh\alpha y\right).$

Можна також показати, що функція
$\varphi(x, y) = \sin\alpha x\left(A'_n ch\alpha y + B'_n y ch\alpha y + C'_n sh\alpha y + D'_n y sh\alpha y\right).$
також є бігармонічною і може бути використана для розв'язку плоскої задачі.

Якщо числу n надавати різних значень, то щоразу будуть отримані нові функції, які відрізняються значеннями параметра α та постійними A_n, B_n, C_n, D_n. Тому загальний розв'язок бігармонічного рівняння може бути представлений у вигляді нескінченного ряду

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}[\cos\alpha x\left(A_n ch\alpha y + B_n y ch\alpha y + C_n sh\alpha y + D_n y sh\alpha y\right) + \\ + \sin\alpha x\left(A'_n ch\alpha y + B'_n y ch\alpha y + C'_n sh\alpha y + D'_n y sh\alpha y\right)]$$

Постійні A_n, $B_n, \ldots, C'_n, D'_n$ визначаються з умов на контурі. Навантаження на контурі повинно бути розкладено в тригонометричний ряд Фур'є по синусах і косинусах.

За допомогою останньої функції напружень можна отримати рішення для більш широкого кола задач, ніж за допомогою поліномів. Серед них можна назвати задачу про згинання балки-стінки, задачу про дію на пластинку навантажень, розподілених уздовж контура за будь-яким законом (у тому числі зосередженої сили).