

УДК 517.944

Воробець С. – ст. гр. КА-11

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

РОЗВ'ЯЗОК ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ В ЗАДАЧІ ПРО ЗГИН ПРЯМОКУТНОЇ ПЛАСТИНКИ

Науковий керівник: к.ф.-м.н., доцент Шелестовський Б.Г.

Розглянемо прямокутну пластинку $\left(0 \leq x \leq a; -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}\right)$, яка закріплена по краях $x=0$, $x=a$ та зігнута моментами, що розподілені по краях $y = \pm \frac{b}{2}$. Прогини w повинні задовольняти однорідному диференціальному рівнянню

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0. \quad (1)$$

Граничні умови задачі:

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \text{при } x = 0 \text{ та } x = a; \quad (2)$$

$$w = 0, \quad \text{при } y = \pm \frac{b}{2}. \quad (3)$$

$$-D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = f \quad x, \quad \text{при } y = \pm \frac{b}{2}. \quad (4)$$

Розв'язок рівня (1) шукаємо у вигляді

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \quad y \quad \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (5)$$

Кожний член ряду задовольняє умови (2). Підставивши (5) в (1), одержимо звичайне диференціальне рівняння для визначення $Y_m \quad y$

$$Y_m^{IV} \quad y - 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 Y_m'' \quad y + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 \cdot Y_m \quad y = 0. \quad (6)$$

Характеристичне рівняння:

$$k^4 - 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 k^2 + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 = 0; \quad k_{1,2} = \frac{m\pi}{a}, \quad k_{3,4} = -\frac{m\pi}{a}.$$

Загальний розв'язок рівняння (6) має вигляд

$$Y_m \quad y = A_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + B_m \cdot \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + C_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a}. \quad (7)$$

Внаслідок симетрії $Y_m \quad y$ повинна бути парною функцією від y , і тоді необхідно покласти $A_m = D_m = 0$. Після цього з рівняння (5) отримаємо

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \left(B_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + C_m \frac{m\pi y}{a} \cdot \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (8)$$

Сталі B_m та C_m знаходимо задовольняючи граничні умови (3), (4).