УДК 517.946.9

Четвєрікова С. - ст. гр. ХО-22
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

РОЗВ'ЯЗОК ОДНІЄЇ ЕВОЛЮЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ ТА ЙОГО НАБЛИЖЕННЯ НА ВІДРІЗКУ

Науковий керівник: к.ф.-м.н., доцент Фурсевич Л.В.

На відрізку $x \in [0,1]$ при $t \ge 0$ розглядається задача для інтегро-диференціального рівняння

$$\begin{aligned} & u_t - u_{xx} + \dot{\varepsilon} * u_t - \dot{\lambda} * u_{xx} = f_0; \quad u(0,x) = \omega; \\ & u_x(t,0) = 0; \quad \left. u_t + u_x + \dot{\varepsilon} * u_t + \dot{\lambda} * u_x \right|_{x=1} = f_1 \end{aligned}, \tag{1}$$

де $\varepsilon, \lambda, \omega, f_0$ і f_1 – задані функції, причому $f_{0,} f_1 \in L_2(0,1)$ і $|f_1| < C_1 \exp(C_2 t)$ при $t \to +\infty$ $(C_0, C_2 = const)$; $*$ – оператор згортки по t.

Розв'язок $\bar{u} = [u(t,x), u(t,1)]$ шукається у вигляді

$$\bar{u}(t,x) = \sum_{n=1}^{N} u_n(t) \bar{e}_n(x) \qquad (0 \le x \le 1, \quad t > 0), \tag{2}$$

де $\bar{e}_n(x)$ – ортонормовані власні функції оператора $A\bar{\varphi} = [\varphi_{xx}(x), \varphi_x(1)]$, $D_A = \{\varphi \in C^2(0,1), \ \varphi_x(0) = 0\}$, з точковим додатним спектром $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Тут $\quad \bar{e}_n(x) = [\nu_n^{-1} \cos x\sqrt{\beta_n}, \ \ \nu_n^{-1} \cos\sqrt{\beta_n}]$,

$$\nu_n = \|\varphi_n\|^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \cos^2\sqrt{\beta_n}\right),$$

β_n – корені рівняння $\sqrt{\beta}\cos\sqrt{\beta} + \sin\sqrt{\beta} = 0$.

Тоді, розв'язок задачі (1) зводиться до розв'язку рівняння

$$u_{n,t} + \beta_n u_n + \dot{\varepsilon} * u_{n,t} + \beta_n\left(\dot{\lambda} * u_n\right) + f_n(t), \qquad u_n(0) = \omega_n, \tag{3}$$

де $f_n = ((\bar{f}, \bar{e}_n))$, $\omega_n = ((\bar{\omega}, \bar{e}_n))$, $((.,.))$ – скалярний добуток в $L^2[0,1]$.

Застосовуючи до (3) перетворення Лапласа, трансформанти $U_n(s)$ невідомих компонент $u_n(t)$ у (2) знаходяться у вигляді

$$U_n(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{\omega_n + F_n(s)}{s \cdot E(s) + \beta_n \Lambda(s)}, \tag{4}$$

де E, Λ, і F_n – трансформанти функцій ε, λ і f_n відповідно.

Для ряду конкретно заданих ядер релаксації оригінали функцій $u_n(t)$ обчислюються точно і наближення (2) при $N \to \infty$ збігається до точного розв'язку задачі (1) як у внутрішніх точках відрізку, так і на його кінцях (в метриці $L^2[0,1]$).