

УДК 621.9.06

Д. Федориненко, канд. техн. наук

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут»

## СТАТИСТИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОЧАТКОВОЇ ФОРМИ ПРУЖНОЇ ОСІ ШПИНДЕЛЯ

*Резюме.* Розглянуто питання визначення статичних характеристик початкової форми пружної осі шпинделя. Представлено науковий підхід до розроблення статистичної математичної моделі прогину пружної осі шпинделя.

*Ключові слова:* статичні характеристики, пружна вісь шпинделя, математична модель.

D. Fedorinenko

## STATISTICAL CHARACTERISTICS OF RESILIENT LINE INITIAL FORM OF SPINDLE

*The summary.* The questions of statistical descriptions determination of resilient line initial form of spindle are considered. The scientific approach to the construction of stochastic mathematical model of the spindle initial bent axis are offered.

*Key words:* statistical characteristics, resilient line of spindle, mathematical model.

**Вступ.** Високопродуктивні методи обробки і створення нових інструментальних матеріалів зумовлюють підвищення вимог до швидкохідності, навантажувальної здатності, термостійкості й точності шпиндельних вузлів, що, в свою чергу, залежить від їх конструктивних особливостей, працездатності опор і способів змашування підшипників. Одним із перспективних напрямків розвитку верстатобудування є створення новітніх прецизійних та надпрецизійних конструкцій шпиндельних вузлів при одночасному підвищенні швидкості їх обертання. Тенденція розвитку світового верстатобудування виявляє необхідність забезпечення точності обертання шпинделя в межах десятих часток мікрметра поряд зі значним зростанням їх робочих швидкостей (у діапазоні 8000-20000 хв<sup>-1</sup>).

**Постановка проблеми.** Одним із основних показників, що визначає точність механічної обробки на верстатах, є власне точність обертання шпинделя [1]. Суттєвий вплив на точність обертання шпинделів, особливо прецизійних, чинить початкова форма його пружної лінії, яка, насамперед, пов'язана з геометричними відхиленнями поверхонь шпинделя. Зазначені геометричні відхилення мають однаковий порядок величин із динамічною складовою точності обертання шпинделя, що зумовлює доцільність їх урахування при конструюванні шпиндельних вузлів.

**Аналіз досліджень і публікацій.** Точність обертання шпинделів і, як наслідок, точність обробки на верстаті багато в чому залежить від точності підшипників. Проте високі витрати на підшипники будуть знецінені, якщо посадочні поверхні корпусу шпиндельного вузла, опорних шийок шпинделя виготовлені з недостатньою точністю. Відомо, наприклад, що доріжки кочення успадковують форму посадочних поверхонь деталей, які сполучаються [2]. Ефективним рішенням проблеми забезпечення високої точності обертання шпинделів є використання керованих підшипників (активних магнітних та гідростатичних) в якості опор прецизійних шпиндельних вузлів [3].

Слід також зазначити, що найперспективнішим напрямком до оцінювання характеристик точності шпиндельних вузлів є ймовірнісний підхід [4–6]. Випадкова

природа процесів у технологічній системі верстата зумовлює розсіяння точності оброблюваних різанням деталей. Геометричні відхилення поверхонь обертання шпинделя являються собою випадковий процес, статичні характеристики якого регламентують точність обертання прецизійних шпиндельних вузлів. Зазначені явища стосовно шпинделів верстатів є визначальними з точки зору формування вихідної точності вузла, проте вони вивчені не достатньо та потребують подальшого дослідження.

**Мета роботи** – розроблення математичного апарату аналізу статичних характеристик початкової форми пружної осі шпинделя.

**Постановка задачі та результати досліджень.** Будемо вважати, що початкова форма пружної осі зумовлена положенням геометричних осей реальних поверхонь обертання шпинделя, яка визначена в евклідовому просторі без прикладеного зовнішнього навантаження. Основну увагу приділимо аналітичному визначенню осей зовнішніх поверхонь обертання, оскільки саме вони чинять основний вплив на просторове положення шпинделя. Знаходження положення осей внутрішніх поверхонь обертання шпинделя принципово не відрізняється від зовнішніх і може бути обчислене за наведеною нижче методикою.

Положення геометричних осей реальних поверхонь обертання шпинделя визначається відповідними нормами точності на діаметральні розміри, допусками форми, взаємного розташування поверхонь, а також сумарними відхиленнями форми і розташування поверхонь. У загальному випадку просторове початкове положення зігнутої осі шпинделя має випадковий характер. Реалізації випадкового процесу положення осі шпинделя перебувають у межах нормованих показників геометричної точності обробки, насамперед – це допуски круглості, профілю поздовжнього перетину, радіального биття і т. ін. Саме зазначені показники чинять основний вплив на формування початкової просторової форми осі шпинделя металорізального верстата.

Розглянемо ділянку шпинделя з початковим викривленням геометричної осі (рис. 1а). Введемо нерухому систему координат  $XYZ$  та рухому, пов'язану зі шпинделем, систему координат  $xuz$ , де осі  $OZ$  та  $oz$  співпадають з недеформованою (ідеальною) та вигнутою осями шпинделя відповідно. За базу відліку координати  $Z$  приймемо лівий торець вала. Орієнтація в просторі рухомої системи координат  $xuz$  відносно нерухомої  $XYZ$  може бути задана кутами Ейлера  $\alpha, \beta, \gamma$  (рис. 1б).

Найзручнішим способом опису просторового викривлення осі шпинделя є задавання координат центрів тяжіння поперечних перетинів на довжині нормованої ділянки вала з визначенням відповідних значень ексцентриситетів  $e$  та кутів  $\xi$  у полярній системі (рис. 1). Приймемо в межах довжини нормованої ділянки точнісні показники, що визначають геометричні характеристики відхилень поверхонь обертання шпинделя, усталеними. Таким чином, рухаючись зліва направо по довжині  $Z$ , можна задати  $n$  значень  $e, \xi$  у площинах поперечного перетину, які аналітично визначають окрему реалізацію випадкового просторового положення осі шпинделя на довжині його нормованої ділянки.

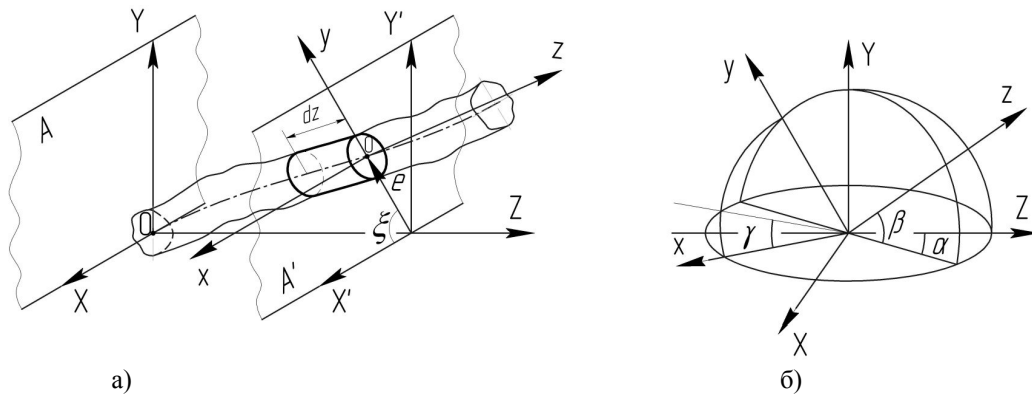


Рисунок 1. Схема просторово зігнутого шпинделя а) та системи координат б)

Унаслідок значної жорсткості згину  $EJ$  ділянок шпинделя можна зробити припущення про малість кутів повороту  $\alpha, \beta$  його осі  $oz$ . Тобто, в першому наближенні нахил поперечних перетинів відносно нерухомої системи координат  $XYZ$  не враховуємо і будемо вважати, що викривлення осі головним чином відбувається за рахунок змішень окремих перетинів у радіальному напрямку.

Якщо покласти матеріал шпинделя ізотропним, то в цьому випадку координати центра мас поперечного перетину співпадають з його центром тяжіння. Тоді випадкове просторове положення пружної осі (осі жорсткості) в поперечному перетині шпинделя може бути подане відповідними статистичними характеристиками координат центра тяжіння  $x_c, y_c$  перетину.

З урахуванням зроблених припущень функцію відхилень реального профілю поверхонь обертання в площині  $A$  (рис. 1), ортогональній до геометричній осі шпинделя, доцільно представити в полярній системі координат у вигляді ряду Фур'є

$$\rho(\varphi) = \frac{d}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\varphi + \psi_{0k}), \quad (1)$$

де  $d$  – випадкова величина діаметра ділянки шпинделя;  $A_k$  – випадкова величина амплітуди  $k$ -ї гармоніки ряду;  $\psi_{0k}$  – випадкова величина початкової фази.

Оскільки високочастотні гармоніки ряду не чинять істотного впливу на конфігурацію контуру, а, отже, і на положення його центра тяжіння, для опису початкової форми пружної осі шпинделя достатньо обмежитися аналізом перших десяти складових ряду. Приймемо, що випадкові величини  $d, A_k$  змінюються в межах допусків на діаметр вала та круглості відповідно. Величина  $\psi_{0k}$  набуває значення в межах від 0 до  $2\pi$ .

Координати центра тяжіння плоского перетину (рис. 2а) шпинделя можна знайти як

$$x_c = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\rho(\varphi)} \rho^2 \cos(\varphi) d\rho d\varphi}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\rho(\varphi)} \rho d\rho d\varphi}, \quad (2)$$

$$y_c = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\rho(\varphi)} \rho^2 \sin(\varphi) d\rho d\varphi}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\rho(\varphi)} \rho d\rho d\varphi}, \quad (3)$$

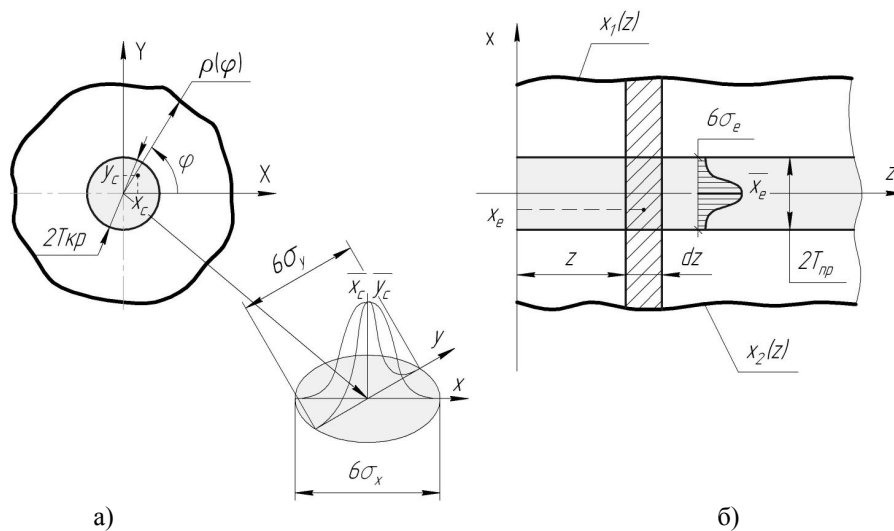


Рисунок 2. До визначення координат центра тяжіння поперечного а) та поздовжнього б) перетинів

Будемо вважати випадковий процес положення початково викривленої осі шпинделя стаціонарним та ергодичним. Тоді, якщо встановлений закон розподілу випадкової величини відхилень контуру від прилеглого кола, то відповідні математичні сподівання координат центра тяжіння плоского перетину шпинделя за множиною реалізацій можна обчислити у вигляді

$$\bar{x}_c = \int_{-\infty}^{+\infty} x_c \cdot f(x) dx, \quad (4)$$

$$\bar{y}_c = \int_{-\infty}^{+\infty} y_c \cdot f(y) dy, \quad (5)$$

де  $f(x), f(y)$  – закони розподілу густини ймовірностей уздовж відповідних координатних осей.

Далі розглянемо початкове положення осі, яке зумовлене геометричними відхиленнями поверхонь обертання в поздовжньому напрямку шпинделя. Для визначення проєкцій ексцентриситету  $e$  зсуву плоского контуру у функції кута  $\xi$  (площина  $A'$  на рис. 1а) необхідно знайти центри тяжіння поздовжніх перетинів у площинах  $hoz, uoz$  на диференціально малій довжині ділянки  $dz$ .

Математичний опис геометричних відхилень шпинделя в поздовжньому напрямку наведено у вигляді функцій  $x_1(z), x_2(z)$  та  $y_1(z), y_2(z)$  у площинах  $hoz$  (рис. 2б),  $uoz$  відповідно на нормованій довжині  $L$ . У загальному випадку шукані функції не є періодичними, які доцільно представити у вигляді універсальних базисних функцій по змінній координаті  $z$ . Відповідно до методики [4] математичний опис функцій геометричних відхилень може бути поданий у вигляді ряду

$$h(z) = \sum_{k=1}^N \left[ C_{1k} \cos\left(2\pi k \frac{z}{L}\right) + C_{2k} \sin\left(2\pi k \frac{z}{L}\right) + C_{3k} ch(kqz) + C_{4k} sh(kqz) \right], \quad (6)$$

де  $h(z)$  – узагальнений запис шуканих функцій  $x_1(z), x_2(z)$  та  $y_1(z), y_2(z)$ ;  $C_{1k} \dots C_{4k}$  – постійні коефіцієнти ряду;  $q$  – параметр, що залежить від форми твірної ділянки [4].

Так нульова гармоніка ряду ( $k=0$ ) описує зміщення контуру, базисні функції з  $k>1$  моделюють хвилястість поверхні з числом хвиль  $k=2, 3, \dots$

Гіперболічні базисні функції ряду (6) призначені для математичного опису контурів з особливостями на межах ділянки. Для визначення початкового положення осі шпинделя в поздовжньому перетині достатньо розглянути  $N \leq 10$  гармонік ряду (6).

Проекції ексцентриситету  $x_e, y_e$  на координатні площини  $xoz, yoz$  відповідно знайдемо як

$$x_e = \frac{\int_z^{z+dz} \int_{x_2(z)}^{x_1(z)} x dx dz}{\int_z^{z+dz} x_1(z) dz + \int_z^{z+dz} x_2(z) dz},$$

$$y_e = \frac{\int_z^{z+dz} \int_{x_2(z)}^{x_1(z)} y dy dz}{\int_z^{z+dz} y_1(z) dz + \int_z^{z+dz} y_2(z) dz}.$$

Тоді ексцентриситет  $e$  і полярний кут  $\xi$  в перетині шпинделя площиною  $A'$  можна обчислити за залежностями

$$e = \sqrt{x_e^2 + y_e^2}, \quad \xi = \arctg \frac{y_e}{x_e}.$$

Звідси можна визначити амплітуду  $A_1$  і початкову фазу  $\psi_{01}$  першої гармоніки ряду Фур'є, що визначають відповідно зсув та кут повороту контуру поперечного перетину шпинделя в площині  $A'$ :  $A_1 = e$ ;  $\psi_{01} = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{y_e}{x_e}$ . Відповідно координати центра

тяжіння перетину площиною  $A'$  та їх математичні сподівання визначають за залежностями (2–5).

Таким чином, просторове початкове положення осі шпинделя на нормованій ділянці задане дискретним набором центрованих координат  $\bar{x}_c, \bar{y}_c$  та координатою  $z$  розташування поперечних перетинів по довжині ділянки. Аналітичне значення просторової функції положення осі шпинделя, що задана дискретно, можна обчислити методами інтерполяції, наприклад, поліноміальними залежностями довільного типу [4].

При переході на іншу ділянку вала потрібно також урахувати неспіввісність спряжених шийок відповідним збільшенням на цю величину амплітуди першої гармоніки у виразі (1) для початкового перетину наступної ділянки шпинделя.

Значення діаметра циліндричних ділянок шпинделя враховується постійним членом ряду (1)  $d_0$  при описі геометрії в поперечному перетині та амплітудою  $C_1$  нульової гармоніки при косинусній складовій ряду (6), що відповідає опису перерізу шпинделя поздовжньою площиною. При моделюванні криволінійних, конічних поверхонь обертання шпинделя можна застосовувати функціональні ряди (1, 6). У цьому випадку рекомендується зменшувати крок між поперечними перетинами вздовж осі  $OZ$ , а відповідну зміну діаметрів урахувати для всіх перетинів по довжині таких поверхонь.

Випадкове положення початкової форми пружної осі в поперечному перетині шпинделя буде визначатися в межах нормованих показників допусків на відхилення реальної поверхні шпинделя на відповідній нормованій ділянці. Згідно з рекомендаціями [7] в якості геометричної осі реальної поверхні обертання слід приймати вісь циліндра найменш можливого діаметра, в середині якого міститься фізична (реальна) вісь у межах нормованої ділянки довжини вала.

Найчастіше для нормування відхилення профілю поперечного перерізу шпинделів використовується допуск круглості  $T_{кр}$ , що являє собою найбільшу відстань від точок реального профілю до прилеглого кола. Таким чином, початкове положення реальної осі шпинделя в його поперечному перетині буде в середині кола з діаметром, що дорівнює

подвійному допуску круглості, та центром, який співпадає з центром прилеглого кола (рис. 2а).

Технологічна обробляюча система верстата схильна до впливу як внутрішніх, так і зовнішніх систематичних і випадкових факторів. Якщо не один із зазначених факторів не превалює над іншими, то вихідна точність оброблених різанням партії заготовок розсіюється, як правило, за законом, близьким до гауссівського нормального розподілу ймовірностей. У такому випадку випадковий процес може бути повністю визначений статистичними характеристиками моментів першого та другого порядку. Отже, центрований нормальний випадковий процес початкового положення осі в поперечному перетині шпинделя буде характеризуватися математичними сподіваннями  $\bar{x}_c = \bar{y}_c = 0$ ,

та дисперсіями  $\sigma_{x_c}^2 = \sigma_{y_c}^2 = \frac{T_{кр}^2}{9}$ .

Випадкове початкове положення пружної осі шпинделя в його поздовжньому перетині буде визначатися нормованими значеннями відхилень профілю на довжині  $L$  ділянки. Причому зазначені точнісні показники, що нормуються відповідними допусками, на всій довжині ділянки повинні мати сталі значення. Найдоцільніше випадкове положення осі в поздовжньому напрямку шпинделя нормувати допуском профілю поздовжнього перетину  $T_{пр}$ . Тоді реальна вісь у поздовжньому напрямку по довжині нормованої ділянки буде міститися в межах циліндра з діаметром, що дорівнює подвійному допуску профілю поздовжнього перетину, та віссю, яка є прямою рівновіддаленою від прилеглого профілю.

Якщо ступінь точності допусків круглості  $T_{кр}$  та профілю поздовжнього перетину  $T_{пр}$  відмінна, то в цьому випадку діаметр циліндра, що містить викривлену вісь шпинделя, буде визначатися більшим із показників поля допуску. Наприклад, якщо  $T_{пр} > T_{кр}$ , то циліндр з діаметром  $2T_{кр}$  буде розміщуватися в середині циліндра з діаметром  $2T_{пр}$  в межах нормованої ділянки шпинделя.

Рациональним підходом до визначення початкового положення пружної осі є аналіз інтегральних показників геометричних відхилень поверхонь шпинделя. Наприклад, зміщення контуру одночасно з його відхиленнями від круглості в поперечному перетині можна врахувати допуском радіального биття. Сумарні геометричні відхилення форми та розташування по довжині нормованої ділянки шпинделя будуть визначатися допуском повного радіального биття. Таким чином, положення початково викривленої осі шпинделя може бути обмежене циліндром з діаметром, що дорівнює подвійному допуску повного радіального биття на нормованій довжині ділянки.

В якості прикладу розглянемо визначення просторової стохастичної форми динамічно зігнутої осі шпинделя прецизійного токарного верстата УТ16А (рис. 3). Шпиндель спирається на два радіальних чотирикарманних гідростатичних підшипники (ГСП) та осьовий двокарманний ГСП.

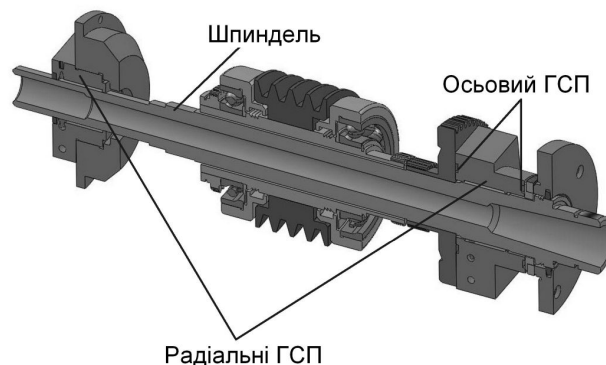


Рисунок 3. Конструктивна схема шпиндельного вузла токарного верстата УТ16А на гідростатичних підшипниках

У результаті моделювання на ПЕОМ отримана просторова динамічна форма зігнутої осі шпинделя (рис. 4) на частоті вимушених коливань 50 Гц (відповідає максимальній робочій швидкості обертання шпинделя).



Рисунок 4. Просторова стохастична форма пружної осі шпинделя:  $A_x$ ,  $A_y$  – безрозмірні амплітуди коливань у площинах  $ZOX$  і  $ZOY$  відповідно;  $z$  – лінійна координата по довжині шпинделя;  $\bar{\alpha}_i$  – центроване значення кута закручування розподілення в  $i$ -му перетині;  $m(x, y)$  – математичне сподівання густини ймовірності форми пружної осі шпинделя;  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $M_k$  – зовнішні сили  $F$  та моментні  $M$  стохастичні збурення відповідно

Величина  $\Delta S$  (рис. 4) характеризує випадкові відхилення форми зігнутої осі шпинделя, що зумовлені як стохастичною початковою формою шпинделя, так і випадковим технологічним збуренням на шпиндельний вузол.

Зображений на рисунку графік відображає густину ймовірності флуктуацій зігнутої осі шпинделя (за припущення про нормальність центрованого випадкового процесу) і дозволяє оцінити очікуване розсіяння положень деформованої осі шпинделя.

Кількісною характеристикою точності визначення пружної лінії шпинделя є максимальна площа  $S_{max}$ , що визначається як опорна площа відповідної двовимірної гістограми  $S_{max} = \iint dx dy$ .

**Висновки.** Запропоновано наукові підходи щодо визначення статистичних характеристик початкової форми пружної осі шпинделя на основі моментів випадкової величини першого та другого порядку. Встановлено аналітичні залежності моментів випадкової величини від нормованих показників допусків круглості та профілю поздовжнього перетину ділянок шпинделя. Розроблено методику визначення просторового положення початково викривленої осі шпинделя на основі аналітичного опису геометричних відхилень його поверхонь обертання в поперечному та поздовжньому напрямках. Математичний опис макрогеометрії ділянок шпинделя запропоновано у вигляді функціональних рядів на базі спеціальних функцій. Створена методика може бути поширена для аналітичного опису просторового початкового положення осей реальних поверхонь тіл обертання широкої номенклатури. Запропоновано для кількісного оцінювання параметрів точності випадкової складової пружної лінії шпинделя використовувати опорну площу  $S_{max}$  двовимірної гістограми густини розподілу ймовірностей, що відображає дію випадкового технологічного збурення на шпиндельний вузол і розсіяння положення початкової форми шпинделя.

**Література**

1. Решетов Д.Н. Точность металлорежущих станков / Д.Н. Решетов, В.Т. Портман. – М.: Машиностроение, 1986. – 336 с.
2. Данильченко Ю.М. Прецизійні шпиндельні вузли на опорах кочення (теорія і практика) / Ю.М. Данильченко, Ю.М. Кузнєцов. – Тернопіль: Економічна думка, 2003. – 344 с.
3. Регульовані гідростатичні підшипники для шпиндельних вузлів / Ю.О. Сахно, Д.Ю. Федориненко, С.В. Бойко, В.С. Волик. – Ніжин: Аспект-Поліграф, 2009. – 172 с.
4. Струтинський В.Б. Математичне моделювання процесів та систем механіки / В.Б. Струтинський. - Житомир: ЖІТІ, 2001. - 612 с.
5. Струтинський В.Б. Статистичні характеристики вібраційного поля переміщень осі шпинделя на гідростатичних опорах / В.Б. Струтинський, Д.Ю. Федориненко // Вісник НТУУ «КПІ». – 2010. – № 58. – С. 59-63.
6. Пуш А.В. Шпиндельные узлы: качество и надежность / А.В. Пуш. – М.: Машиностроение, 1992. – 288 с.
7. Допуски формы и расположения поверхностей. Основные термины и определения (ISO 1101-83, ISO 5459-81); ГОСТ 24642-81. – [Действ. от 1981-07-01]. – М.: Госстандарт, 1981. – 65 с.

*Отримано 10.01.2011*