УДК 539.3
Семенина Н. – ст. гр. КТ-22
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

РОЗВ’ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ ЦИЛІНДРА

Науковий керівник: к.ф.-м.н., доцент Самборська О.М.

Розглянемо циліндр з висотою h та радіусом основи a. На бічній поверхні та верхній основі циліндра температура дорівнює нулю, а на нижній основі підтримується температура $U = F(r)$, де r – відстань від будь-якої точки основи до її центра. Вважається, що процес теплообміну стаціонарний, тобто в кожній точці циліндра температура встановилась і не залежить від часу. Потрібно знайти розподіл температури в даному циліндрі.

Задачу розв’яжемо в циліндричній системі координат r, φ, z. Температура в будь-якій точці циліндра задовольняє рівняння Лапласа.

$$U''_{rr} + (1/r)U'_r + \left(1/r^2\right)U''_{\varphi\varphi} + U''_{zz} = 0. \qquad (1)$$

Оскільки розподіл температури не залежить від кута φ, то рівняння (1) спрощується:

$$U''_{rr} + (1/r)U'_r + U''_{zz} = 0 \qquad (2)$$

Граничні умови мають вигляд: $U(a,z) = 0$; $U(r,h) = 0$; (3) $U(r,0) = F(r)$. (4)

Задачу розв’яжемо методом Фур’є, $U(r,z) = R(r)\cdot Z(z)$. (5)

Для функцій $R(r)$ та $Z(z)$ отримаємо рівняння:

$$Z''(z) - \lambda^2 Z(z) = 0, \quad (6) \qquad R''(r) + 1/r\, R'(r) + \lambda^2 R(r) = 0 \quad (7)$$

Рівняння (7) заміною $\lambda r = t$ зводиться до рівняння Бесселя для незалежної зміни $t = \lambda r$, для якого $n = 0$.

Загальний розв’язок рівняння (6) можна записати у вигляді: $Z(z) = A ch\lambda z + B sh\lambda z$.

Оскільки розв’язок $R(r)$ рівняння (7) повинен бути скінченним при $r = 0$ і задовольняти умову $R(a) = 0$, то отримаємо:

$$R_n(r) = C_n J_0\left(\mu_n^{(0)} r a^{-1}\right), \qquad (8)$$

де $\mu_n^{(0)}$ – додатні корені функції Бесселя першого роду нульового порядку $J_0(x), (n = 1, 2, 3, ...)$. Множина розв’язків $U_n(r,z)$, які задовольняють рівняння (2) та першу з граничних умов (3), має вигляд:

$$U_n(r,z) = \left(D_n ch\left(\mu_n^{(0)} z a^{-1}\right) + E_n \sin\left(\mu_n^{(0)} z a^{-1}\right)\right) J_0\left(\mu_n^{(0)} r a^{-1}\right). \qquad (9)$$

Задовольняючи другу з граничних умов (3), одержуємо:

$$U_n(r,z) = D_n sh\left(\mu_n^{(0)}(h - z)a^{-1}\right) sh^{-1}\left(\mu_n^{(0)} h a^{-1}\right) J_0\left(\mu_n^{(0)} r a^{-1}\right) \qquad (10)$$

Щоб задовольняти граничну умову (4), розв’язок даної задачі представимо у вигляді ряду: $U(r,z) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(r,z)$. (11)

Розкладаючи функцію $F(r)$ в ряд Фур’є-Бесселя, відшукуємо невідомі коефіцієнти D_n. Обчислення виконані для випадку $F(r) = a - a^{-1} r^2$.