УДК 519. 217
Греля Т. – ст.гр. МІ-13
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

ВІДСТАНЬ ВІД ТОЧКИ ДО ПРЯМОЇ У ПРОСТОРІ

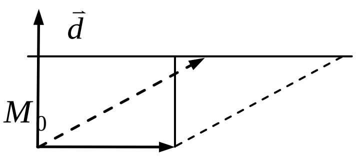
Науковий керівник: к.ф.-м.н., доцент Демчишин О.І.

Розглянемо спочатку канонічне рівняння прямої на площині, яка проходить через фіксовану точку $M_0(x_0, y_0)$, паралельно до напрямного вектора $\vec{p} = (p_x, p_y)$:

$$\frac{x - x_0}{p_x} = \frac{y - y_0}{p_y}.$$

Це рівняння перепишемо у вигляді: $\frac{x}{p_x} - \frac{y}{p_y} = \frac{x_0}{p_x} - \frac{y_0}{p_y}$. Вважаючи $\vec{r} = (x, y, 0)$, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, 0)$ і $\vec{p} = (p_x, p_y, 0)$, праву частину рівняння можна розглядати, як довжину вектора $\vec{s} = \vec{r} \times \vec{p}$: $\vec{s} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} x & y \\ p_x & p_y \end{vmatrix} \vec{k}$, а ліву частину рівняння, як довжину вектора $\vec{s}_0 = \vec{r}_0 \times \vec{p}$, де $\vec{s}_0 = S_0 \vec{k}$ (S_0 – площа паралелограма, утвореного векторами $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, 0)$ і $\vec{p} = (p_x, p_y, 0)$). Таким чином, векторна рівність $\vec{s} = S_0 \vec{k}$ вказує на те, що рухаючись по прямій радіус-вектор $\vec{r} = (x, y)$ разом із напрямним вектором $\vec{p} = (p_x, p_y)$ завжди будуть утворювати паралелограми однакової площі.

Перейдемо тепер до прямої у просторі: нехай пряма l проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і паралельна до вектора $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$. Виразимо відстань від початку координат до прямої через координати фіксованої точки і координати напрямного вектора Таким чином у системі координат $Oxyz$ маємо радіус-вектор фіксованої точки $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ і радіус-вектор біжучої точки прямої $\vec{r} = (x, y, z)$. Вектори $\vec{p}$, $\vec{r}_0$ і $\vec{r}$ утворюють площину у якій знаходиться пряма l і початок координат. Рух біжучої точки по прямій буде в утвореній площині визначатися, як і у попередньому випадку, векторним рівнянням $\vec{s} = \vec{s}_0$, де $\vec{s} = \vec{r} \times \vec{p}$ і $\vec{s}_0 = \vec{r}_0 \times \vec{p}$. Таким чином перпендикулярні вектори $\vec{s}$ і $\vec{p}$ можна прийняти за два напрямки осей «локальної системи координат». Третій напрямок може визначатися векторним добутком: $\vec{d} = \vec{s} \times \vec{p}$. У локальній системі координат, яка визначається векторами $\vec{p}$, $\vec{s}$ і $\vec{d}$ визначимо відстань від прямої до початку координат. Площа $S_0 = |\vec{s}_0| = |\vec{r}_0| \cdot |\vec{p}| \cdot \sin\varphi$, де φ – кут між векторами $\vec{r}_0$ і $\vec{p}$.



Так як $\sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \sqrt{1 - \left(\frac{\vec{r}_0 \vec{p}}{|\vec{r}_0| \, |\vec{p}|}\right)^2}$, то таким чином, $S_0 = \sqrt{|\vec{r}_0|^2 |\vec{p}|^2 - (\vec{r}_0 \vec{p})^2}$. З іншого боку, $S_0 = d \cdot |\vec{p}|$. Отже, $d \cdot |\vec{p}| = \sqrt{|\vec{r}_0|^2 |\vec{p}|^2 - (\vec{r}_0 \vec{p})^2}$.

Остаточно: $d = \sqrt{|\vec{r}_0|^2 - \left(\frac{\vec{r}_0 \vec{p}}{\vec{p}}\right)^2} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - \left(\frac{x_0 p_x + y_0 p_y + z_0 p_z}{\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}}\right)^2}$.