УДК 519.21
Вітрук Р. – ст. гр. СП-21
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

АСИМПТОТИЧНІ ФОРМУЛИ У ТЕОРІЇ ІМОВІРНОСТЕЙ

Науковий керівник: к.т.н., доцент Федак С. І.

Для знаходження імовірності появи події А в m випробуваннях з n, за умови постійної характеристики p імовірності події А в одній спробі, використовують формулу Бернуллі

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m \cdot (1-p)^{n-m} .$$

Однак при великих значеннях n ця залежність приводить до громіздких обчислень. Необхідність спрощення розрахунків спонукали до виведення асимпототичних формул Муавра-Лапласа та Пуассона. Ці залежності виводяться на основі формули Бернуллі.

Якщо в серії незалежних спроб $n \to \infty$, $p \to 0$, але так, що добуток $np = \lambda$ залишається сталим, то ймовірність $P_n(m)$ обчислюється за формулою *Пуассона*

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} .$$

Дійсно, згідно формули Бернуллі з використанням λ:

$$P_n(m) = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^m \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} .$$

Перейшовши до границі, коли $n \to \infty$, отримаємо:

$$\frac{\lambda^m}{m!} \lim_{n\to\infty} \left[1 \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-m} \right] = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} .$$

В виведенні залежності локальної теореми Муавра-Лапласа використовується відома формула Стірлінга $n! = \sqrt{2 \cdot \pi \cdot n} \cdot n^n \cdot e^{-n+\gamma}$, де γ - гамма-функція, та асимптотична формула $\ln(1+\alpha) = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{i-1} \cdot \frac{\alpha^i}{i} + \mathrm{O}(\alpha)^{n+1}$.

Користуючись відомими правилами дій над символами *O* та *o* і потенціювання, при переході n → ∞, отримуємо $P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot e^{-\frac{(m-np)^2}{2npq}}$. З урахуванням функції Гаусса $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, де $x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$, отримаємо $P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x)$

За умови $\sqrt{npq} \ge 10$, користуючись потрійною нерівністю $\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \le \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$ отримуємо формулу інтегральної теореми Муавра-Лапласа

$$P_n(m_1, m_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

УДК 519. 217
Грушицький О. – ст. гр. МІ-13

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

ПЛОЩА ТРИКУТНИКА, ОБМЕЖЕНОГО ПРЯМОЮ І ОСЯМИ КООРДИНАТ

Науковий керівник: к.ф.-м.н., доцент Демчишин О.І.

Розглянемо задачу знаходження усіх можливих трикутників, які мають площу S і утворюються внаслідок перетину прямої, яка проходить через точку $M(x, y)$ площини із координатними осями Ox та Oy. Записавши рівняння прямої у відрізках на осях координат $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ та площу утвореного трикутника $S = 2|a|\cdot|b|$, отримаємо дві системи рівнянь для визначення параметрів a і b:

$$\begin{cases} bx + ay = ab, \\ (ab)^2 = 4S^2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} bx + ay = 2S, \\ ab = 2S, \end{cases} \text{ і } \begin{cases} bx + ay = -2S, \\ ab = -2S. \end{cases}$$

Розв'язками систем рівнянь є 4 пари параметрів a і b, виражені через $j = 2xyS^{-1}$.

Перша система рівнянь завжди має розв'язки, при умові, що точка $M(x, y)$ знаходиться у ІІ-му ($x < 0$, $y > 0$, $\varphi < 0$) або IV-му ($x > 0$, $y < 0$, $\varphi < 0$) координатних кутах

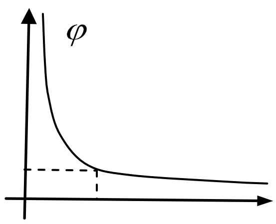
$$a_1 = 2x(1-\sqrt{1-\varphi})\varphi^{-1},\ b_1 = 2y(1+\sqrt{1-\varphi})\varphi^{-1};\ a_2 = 2x(1+\sqrt{1-\varphi})\varphi^{-1},\ b_2 = 2y(1-\sqrt{1-\varphi})\varphi^{-1}.$$

Друга система рівнянь завжди має розв'язки, при умові, що точка $M(x, y)$ знаходиться у І-му ($x > 0$, $y > 0$, $\varphi > 0$) або ІІІ-му ($x < 0$, $y < 0$, $\varphi > 0$) координатних кутах

$$a_3 = 2x(1-\sqrt{1+\varphi})\varphi^{-1},\ b_1 = 2y(1+\sqrt{1+\varphi})\varphi^{-1};\ a_4 = 2x(1+\sqrt{1+\varphi})\varphi^{-1},\ b_4 = 2y(1-\sqrt{1+\varphi})\varphi^{-1}.$$

Модуль параметра φ визначається подвоєною площею прямокутника, утвореного координатними осями і прямими, які визначаються координатами точки M.

Враховуючи симетричність отриманих розв'язків, обмежимось для аналізу кількості можливих трикутників у задачі випадком, коли точка $M(x, y)$ знаходиться у першому



координатному куті ($x > 0$, $y > 0$, $\varphi > 0$). Позначивши $k = 2xy$, отримаємо гіперболічну залежність між площею шуканого трикутника S і параметром φ: $\varphi \cdot S = k$. При $\varphi < 1$, тобто $S > 2xy = k$, дві системи рівнянь визначають чотири можливі розміщення прямої: $\frac{x}{a_1}+\frac{y}{b_1}=1$, $\frac{x}{a_2}+\frac{y}{b_2}=1$, $\frac{x}{a_3}+\frac{y}{b_3}=1$, $\frac{x}{a_4}+\frac{y}{b_4}=1$, а, отже, і чотири трикутники з однаковою площею S. При $\varphi = 1$ ($S = 2xy = k$), перша система рівнянь визначає одну пряму $\frac{x}{2x_M}+\frac{y}{2y_M}=1$ із утвореним трикутником, площею $S = 2x_M y_M$, а друга система рівнянь визначатиме дві прямі, і, отже, два трикутники: утвориться три трикутники. При $\varphi > 1$ ($S < k$), перша система рівнянь не матиме розв'язків (дискримінант квадратного рівняння від'ємний), а друга система рівнянь визначатиме дві прямі, і, два трикутники. Таким чином, в залежності від величини площі заданого трикутника S і від розміщення точки M на координатній площині, будемо мати 4, 3 або 2 трикутники із заданою площею.