Ленюк М. Моделювання дифузійних процесів методом гібридного диференціального оператора Бесселя-Лежандра-Фур'є на сегменті полярної осі з м'якими межами / Ленюк М., Шелестовський Б. // Вісник ТНТУ. — 2011. — Том 16. — № 1. — С.201-211. — (математичне моделювання. математика. фізика).

УДК 517.946

М. Ленюк [1], докт. фіз.-мат. наук;
Б. Шелестовський [2], канд. фіз.-мат. наук

[1] *Чернівецький факультет Національного технічного університету „Харківський політехнічний інститут"*
[2] *Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя*

МОДЕЛЮВАННЯ ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ МЕТОДОМ ГІБРИДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА БЕССЕЛЯ-ЛЕЖАНДРА-ФУР'Є НА СЕГМЕНТІ $[R_0, R_3]$ ПОЛЯРНОЇ ОСІ З М'ЯКИМИ МЕЖАМИ

Резюме. *Методом інтегрального перетворення Лапласа в поєднанні з методом функцій Коші побудовано в замкненій алгоритмічній формі розв'язок дифузійної задачі на трискладовому сегменті* $[R_0, R_3]$ *полярної осі в припущені, що похідна по* t *входить і в крайові умови і в умови спряження. Моделювання дифузійних процесів здійснено з допомогою гібридного диференціального оператора Бесселя-Лежандра-Фур'є.*

Ключові слова: *моделювання, дифузійні процеси, системи диференціальних рівнянь, диференціальний оператор.*

M. Lenyuk, B. Shelestovsky

MODELLING OF THE DIFFUSION PROCESSES BY THE BESSEL-LEGENDER-FURIER HYBRID DIFFERENTIAL OPERATOR METHOD ON THE SOFT BOUNDS POLAR AXIS SEGMENT $[R_0, R_3]$.

The summary. *Using the Laplace integral transformation method together with the Caushier function method the solution of the diffusion tasks in the closed algorithmic form has been built in three componant segment of the polar axis in the supposition that derivative* t *is included in both boundary conditions and conjugate conditions. The modelling of the diffusion processes is carried out using the Bessel-Legender-Furier hybrid differential operator method.*

Key words: *modelling, diffusion processes, systems of differential equations, hybrid differential operator.*

Вступ. Процеси дифузії відіграють значну роль у виробничих процесах, впливають на міцність устаткування при врахуванні механічних і технологічних умов експлуатації металів та сплавів. Найпростішою математичною моделлю такого процесу є диференціальне рівняння дифузії параболічного типу [1]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \gamma^2 u - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = f(t, r), \quad r \in (R_0, R) \tag{1}$$

з відповідними початковою умовою та крайовими умовами. Потреби практики призводили до різноманітного узагальнення рівняння (1). Та в усіх випадках дифузійні процеси вивчалися в припущенні, що межа середовища жорстка відносно відбиття хвиль. Різко змінюється картина дифузійного процесу, якщо межа середовища є м'якою відносно відбиття хвиль (в крайових операторах та операторах спряження присутня похідна за часовою змінною).

У другій половині XX-століття для вивчення стану композитних металів був поширений метод кусково-сталих фізико-технічних характеристик [2]. Це призводило в кожній конкретній задачі до інтегрування звичайного диференціального рівняння другого порядку (або системи таких рівнянь) із сингулярними коефіцієнтами типу дельта функції та її похідних. Та отримати інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку задачі цим методом, як виявилося, неможливо. Тому метою роботи є моделювання дифузійних процесів методом гібридних диференціальних операторів.

Постановка задачі. Побудуємо обмежений в області $D_2 = \{(t,r) : t \in (0,\infty);\ r \in I_2 \equiv (R_0,R_1) \cup (R_1,R_2) \cup (R_2,R_3);\ R_0 > 0, R_3 < \infty\}$ розв'язок сепаратної системи диференціальних рівнянь дифузії параболічного типу [1]

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \gamma_1^2 u_1 - a_1^2 B_{\nu,\alpha}[u_1] = f_1(t,r), r \in (R_0,R_1),$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \gamma_2^2 u_2 - a_2^2 \Lambda_{(\mu)}[u_2] = f_2(t,r), r \in (R_1,R_2),$$
$$\frac{\partial u_3}{\partial t} + \gamma_3^2 u_3 - a_3^2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2} = f_3(t,r), r \in (R_2,\infty). \tag{2}$$

За початковими умовами

$$u_j(t,r)\big|_{t=0} = g_j(r), r \in (R_{j-1},R_j), j = \overline{1,3}. \tag{3}$$

крайовими умовами

$$L_{11}^0\left[u_1(t,r)\right]\big|_{r=R_0} = g_0(t),\ L_{22}^3\left[u_3(t,r)\right]\big|_{r=R_3} = g_R(t). \tag{4}$$

та умовами спряження

$$\left(L_{j1}^k\left[u_k(t,r)\right] - L_{j2}^k\left[u_{k+1}(t,r)\right]\right)\big|_{r=R_k} = \omega_{jk}(t); j,k = 1,2. \tag{5}$$

У рівностях (2) беруть участь диференціальні оператори Бесселя $B_{\nu,\alpha} = d^2/dr^2 + (2\alpha+1)r^{-1} d/dr - (\nu^2 - \alpha^2)r^{-2}$ [3], Лежандра $\Lambda_\mu = d^2/dr^2 + cth\, d/dr + 1/4 + 1/2\left(\frac{\mu_1^2}{1-chr} + \frac{\mu_2^2}{1+chr}\right)$ [4] та Фур'є d^2/dr^2 [5]; $2\alpha+1>0$, $\nu \ge \alpha$; $\mu_1 \ge \mu_2 \ge 0$, $(\mu) = (\mu_1,\mu_2)$; $a_j > 0, j = \overline{1,3}$.

У рівностях (4) та (5) беруть участь узагальнені крайові диференціальні оператори та узагальнені диференціальні оператори спряження

$$L_{jk}^m = \left(\alpha_{jk}^m + \delta_{jk}^m \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{jk}^m + \gamma_{jk}^m \frac{\partial}{\partial t}; j,k = 1,2; m = \overline{0,3}.$$

Вимагаємо виконання умов на коефіцієнти: $\alpha_{11}^0 \le 0$, $\alpha_{22}^3 \ge 0$, $\beta_{11}^0 \ge 0$, $\beta_{22}^3 \ge 0$, $\left|\alpha_{11}^0\right| + \beta_{11}^0 \ne 0$, $\alpha_{22}^3 + \beta_{22}^3 \ne 0$; $\alpha_{jm}^k \ge 0$, $\delta_{jm}^k \ge 0$, $\beta_{jm}^k \ge 0$, $\gamma_{jm}^k \ge 0$; $c_{11,k} \cdot c_{21,k} > 0$, $c_{j1,k} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k$; $c_{j2,k} \equiv \delta_{2j}^k \gamma_{1j}^k - \delta_{1j}^k \gamma_{2j}^k = 0$, $\delta_{2j}^k \beta_{1j}^k - \delta_{1j}^k \beta_{2j}^k = \alpha_{1j}^k \gamma_{2j}^k - \alpha_{2j}^k \gamma_{1j}^k$.

Припустимо, що: 1) вектор-функції $u(t,r) = \{u_1(t,r); u_2(t,r); u_3(t,r)\}$ та $f(t,r) = \{f_1(t,r); f_2(t,r); f_3(t,r)\}$ є оригіналами за Лапласом стосовно t [6]; 2) оригіналами за Лапласом стосовно t є функції $g_0(t)$, $g_R(t)$ та $\omega_{jk}(t)$; 3) числа $\psi_0 = \delta_{11}^0 g_1'(R_0) + \gamma_{11}^0 g_1(R_0)$, $\psi_3 = \delta_{22}^3 g_3'(R_3) + \gamma_{22}^3 g_3(R_3)$ та $\psi_{jk} = \delta_{j1}^k g_k'(R_k) + \gamma_{j1}^k g_k(R_k) - \left[\delta_{j2}^k g_{k+1}'(R_k) + \gamma_{j2}^k g_{k+1}(R_k)\right]$, $(j,k = 1,2)$ дорівнюють нулю.

У зображенні за Лапласом параболічній задачі (2)–(5) відповідає крайова задача: побудувати на множині I_2 обмежений розв'язок сепаратної системи диференціальних рівнянь Бесселя, Лежандра та Фур'є для модифікованих функцій

$$\left(B_{\nu,\alpha}-q_1^2\right)u_1^*\left(p,r\right)=-F_1^*\left(p,r\right),r\in\left(R_0,R_1\right),$$
$$\left(\Lambda_{(\mu)}-q_2^2\right)u_2^*\left(p,r\right)=-F_2^*\left(p,r\right),r\in\left(R_1,R_2\right),$$
$$\left(d^2\!\left/dr^2\right.-q_3^2\right)u_3^*\left(p,r\right)=-F_3^*\left(p,r\right),r\in\left(R_2,R_3\right).\qquad(6)$$

з крайовими умовами

$$\left(\overline{\alpha}_{11}^0\, d\!\left/dr\right.+\overline{\beta}_{11}^0\right)u_1^*\left(p,r\right)\Big|_{r=R_0}=g_0^*\left(p\right),\quad \left(\overline{\alpha}_{22}^3\, d\!\left/dr\right.+\overline{\beta}_{22}^3\right)u_3^*\left(p,r\right)\Big|_{r=R_3}=g_R^*\left(p\right).\qquad(7)$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\overline{\alpha}_{j1}^k\, d\!\left/dr\right.+\overline{\beta}_{j1}^k\right)u_k^*\left(p,r\right)-\left(\overline{\alpha}_{j2}^k\, d\!\left/dr\right.+\overline{\beta}_{j2}^k\right)u_{k+1}^*\left(p,r\right)\right]\Big|_{r=R_k}=\omega_{jk}^*\left(p\right);\, j,k=1,2.\qquad(8)$$

У рівностях (6)–(8) прийняті позначення $q_j=a_j^{-1}\left(p+\gamma_j^2\right)^{1/2}$,

$$F_j^*\left(p,r\right)=a_j^{-2}\left(f_j^*\left(p,r\right)+g_j\cdot\left(r\right)\right),\ \overline{\alpha}_{ij}^k=\alpha_{ij}^k+p\delta_{ij}^k,\ \overline{\beta}_{ij}^k=\beta_{ij}^k+p\gamma_{ij}^k;\ f^*\left(p\right)=\int\limits_0^\infty f\left(t\right)e^{-pt}dt.$$

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Бесселя $\left(B_{\nu,\alpha}-q_1^2\right)v=0$ складають модифіковані функції Бесселя першого роду $I_{\nu,\alpha}\left(q_1r\right)$ та другого роду $K_{\nu,\alpha}\left(q_1r\right)$ [3]; фундаментальну систему розв'язків для диферецiального рівняння Лежандра $\left(\Lambda_{(\mu)}-q_2^2\right)v=0$ складають узагальнені приєднані функції Лежандра першого роду $P_{\nu_2}^{(\mu)}\left(chr\right)$ та другого роду $L_{\nu_2}^{(\mu)}\left(chr\right)$, $\nu_2=-1/2+a_2$ [4]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $\left(d^2\!\left/dr^2\right.-q_3^2\right)v=0$ складають гіперболічні функції chq_3r та shq_3r [5].

Наявність фундаментальної системи розв'язків дозволяє побудувати розв'язок крайової задачі (6)–(8) методом функцій Коші [5,7]:

$$u_1^*\left(p,r\right)=A_1I_{\nu,\alpha}\left(q_1r\right)+B_1K_{\nu,\alpha}\left(q_1r\right)+\int\limits_{R_0}^{R_1}E_1^*\left(p,r,\rho\right)F_1^*\left(p,\rho\right)\rho^{2\alpha+1}d\rho,$$
$$u_2^*\left(p,r\right)=A_2P_{\nu_2}^{(\mu)}\left(chr\right)+B_2L_{\nu_2}^{(\mu)}+\int\limits_{R_1}^{R_2}E_2^*\left(p,r,\rho\right)F_2^*\left(p,\rho\right)sh\rho d\rho,$$
$$u_3^*\left(p,r\right)=A_3chq_3r+B_3shq_3r+\int\limits_{R_2}^{R_3}E_3^*\left(p,r,\rho\right)F_3^*\left(p,\rho\right)d\rho.\qquad(9)$$

У рівностях (9) $E_j^*\left(p,r,\rho\right)$ – функції Коші [5,7]:

$$E_j^*\left(p,r,\rho\right)\Big|_{r=\rho+0}-E_j^*\left(p,r,\rho\right)\Big|_{r=\rho-0}=0\,(умова\ неперервності);$$
$$\frac{d}{dr}E_j^*\left(p,r,\rho\right)\Big|_{r=\rho+0}-\frac{d}{dr}E_j^*\left(p,r,\rho\right)\Big|_{r=\rho-0}=-\frac{1}{\varphi_j\left(\rho\right)}(умова\ стрибка\ похідної).\qquad(10)$$

Тут $\varphi_1\left(r\right)=r^{2\alpha+1}$, $\varphi_2\left(r\right)=shr$, $\varphi_3\left(r\right)=1$.

Припустимо, що функція Коші

$$E_1^*(p,r,\rho)=\begin{cases}\overset{-}{E}{}_1^* \equiv C_1 I_{\nu,\alpha}(q_1 r)+D_1 K_{\nu,\alpha}(q_1 r), R_0<r<\rho<R_1\\ \overset{+}{E}{}_1^* \equiv C_2 I_{\nu,\alpha}(q_1 r)+D_2 K_{\nu,\alpha}(q_1 r), R_0<\rho<r<R_1.\end{cases}$$

Властивості (10) функції Коші дають алгебраїчну систему

$$(C_2-C_1)I_{\nu,\alpha}(q_1\rho)+(D_2-D_1)K_{\nu,\alpha}(q_1\rho)=0$$

$$(C_2-C_1)I'_{\nu,\alpha}(q_1\rho)+(D_2-D_1)K'_{\nu,\alpha}(q_1\rho)=-\left(q_1\rho^{2\alpha+1}\right)^{-1}.$$

Звідси отримуємо співвідношення

$$C_2-C_1=-q_1^{2\alpha}K_{\nu,\alpha}(q_1\rho),\ D_2-D_1=q_1^{2\alpha}I_{\nu,\alpha}(q_1\rho). \tag{11}$$

Доповнимо рівності (11) алгебраїчними рівняннями

$$\begin{aligned}&\left(\overline{\alpha}_{11}^{0}\, d\big/dr+\overline{\beta}_{11}^{0}\right)\overset{-}{E}{}_1^*\Big|_{r=R_0}=0: \\ &\left(\overline{\alpha}_{11}^{1}\, d\big/dr+\overline{\beta}_{11}^{1}\right)\overset{+}{E}{}_1^*\Big|_{r=R_1}=0:\end{aligned}\quad \begin{cases}U_{\nu,\alpha;11}^{01}(q_1R_0)C_1+U_{\nu,\alpha;11}^{02}(q_1R_0)D_1=0\\ U_{\nu,\alpha;11}^{11}(q_1R_1)C_2+U_{\nu,\alpha;11}^{12}(q_1R_1)D_2=0.\end{cases} \tag{12}$$

Алгебраїчна система (12) внаслідок рівностей (11) набуває вигляду

$$U_{\nu,\alpha;11}^{01}(q_1R_0)C_1+U_{\nu,\alpha;11}^{02}(q_1R_0)D_1=0$$

$$U_{\nu,\alpha;11}^{11}(q_1R_1)C_1+U_{\nu,\alpha;11}^{12}(q_1R_1)D_1=q_1^{2\alpha}\Psi_{\nu,\alpha;11}^{1*}(q_1R_1,q_1\rho). \tag{13}$$

Алгебраїчну систему (13) розв'язуємо за правилами Крамера [8]

$$C_1=-\frac{q_1^{2\alpha}U_{\nu,\alpha;11}^{02}(q_1R_0)}{\Delta_{\nu,\alpha;11}(q_1R_0,q_1R_1)}\cdot\Psi_{\nu,\alpha;11}^{1*}(q_1R_1,q_1\rho),\ D_1=\frac{q_1^{2\alpha}U_{\nu,\alpha;11}^{01}(q_1R_0)}{\Delta_{\nu,\alpha;11}(q_1R_0,q_1R_1)}\cdot\Psi_{\nu,\alpha;11}^{1*}(q_1R_1,q_1\rho);$$

$$\Delta_{\nu,\alpha;j1}(q_1R_0,q_1R_1)=U_{\nu,\alpha;11}^{01}(q_1R_0)U_{\nu,\alpha;j1}^{12}(q_1R_1)-U_{\nu,\alpha;11}^{02}(q_1R_0)U_{\nu,\alpha;j1}^{11}(q_1R_1),\ j=1,2.$$

Цим функція $E_1^*(p,r,\rho)$ визначена й унаслідок симетрії відносно діагоналі $r=\rho$ має структуру

$$E_1^*(p,r,\rho)=\frac{q_1^{2\alpha}}{\Delta_{\nu,\alpha;11}}\begin{cases}\Psi_{\nu,\alpha;11}^{0*}(q_1R_0,q_1r)\Psi_{\nu,\alpha;11}^{1*}(q_1R_1,q_1\rho), R_0<r<\rho<R_1\\ \Psi_{\nu,\alpha;11}^{0*}(q_1R_0,q_1\rho)\Psi_{\nu,\alpha;11}^{1*}(q_1R_1,q_1r), R_0<\rho<r<R_1.\end{cases} \tag{14}$$

У рівностях (12)-(14) беруть участь функції

$$U_{\nu,\alpha;jk}^{m1}(q_sR_m)=\left(\overline{\alpha}_{jk}^{m}\frac{\nu-\alpha}{R_m}+\overline{\beta}_{jk}^{m}\right)I_{\nu,\alpha}(q_sR_m)+\overline{\alpha}_{jk}^{m}q_s^2R_mI_{\nu+1,\alpha+1}(q_sR_m),$$

$$U_{\nu,\alpha;jk}^{m2}(q_sR_m)=\left(\overline{\alpha}_{jk}^{m}\frac{\nu-\alpha}{R_m}+\overline{\beta}_{jk}^{m}\right)K_{\nu,\alpha}(q_sR_m)-\overline{\alpha}_{jk}^{m}q_s^2R_mK_{\nu+1,\alpha+1}(q_sR_m),$$

$$\Psi_{\nu,\alpha;jk}^{m*}(q_sR_m,q_sr)=U_{\nu,\alpha;jk}^{m1}(q_sR_m)K_{\nu,\alpha}(q_sr)-U_{\nu,\alpha;jk}^{m2}(q_sR_m)I_{\nu,\alpha}(q_sr).$$

Припустимо, що функція Коші

$$E_2^*(p,r,\rho)=\begin{cases}\overset{-}{E}{}_2^* \equiv C_1P_{\nu_2}^{(\mu)}(chr)+D_1L_{\nu_2}^{(\mu)}(chr), R_1<r<\rho<R_2\\ \overset{+}{E}{}_2^* \equiv C_2P_{\nu_2}^{(\mu)}(chr)+D_2L_{\nu_2}^{(\mu)}(chr), R_1<\rho<r<R_2.\end{cases}$$

Властивості (10) функції Коші дають алгебраїчну систему з двох рівнянь

$$(C_2-C_1)P_{\nu_2}^{(\mu)}(ch\rho)+(D_2-D_1)L_{\nu_2}^{(\mu)}(ch\rho)=0,$$

$$(C_2-C_1)P_{\nu_2}^{(\mu)\prime}(ch\rho)+(D_2-D_1)L_{\nu_2}^{(\mu)\prime}(ch\rho)=-\left(sh^2\rho\right)^{-1}.$$

Звідси отримуємо співвідношення

$$C_2 - C_1 = -B_{(\mu)}(q_2)\, L_{\nu_2}^{(\mu)}(ch\rho),\; D_2 - D_1 = B_{(\mu)}(q_2)\, P_{\nu_2}^{(\mu)}(ch\rho). \qquad (15)$$

Доповнимо рівності (15) алгебраїчними рівняннями

$$\left(\overline{\alpha}_{12}^{1} \frac{d}{dr} + \overline{\beta}_{12}^{1}\right) \overset{-}{E}{}_2^{*}\Big|_{r=R_1} = 0 : \quad \left(\overline{\alpha}_{11}^{2} \frac{d}{dr} + \overline{\beta}_{11}^{2}\right) \overset{+}{E}{}_2^{*}\Big|_{r=R_2} = 0 : \quad \begin{cases} Z_{\nu_2;12}^{(\mu);11}(chR_1)\, C_1 + Z_{\nu_2;12}^{(\mu);12}(chR_1)\, D_1 = 0 \\ Z_{\nu_2;11}^{(\mu);21}(chR_2)\, C_2 + Z_{\nu_2;11}^{(\mu);22}(chR_2)\, D_2 = 0. \end{cases} \qquad (16)$$

Алгебраїчна система (16) внаслідок рівностей (15) набуває вигляду

$$Z_{\nu_2;12}^{(\mu);11}(chR_1)\, C_1 + Z_{\nu_2;12}^{(\mu);12}(chR_1)\, D_1 = 0$$

$$Z_{\nu_2;11}^{(\mu);21}(chR_2)\, C_1 + Z_{\nu_2;11}^{(\mu);22}(chR_2)\, D_1 = B_{(\mu)}(q_2)\, F_{\nu_2;11}^{(\mu),2}(chR_{2,} ch\rho). \qquad (17)$$

Алгебраїчну систему (17) розв’язуємо за правилами Крамера [8]

$$C_1 = -\frac{B_{(\mu)}(q_2)\, Z_{\nu_2;12}^{(\mu),12}(chR_1)}{\Delta_{\nu_2;11}^{(\mu)}(chR_1, chR_2)} F_{\nu_2;11}^{(\mu),2}(chR_2, ch\rho),$$

$$D_1 = \frac{B_{(\mu)}(q_2)\, Z_{\nu_2;12}^{(\mu),11}(chR_1)}{\Delta_{\nu_2;11}^{(\mu)}(chR_1, chR_2)} F_{\nu_2;11}^{(\mu),2}(chR_2, ch\rho).$$

Цим функція Коші $E_2^*(p, r, \rho)$ визначена й унаслідок симетрії відносно діагоналі $r = \rho$ має структуру

$$E_2^*(p, r, \rho) = \frac{B_{(\mu)}(q_2)}{\Delta^{(\mu)}{}_{\nu_2;11}} \begin{cases} F_{\nu_2;12}^{(\mu),1}(chR_1, chr)\, F_{\nu_2;11}^{(\mu),2}(chR_2, ch\rho), R_1 < r < \rho < R_2 \\ F_{\nu_2;12}^{(\mu),1}(chR_1, ch\rho)\, F_{\nu_2;11}^{(\mu),2}(chR_2, chr), R_1 < \rho < r < R_2. \end{cases} \qquad (18)$$

У рівностях (15)–(18) беруть участь функції

$$B_{(\mu)}(q_2) = \frac{\pi}{2} \frac{2^{\mu_1}}{2^{\mu_2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + q_2 - \nu_{12}^{+}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + q_2 - \nu_{12}^{-}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + q_2 + \nu_{12}^{+}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + q_2 + \nu_{12}^{-}\right)},\; \nu_{12}^{\pm} = \frac{1}{2}(\mu_1 \pm \mu_2),$$

$$Z_{\nu_2;jk}^{(\mu),m1}(chRm) = \left(\overline{\alpha}_{jk}^{m} \frac{d}{dr} + \overline{\beta}_{jk}^{m}\right) P_{\nu_2}^{(\mu)}(chr)\Big|_{r=R_m},$$

$$Z_{\nu_2;jk}^{(\mu),m2}(chRm) = \left(\overline{\alpha}_{jk}^{m} \frac{d}{dr} + \overline{\beta}_{jk}^{m}\right) L_{\nu_2}^{(\mu)}(chr)\Big|_{r=R_m},$$

$$F_{\nu_2;jk}^{(\mu),m}(chRm, chr) = Z_{\nu_2;jk}^{(\mu),m1}(chRm)\, L_{\nu_2}^{(\mu)}(chr) - Z_{\nu_2;jk}^{(\mu),m2}(chRm)\, P_{\nu_2}^{(\mu)}(chr).$$

Нехай функція Коші

$$E_3^*(p, r, \rho) = \begin{cases} \overset{-}{E}{}_3^{*} \equiv C_1 chq_3 r + D_1 shq_3 r,\; R_2 < r < \rho < R_3 \\ \overset{+}{E}{}_3^{*} \equiv C_2 chq_3 r + D_2 shq_3 r,\; R_2 < \rho < R_3. \end{cases}$$

Властивості (10) функції Коші дають алгебраїчну систему з двох рівнянь

$$(C_2 - C_1)\, chq_3\rho + (D_2 - D_1)\, shq_3\rho = 0$$

$$(C_2 - C_1)\, shq_3\rho + (D_2 - D_1)\, chq_3\rho = -q_3^{-1}.$$

Звідси отримуємо співвідношення:

$$C_2 - C_1 = q_3^{-1} shq_3\rho, \qquad D_2 - D_1 = -q_3^{-1} chq_3\rho. \qquad (19)$$

Доповнимо рівності (19) алгебраїчними рівняннями

$$\left.\left(\overline{\alpha}_{12}^{2}\, d\big/dr+\overline{\beta}_{12}^{2}\right)\overset{-}{E}{}^{*}_{3}\right|_{r=R_2}=0: \quad \left.\left(\overline{\alpha}_{22}^{3}\, d\big/dr+\overline{\beta}_{22}^{3}\right)\overset{+}{E}{}^{*}_{3}\right|_{r=R_3}=0: \quad \begin{cases} V_{12}^{21}(q_3R_2)C_1+V_{12}^{22}(q_3R_2)D_1=0 \\ V_{22}^{31}(q_3R_3)C_2+V_{22}^{32}(q_3R_3)D_2=0. \end{cases} \tag{20}$$

Алгебраїчна система (20) внаслідок рівностей (19) набуває вигляду

$$\begin{gathered} V_{12}^{21}(q_3R_2)C_1+V_{12}^{22}(q_3R_2)D_1=0 \\ V_{22}^{31}(q_3R_3)C_1+V_{22}^{32}(q_3R_3)D_1=q_3^{-1}\Phi_{22}^{3}(q_3R_3,q_3\rho). \end{gathered} \tag{21}$$

Алгебраїчну систему (21) розв'язуємо за правилами Крамера [8]

$$C_1=-\frac{V_{12}^{22}(q_3R_2)\Phi_{22}^{3}(q_3R_3,q_3\rho)}{q_3\Delta_{12}(q_3R_{2,}q_3R_3)},\quad D_1=\frac{V_{12}^{21}(q_3R_2)\Phi_{22}^{3}(q_3R_3,q_3\rho)}{q_3\Delta_{12}(q_3R_{2,}q_3R_3)}.$$

Цим функція Коші $E_3^*(p,r,\rho)$ визначена й унаслідок симетрії відносно діагоналі $r=\rho$ має структуру

$$E_3^*(p,r,\rho)=-\frac{1}{q_3\Delta_{12}(q_3R_{2,}q_3R_3)}\begin{cases}\Phi_{12}^{2}(q_3R_2,q_3r)\Phi_{22}^{3}(q_3R_3,q_3\rho),\ R_2<r<\rho<R_3\\ \Phi_{12}^{2}(q_3R_2,q_3\rho)\Phi_{22}^{3}(q_3R_3,q_3r),\ R_2<\rho<r<R_3.\end{cases} \tag{22}$$

У рівностях (20)–(22) беруть участь функції

$$V_{jk}^{m1}(q_3R_m)=\left.\left(\overline{\alpha}_{jk}^{m}\, d\big/dr+\overline{\beta}_{jk}^{m}\right)chq_3r\right|_{r=R_m}=\overline{\alpha}_{jk}^{m}q_3shq_3R_m+\overline{\beta}_{jk}^{m}chq_3R_m,$$

$$V_{jk}^{m2}(q_3R_m)=\left.\left(\overline{\alpha}_{jk}^{m}\, d\big/dr+\overline{\beta}_{jk}^{m}\right)shq_3r\right|_{r=R_m}=\overline{\alpha}_{jk}^{m}q_3chq_3R_m+\overline{\beta}_{jk}^{m}shq_3R_m,$$

$$\Delta_{j2}(q_3R_{2,}q_3R_3)=V_{j2}^{21}(q_3R_2)\cdot V_{22}^{32}(q_3R_3)-V_{j2}^{22}(q_3R_2)\cdot V_{22}^{31}(q_3R_3),\ j=1,2;$$

$$\Phi_{j2}^{m}(q_3R_m,q_3r)=V_{j2}^{m2}(q_3R_m)chq_3r-V_{j2}^{m1}(q_3R_m)shq_3r\equiv\overline{\alpha}_{j2}^{m}q_3chq_3(r-R_m)-\overline{\beta}_{j2}^{m}shq_3(r-R_m).$$

Повернемося до формул (9). Крайові умови (7) та умови спряження (8) для визначення величини $A_j,B_j,\left(j=\overline{1,3}\right)$ дають алгебраїчну систему із шести рівнянь

$$\begin{aligned} &U_{\nu,\alpha;11}^{01}(q_1R_0)A_1+U_{\nu,\alpha;11}^{02}(q_1R_0)B_1=g_0^*(p),\\ &U_{\nu,\alpha;j1}^{11}(q_1R_1)A_1+U_{\nu,\alpha;j1}^{12}(q_1R_1)B_1-Z_{\nu_2;j2}^{(\mu),11}(chR_1)A_2-Z_{\nu_2;j2}^{(\mu);12}(chR_1)B_2=\omega_{j1}^*(p)+\delta_{j2}G_{12}^*,\ j=1,2,\\ &Z_{\nu_2;j1}^{(\mu),21}(chR_2)A_2+Z_{\nu_2;j1}^{(\mu),22}(chR_2)B_2-V_{j2}^{21}(q_3R_2)A_3-V_{j2}^{22}(q_3R_2)B_3=\omega_{j2}^*(p)+\delta_{j2}G_{23}^*,\\ &V_{22}^{31}(q_3R_3)A_3+V_{22}^{32}(q_3R_3)B_3=g_R^*(p). \end{aligned} \tag{23}$$

У системі (23) беруть участь функції

$$G_{12}^*=\frac{c_{11}^*}{R_1^{2\alpha+1}}\int_{R_0}^{R_1}\frac{\Psi_{\nu,\alpha;11}^{0*}(q_1R_0,q_1\rho)}{\Delta_{\nu,\alpha;11}(q_1R_0,q_1R_1)}F_1^*(p,\rho)\rho^{2\alpha+1}d\rho-\frac{c_{21}^*}{shR_1}\int_{R_1}^{R_2}\frac{F_{\nu_2;11}^{(\mu),2}(chR_2,ch\rho)}{\Delta_{\nu_2;11}^{(\mu)}(chR_1,chR_2)}F_2^*(p,\rho)sh\rho d\rho,$$

$$G_{23}^*=\frac{c_{12}^*}{shR_2}\int_{R_1}^{R_2}\frac{F_{\nu_2;12}^{(\mu),1}(chR_1,ch\rho)}{\Delta_{\nu_2;11}^{(\mu)}(chR_1,chR_2)}F_2^*(p,\rho)sh\rho d\rho+c_{22}^*\int_{R_2}^{R_3}\frac{\Phi_{22}^{3}(q_3R_3,q_3\rho)}{\Delta_{12}(q_3R_{2,}q_3R_3)}F_3^*(p,\rho)d\rho.$$

та символ Кронекера δ_{j2} [8] $(\delta_{12}=0,\delta_{22}=1)$.

Введемо до розгляду функції

$$A_{\nu,\alpha,j}^{(\mu)}(p)=\Delta_{\nu,\alpha;11}(q_1R_0,q_1R_1)\Delta_{\nu_2;2j}^{(\mu)}(chR_1,chR_2)-\Delta_{\nu,\alpha;21}(q_1R_0,q_1R_1)\Delta_{\nu_2;1j}^{(\mu)}(chR_1,chR_2),$$

$$B_{(\mu);j}(p)=\Delta_{\nu_2,j1}^{(\mu)}(chR_1,chR_2)\Delta_{22}(q_3R_2,q_3R_3)-\Delta_{\nu_2;j2}^{(\mu)}(chR_1,chR_2)\Delta_{12}(q_3R_{2,}q_3R_3),\ j=1,2,$$

$$\theta_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(p,r)=\Delta_{\nu,\alpha;11}(q_1R_0,q_1R_1)F_{\nu_2;22}^{(\mu),1}(chR_1,chr)-\Delta_{\nu,\alpha;21}(q_1R_0,q_1R_1)F_{\nu_2;12}^{(\mu),1}(chR_1,chr),$$

$$\theta_{(\mu);2}(p,r)=\Delta_{22}(q_3R_{2,}q_3R_3)F_{\nu_2;11}^{(\mu),2}(chR_2,chr)-\Delta_{12}(q_3R_{2,}q_3R_3)F_{\nu_2;21}^{(\mu),2}(chR_2,chr).$$

Припустимо, що виконана умова існування єдиного розв'язку крайової задачі (6)–(8): для $p=\sigma+is$ із $\operatorname{Re} p=\sigma>\sigma_0$, де σ_0 – абсциса збіжності інтегралу Лапласа та $\operatorname{Im} p=s\in(-\infty,+\infty)$ визначник алгебраїчної системи (23) відмінний від нуля.

$$\begin{aligned}\Delta_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(p)&\equiv A_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(p)\Delta_{22}(q_3R_{2,}q_3R_3)-A_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)}(p)\Delta_{12}(q_3R_2,q_3R_3)=\\&=\Delta_{\nu,\alpha;11}(q_1R_0,q_1R_1)B_{(\mu),2}(p)-\Delta_{\nu,\alpha;21}(q_1R_0,q_1R_1)B_{(\mu);1}(p)\neq 0.\end{aligned} \tag{24}$$

Визначимо головні розв'язки крайової задачі (6)–(8):

1) породжені крайовою умовою в точці $r=R_0$ функції Гріна

$$W_{\nu,\alpha;11}^{(\mu)*}(p,r)=\frac{1}{\Delta_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(p)}\left[B_{(\mu),1}(p)\Psi_{\nu,\alpha;21}^{1*}(q_1R_1,q_1r)-B_{(\mu),2}(p)\Psi_{\nu,\alpha;11}^{1*}(q_1R_1,q_1r)\right],$$

$$W_{\nu,\alpha;12}^{(\mu)*}(p,r)=\frac{c_{11}^*}{q_1^{2\alpha}R_1^{2\alpha+1}}\frac{1}{\Delta_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(p)}\Big[\Delta_{12}(q_3R_2,q_3R_3)F_{\nu_2;21}^{(\mu),2}(chR_2,chr)-$$
$$-\Delta_{22}(q_3R_2,q_3R_3)F_{\nu_2;11}^{(\mu),2}(chR_2,chr)\Big],$$

$$W_{\nu,\alpha;13}^{(\mu)*}(p,r)=\frac{c_{11}^*}{q_1^{2\alpha}R_1^{2\alpha+1}}\frac{c_{12}^*}{B_{(\mu)}(q_2)shR_2}\cdot\frac{1}{\Delta_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(p)}\Phi_{22}^3(q_3R_3,q_3r); \tag{25}$$

2) породжені крайовою умовою в точці $r=R_3$ функції Гріна

$$W_{\nu,\alpha;31}^{(\mu)*}(p,r)=-\frac{c_{21}^*c_{22}^*q_3}{B_{(\mu)}(q_2)shR_1}\cdot\frac{1}{\Delta_{\nu,\alpha}^{(\mu)}}\Psi_{\nu,\alpha;11}^{0*}(q_1R_0,q_1r),$$

$$W_{\nu,\alpha;32}^{(\mu)*}(p,r)=-\frac{c_{22}^*q_3}{\Delta_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(p)}\Big[\Delta_{\nu,\alpha;11}(q_1R_0,q_1R_1)F_{\nu_2;22}^{(\mu),1}(chR_1,chr)-$$
$$-\Delta_{\nu,\alpha;21}(q_1R_0,q_1R_1)F_{\nu_2;12}^{(\mu),1}(chR_1,chr)\Big],$$

$$W_{\nu,\alpha;33}^{(\mu)*}(p,r)=\frac{1}{\Delta_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(p)}\left[A_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)}(p)\Phi_{12}^2(q_3R_2,q_3r)-A_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(p)\Phi_{22}^2(q_3R_2,q_3r)\right]. \tag{26}$$

3) породжені неоднорідністю умов спряження фунуції Гріна

$$\Re_{\nu,\alpha;11}^{(\mu)*,1}(p,r)=\frac{B_{(\mu),2}(p)}{\Delta_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(p)}\Psi_{\nu,\alpha;11}^{0*}(q_1R_{0,}q_1r),\ \Re_{\nu,\alpha;21}^{(\mu)*,1}(p,r)=-\frac{B_{(\mu),1}(p)}{\Delta_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(p)}\Psi_{\nu,\alpha;11}^{0*}(q_1R_{0,}q_1r);$$

$$\Re_{\nu,\alpha;12}^{(\mu)*,1}(p,r)=\frac{c_{21}^*}{B_{(\mu)}(q_2)shR_1}\cdot\frac{\Delta_{22}(q_3R_{2,}q_3R_3)}{\Delta_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(p)}\Psi_{\nu,\alpha;11}^{0*}(q_1R_{0,}q_1r),$$

$$\Re_{\nu,\alpha;22}^{(\mu)*,1}(p,r)=-\frac{c_{21}^*}{B_{(\mu)}(q_2)shR_1}\cdot\frac{\Delta_{12}(q_3R_{2,}q_3R_3)}{\Delta_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(p)}\Psi_{\nu,\alpha;11}^{0*}(q_1R_{0,}q_1r);$$

$$\Re_{\nu,\alpha;11}^{(\mu)*,2}(p,r)=-\frac{\Delta_{\nu,\alpha;21}}{\Delta_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(p)}\theta_{(\mu),2}(p,r);\ \Re_{\nu,\alpha;21}^{(\mu)*,2}(p,r)=\frac{\Delta_{\nu,\alpha;11}}{\Delta_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(p)}\theta_{(\mu);2}(p,r),$$

$$\Re_{\nu,\alpha;12}^{(\mu)*,2}(p,r)=\frac{\Delta_{22}}{\Delta_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(p)}\theta_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(p,r),\ \Re_{\nu,\alpha;22}^{(\mu)*,2}(p,r)=-\frac{\Delta_{12}}{\Delta_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(p)}\theta_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(p,r);$$

$$\Re_{\nu,\alpha;11}^{(\mu)*,3}(p,r)=\frac{c_{12}}{B_{(\mu)}(q_2)shR_2}\cdot\frac{\Delta_{\nu,\alpha;21}(q_1R_0,q_1R_1)}{\Delta_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(q)}\Phi_{22}^3(q_3R_{3,}q_3r), \tag{27}$$

$$\Re^{(\mu)*,3}_{\nu,\alpha;21}\left(p,r\right)=-\frac{c_{12}}{B_{(\mu)}\left(q_2\right)shR_2}\cdot\frac{\Delta_{\nu,\alpha;11}\left(q_1R_0,q_1R_1\right)}{\Delta^{(\mu)}_{\nu,\alpha}\left(q\right)}\Phi^3_{22}\left(q_3R_{3,}q_3r\right),$$

$$\Re^{(\mu)*,3}_{\nu,\alpha;12}\left(p,r\right)=\frac{A^{(\mu)}_{\nu,\alpha;2}}{\Delta^{(\mu)}_{\nu,\alpha}\left(p\right)}\Phi^3_{22}\left(q_3R_{3,}q_3r\right);\ \Re^{(\mu)*,3}_{\nu,\alpha;22}\left(p,r\right)=-\frac{A^{(\mu)}_{\nu,\alpha;1}}{\Delta^{(\mu)}_{\nu,\alpha}\left(p\right)}\Phi^3_{22}\left(q_3R_{3,}q_3r\right);$$

4) породжені неоднорідністю системи функції впливу

$$H^{(\mu)*}_{\nu,\alpha;11}\left(p,r,\rho\right)=-q_1^{2\alpha}\begin{cases}\Psi^{0*}_{\nu,\alpha;11}\left(q_1R_{0,}q_1r\right)W^{(\mu)*}_{\nu,\alpha;11}\left(p,\rho\right),R_0<r<\rho<R_1\\ \Psi^{0*}_{\nu,\alpha;11}\left(q_1R_{0,}q_1\rho\right)W^{(\mu)*}_{\nu,\alpha;11}\left(p,r\right),R_0<\rho<r<R_1,\end{cases}$$

$$H^{(\mu)*}_{\nu,\alpha;12}\left(p,r,\rho\right)=\frac{c^*_{21}}{shR_1}\frac{1}{\Delta^{(\mu)}_{\nu,\alpha}\left(p\right)}\cdot\Psi^{0*}_{\nu,\alpha;11}\left(q_1R_{0,}q_1r\right)\theta_{(\mu),2}\left(p,\rho\right),$$

$$H^{(\mu)*}_{\nu,\alpha;13}\left(p,r,\rho\right)=-\frac{c^*_{21}c^*_{22}}{B_{(\mu)}\left(q_2\right)shR_1}\cdot\frac{1}{\Delta^{(\mu)}_{\nu,\alpha}\left(p\right)}\cdot\Psi^{0*}_{\nu,\alpha;11}\left(q_1R_{0,}q_1r\right)\Phi^3_{22}\left(q_3R_{3,}q_3\rho\right);$$

$$H^{(\mu)*}_{\nu,\alpha;21}\left(p,r,\rho\right)=\frac{c^*_{11}}{R_1^{2\alpha+1}}\frac{1}{\Delta^{(\mu)}_{\nu,\alpha}\left(p\right)}\Psi^{0*}_{\nu,\alpha;11}\left(q_1R_{0,}q_1\rho\right)\theta_{(\mu),2}\left(p,r\right),$$

$$H^{(\mu)*}_{\nu,\alpha;22}\left(p,r,\rho\right)=\frac{B_{(\mu)}\left(q_2\right)}{\Delta^{(\mu)}_{\nu,\alpha}\left(p\right)}\begin{cases}\theta^{(\mu)}_{\nu,\alpha;1}\left(p,r\right)\theta_{(\mu),2}\left(p,\rho\right),R_1<r<\rho<R_2\\ \theta^{(\mu)}_{\nu,\alpha;1}\left(p,\rho\right)\theta_{(\mu),2}\left(p,r\right),R_1<\rho<r<R_2,\end{cases}$$

$$H^{(\mu)*}_{\nu,\alpha;23}\left(p,r,\rho\right)=-\frac{c^*_{22}}{\Delta^{(\mu)}_{\nu,\alpha}\left(p\right)}\cdot\theta^{(\mu)}_{\nu,\alpha;1}\left(p,r\right)\Phi^3_{22}\left(q_3R_{3,}q_3\rho\right),$$

$$H^{(\mu)*}_{\nu,\alpha;31}\left(p,r,\rho\right)=-\frac{c^*_{11}}{R_1^{2\alpha+1}}\cdot\frac{c^*_{12}}{B_{(\mu)}\left(q_2\right)shR_2}\cdot\frac{1}{\Delta^{(\mu)}_{\nu,\alpha}\left(p\right)}\Psi^{0*}_{\nu,\alpha;11}\left(q_1R_{0,}q_1\rho\right)\Phi^3_{22}\left(q_3R_{3,}q_3r\right),$$

$$H^{(\mu)*}_{\nu,\alpha;32}\left(p,r,\rho\right)=-\frac{c^*_{12}}{shR_2}\frac{1}{\Delta^{(\mu)}_{\nu,\alpha}\left(p\right)}\theta^{(\mu)}_{\nu,\alpha;1}\left(p,\rho\right)\Phi^3_{22}\left(q_3R_{3,}q_3r\right),$$

$$H^{(\mu)*}_{\nu,\alpha;33}\left(p,r,\rho\right)=\frac{1}{q_3}\begin{cases}W^{(\mu)*}_{\nu,\alpha;33}\left(p,r\right)\Phi^3_{22}\left(q_3R_{3,}q_3\rho\right),R_2<r<\rho<R_3\\ W^{(\mu)*}_{\nu,\alpha;33}\left(p,\rho\right)\Phi^3_{22}\left(q_3R_{3,}q_3r\right),R_2<\rho<r<R_3.\end{cases}\tag{28}$$

У результаті існування єдиного розв'язку алгебраїчної системи (23) й підстановки отриманих значень $A_{j,}B_j\left(j=\overline{1,3}\right)$ у формули (9) маємо єдиний розв'язок крайової задачі (6)–(8)

$$\begin{aligned}u^*_j\left(p,r\right)&=W^{(\mu)*}_{\nu,\alpha;1j}\left(p,r\right)g^*_0\left(p\right)+W^{(\mu)*}_{\nu,\alpha;3j}\left(p,r\right)g^*_R\left(p\right)+\sum_{m,k=1}^{2}\Re^{(\mu)*,j}_{\nu,\alpha;mk}\left(p,r\right)\omega^*_{mk}\left(p\right)+\\&+\int_{R_0}^{R_1}H^{(\mu)*}_{\nu,\alpha;j1}\left(p,r,\rho\right)F^*_1\left(p,\rho\right)\rho^{2\alpha+1}d\rho+\int_{R_1}^{R_2}H^{(\mu)*}_{\nu,\alpha;j2}\left(p,r,\rho\right)F^*_2\left(p,\rho\right)sh\rho d\rho+\\&+\int_{R_2}^{R_3}H^{(\mu)*}_{\nu,\alpha;j3}\left(p,r,\rho\right)F^*_3\left(p,\rho\right)d\rho,\ j=\overline{1,3}.\end{aligned}\tag{29}$$

Повертаючись у формулах (29) до оригіналу, отримуємо єдиний розв'язок параболічної задачі (2)–(5)

$$
\begin{gathered}
u_j(t,r)=\int\limits_0^t\left[W^{(\mu)}_{\nu,\alpha;1j}(t-\tau,r)g_0(\tau)+W^{(\mu)}_{\nu,\alpha;3j}(t-\tau,r)g_R(\tau)\right]d\tau+\\
+\sum_{m,k=1}^{2}\int\limits_0^t\Re^{(\mu),j}_{\nu,\alpha;mk}(t-\tau,r)\omega_{mk}(\tau)d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_{R_0}^{R_1}H^{(\mu)}_{\nu,\alpha;j1}(t-\tau,r,\rho)\left[f_1(\tau,\rho)+g_1(\rho)\delta_+(\tau)\right]\times\\
\times a_1^{-2}\rho^{2\alpha+1}d\rho d\tau+\int\limits_0^t\int\limits_{R_1}^{R_2}H^{(\mu)}_{\nu,\alpha;j2}(t-\tau,r,\rho)\left[f_2(\tau,\rho)+g_2(\rho)\delta_+(\tau)\right]\times\\
\times sh\rho d\rho d\tau\cdot a_2^{-2}+\int\limits_0^t\int\limits_{R_2}^{R_3}H^{(\mu)}_{\nu,\alpha;j3}(t-\tau,r,\rho)\left[f_3(\tau,\rho)+g_3(\rho)\delta_+(\tau)\right]a_3^{-2}d\rho d\tau;\ j=\overline{1,3}.
\end{gathered}
\tag{30}
$$

Тут $\delta_+(\tau)$ – дельта-функція, зосереджена в точці $\tau=0+[7]$.

У формулах (30) за означенням [6]

$$
W^{(\mu)}_{\nu,\alpha;kj}(t,r)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty}W^{(\mu)*}_{\nu,\alpha;kj}(p,r)e^{pt}dp;k=\overline{1,3};\ j=\overline{1,3}. \tag{31}
$$

$$
\Re^{(\mu)j}_{\nu,\alpha;mk}(t,r)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty}\Re^{(\mu)*,j}_{\nu,\alpha;mk}(p,r)e^{pt}dp;m,k=1,2;\ j=\overline{1,3}. \tag{32}
$$

$$
H^{(\mu)}_{\nu,\alpha;jk}(t,r,\rho)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty}H^{(\mu)*}_{\nu,\alpha;jk}(p,r,\rho)e^{pt}dp;\ j,k=\overline{1,3}. \tag{33}
$$

Особливими точками функції $W^{(\mu)*}_{\nu,\alpha;kj}(p,r)$, $\Re^{(\mu)*,j}_{\nu,\alpha;mk}(p,r)$ та $H^{(\mu)*}_{\nu,\alpha;jk}(p,r,\rho)$ є точки галуження $p=-\gamma_j^2\left(j=\overline{1,3}\right)$ й точка $p=\infty$.

Припустимо, що $\gamma^2=\max\left\{\gamma_1^2;\gamma_2^2;\gamma_3^2\right\}$. Покладемо $k_j^2=\gamma^2-\gamma_j^2$, $q_j=ib_j=ia_j^{-1}\left(\beta^2+k_j^2\right)^{1/2}$. Отримаємо $p=-\beta^2-\gamma^2=\left(\beta^2+\gamma^2\right)e^{\pi i},dp=-2\beta d\beta.$

Оскільки особливі точки головних розв'язків крайової задачі (6)–(8) знаходяться на від'ємній частині дійсної осі p – комплексної площини, то можна „сісти" на уявну вісь й отримати такого характеру розрахункові формули

$$
W^{(\mu)}_{\nu,\alpha;kj}(t,r)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\mathrm{Re}\left[W^{(\mu)*}_{\nu,\alpha;kj}(is,r)e^{ist}\right]ds;k=\overline{1,3};\ j=\overline{1,3}. \tag{34}
$$

$$
\Re^{(\mu),j}_{\nu,\alpha;mk}(t,r)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\mathrm{Re}\left[\Re^{(\mu)*,j}_{\nu,\alpha;mk}(is,r)e^{ist}\right]ds;m,k=1,2,\ j=\overline{1,3}. \tag{35}
$$

$$
H^{(\mu)}_{\nu,\alpha;jk}(t,r,\rho)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\mathrm{Re}\left[H^{(\mu)*}_{\nu,\alpha;jk}(is,r,\rho)e^{ist}\right]ds;\ j,k=\overline{1,3}. \tag{36}
$$

Тут $\mathrm{Re}(...)$ означає дійсну частину виразу $(...)$.

З другого боку, при $p=-\left(\beta^2+\gamma^2\right)$ знаходимо, що

$$
\left.\overline{\alpha}^m_{jk}\right|_{p=-\left(\beta^2+\gamma^2\right)}=\alpha^m_{jk}-\left(\beta^2+\gamma^2\right)\delta^m_{jk}\equiv\tilde{\alpha}^m_{jk},\ \left.\overline{\beta}^m_{jk}\right|_{p=-\left(\beta^2+\gamma^2\right)}=\beta^m_{jk}-\left(\beta^2+\gamma^2\right)\gamma^m_{jk};
$$

$$
V^{m1}_{jk}(ib_3R_m)=-\tilde{\alpha}^m_{jk}b_3\sin b_3R_m+\tilde{\beta}^m_{jk}\cos b_3R_m\equiv v^{m1}_{jk}(b_3R_m);
$$

$$
V^{m2}_{jk}(ib_3R_m)=i\left(\tilde{\alpha}^m_{jk}b_3\cos b_3R_m+\tilde{\beta}^m_{jk}\sin b_3R_m\right)\equiv iv^{m2}_{jk}(b_3R_m);
$$

$$I_{\nu,\alpha}(ibR)=\exp\left[\frac{\pi i}{2}(\nu-\alpha)\right]J_{\nu,\alpha}(bR);\ K_{\nu,\alpha}(ibR)=-\frac{\pi i}{2}\exp\left[-\frac{\pi i}{2}(\nu+\alpha)\right]\times$$

$$\times\left[J_{\nu,\alpha}(bR)-iN_{\nu,\alpha}(b,R)\right],\ u^{m1}_{\nu,\alpha;jk}(bR_m)=\left(\tilde{\alpha}^m_{jk}\frac{\nu-\alpha}{R_m}+\tilde{\beta}^m_{jk}\right)J_{\nu,\alpha}(bR_m)-\tilde{\alpha}^m_{jk}R_m b^2 J_{\nu+1,\alpha+1}(bR_m);$$

$$u^{m2}_{\nu,\alpha;jk}(bR_m)=\left(\tilde{\alpha}^m_{jk}\frac{\nu-\alpha}{R_m}+\tilde{\beta}^m_{jk}\right)N_{\nu,\alpha}(bR_m)-\tilde{\alpha}^m_{jk}R_m b^2 N_{\nu+1,\alpha+1}(bR_m);$$

$$\Delta_{\nu,\alpha;j1}(ib_1R_{0,}ib_1R_1)=-\frac{\pi}{2}e^{-\pi i\alpha}\delta_{\nu,\alpha;j1}(b_1R_{0,}b_1R_1)\equiv-\frac{\pi}{2}e^{-\pi i\alpha}\times$$

$$\times\left[u^{01}_{\nu,\alpha;11}(b_1R_0)u^{12}_{\nu,\alpha;j1}(b_1R_1)-u^{02}_{\nu,\alpha;11}(b_1R_0)u^{11}_{\nu,\alpha;j1}(b_1R_1)\right],\ j=1,2;$$

$$\Psi^m_{\nu,\alpha;jk}(bR_{m,}br)=u^{m1}_{\nu,\alpha;jk}(bR_m)N_{\nu,\alpha}(br)-u^{m2}_{\nu,\alpha;jk}(bR_m)J_{\nu,\alpha}(br),$$

$$\Psi^{m*}_{\nu,\alpha;jk}(ibR_{m,}ibr)=-\frac{\pi}{2}e^{-\pi i\alpha}\Psi^m_{\nu,\alpha;jk}(bR_{m,}br);$$

$$\Delta^{(\mu)}_{\nu_2;jk}(chR_1,chR_2)\Big|_{q_2=ib_2}=\Delta^{(\mu)}_{\nu_2^*;jk}(chR_1,chR_2)=-Z_{(\mu)}(b_2)\,\delta^{(\mu)}_{\nu_2^*;jk}(chR_1,chR_2);$$

$$\nu_2^*=-1/2+ib_2,\ Z_{(\mu)}(b_2)=\cos\mu_1\pi+i\gamma_{(\mu)}(b_2)\sin\mu_1\pi;$$

$$\gamma_{(\mu)}(b_2)=\cos\mu_1\pi sh(2\pi b_2)\left[\cos\mu_2\pi+\cos\mu_1\pi ch(2\pi b_2)\right]^{-1};$$

$$\delta^{(\mu)}_{\nu_2^*;jk}(chR_1,chR_2)=Y^{(\mu),11}_{\nu_2^*;j2}(chR_1)Y^{(\mu),22}_{\nu_2^*;k1}(chR_2)-Y^{(\mu),12}_{\nu_2^*;j2}(chR_1)Y^{(\mu),21}_{\nu_2^*;k1}(chR_2);$$

$$A^{(\mu)}_{\nu,\alpha;j}\left((\beta^2+\gamma^2)e^{\pi i}\right)=\frac{\pi}{2}Z_{(\mu)}(b_2)e^{-\pi i\alpha}\Big[\delta_{\nu,\alpha;11}(b_1R_0,b_1R_1)\delta^{(\mu)}_{\nu_2^*;2j}(chR_1,chR_2)-$$

$$-\delta_{\nu,\alpha;21}(b_1R_0,b_1R_1)\delta^{(\mu)}_{\nu_2^*;1j}(chR_1,chR_2)\Big]\equiv\frac{\pi}{2}Z_{(\mu)}(b_2)e^{-\pi i\alpha}a^{(\mu)}_{\nu,\alpha;j}(\beta);$$

$$\Delta^{(\mu)}_{\nu,\alpha}\left((\beta^2+\gamma^2)e^{\pi i}\right)=\frac{\pi}{2}iZ_{(\mu)}(b_2)e^{-\pi i\alpha}\left[a^{(\mu)}_{\nu,\alpha;1}(\beta)\delta_{22}(b_3R_2,b_3R_3)-a^{(\mu)}_{\nu,\alpha;2}(\beta)\delta_{12}(b_3R_2,b_3R_3)\right]\equiv$$

$$\equiv\frac{\pi}{2}iZ_{(\mu)}(b_2)e^{-\pi i\alpha}\delta^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(\beta).$$

Якщо $\delta^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(\beta)\neq 0,$ то згідно з формулами (31)–(33) головні розв’язки параболічної задачі (2)–(5) дорівнюють нулю. Внаслідок формул (30) вектор-функція $u(t,r)=\{u_1(t,r);u_2(t,r);u_3(t,r)\}$ тотожно дорівнюють нулю, що неможливо: параболічна задача (2)–(5) має ненульовий розв’язок. Звідси випливає, що $\delta^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(\beta)=0.$ Це трансцендентне рівняння має дійсні, прості корені β_n, які утворюють монотонно зростаючу числову послідовність з єдиною граничною точкою $\beta=\infty$ [9]. Отже, функції $W^{(\mu)*}_{\nu,\alpha;kj}(p,r)$, $\Re^{(\mu)*,j}_{\nu,\alpha;mk}(p,r)$ та $H^{(\mu)*}_{\nu,\alpha;jk}(p,r)$ у точках $\beta=\beta_n\left(p=p_n=(\beta_n^2+\gamma^2)\exp(\pi i)\right)$ мають прості полюси. Їх оригінали можна обчислити за узагальненою теоремою розвинення [6]

$$H^{(\mu)}_{\nu,\alpha;jk}(t,r,\rho)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-(\beta_n^2+\gamma^2)t}\frac{V^{(\mu)}_{\nu,\alpha;j}(r,\beta_n)V^{(\mu)}_{\nu,\alpha;k}(\rho,\beta_n)}{\left\|V^{(\mu)}_{\nu,\alpha}(r,\beta_n)\right\|_1^2}\sigma_k a_k^2;\quad j,k=\overline{1,3}. \tag{37}$$

$$W_{\nu,\alpha;1j}^{(\mu)}(t,r)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-(\beta_n^2+\gamma^2)t}\frac{V_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(R_0,\beta_n)V_{\nu,\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta_n)}{\left(-\alpha_{11}^0\right)\left\|V_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)\right\|_1^2}\sigma_1 a_1^2 R_0^{2\alpha+1},\quad j=\overline{1,3}. \tag{38}$$

$$W_{\nu,\alpha;3j}^{(\mu)}(t,r)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-(\beta_n^2+\gamma^2)t}\frac{V_{\nu,\alpha;3}^{(\mu)}(R_3,\beta_n)V_{\nu,\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta_n)}{\alpha_{22}^3\left\|V_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)\right\|_1^2},\quad j=\overline{1,3}. \tag{39}$$

$$\Re_{\nu,\alpha;2k}^{(\mu),j}(t,r)=d_k^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-(\beta_n^2+\gamma^2)t}Z_{\nu,\alpha;12}^{(\mu)k}(\beta_n)\frac{V_{\nu,\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta_n)}{\left\|V_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)\right\|_1^2};\ k=\overline{1,2};\ j=\overline{1,3}. \tag{40}$$

$$\Re_{\nu,\alpha;1k}^{(\mu),j}(t,r)=-d_k^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-(\beta_n^2+\gamma^2)t}Z_{\nu,\alpha;22}^{(\mu),k}(\beta_n)\frac{V_{\nu,\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta_n)}{\left\|V_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)\right\|_1^2},\ k=\overline{1,2};\ j=\overline{1,3}. \tag{41}$$

У формулах (37)-(41) беруть участь величини та функції

$$d_1=a_1^2\sigma_1R_1^{2\alpha+1}:c_{11,1};\ d_2=a_2^2\sigma_2 shR_2:c_{11,2};\ \ b_{jn}=\left(\beta_n^2+k_j^2\right)^{1/2}\cdot a_j^{-1};\ \ k_j^2\ge 0,\ j=\overline{1,3};$$

$$V_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta_n)=\frac{c_{21,1}c_{21,2}b_{3n}}{S_{(\mu)}(b_{2n})shR_1}\left[u_{\nu,\alpha;11}^{01}(b_{1n}R_0)N_{\nu,\alpha}(b_{1n}r)-u_{\nu,\alpha;11}^{02}(b_{1n}R_0)J_{\nu,\alpha}(b_{1n}r)\right],$$

$$V_{\nu,\alpha;2}(r,\beta_n)=c_{21,2}b_{3n}\left[\delta_{\nu,\alpha;21}(b_mR_{0,}b_{1n}R_1)f_{\nu_{2n}^*;12}^{(\mu);1}(chR_1,chr)-\delta_{\nu,\alpha;11}(b_{1n}R_{0,}b_{1n}R_1)f_{\nu_{2n}^*;22}^{(\mu);1}(chR_1,chr)\right],$$

$$V_{\nu,\alpha;3}(r,\beta_n)=\omega_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)}(\beta_n)\cos b_{3n}r-\omega_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(\beta_n)\sin b_{3n}r;$$

$$Z_{\nu,\alpha;i2}^{(\mu),k}(\beta_n)=\left(\alpha_{i2}^k\,d/dr+\beta_{i2}^k\right)V_{\nu,\alpha;k+1}^{(\mu)}(r,\beta_n)\Big|_{r=R_k};i,k=1,2;\nu_{2n}^*=-1/2+ib_{2n};$$

$$f_{\nu_{2n}^*;i2}^{(\mu);1}(chR_{1,}chr)=Y_{\nu_{2n}^*;i2}^{(\mu);11}(chR_1)B_{\nu_{2n}^*}^{(\mu)}(chr)-Y_{\nu_{2n}^*;i2}^{(\mu);12}(chR_1)A_{\nu_{2n}^*}^{(\mu)}(chr);$$

$$\sigma_1=\frac{c_{11,1}c_{11,2}}{c_{21,1}c_{21,2}}\cdot\frac{shR_1}{shR_2}\frac{a_1^{-1}}{R_1^{2\alpha_1+1}},\qquad \sigma_2=\frac{c_{11,2}}{c_{21,2}}\frac{a_2^{-2}}{shR_2},\ \sigma_3=1/a_3^2;$$

$$\omega_{\nu,\alpha;j}^{(\mu)}(\beta_n)=a_{\nu,\alpha;2}^{(\mu)}(\beta_n)v_{12}^{2j}(R_3\beta_{3n})-a_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(\beta_n)v_{22}^{2j}(b_{3n}R_3),\ j=1,2.$$

$$\left\|V_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(r,\beta_n)\right\|_1^2=\frac{2e^{\pi i\alpha}\omega_{\nu,\alpha;1}^{(\mu)}(\beta_n)b_{3n}}{i\pi Z_{(\mu)}(b_{2n})v_{22}^{31}(b_{3n}R_3)}\frac{d}{dp}\left(\Delta_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(p)\right)\Big|_{p=p_n};\quad p_n=-\left(\beta_n^2+\gamma^2\right).$$

Інші величини та функції загальноприйняті [10].

Нагадаємо, що β_n – різні, дійсні корені трансцендентного рівняння $\delta_{\nu,\alpha}^{(\mu)}(\beta)=0$ [9], а функції $A_{\nu_{2n}^*}^{(\mu)}(chr)$ та $B_{\nu_{2n}^*}^{(\mu)}(chr)$ складають фундаментальну систему розв'язків диференціального рівняння Лежандра $\left(\Lambda_{(\mu)}+b_{2n}^2\right)v=0$ [4].

Висновок. Інтегральне зображення (30) даної задачі дифузії поліпараметричне. Структура головних розв'язків дозволяє виділяти безпосередньо вибором параметрів будь-який практично важливий випадок (у рамках даної моделі). При $\delta_{jk}^m=0,\gamma_{jk}^m=0$ отримаємо розв'язок класичної задачі дифузії в середовищі з жорсткими відносно відбиття хвиль межами. Нарешті, отриманий розв'язок задачі дифузії носить алгоритмічний характер. Це дає змогу застосовувати його як в теоретичних дослідженнях, так і числових розрахунках.

Література

1. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1972. – 735 с.
2. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / Ю.М. Коляно. – К.:Наукова думка, 1992. – 280 с.
3. Ленюк М.П. Исследования основных краевых задач для дисипативного волнового уравнения Бесселя / М.П. Ленюк. – Киев, 1983. – 62 с. – (препринт/АН УССР. Ин-т математики; 83. 3).
4. Конет І.М. Ленюк М.П. Інтегральні перетворення типу, Мелера-Фока / І.М. Конет, М.П. Ленюк. - Чернівці: Прут, 2001. – 248 с.
5. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов. – М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.
6. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М.: Наука, 1987. – 688 с.
7. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г.Е. Шилов. – М.: Наука, 1965. – 328 с.
8. Курош А.Г. Курс высшей алгебры / А.Г. Курош. – М.: Наука, 1971. – 432 с.
9. Комаров Г.М. Скінченні гібридні інтегральні перетворення, породженні диференціальними рівняннями другого порядку / Г.М. Комаров, М.П. Ленюк, В.В. Мороз. – Чернівці: Прут, 2001. – 228 с.
10. Ленюк М.П. Скінченні гібридні інтегральні перетворення, породжені класичними диференціальними операторами математичної фізики. Частина 1 / М.П. Ленюк. – Чернівці: Прут, 2010. – 352 с.

Отримано 15.12.2010