УДК 539.372

М. Михайлишин, Б. Головатий
(Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя)

ЗНАХОДЖЕННЯ ОПТИМАЛЬНОГО СИЛОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА КІЛЬЦЕВУ ПЛАСТИНУ, ЗДАТНОГО СТВОРИТИ ПОЛЕ ПЛАСТИЧНИХ ДЕФОРМАЦІЙ , БЛИЗЬКЕ ДО ЗАДАНОГО

Побудуємо математичну модель термопружнопластичного деформування кільцевої пластинки під дією температурного навантаження і радіального силового навантаження на контурах $r = r_0$ і $r = R$ з використанням методу додаткових деформацій. Ми вважаємо, що умови навантаження і нагріву такі, що має місце осьова симетрія і постійність напружень і деформацій за товщиною пластини.

Ставиться задача досягти поле пластичних деформацій на кінець активного пластичного деформування, яке буде якнайменше відхилятися від заданого.

Повна система рівнянь задачі

$$\frac{d\sigma_1}{dr} = \frac{\nu-1}{r}\sigma_1 + \frac{E}{r}\left(\frac{u}{r} - \varepsilon_\theta^p - \alpha_T T^*\right),\ \frac{du}{dr} = \frac{1-\nu^2}{E}\sigma_1 - \nu\frac{u}{r} + \nu\varepsilon_\theta^p + \varepsilon_r^p + (1+\nu)\alpha_T T^*,$$

$$\sigma_2 = \nu\sigma_1 + E\left(\frac{u}{r} - \varepsilon_\theta^p - \alpha_T T^*\right),$$

$$\varepsilon_r^p = (\tilde{\psi}-1)\frac{1+\nu}{3E}(\sigma_1 - \sigma_2),\ \varepsilon_\theta^p = (\tilde{\psi}-1)\frac{1+\nu}{3E}(\sigma_2 - \sigma_1),\ \tilde{\psi} = 3G\frac{\tilde{\varepsilon}_i}{\tilde{\sigma}_i}$$

Приймаємо функціонал задачі у вигляді

$$I = \int_{r_0}^{R}\left\{(1-\beta)\left[a(\varepsilon_r^p - \varepsilon_r^{p0})^2 + b(\varepsilon_r^p - \varepsilon_r^{p0})^2\right] + \beta p_0^2\frac{\delta(r-r_0)}{r} + \gamma\left(\sigma_r - p_0\frac{\delta(r-r_0)}{r}\right)\right\} r\,dr$$

де $a,\ b,\ \beta$ – вагові коефіцієнти, а γ – множники Лагранжа.

Побудувавши розширений функціонал, з умови його мінімуму знаходимо систему рівнянь прямої задачі і такі рівняння для спряженої задачі

$$\frac{d}{dr}(r\lambda_1) = (1-\nu)\left(\lambda_1 - \lambda_2 r\frac{1+\nu}{E}\right) + \gamma r\delta(r-r_0) +$$

$$+ (\psi-1)r\frac{1+\nu}{3E}2(1-\beta)\left[a(\varepsilon_r^p - \varepsilon_r^{p0})(1+\nu) + b(\varepsilon_\theta^p - \varepsilon_\theta^{p0})(\nu-1)\right]$$

$$\frac{d}{dr}(r\lambda_2) = \lambda_2\psi_{pr} + \left(\nu\lambda_2 - \lambda_1\frac{E}{r}\right)(1-2\psi_{pr}) - 2(1-\beta)\psi_{pr}\left[a(\varepsilon_r^p - \varepsilon_r^{p0}) - 2b(\varepsilon_\theta^p - \varepsilon_\theta^{p0})\right]$$

де позначено

$$\psi_{pr} = \frac{(\psi-1)(1+\nu)}{3+2(\psi-1)(1+\nu)}.$$

Рівняння зв'язку між прямою і спряженою задачами наступне

$$2\beta p_0 - \gamma\ \delta_-(r-r_0) = 0,$$

з якого випливає, що $\gamma = 2\beta p_0$.

Для спряженої задачі повинні виконуватися такі граничні умови

$$\lambda_1(r_0) = 0,\ \lambda_2(r_0) = 0$$

Створене програмне забезпечення для розв'язку диференціальних рівнянь чисельними методами, отримані розв'язки задачі.