Секція: **МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ І МЕХАНІКА**
Керівники: **проф. О. Шаблій, проф. В. Кривень, доц. М. Михайлишин**
Секретар: **ст. викл. Д. Михалик**

УДК 539.375

Н. Блащак, А. Бойко, Г. Козбур, В. Кривень
(Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя)

АНАЛІТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ПРУЖНОЇ АНТИПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СМУГИ З КУТОВИМИ ТОЧКАМИ

Для дослідження напружено-дефомівного стану (НДС) тіл з концентраторами напружень розроблено чимало чисельно-аналітичних методів. Проте залишаються актуальними аналітичні розв'язки задач для тіл складної форми, особливо за наявності кутових точок на їх межі, яка в граничних випадках стає гладкою.

Дослідимо антиплоский пружний (НДС) в смузі $|x| \le a + |y| \operatorname{ctg}\alpha \; (-\infty < y < +\infty), \; -\infty < z < +\infty$ під впливом пари зосереджених сил $\pm Q$, прикладених паралельно осі аплікат у точках $x = 0, y = \pm b$. На межі смуги знаходяться дві її вершини $x = \pm a, y = 0$ з кутами при вершинах велиною 2α ($\alpha \in (0; \pi/2)$). Точки прикладання сил знаходяться настільки далеко від центра смуги ($b >> a$), що впливом величини b на розподіл напружень при вершинах смуги можна знехтувати. Якщо $\alpha \to 0$ смуга вироджується у площину з двома розрізами $|x| \ge a, \; y = 0$, а коли $\alpha \to \pi/2$ переходить у смугу з гладкими паралельними краями $x = \pm a, |y| < \infty$.

За вказаних умов складена із компонент напружень функція $\tau(\zeta) = \tau_{yz}(x, y) + i\,\tau_{xz}(x, y)$ є аналітичною в області $D = (x, y)\big| x > 0, y > 0, y > a + x \operatorname{tg}\alpha)$ і задовольняє на ∂D таким умовам: $\operatorname{Im}\tau(\zeta) = 0 \; (\zeta = iy, \; 0 < y < +\infty)$; $\operatorname{Im}\tau(\zeta) = 0 \; (\zeta = x, \; 0 \le x < a)$; $\arg\tau(\zeta) = \dfrac{\pi}{2} - \alpha \; (\zeta = x + iy, \; y = x \operatorname{tg}\alpha, \; a \le x < +\infty)$; $\tau(\zeta) = o(1) \; (\zeta \to \infty)$; $\int\limits_{-a}^{a} \tau_{yz}(x, 0)\,dx = Q$.

Аналітичний розв'язок поставленої задачі, знайдений з допомогою конформних відображень, виглядає так:

$$\tau(t) = \frac{\tau_0}{(1-t)^{1/p}}, \quad \zeta = \frac{a}{C}\int_0^t \frac{d\eta}{\sqrt{\eta}(\eta-1)^{\alpha/\pi}},$$

де $C = \int\limits_0^1 \eta^{-1/2}(1-\eta)^{-\alpha/\pi}\,d\eta$, $p = \dfrac{2\pi}{\pi - 2\alpha}$. $\tau_0 = \dfrac{a}{QC}\int\limits_0^1 \dfrac{d\eta}{\eta^{1/2}(1-\eta)^{(\pi+\alpha)/(2\pi)}}$.

Поле напружень в околі вершин вирізів сингулярне з показником $\frac{\pi-2\alpha}{2(\pi-\alpha)}$:

$$\tau(\zeta) = \tau_0\left(C\frac{\pi-\alpha}{\pi}\right)^{-\frac{\pi-2\alpha}{2(\pi-\alpha)}} + o\left((\zeta \pm a)^{-\frac{\pi-2\alpha}{2(\pi-\alpha)}}\right) \text{ при } \zeta \to \pm a.$$