УДК 539.3

О. Шаблій, М. Михайлишин, Н. Гащин, Б. Хоміцький
(Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя)

ЗНАХОДЖЕННЯ ЗАДАНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ПРИ ТЕПЛОВІЙ ПОСАДЦІ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК

В тонкій циліндричній оболонці товщиною *2h*, довжиною *2l* і радіусом серединної поверхні *R* потрібно знайти такий закон розподілу інтенсивності теплових джерел $W_t(x,t)$ (для осесиметричного випадку), який забезпечить за заданий час τ_n температурне поле, яке якнайменше відрізняється від заданого розподілу $T_з(x)$. Зауважимо, що $T_з(x)$ задовольняє в момент τ_n рівнянню теплопровідності:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}-\overline{m}^2 T=\frac{\partial T}{\partial t}-W_t$$

і граничним умовам конвективного теплообміну.

Оскільки ставиться задача добитися заданого розподілу температури при мінімальних енергозатратах, то розглядається двохкритеріальна задача мінімізації потужності теплових джерел та мінімізації відхилення температурного поля від заданого. Розширений функціонал:

$$J=\alpha\int_{-l}^{l}[T(x,t_n)-T_ç(x)]^2dx+\int_0^{t_n}\int_{-l}^{l}\{\beta W_t^{\,2}(x,t)+\psi(x,t)[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}-$$

$$-\overline{m}^2T-\frac{\partial T}{\partial t}+W_t]\}dxdt\Rightarrow\min\,,$$

де α і β деякі вагові коефіцієнти.

З умови стаціонарності розширеного функціоналу в просторі функцій стану, отримаємо систему розв’язуючих рівнянь для множника Лагранжа, граничних і часових умов для нього.

Шукаємо розв’язки отриманих диференціальних рівнянь методом розділення змінних: $\psi(x,t)=\Psi(x)\Phi(t)$. З граничних умов отримаємо систему однорідних рівнянь для визначення сталих інтегрування. Прирівнявши визначник даної системи до нуля, отримаємо трансцендентне рівняння для визначення власних чисел δ_n.

В результаті проведених перетворень вираз для визначення температурного поля, що якнайменше відрізнятиметься від заданого розподілу, матиме вигляд:

$$T_n(t)=\frac{1}{4\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{k_n^2}(e^{-k_n^2t}-e^{k_n^2t})(\cos\delta_n x+a_n\sin\delta_n x).$$

Невідомі коефіцієнти b_n визначаються із співвідношення:

$$b_n=\frac{-2\alpha\delta_n\int_{-l}^{l}T_ç(\tilde{o})(\cos\delta_n x+a_n\sin\delta_n x)dx}{[e^{k_n^2t_n}-\frac{\alpha}{2\beta k_n^2}(e^{-k_n^2t_n}-e^{k_n^2t_n})][\delta_n l(1+a_n)+(1-a_n)\sin 2\delta_n l]}$$