

УДК 539.3

Георгій Сулим, докт. фіз.-мат. наук;  
Віктор Опанасович, докт. фіз.-мат. наук; Ігор Яцик

Львівський національний університет імені Івана Франка

## ЗГИН ПЛАСТИНИ РЕЙССНЕРА З ДВОМА НЕ СПІВВІСНИМИ ОДНАКОВИМИ НАСКРІЗНИМИ ТРІЩИНАМИ З УРАХУВАННЯМ ШИРИНИ ОБЛАСТІ КОНТАКТУ ЇХНІХ БЕРЕГІВ

**Резюме.** Досліджено напружено-деформований стан ізотропної пластини з двома прямолінійними паралельними не зсунутими однаковими наскрізними тріщинами, береги яких до прикладання навантаження були вільними від зовнішнього навантаження, а під дією згинальних моментів на нескінченності прийшли у гладкий контакт уздовж області сталої ширини поблизу однієї з основ пластини. На основі методів теорії функцій комплексної змінної і комплексних потенціалів плоскої задачі теорії пружності та теорії згину пластин за Рейсснером розв'язок задачі зведено до системи сингулярних інтегральних рівнянь, яку розв'язано за допомогою методу механічних квадратур. Здійснено числовий аналіз задачі та побудовано графічні залежності для контактної зусилля між берегами тріщин, коефіцієнтів інтенсивності зусиль, моментів і поперечних сил за різних параметрів задачі.

**Ключові слова:** пластини Рейсснера, наскрізна тріщина, система тріщин, згин, плоский напружений стан, контакт берегів тріщини, комплексні потенціали, контактні зусилля, коефіцієнти інтенсивності зусиль, моментів, поперечних сил.

Heorhiy Sulym, Viktor Opanasovych, Ihor Yatsyk

## REISSNER'S PLATE BENDING CONTAINING TWO NOT COAXIAL IDENTICAL THROUGH-THE-THICKNESS CRACKS TAKING INTO ACCOUNT CONTACT ZONE WIDTH OF THEIR FACES

**Summary.** Construction of the cracked plate bending problems solutions forms an important and actual in terms of theory development and practical applications scientific direction. They make it possible to determine stress and displacement distribution near the crack tips, as well as make recommendations for selecting optimal geometrical, physical and mechanical characteristics of plates depending on operating conditions in order to prevent destruction of engineering constructions. In this paper the stress-strain state of boundless isotropic plate with two parallel not shifted through-the-thickness equal cracks, the faces of which are free from the external loading, is investigated. The plate is under the action of the uniformly distributed in a remote part bending moments, the vectors of which are parallel and perpendicular to the axes of the cracks. It is assumed that under external loading the cracks faces come in a smooth contact on all cracks length along the two-dimensional area of constant width near the upper plate basis. As a result of the cracks faces contact the solution of problem is presented in the form of two related problems solutions: the theory of elasticity plane problem and the problem of plates bending based on the equations of Reissner theory. On the basis of complex variable function theory methods and complex potentials the system of singular integral equations is obtained, which is reduced by the mechanical quadratures method to the infinite system of linear algebraic equations. This system is solved numerically using the Gauss method of reduction with a choice of main entry. The numerical analysis of problem at some parameters values is carried out and graphic dependences for contact force between the faces of cracks, force, bending moment, torque and transverse force intensity factors are constructed. In particular cases known in the scientific literature results for the Reissner's plate bending problems with one crack considering the contact zone width of its faces, with two parallel cracks when their faces contact is considered only along the line as well as for appropriate problems solved using equations of the classical theory of plates bending, are obtained.

**Key words:** Reissner's plate, through-the-thickness crack, system of cracks, bending, plane stress, contact of crack faces, complex potentials, contact forces, force, bending moment, torque, transverse force intensity factors.

**Постановка проблеми.** Як конструктивний елемент пластини широко застосовують у машинобудуванні та багатьох інших галузях техніки. Їхній запас міцності істотно залежить від присутності у них тріщиноподібних дефектів, які є потужними концентраторами напружень та істотно знижують допустиме навантаження, що може бути прикладено до пластини. Щоби визначити граничне навантаження, а також ресурс експлуатації пластинчастих елементів, важливо опрацювати методи оцінювання впливу таких дефектів на перерозподіл полів напружень.

Найчастіше пластини перебувають під дією згинального навантаження, тому вивчення напружено-деформованого стану пластини за згину з урахуванням можливого контакту берегів тріщиноподібних дефектів не втрачає своєї актуальності. З дослідженнями задач згину пластин з тріщинами та пошуком ефективних методів їхнього розв'язування можна ознайомитися в монографіях [1 – 3] і статтях [4 – 7], де контакт берегів тріщин не враховувався, хоча з фізичних міркувань зрозуміло, що вони будуть контактувати. У працях [8 – 21] враховано контакт берегів тріщиноподібних дефектів за згину пластини, проте відсутні дослідження, пов'язані зі згином пластини з двома паралельними однаковими не зсунутими тріщинами, береги яких контактують уздовж двовимірної зони постійної ширини з використанням теорії Рейсснера.

**Мета роботи** – дослідити згин ізотропної пластини Рейсснера з двома прямолінійними паралельними не зсунутими наскрізними однаковими тріщинами з урахуванням ширини області контакту їхніх берегів. Із застосуванням методів теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів розв'язок задачі зведений до системи сингулярних інтегральних рівнянь, яка розв'язана числово за допомогою методу механічних квадратур. Здійснено числовий аналіз прикладу за різних значень його параметрів, на основі якого побудовано відповідні графічні залежності.

**Формулювання задачі.** Дослідимо задачу про згин ізотропної пластини завтовшки  $2h$  з двома однаковими паралельними не зсунутими тріщинами завдовжки  $2l$ . Вважаємо, що під впливом зовнішнього навантаження береги тріщин приходять у гладкий контакт поблизу верхньої її основи уздовж усієї довжини тріщин, причому ширина області контакту є сталою та дорівнює  $h_1$ .

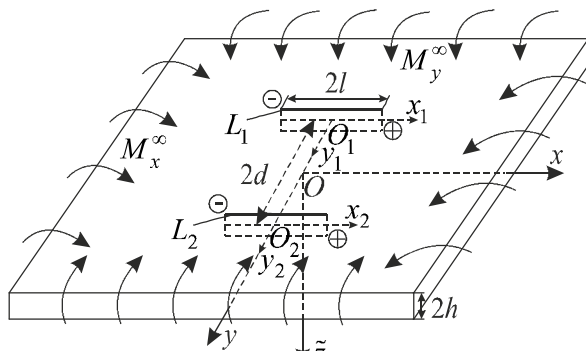


Рисунок 1. Схема навантаження пластини та розміщення тріщин

Figure 1. Plate loading and placing cracks scheme

Виберемо декартову систему координат  $Oxy^z$  з координатною площиною  $Oxy$  у серединній площині пластини, початок  $O$  якої розташований посередині відрізка, що з'єднує геометричні центри тріщин, а вісь  $Ox$  спрямовано паралельно до осей тріщин. Введемо локальні системи координат  $O_k x_k y_k$  ( $k=1,2$ ) з початками у точках  $O_k(0; (-1)^k d)$  і осями  $O_k x_k$  та  $O_k y_k$ , паралельними відповідно до осей  $Ox$  та  $Oy$ . Відрізок дійсної осі  $O_k x_k$ , для якого

$|x_k| \leq l$ , позначимо через  $L_k$ . Береги тріщин вільні від зовнішнього навантаження. Пластина перебуває під дією розподіленого згинального навантаження на нескінченності  $M_x^\infty$  і  $M_y^\infty$  (рис. 1). Надалі дотримуватимемося таких позначень:  $\mu$  – модуль зсуву;  $E$  – модуль пружності;  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона;  $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ .

З урахуванням контакту берегів тріщини розв'язання задачі розбиваємо на дві пов'язані задачі: плоску задачу теорії пружності та задачу згину пластини з використанням теорії Рейсснера.

Згідно з формулюванням задачі на берегах  $k$ -ої тріщини маємо такі крайові умови:

$$\sigma_{y_k y_k}^+ = \sigma_{y_k y_k}^- = -N_k / (2h), \quad \sigma_{x_k y_k}^+ = \sigma_{x_k y_k}^- = 0, \quad x_k \in L_k, \quad k = 1, 2; \quad (1)$$

$$M_{y_k}^+ = M_{y_k}^- = M_k, \quad H_{x_k y_k}^+ = H_{x_k y_k}^- = 0, \quad Q_{y_k}^+ = Q_{y_k}^- = 0, \quad x_k \in L_k, \quad k = 1, 2; \quad (2)$$

$$M_k = \beta h N_k, \quad \partial_{x_k} [v_{p_k}] - \alpha h \partial_{x_k} [\varphi_{y_k}] = 0, \quad x_k \in L_k, \quad k = 1, 2, \quad (3)$$

де  $\sigma_{x_k y_k}$ ,  $\sigma_{y_k y_k}$  та  $v_{p_k}$  – відповідно компоненти тензора напружень та проекція вектора переміщення точки на вісь  $O_k y_k$  у плоскій задачі;  $N_k$  – контактне зусилля між берегами  $k$ -ої тріщини, причому  $N_k > 0$ ;  $\varphi_{y_k}$  – усереднений за товщиною пластини кут повороту нормалі до серединної площини пластини у задачі згину [22];  $M_k$  – згинальний момент;  $Q_{y_k}$  і  $H_{x_k y_k}$  – поперечна сила і крутний момент відповідно;  $\partial_{x_k} = \partial / \partial x_k$ ,  $[f] = f^+ - f^-$ ; символами «+» і «-» позначені відповідно граничні значення функції при прямуванні точки площини до тріщини при  $y_k \rightarrow \pm 0$ ;  $\alpha = \{1 + (1 - \gamma)^2\} / 2$ ,  $\beta = 1 - \gamma / 3$ , а  $\gamma = h_1 / h$  – зведена ширина області контакту [8].

Потрібно знайти напружено-деформований стан пластини.

**Побудова розв'язку задачі.** При визначенні плоского напруженого стану введемо комплексні потенціали  $\Phi_p(z)$  і  $\Omega_p(z)$ , які зникають на нескінченності, а для визначення напружено-деформованого стану пластини скористаємося залежностями [3, 23]

$$\sigma_{yy} - i\sigma_{xy} = \Phi_p(z) + \overline{\Phi_p(z)} + z\overline{\Phi_p'(z)} + \overline{\Psi_p(z)},$$

$$\partial_x(u_p + iv_p) = \kappa\Phi_p(z) - \overline{\Phi_p(z)} - z\overline{\Phi_p'(z)} - \overline{\Psi_p(z)}; \quad (4)$$

$$\Phi_p(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^2 \int_{-l}^l \frac{g_j^0(t) dt}{T_j - z}, \quad \Psi_p(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^2 \int_{-l}^l \left\{ \frac{g_j^0(t)}{T_j - z} - \bar{T}_j g_j^0(t) / (T_j - z)^2 \right\} dt, \quad (5)$$

де  $z = x + iy$ ,  $T_j = t + z_j^0$ ,  $z_j^0 = i(-1)^j d$  і

$$g_j^0(t) = g_{1j}^0(t) + i g_{2j}^0(t) = 2\mu / (1 + \kappa) \partial_{x_j} \left( [u_{p_j}] + i[v_{p_j}] \right), \quad t \in L_j. \quad (6)$$

Врахування (1) та першої залежності (4) дає можливість записати, що

$$-N_k / h = 2 \left\{ \Phi_p(X_k) + \overline{\Phi_p(X_k)} + X_k \overline{\Phi_p'(X_k)} + \overline{\Psi_p(X_k)} \right\}, \quad (7)$$

а беручи до відома (5), (7) –

$$-N_k(x_k)/(2h) = \sum_{j=1}^2 \int_{-l}^l \{L_j(t, x_k) \mathfrak{g}'_j(t) + M_j(t, x_k) \overline{\mathfrak{g}'_j(t)}\} dt, \quad x_k \in L_k, \quad k = 1, 2, \quad (8)$$

де  $X_k = x_k + z_k^0$ ,  $L_j(t, x_k) = -\frac{i}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{T_j - X_k} \right\}$  і  $M_j(t, x_k) = \operatorname{Im} (T_j - X_k) / \left\{ \pi (\overline{T_j} - \overline{X_k})^2 \right\}$ .

Для побудови розв'язку задачі згину введемо у системі координат  $Oxy$  комплексні потенціали  $\Phi(z)$  і  $\Psi(z)$  та функцію  $\Omega(z, \bar{z})$ , для яких справджуються залежності [24]:

$$M_y + iH_{xy} = m \{ \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} \} + n \{ z \overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)} \} + \rho \{ 2\overline{\Phi''(z)} + i \overline{\partial_{zz}^2 \Omega(z, \bar{z})} \},$$

$$Q_x - iQ_y = -2D \{ 2\Phi'(z) - i \partial_z \Omega(z, \bar{z}) \}, \quad (9)$$

де  $m = -D(1+\nu)$ ,  $n = D(1-\nu)$ ,  $\rho = 4D/k_*^2$ ,  $D = 2Eh^3 / \{ 3(1-\nu^2) \}$ ,  $k_*^2 = 5 / (2h^2)$ ; функція  $\Omega(z, \bar{z})$  – розв'язок рівняння Гельмгольца  $4\partial_{zz}^2 \Omega(z, \bar{z}) = k_*^2 \Omega(z, \bar{z})$ .

При переході від системи координат  $Oxy$  до системи координат  $O_k x_k y_k$  виконуються співвідношення

$$\Phi_k(z_k) = \Phi(z), \quad \Psi_k(z_k) = \Psi(z) + \bar{z}_k^0 \Phi'(z), \quad \Omega_k(z_k, \bar{z}_k) = \Omega(z, \bar{z}). \quad (10)$$

Нехай  $\Phi_{*j}(z_j)$ ,  $\Psi_{*j}(z_j)$  і  $\Omega_{*j}(z_j, \bar{z}_j)$  – відповідні функції для пластини з однією  $j$ -ою тріщиною. Тоді, скориставшись формулами переходу (10) та принципом суперпозиції розв'язків [2], одержимо такі вирази для комплексних потенціалів  $\Phi_k(z_k)$ ,  $\Psi_k(z_k)$  та функцій  $\Omega_k(z_k, \bar{z}_k)$ :

$$\Phi_k(z_k) = \sum_{j=1}^2 \Phi_{*j}(z_{kj}) + (M_x^\infty + M_y^\infty) / (4m),$$

$$\Psi_k(z_k) = \sum_{j=1}^2 \{ \Psi_{*j}(z_{kj}) + \bar{z}_{kj}^0 \Phi'_{*j}(z_{kj}) \} + (M_y^\infty - M_x^\infty) / (2n),$$

$$\Omega_k(z_k, \bar{z}_k) = \sum_{j=1}^2 \Omega_{*j}(z_{kj}, \bar{z}_{kj}), \quad z_{kj} = z_k + z_{kj}^0, \quad \bar{z}_{kj}^0 = \bar{z}_k^0 - \bar{z}_j^0. \quad (11)$$

На основі результатів робіт [26, 27] функції  $\Phi_{*j}(z_{kj})$  і  $\Omega_{*j}(z_{kj}, \bar{z}_{kj})$  шукатимемо у вигляді

$$\Phi_{*j}(z_{kj}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-l}^l \frac{g_j(t)}{t - z_{kj}} dt; \quad (12)$$

$$\Omega_{*j}(z_{kj}, \bar{z}_{kj}) = \frac{k_*}{\pi} \operatorname{Im} \left\{ \int_{-l}^l \frac{r_{kj} K_1(k_* r_{kj})}{t - z_{kj}} \omega_j(t) dt \right\}, \quad (13)$$

де  $r_{kj} = |t - z_{kj}|$ ;  $\mathbf{g}_j(t) = \mathbf{g}_{1j}(t) + i \mathbf{g}_{2j}(t)$ ,  $\omega_j(t) = \omega_{1j}(t) + i \omega_{2j}(t)$ ;  $\mathbf{g}_{1j}(t)$ ,  $\mathbf{g}_{2j}(t)$ ,  $\omega_{1j}(t)$ ,  $\omega_{2j}(t)$  – шукані дійсні функції;  $K_j(x)$  – функції Макдональда  $j$ -го порядку, властивості яких описано у [25].

Похідні від функції  $\Omega_{*j}(z_{kj}, \bar{z}_{kj})$ , які входять у вирази (9), після підстановки у них (13) подамо так:

$$\partial_{z_k} \Omega_{*j}(z_{kj}, \bar{z}_{kj}) = \Omega_{1j}(z_{kj}, \bar{z}_{kj}) - \frac{i}{2\pi} \int_{-l}^l \omega_j(t) / (t - z_{kj})^2 dt; \quad (14)$$

$$\partial_{z_k z_k}^2 \Omega_{*j}(z_{kj}, \bar{z}_{kj}) = \Omega_{2j}(z_{kj}, \bar{z}_{kj}) - \frac{i}{\pi} \int_{-l}^l \omega_j(t) / (t - z_{kj})^3 dt, \quad (15)$$

причому функції  $\Omega_{1j}(z_{kj}, \bar{z}_{kj})$  і  $\Omega_{2j}(z_{kj}, \bar{z}_{kj})$  визначаються відповідно за формулами

$$\Omega_{1j}(z_{kj}, \bar{z}_{kj}) = \frac{ik_*^2}{2\pi} \int_{-l}^l \left\{ \frac{r_{kj}^2 \overset{\circ}{K}_1(k_* r_{kj})}{(t - z_{kj})^2} \omega_j(t) + \frac{(t - \bar{z}_{kj}) K_0(k_* r_{kj})}{r_{kj}^2} \operatorname{Re} \{ (t - \bar{z}_{kj}) \omega_j(t) \} \right\} dt; \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \Omega_{2j}(z_{kj}, \bar{z}_{kj}) = & \frac{k_*^2}{2\pi} \left\{ \frac{1}{i} \int_{-l}^l r_{kj}^2 \overset{\circ}{K}_2(k_* r_{kj}) / (t - z_{kj})^3 \omega_j(t) dt - \frac{k_*}{2} \operatorname{Im} \left\{ \int_{-l}^l \frac{r_{kj} K_1(k_* r_{kj})}{t - z_{kj}} \omega_j(t) dt \right\} + \right. \\ & \left. + k_* \int_{-l}^l (t - x_k) / r_{kj}^3 K_1(k_* r_{kj}) (t - \bar{z}_{kj}) \operatorname{Im} \{ (t - \bar{z}_{kj}) \omega_j(t) \} dt \right\}, \quad (17) \end{aligned}$$

де  $\overset{\circ}{K}_1(x) = K_1(x) - 1/x$ ,  $\overset{\circ}{K}_2(x) = K_2(x) - 2/x^2$ .

Врахувавши формули (11) – (17) та ввівши до розгляду функції

$$V_j(z_{kj}) = q \bar{\Phi}_{*j}(z_{kj}) + z_{kj} \bar{\Phi}'_{*j}(z_{kj}) + \bar{\Psi}_{*j}(z_{kj}) + m_1 / (k_*^2 \pi i) \int_{-l}^l \overline{\delta_j(t)} / (t - z_{kj})^3 dt, \quad (18)$$

на основі (9) можемо записати

$$\begin{aligned} & M_{y_k} + i H_{x_k y_k} = \\ & = n \sum_{j=1}^2 \left\{ q \Phi_{*j}(z_{kj}) + V_j(\bar{z}_{kj}) + (z_{kj} - \bar{z}_{kj}) \overline{\Phi'_{*j}(z_{kj})} + i m_1 k_*^{-2} \overline{\Omega_{2j}(z_{kj}, \bar{z}_{kj})} \right\} + M_y^\infty; \quad (19) \end{aligned}$$

$$Q_{x_k} - iQ_{y_k} = -2D \sum_{j=1}^2 \left\{ P_j(z_{kj}) + i\Omega_{1j}(z_{kj}, \bar{z}_{kj}) \right\}, \quad (20)$$

де  $q = m/n$ ,  $m_1 = 4D/n$ ;  $P_j(z_{kj}) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-l}^l \delta_j(t) / (t - z_{kj})^2 dt$ ;  $\delta_j(t) \equiv \delta_{1j}(t) + i\delta_{2j}(t) = -2g_j(t) + i\omega_j(t)$ ,  $\delta_{1j}(t)$  і  $\delta_{2j}(t)$  – дійсні функції.

Скориставшись виразами (13), (16), (17) і властивостями функцій Макдональда, переконуємося, що функція  $\Omega_{1j}(z_{kj}, \bar{z}_{kj})$  при переході через вісь  $O_j x_j$  неперервна, а для функцій  $\Omega_{*j}(z_{kj}, \bar{z}_{kj})$  і  $\Omega_{2j}(z_{kj}, \bar{z}_{kj})$  виконуються залежності

$$\Omega_{*j}^+(x_j, x_j) - \Omega_{*j}^-(x_j, x_j) = \begin{cases} 2\omega_{1j}(x_j), & |x_j| < l, \\ 0, & |x_j| > l, \end{cases}$$

$$\overline{\Omega_{2j}^+(x_j, x_j)} - \overline{\Omega_{2j}^-(x_j, x_j)} = \begin{cases} -k_*^2 \omega_{1j}(x_j)/2, & |x_j| < l, \\ 0, & |x_j| > l. \end{cases} \quad (21)$$

Надалі вважатимемо також, що виконуються умови

$$\delta_j(-l) = \delta_j(l) = 0. \quad (22)$$

Тоді вираз для функції  $P_j(z_{kj})$  можна подати так:

$$P_j(z_{kj}) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-l}^l \frac{\delta'(t) dt}{t - z_{kj}},$$

звідки, скориставшись формулами Сохоцького-Племелі [28], можемо записати

$$P_j^+(x_j) - P_j^-(x_j) = -\delta'_j(x_j), \quad |x_j| < l. \quad (23)$$

Задовольнивши за допомогою формули (20) третю крайову умову (2) та врахувавши співвідношення (23), отримаємо

$$\delta'_{2j}(x_j) = 0. \quad (24)$$

Якщо взяти до відома (22), то з (24) випливає, що  $\delta_{2j}(x_j) = 0$ , а тому виконуватимуться залежності

$$\omega_{1j}(x_j) = 2g_{2j}(x_j), \quad \omega_{2j}(x_j) = -2g_{1j}(x_j) - \delta_{1j}(x_j). \quad (25)$$

Врахування (19) і (21) дає можливість з першої і другої крайових умов (2) одержати задачу лінійного спряження для знаходження функції  $V_j(z_{kj})$ :

$$V_j^+(x_j) - V_j^-(x_j) = \begin{cases} qg_{1j}(x_j) - im_2g_{2j}(x_j), & |x_j| < l, \\ 0, & |x_j| > l, \end{cases} \quad m_2 = \frac{5+v}{1-v}, \quad (26)$$

розв'язок як

$$V_j(z_{kj}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-l}^l \frac{qg_{1j}(t) - im_2g_{2j}(t)}{t - z_{kj}} dt. \quad (27)$$

Якщо скористатися залежністю

$$\begin{aligned} \partial_{x_j}(\varphi_{x_j} + i\varphi_{y_j}) = & -\left\{ \Phi_{*j}(z_{kj}) + m_1/2 \overline{\Phi_{*j}(z_{kj})} + (z_{kj} - \bar{z}_{kj}) \overline{\Phi'_{*j}(z_{kj})} + V_j(\bar{z}_{kj}) + \right. \\ & \left. + im_1 \left( \overline{\Omega_{2j}(z_{kj}, \bar{z}_{kj})} / k_*^2 + \Omega_{*j}(z_{kj}, \bar{z}_{kj}) / 4 \right) \right\}, \end{aligned}$$

то матимемо

$$\partial_x[\varphi_x + i\varphi_y] = -m_1g_j(x_j), \quad |x_j| < l, \quad (28)$$

звідки

$$\partial_x[\varphi_x] = -m_1g_{1j}(x_j), \quad \partial_x[\varphi_y] = -m_1g_{2j}(x_j). \quad (29)$$

Врахування (6) і (29) дає на основі другої крайової умови (3) вираз

$$g'_{2j}(t) = \rho_1g_{2j}(t), \quad t \in L_j. \quad (30)$$

Тому (8) вдається переписати так:

$$\begin{aligned} N_k(x_k) = & -2h \sum_{j=1}^2 \int_{-l}^l \{L_j(t, x_k) \{g'_{1j}(t) + i\rho_1g_{2j}(t)\} + \\ & + M_j(t, x_k) \{g'_{1j}(t) - i\rho_1g_{2j}(t)\}\} dt, \quad x_k \in L_k, \end{aligned} \quad (31)$$

де  $\rho_1 = -2\alpha h m_1 \mu / (1 + \kappa)$ .

Беручи до уваги (11), (19), (20), (25), (27), (31), з крайових умов (2) і (3) отримаємо систему інтегральних рівнянь для визначення невідомих функцій  $g_{1j}(x_j)$ ,  $g_{2j}(x_j)$ ,  $g_{3j}(x_j) = \delta'_{1j}(x_j)$  і  $g_{4j}(x_j) = g'_{1j}(x_j)$ , яка після зведення інтегрування до проміжку  $[-1; 1]$  матиме вигляд

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{j=1}^2 \int_{-1}^1 \left\{ \sum_{s=1}^3 R_{3k-2,3j-3+s}(t, \mathfrak{X}) g_{sj}^{\circ}(t) + A_{kj}(t, \mathfrak{X}) g_{4j}^{\circ}(t) \right\} dt = 2\pi M_y^{\infty} / n, |\mathfrak{X}| < 1, \\ & \sum_{j=1}^2 \int_{-1}^1 \sum_{s=1}^3 R_{3k-1,3j-3+s}(t, \mathfrak{X}) g_{sj}^{\circ}(t) dt = 0, |\mathfrak{X}| < 1, \\ & \sum_{j=1}^2 \int_{-1}^1 \sum_{s=1}^3 R_{3k,3j-3+s}(t, \mathfrak{X}) g_{sj}^{\circ}(t) dt = 0, |\mathfrak{X}| < 1, \\ & \sum_{j=1}^2 \int_{-1}^1 \left\{ \mathring{K}_{kj}^{\circ}(t, \mathfrak{X}) g_{2j}^{\circ}(t) + \mathring{L}_{kj}^{\circ}(t, \mathfrak{X}) g_{4j}^{\circ}(t) \right\} dt = 0, |\mathfrak{X}| < 1, \end{aligned} \right. \quad (32)$$

де

$$R_{3k-2,3j-2}(t, \mathfrak{X}) = -\frac{b_{kj}}{r_{kj}^2} \left\{ 1 - (3 - 4b_{kj}^2 / r_{kj}^2) \left\{ 1 + 2n_3 \mathring{K}_2^{\circ} \left( \frac{r_{kj}}{\lambda} \right) \right\} + \frac{2n_3}{\lambda} (b_{kj}^2 / r_{kj}^2 - 1) r_{kj} K_1 \left( \frac{r_{kj}}{\lambda} \right) \right\},$$

$$R_{3k-2,3j-1}(t, \mathfrak{X}) = (t - \mathfrak{X}) / r_{kj}^2 \left\{ n_1 + 6n_2 \alpha \beta (2b_{kj}^2 / r_{kj}^2 + 1) + (1 - 4b_{kj}^2 / r_{kj}^2) \left\{ 1 + 2n_3 \mathring{K}_2^{\circ} (r_{kj} / \lambda) \right\} - \right. \\ \left. - 2n_3 b_{kj}^2 / (\lambda r_{kj}) K_1 (r_{kj} / \lambda) \right\}, R_{3k-2,3j}(t, \mathfrak{X}) = \ln_3 b_{kj} (t - \mathfrak{X}) / r_{kj}^2 \mathring{K}_2^{\circ} (r_{kj} / \lambda),$$

$$R_{3k-1,3j-2}(t, \mathfrak{X}) = \frac{t - \mathfrak{X}}{r_{kj}^2} \left\{ n_4 - (1 - 4b_{kj}^2 / r_{kj}^2) \left\{ 1 + 2n_3 \mathring{K}_2^{\circ} \left( \frac{r_{kj}}{\lambda} \right) \right\} + \frac{n_3}{\lambda} (2b_{kj}^2 / r_{kj}^2 - 1) r_{kj} K_1 \left( \frac{r_{kj}}{\lambda} \right) \right\},$$

$$R_{3k-1,3j-1}(t, \mathfrak{X}) = -\frac{b_{kj}}{r_{kj}^2} \left\{ n_4 + (3 - 4b_{kj}^2 / r_{kj}^2) \left\{ 1 + 2n_3 \mathring{K}_2^{\circ} \left( \frac{r_{kj}}{\lambda} \right) \right\} - \frac{n_3}{\lambda} (2b_{kj}^2 / r_{kj}^2 - 1) r_{kj} K_1 \left( \frac{r_{kj}}{\lambda} \right) \right\},$$

$$R_{3k-1,3j}(t, \mathfrak{X}) = -\ln_3 (b_{kj}^2 / r_{kj}^2 - 1/2) \mathring{K}_2^{\circ} (r_{kj} / \lambda),$$

$$R_{3k,3j-2}(t, \mathfrak{X}) = 4 / (\lambda r_{kj}^2) \left\{ (r_{kj}^2 - 2b_{kj}^2) \mathring{K}_1^{\circ} (r_{kj} / \lambda) - b_{kj}^2 K_0 (r_{kj} / \lambda) \right\},$$

$$R_{3k,3j-1}(t, \mathfrak{X}) = 4 / (\lambda r_{kj}^2) b_{kj} (t - \mathfrak{X}) \mathring{K}_2^{\circ} (r_{kj} / \lambda), R_{3k,3j}(t, \mathfrak{X}) = -2l (t - \mathfrak{X}) K_1 (r_{kj} / \lambda) / r_{kj},$$

$$A_{kj}(t, \mathfrak{X}) = 4\beta b_{kj} h^2 / (n r_{kj}^2) (1 - 2b_{kj}^2 / r_{kj}^2),$$

$$\mathring{K}_{kj}^{\circ}(t, \mathfrak{X}) = \alpha E h b_{kj} / \{ r_{kj}^2 (1 - \nu) \} (1/2 - b_{kj}^2 / r_{kj}^2), \mathring{L}_{kj}^{\circ}(t, \mathfrak{X}) = (t - \mathfrak{X}) / r_{kj}^2 (2b_{kj}^2 / r_{kj}^2 - 1),$$

$$g_{sj}^{\circ}(t) = g_{sj}(lt), r_{kj} = \begin{cases} t - \mathfrak{X}, & k = j, \\ \sqrt{(t - \mathfrak{X})^2 + (2d/l)^2}, & k \neq j, \end{cases} b_{kj} = \begin{cases} 0, & k = j, \\ (-1)^k 2d/l, & k \neq j, \end{cases} n_1 = \frac{5 + 3\nu}{1 - \nu},$$

$$n_2 = (1 + \nu) / (1 - \nu), n_3 = 4 / (1 - \nu), n_4 = (3 + \nu) / (1 - \nu), \mathfrak{X} = x/l; \lambda = 1 / (k_* l).$$

Систему (32) доповнимо умовами

$$\int_{-1}^1 g_{1j}^{\circ}(t) dt = 0, \int_{-1}^1 g_{2j}^{\circ}(t) dt = 0, \int_{-1}^1 \{ t g_{1j}^{\circ}(t) - l \lambda^2 g_{3j}^{\circ}(t) \} dt = 0, \int_{-1}^1 g_{4j}^{\circ}(t) dt = 0, \quad (33)$$



які відображають відповідно однозначність усереднених кутів повороту нормалі  $\varphi_{x_j}$ ,  $\varphi_{y_j}$ , прогину  $w_j$  і переміщення  $u_{p_j}$  при обході навколо контуру  $j$ -ої тріщини.

Для обчислення коефіцієнтів інтенсивності зусиль  $K_{1j}^\pm$ ,  $K_{2j}^\pm$ , згинальних  $K_{Mj}^\pm$  і крутних  $K_{Hj}^\pm$  моментів та поперечних сил  $K_{Qj}^\pm$  скористаємося відповідними залежностями відповідно із монографій [24] та [3], які з урахуванням (30) після деяких перетворень набудуть вигляду

$$\begin{aligned} K_{1j}^\pm &= \pm 2\alpha E h^2 / (1-\nu) \sqrt{l} \lim_{t \rightarrow \pm 1} \left\{ \sqrt{1-t^2} g_{2j}^\pm(t) \right\}, \quad K_{2j}^\pm = \pm 2h \sqrt{l} \lim_{t \rightarrow \pm 1} \left\{ \sqrt{1-t^2} g_{4j}^\pm(t) \right\}, \\ K_{Mj}^\pm &= mm \sqrt{l} \lim_{t \rightarrow \pm 1} \left\{ \sqrt{1-t^2} g_{2j}^\pm(t) \right\}, \quad K_{Hj}^\pm = mm \sqrt{l} \lim_{t \rightarrow \pm 1} \left\{ \sqrt{1-t^2} g_{1j}^\pm(t) \right\}, \\ K_{Qj}^\pm &= \pm D \sqrt{l} \lim_{t \rightarrow \pm 1} \left\{ \sqrt{1-t^2} g_{3j}^\pm(t) \right\}. \end{aligned} \quad (34)$$

Тут верхній знак відповідає вершині тріщини  $x_j = l$ , а нижній –  $x_j = -l$ .

Як впливає з формул (34), коефіцієнти  $K_{1j}^\pm$  і  $K_{Mj}^\pm$  зв'язані залежністю

$$K_{1j}^\pm = 3\alpha K_{Mj}^\pm / h.$$

З урахуванням формул (34) зведені коефіцієнти інтенсивності зусиль (ЗКІЗ)  $\overset{\circ}{K}_{1j}^\pm = 2h K_{1j}^\pm / (M_y^\infty \sqrt{l})$ ,  $\overset{\circ}{K}_{2j}^\pm = 2h K_{2j}^\pm / (M_y^\infty \sqrt{l})$ , згинальних (ЗКІЗМ)  $\overset{\circ}{K}_{Mj}^\pm = K_{Mj}^\pm / (M_y^\infty \sqrt{l})$  і крутних моментів (ЗКІКМ)  $\overset{\circ}{K}_{Hj}^\pm = K_{Hj}^\pm / (M_y^\infty \sqrt{l})$  та поперечних сил (ЗКІПС)  $\overset{\circ}{K}_{Qj}^\pm = K_{Qj}^\pm \lambda \sqrt{l} / M_y^\infty$  можна подати так:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{K}_{1j}^\pm &= 6\alpha \overset{\circ}{K}_{Mj}^\pm, \quad \overset{\circ}{K}_{2j}^\pm = \pm 4h^2 / M_y^\infty \lim_{t \rightarrow \pm 1} \left\{ \sqrt{1-t^2} g_{4j}^\pm(t) \right\}, \quad \overset{\circ}{K}_{Mj}^\pm = mm / M_y^\infty \lim_{t \rightarrow \pm 1} \left\{ \sqrt{1-t^2} g_{2j}^\pm(t) \right\}, \\ \overset{\circ}{K}_{Hj}^\pm &= mm / M_y^\infty \lim_{t \rightarrow \pm 1} \left\{ \sqrt{1-t^2} g_{1j}^\pm(t) \right\}, \quad \overset{\circ}{K}_{Qj}^\pm = \pm D l \lambda / M_y^\infty \lim_{t \rightarrow \pm 1} \left\{ \sqrt{1-t^2} g_{3j}^\pm(t) \right\}. \end{aligned} \quad (35)$$

Систему рівнянь (32) і (33) розв'язуємо числово за допомогою методу механічних квадратур [29] із використанням такого подання функцій  $g_{kj}^\pm(t)$  ( $j = 1, 2; k = \overline{1, 4}$ ):

$$g_{1j}^\pm(t) = \frac{M_y^\infty g_{1j}^*(t)}{n \sqrt{1-t^2}}, \quad g_{2j}^\pm(t) = \frac{M_y^\infty g_{2j}^*(t)}{n \sqrt{1-t^2}}, \quad g_{3j}^\pm(t) = \frac{M_y^\infty g_{3j}^*(t)}{n l \sqrt{1-t^2}}, \quad g_{4j}^\pm(t) = \frac{M_y^\infty g_{4j}^*(t)}{h^2 \sqrt{1-t^2}}. \quad (36)$$

У результаті отримаємо систему лінійних алгебричних рівнянь відносно вузлових значень  $g_{kj}^*(t_s)$  ( $j = 1, 2; k = \overline{1, 4}$ ), де  $t_s = \cos \{ \pi (2s-1) / (2S) \}$ ;  $S$  – кількість вузлів у методі механічних квадратур.

З урахуванням (36), з (35) для обчислення коефіцієнтів інтенсивності отримуються прості залежності

$$K_{2j}^{\circ} = \pm 4g_{4j}^* (\pm 1), K_{Mj}^{\circ} = mg_{2j}^* (\pm 1), K_{Hj}^{\circ} = mg_{1j}^* (\pm 1), K_{Qj}^{\circ} = \pm \lambda n_3 / 4 g_{3j}^* (\pm 1) \quad (37)$$

де

$$g_{kj}^* (\pm 1) = ml/S \sum_{s=1}^S (-1)^{s+(1ml)S/2} g_{kj}^* (t_s) \operatorname{tg}^{ml} \{ \pi (2s-1)/(4S) \}.$$

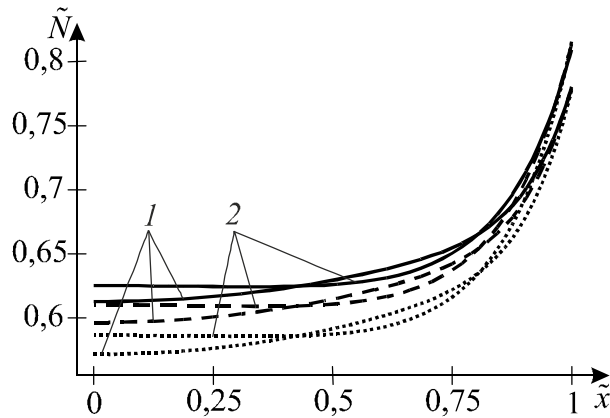


Рисунок 2. Графічні залежності зведеного контактного зусилля  $\tilde{N}^{\circ}$  при  $\lambda = 0,1$

Figure 2. The graphic dependences of the reduced contact force  $\tilde{N}^{\circ}$  along the crack for  $\lambda = 0,1$

#### Числовий аналіз задачі.

Обчислення здійснено для випадку  $\nu = 0,3$ . На рис. 2 і рис. 3 криві 1 побудовані при відносній відстані між тріщинами  $d^{\circ} = 2d/l = 0,5$ , а криві 2 – при  $d^{\circ} = 1,5$ . Причому, суцільні лінії побудовано у разі нульової ширини області контакту ( $\gamma = h_1/h = 0$ ), що відповідає контакту берегів тріщин уздовж лінії; штрихові – при  $\gamma = 0,13$ , а пунктирні – при  $\gamma = 0,3$ .

На рис. 2 зображено розподіл зведеного контактного зусилля  $\tilde{N}^{\circ} = hN_1/M_y^{\infty}$  уздовж берегів 1-ої тріщини (подано лише половину залежності внаслідок симетрії задачі

відносно осі  $Oy$ ), а на рис. 3 а) – г) – графічні залежності зведених коефіцієнтів інтенсивності відповідно  $K_2^{\circ} = K_{21}^{\circ}$ ,  $K_M^{\circ} = K_{M1}^{\circ}$ ,  $K_H^{\circ} = K_{H1}^{\circ}$  і  $K_Q^{\circ} = K_{Q1}^{\circ}$  для вершини  $x_1/l = -1$  цієї ж тріщини.

Графіки для коефіцієнта інтенсивності зусиль  $K_1^{\circ} = K_{11}^{\circ}$  не подано, оскільки він пов'язаний з  $K_M^{\circ}$  співвідношенням  $K_1^{\circ} = 6\alpha K_M^{\circ}$ .

З рис. 2 бачимо, що контактне зусилля досягає максимальних значень у безпосередній близькості до вершини тріщини, причому майже на половині її довжини його значення можна вважати сталим. Крім того, можемо зробити висновок, що збільшення відстані між тріщинами  $d^{\circ}$  збільшує  $\tilde{N}^{\circ}$  посередині тріщини та у її кінцях, а зростання значення ширини області контакту берегів тріщин  $\gamma$  спричиняє зменшення контактного зусилля у центральній частині тріщини, майже не впливаючи на його значення у її вершинах.

Вплив параметра  $\lambda$  та відстані  $d^{\circ}$  між тріщинами на напружений стан пластини якісно такий самий, як і у випадку нехтування контактом берегів тріщин [30, 31] (рис. 3). Разом із тим урахування контакту хоча істотно зменшує розрахункові значення коефіцієнтів інтенсивності згинальних і крутних моментів, а також поперечних сил, проте спричиняє появу коефіцієнтів інтенсивності зусиль (унаслідок додаткового впливу розв'язку плоскої задачі теорії пружності). Крім того, збільшення ширини області контакту берегів тріщин  $\gamma$  зменшує ЗКІЗ  $K_2^{\circ}$  внаслідок збільшення всіх інших коефіцієнтів інтенсивності. Зазначимо також, що зміна параметра  $\gamma$

найбільше впливає на зміну ЗКІЗМ  $K_M^0$ , порівняно з іншими коефіцієнтами інтенсивності.

У часткових випадках, коли  $d^0 \rightarrow \infty$ , числові результати збігаються з відповідними даними для однієї тріщини з урахуванням ширини області контакту берегів [10], а коли вважати ще  $\gamma = 0$  – з урахуванням контакту берегів уздовж лінії [9]. Якщо при цьому перейти до границі  $\lambda \rightarrow 0$ , то стане помітною узгодженість з відповідними даними, отриманими за рівняннями класичної теорії згину пластин.

**Висновки.** Досліджено напружено-деформований стан ізотропної пластини з двома прямолінійними паралельними не зсунутими наскрізними однаковими тріщинами, береги яких під дією згинальних моментів на нескінченності приходять у гладкий контакт уздовж області постійної ширини поблизу однієї з основ пластини.

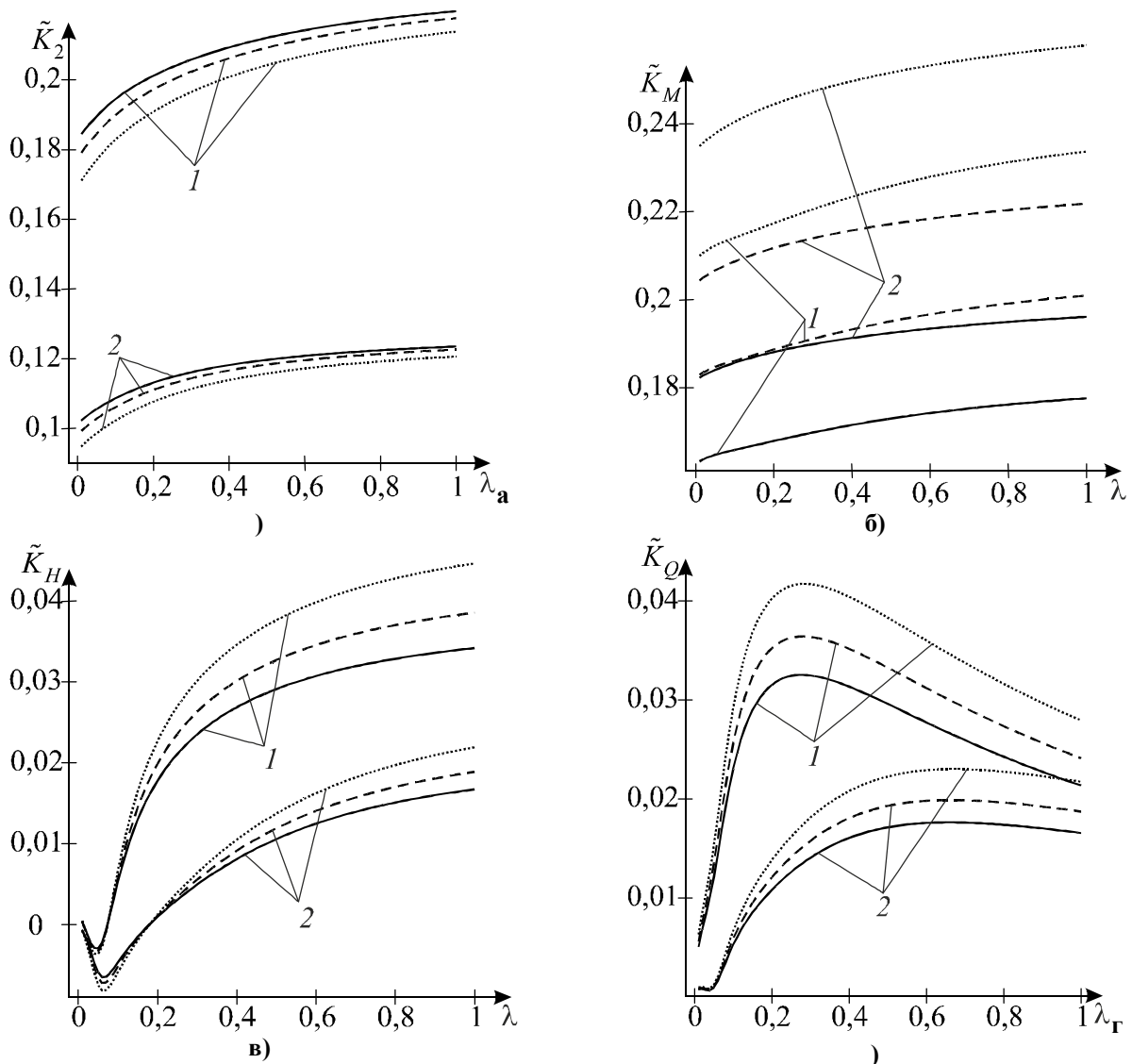


Рисунок 3. Графічні залежності від  $\lambda$  при різних  $\gamma$  та  $d^0$ :

а) ЗКІЗ  $K_2^0$ ; б) ЗКІЗМ  $K_M^0$ ; в) ЗКІКМ  $K_H^0$ ; г) ЗКІПС  $K_O^0$

Figure 3. The graphic dependences on  $\lambda$  for different  $\gamma$  and  $d^0$  of the reduced:

a) force intensity factor  $K_2^0$ ; b) bending moment intensity factor  $K_M^0$ ; c) torque intensity factor  $K_H^0$ ; d) transverse force intensity factor  $K_O^0$

З'ясовано, що збільшення ширини області контакту берегів тріщин призводить до зменшення контактної зусилля та коефіцієнтів інтенсивності зусиль  $K_2$  і рівночасного компенсаційного збільшення значень коефіцієнтів інтенсивності згинальних  $K_M$  і крутних моментів  $K_H$ , а також коефіцієнтів інтенсивності поперечних сил  $K_Q$  у порівнянні з аналогічною задачею, у якій контакт берегів відбувається лише уздовж лінії. Окрім того, урахування ширини області контакту берегів тріщини спричиняє появу КІЗ  $K_2$ , який зумовлює зменшення коефіцієнтів інтенсивності згинальних  $K_M$  і крутних моментів  $K_H$ , а також коефіцієнтів інтенсивності поперечних сил  $K_Q$  (порівняно з цією ж задачею, коли контакт берегів тріщин взагалі не враховувався).

Аналітично доведено, що між КІЗ  $K_1$  і КІМ  $K_M$  існує залежність  $K_1/K_M = 3\alpha/h$ .

**Conclusions.** The stress-strain state of boundless isotropic plate with two straight parallel not shifted through-the-thickness equal cracks, the faces of which under the action of the bending moments at infinity come in smooth contact along the area of constant width near the one of plate basis has been investigated.

It is found that an increase in the width of the cracks faces contact domain results in the decrease of the contact force and force intensity factors  $K_2$  and at the same time to compensation increasing of the bending moment  $K_M$ , torque  $K_H$  and transverse force  $K_Q$  intensity factors values in comparison with the same problem of taking account the cracks faces contact only along a line. In addition, taking account of the cracks faces contact results in the appearance of the force intensity factors  $K_2$ , which cause, the decrease of the bending moment  $K_M$ , torque  $K_H$  and transverse force  $K_Q$  intensity factors (compared with the same problem when the cracks faces contact is ignored at all).

It was analytically proved that force intensity factors  $K_1$  and the bending moment intensity factors  $K_M$  are connected by the relation  $K_1/K_M = 3\alpha/h$ .

#### **Список використаної літератури**

1. Бережницький, Л.Т. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин [Текст] / Л.Т. Бережницький, М.В. Делявский, В.В. Панасюк. – Киев: Наук. думка, 1979. – 400 с.
2. Прусов, И.А. Метод сопряжения в теории плит [Текст] / И.А. Прусов. – Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1975. – 256 с.
3. Саврук, М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами [Текст] / М.П. Саврук. – Киев: Наук. думка, 1981. – 324 с.
4. Alwar, R.S. Influence of crack closure on the stress intensity factor for plates subjected to bending – A 3-D finite element analysis [Text] / R.S. Alwar, K.N. Ramachandran Nambissan // Eng. Fracture Mech. – 1983. – 17, No. 4. – P. 323 – 333.
5. Heming, F.S. Jr. Sixth order analysis of crack closure in bending of an elastic plate [Text] / F.S. Jr. Heming // Int. J. Fracture. – 1980. – 16, No. 4. – P. 289 – 304.
6. Jones, D.P. The influence of crack closure and elasto-plastic flow on the bending of a cracked plate [Text] / D.P. Jones, J.L. Swedlow // Int. J. Fracture. – 1975. – 11, No. 6. – P. 897 – 914.
7. Williams, M.L. The bending stress distribution at the base of a stationary crack [Text] / M.L. Williams // Trans ASME. J. Appl. Mech. – 1961. – 28. – P. 78 – 82.
8. Опанасович, В.К. Згин пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її поверхонь [Текст] / В.К. Опанасович // Наук. нотатки Луцьк. техн. ун-ту. – 2007. – Вип. 20 (2). – С. 123 – 127.
9. Опанасович, В.К. Врахування контакту берегів тріщини під час згину трансверсально-ізоотропної пластини [Текст] / В.К. Опанасович, В.П. Новосад, Р.Г. Селіверстов // Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій: Зб. наук. праць. – Вип. 5. – Львів: Каменяр, 2002. – С. 148 – 153.

10. Опанасович, В. Згин пластини Рейсснера з наскрізною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її берегів [Текст] / В. Опанасович, І. Яцик // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2008. – Вип. 69. – С. 125 – 135.
11. Шацький, І.П. Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами [Текст] / І.П. Шацький // Доп. АН УРСР. Серія А. Фіз.-мат. та техн. науки. – 1988. – № 7. – С. 49 – 51.
12. Шацький, І.П. Згин напівнескінченної пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами [Текст] / І.П. Шацький, В.В. Перепічка // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1992. – 28, № 2. – С. 54 – 58.
13. Задачі теорії пластин та оболонок із взаємопов'язаними крайовими умовами на розрізах [Текст] / І. Шацький, В. Перепічка, Т. Даляк, А. Щербій // Мат. проблеми механіки неоднорідних структур: в 2 т. – 2000. – Т. 2. – С. 51 – 54.
14. Benedetti, I.A fast 3D dual boundary element method based on hierarchical matrices [Text] / I. Benedetti, M.H. Aliabadi, G. Davi // Int. J. Solids Struct. – 2008. – 45, No. 7 – 8. – P. 2355 – 2376.
15. Dempsey, J.P. Closure of a through crack in a plate under bending [Text] / J.P. Dempsey, I.I. Shekhtman, L.I. Slepyan // Int. J. Solids Struct. – 1998. – 35, No. 31 – 32. – P. 4077 – 4089.
16. Dirgantara, T. Stress intensity factors for cracks in thin plates [Text] / T. Dirgantara, M.H. Aliabadi // Eng. Fracture Mech. – 2002. – 69. – P.1465 – 1486.
17. Guimaraes, S. The method of fundamental solutions for fracture mechanics – Reissner's plate application [Text] / S. Guimaraes, J.C.F. Telles // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2009. – 33, No. 10. – P. 1152 – 1160.
18. Kwon, Y.W. Finite element analysis of crack closure in plate bending [Text] / Y.W. Kwon // Comput. Struct. – 1989. – 32, No. 6. – P. 1439 – 1445.
19. Litewka, B. Application of the fundamental solutions by Ganowicz in a static analysis of Reissner's plates by the boundary element method [Text] / B. Litewka, R. Sygulski // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2010. – 34, No. 12. – P. 1072 – 1081.
20. Wen, P.H. A variational approach for evaluation of stress intensity factors using the element free Galerkin method [Text] / P.H. Wen, M.H. Aliabadi // Int. J. Solids Struct. – 2011. – 48, No. 7 – 8. – P. 1171 – 1179.
21. Young, M.J. Influence of crack closure on the stress intensity factor in bending plates – A classical plate solution [Text] / M.J. Young, C.T. Sun // Int. J. Fracture. – 1992. – 55. – P. 81 – 93.
22. Тимошенко, С.П. Пластини и оболочки [Текст] / С.П. Тимошенко, С. Войновски-Кригер. – Москва: Наука, 1966. – 636 с.
23. Мухелишвили, Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Основные уравнения. Плоская теория упругости. Кручение и изгиб [Текст] / Н.И. Мухелишвили. – Москва: Наука, 1966. – 708 с.
24. Мазурак, Л.П. Изгиб трансверсально-изотропных пластин с дефектами типа трещин [Текст] / Л.П. Мазурак, Л.Т. Бережницкий. – Киев: Наук. думка, 1990. – 256 с.
25. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами [Текст]; под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – Москва: Наука, 1979. – 832 с.
26. Опанасович, В.К. Сингулярні інтегральні рівняння задачі згину пластини з тріщиною за теорією Рейсснера [Текст] / В.К. Опанасович // Праці НТШ. – Том VI: Матеріалознавство і механіка матеріалів. – 2001. – С. 120 – 125.
27. Опанасович, В.К. Новий підхід до розрахунку напруженого стану плити з тріщиною за теорією Рейсснера [Текст] / В.К. Опанасович, М.В. Делявський, А. Подхорецькі // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій; за заг. ред. В.В. Панасюка: в 3 т. – Т. 2: Аналітичні методи в механіці руйнування матеріалів. – 1999. – С. 186 – 189.
28. Мухелишвили, Н.И. Сингулярные интегральные уравнения: Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике [Текст] / Н.И. Мухелишвили. – Москва: Наука, 1968. – 511 с.
29. Панасюк, В.В. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках [Текст] / В.В. Панасюк, М.П. Саврук, А.П. Дацишин. – Киев: Наук. думка, 1976. – 444 с.
30. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений [Текст]; под ред. Ю. Мураками. – М.: Мир, 1990. – Т. 1, Т. 2. – 1016 с.
31. Опанасович, В.К. Згин пластини з двома паралельними не зсунутими тріщинами однакової довжини за теорією Рейсснера [Текст] / В.К. Опанасович, Р.Г. Селіверстов // Наукові нотатки: Міжвузівський збірник (за напрямом “Інженерна механіка”). – Вип. 7. – 2000. – С. 161 – 165.

Отримано 4.03.2015