**УДК 539.3**

**Д.Б. Куриляк, М.В. Войтко**
*Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України,*
*м. Львів, Україна*

# РЕЗОНАНСНЕ РОЗСІЮВАННЯ ПРУЖНОЇ SH-ХВИЛІ ДЕФЕКТОМ НА ПОВЕРХНІ З'ЄДНАННЯ ПЛАСТИНИ І ПІВПРОСТОРУ

Однією з проблем сучасних технологій візуалізації в неруйнівному контролі є виявлення пошкоджень, які передують утворенню тріщин на межі з'єднання матеріалів [1–3]. Один із можливих шляхів її розв'язання є вивчення особливостей резонансного розсіяння хвиль такими дефектами і визначення оптимальних частот зондування. У цій праці розглянуто задачу взаємодії SH-моди з дефектом з'єднання, який моделюємо імпедансною поверхнею.

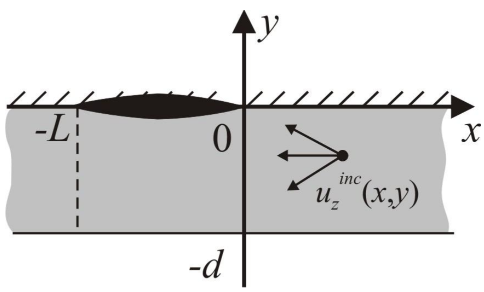


Рисунок 1 - Схема збудження дефекту SH-модою

У декартовій системі координат $Oxyz$ розглянемо пластину $P:\{x\in(-\infty,\infty), y\in(-d,0)$, $z\in(-\infty,\infty)\}$, з'єднану з півпростором $S:\{x\in(-\infty,\infty), y>0, z\in(-\infty,\infty)\}$. Нехай на межі з'єднання імпедансна поверхня займає область $\Gamma:\{x\in(-L,0), y=0, z\in(-\infty,\infty)\}$ (рис. 1) і опромінюється однією з незатухаючих SH-мод, що поширюються у пластині $P$:

$$u_z^{inc}=u^{inc}(x,y)=e^{\gamma_j x}\sin\beta_j y. \tag{1}$$

Тут $k=k'+\mathrm{i}k''$ – хвильове число, $k'>>k''>0$; $\gamma_j=\sqrt{\beta_j^2-k^2}$, $\beta_j=\pi(2j-1)/2d$, $j=1,2,3\ldots$.

Відповідну крайову дифракційну задачу формулюємо так:

$$\Delta u+k^2u=0, \tag{2}$$

$$\partial u^t(x,0)/\partial y+\varepsilon u^t(x,0)=0,\quad x\in(-L,0), \tag{3}$$

$$u^t(x,0)=0,\quad x\in(-\infty,-L)\cup(0,\infty), \tag{4}$$

$$\partial u^t(x,-d)/\partial y=0, \tag{5}$$

де $\varepsilon$ – імпедансний параметр.

$$u^t(x,y)=u(x,y)+u^{inc}(x,y). \tag{6}$$

Використовуючи перетворення Фур'є, крайову задачу (2)–(5) зводимо до функціонального рівняння типу Вінера–Хопфа, яке запишемо так:

$$M(\alpha)\left[\Psi^{(+)}(\alpha)+e^{-\mathrm{i}\alpha L}\Psi^{-}(\alpha)\right]+\Phi(\alpha)=0. \tag{7}$$

Тут $M(\alpha)=M_+(\alpha)M_-(\alpha)=\mathrm{ch}(d\gamma)/\left(\gamma\mathrm{sh}(d\gamma)-\varepsilon\mathrm{ch}(d\gamma)\right)$; $\gamma=(\alpha^2-k^2)^{1/2}$, $\mathrm{Re}\gamma>0$; $\Psi^{-}(\alpha)$, $\Psi^{(+)}(\alpha)$ – невідомі Фур'є трансформанти поля напружень на межі з’єднання зліва та справа від тріщини, $\Phi(\alpha)$ – невідома ціла функція, яка є Фур’є трансформантою зміщення на поверхні дефекту.

Рівняння (7) виконується у смузі $\Pi:\{-\tau_0<\tau<\tau_0\}$, $\tau_0 \le \min(\mathrm{Im}\,k, \mathrm{Re}\,\gamma_1)$, а функції $M_+(\alpha)$, $\Psi^{(+)}(\alpha)$) та $M_-(\alpha)$, $\Psi^{-}(\alpha)$ є регулярними відповідно у півплощинах $\mathrm{Im}\,\alpha > -\tau_0$ і $\mathrm{Im}\,\alpha < \tau_0$ ($\Psi^{(+)}(\alpha)$ допускає особливість у точці $\alpha = -\mathrm{i}\gamma_j$). В областях регулярності, коли $|\alpha| \to \infty$, поведінка цих функцій є такою: $M_\pm(\alpha) = O(\alpha^{-1/2})$, $\Psi^{(+)}_{-}(\alpha) = O(\alpha^{-1/2})$.

Для малих значень імпедансного параметра ($|\varepsilon| << 1$) справедливе подання

$$M_\pm(\alpha) \approx \frac{\sqrt{\cos kd}\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1 \pm \alpha/\mathrm{i}\gamma_{nc})e^{\pm \mathrm{i}\alpha d/\pi n}}{\mathrm{i}\sqrt{(kd\sin kd + \varepsilon\cos kd)}(1 \pm \alpha/\mathrm{i}\gamma_{0s})\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1 \pm \alpha/\mathrm{i}\gamma_{ns})e^{\pm \mathrm{i}\alpha d/\pi n}}, \qquad (8)$$

де $\gamma_{nc} = \sqrt{\pi^2(n-1/2)^2/d^2 - k^2}$, $\gamma_{ns} = \sqrt{(\pi n - \varepsilon/\pi n)^2/d^2 - k^2}$, $\gamma_{0s} = \sqrt{\varepsilon/d^2 + k^2}$.

Розв’язок крайової задачі (2)–(5) шукаємо у класі функцій, що забезпечують виконання умови граничного поглинання на нескінченності та обмеженості енергії поля деформацій у довільному скінченному об’ємі.

Використовуючи методи факторизації та декомпозиції, рівняння (7) зводимо до нескінченної системи лінійних алгебричних рівнянь. Цю систему можна записати у матричному вигляді

$$[I+A]X = F. \qquad (9)$$

Тут $A:\{a_{pm}\}_{p,m=0}^{\infty}$, $a_{pm} = -\dfrac{\delta_m\varepsilon_m d^{-2}e^{-\gamma_{ms}L}}{M_+^2(\mathrm{i}\gamma_{ms})\gamma_{ms}}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\delta_n\varepsilon_n e^{-\gamma_{ns}L}}{\gamma_{ns}M_+^2(\mathrm{i}\gamma_{ns})(\gamma_{ns}+\gamma_{ps})(\gamma_{ns}+\gamma_{ms})}$;

$\varepsilon_n = \begin{cases} 1/2, n=0 \\ 1, \ n>0 \end{cases}$, $\delta_n = \begin{cases} 1-\varepsilon/3, & n=0 \\ -1+\varepsilon/p^2n^2, & n>0 \end{cases}$; $X = \{x_p\}_{p=0}^{\infty}$ – вектор невідомих, $x_p = \Psi^{(+)}(\mathrm{i}\gamma_{ps})M_+(\gamma_{ps})$, $x_p = O(p^{-1})$, коли $p \to \infty$; $I$ – одинична матриця, $F = \{f_p\}_{p=0}^{\infty}$, $f_p = \dfrac{\beta_j}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{M_+(\mathrm{i}\gamma_j)}{\gamma_{ps}-\gamma_j}$.

Оцінка модуля матричних елементів системи рівнянь (9) при $p,m \to \infty$ має вигляд

$$|a_{pm}| \le C\frac{e^{-\pi L/d}}{pm}, \qquad (10)$$

де $C = const$, що не залежить від $m, p$.

Оскільки $\|A\|_{l^2} = \sum\limits_{p,n}|a_{pn}|^2 < \infty$, то НСЛАР (9) має єдиний розв’язок, за виключенням дискретних значень хвильового параметра, для яких однорідне рівняння має ненульові розв'язки.

Характеристичне рівняння для визначення спектра вихідної дифракційної задачі матиме вигляд:

$$\det[I + A(\Omega)] = 0\,. \qquad (11)$$

Рівняння (11), як функція комплексного параметра $\Omega = kd$, має особливості типу точок галуження, коли $\Omega = \pm(\pi n + \varepsilon/(\pi n))$ і $\Omega = \pm\pi(2n-1)$ $n = 1,2,...$[4]. Необхідні корені дисперсійного рівняння (11) знаходимо на рімановій поверхні з $\mathrm{Re}\Omega > 0$, $\mathrm{Im}\Omega \le 0$.

Із графіків на рис. 2 спостерігаємо явище галуження коренів, де кількість віток зростає зі збільшенням параметра $p = L/d$. При $d = const$ у випадку $\varepsilon = 0$ (рис.2*а*) мінімальна довжина тріщини, при якій спостерігається резонансне збудження становить $L \approx 0{,}1d$ [5]. Коли $\varepsilon > 0$, мінімальна довжина "неідеального" дефекту, за якого спостерігаємо резонансне збудження, є суттєво більшою ($L \approx 2d$, рис. 2*б*).

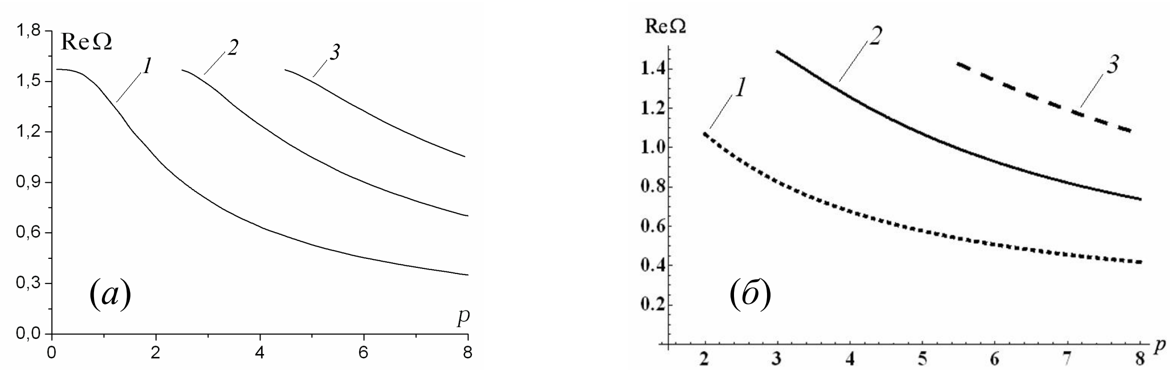


Рисунок 2 - Залежність дійсної частин комплексних коренів рівняння (11) від $p = L/d$ для випадку $\varepsilon = 0$ – а та $\varepsilon = 0{,}05$ – б; 1, 2, 3 – номери віток коренів.

1. K.-M. Lee, Journal of Computational Physics **227**, 431 (2007).
2. J. Cheng, J.J. Liu, and G. Nakamura, J. Math. Kyoto U. **43,** 165 (2003).
3. G. Cinar, Electromagnetics **29**, 165 (2009).
4. Назарчук З.Т., Куриляк Д.Б., Войтко М.В., Кулинич Я.П., Фіз.-хім. механіка матеріалів **47**, 115 (2011).
5. Назарчук З.Т., Куриляк Д.Б., Войтко М.В., Кулинич Я.П. Акустичний вісник **14**, 53 (2011).