УДК 517.946

Н. Бабій[1], О. Петрик[2]

[1] *(Кременецький обласний гуманітарно-педагогічний інститут)*

[2] *(Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя)*

МОДЕЛЮВАННЯ ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ У КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ СЕРЕДОВИЩІ З М'ЯКИМИ МЕЖАМИ

Моделювання процесу дифузії в кусково-однорідному середовищі

$$I_3 = \{r : r \in (R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, R_3), R_0 > 0, R_3 < \infty\}$$

з м'якими межами за різними законами приводить до задачі інтегрування сепаратної системи диференціальних рівнянь 2-го порядку параболічного типу

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \chi_1^2 u_1 - a_1^2 \Lambda_\mu [u_1] = f_1(t,r), r \in (R_0, R_1)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \chi_j^2 u_j - a_j^2 B_{\alpha_j} [u_j] = f_j(t,r), r \in (R_{j-1}, R_j), j = 2,3 \qquad (1)$$

за відповідними початковими умовами (можливо, нульовими), умовами спряження

$$\left[L_{j1}^k [u_k(t,r)] - L_{j2}^k [u_{k+1}(t,r)]\right]\Big|_{r=R_k} = \omega_{jk}(t), j,k = 1,2 \qquad (2)$$

та крайовими умовами

$$L_{11}^0 [u_1]\Big|_{r=R_0} = g_0(t), \;\; L_{22}^3 [u_3(t,r)]\Big|_{r=R_3} = g_3(t) \qquad (3)$$

У рівностях (1) – (3) беруть участь диференціальний оператор Лежандра $\Lambda_\mu = \frac{d^2}{dr^2} + cth\, r - \frac{d}{dr} + \frac{1}{4} - \frac{\mu^2}{sh^2 r}$, диференціальний оператор Бесселя $B_\alpha = r^2 \frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha + 1) r \frac{d}{dr} + \alpha^2 - \lambda^2 r^2$, де $\mu \geq 0,\ 2\alpha + 1 \geq 0,\ \lambda \in (0, \infty)$ та диференціальні оператори $L_{jm}^k = \left(\alpha_{jm}^k + \delta_{jm}^k \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{jm}^k + \gamma_{jm}^k \frac{\partial}{\partial t}, k = \overline{0,3}; j,m = 1,2.$

Умови на коефіцієнти загальноприйняті.

Точний аналітичний розв'язок задачі (1) – (3) побудовано методом інтегрального перетворення Лапласа:

$$u_j(t,r) = \int_0^t \left[W_{1j}(t-\tau,r)\, g_0(\tau) + W_{3j}(t-\tau,r) g_3(\tau)\right] d\tau + \sum_{i,k=0}^{2} \int_0^t R_{ik}^j (t-\tau,r)\, \omega_{ik}(\tau) d\tau +$$

$$+ \sum_{k=1}^{3} \int_0^t \int_{R_{k-1}}^{R_k} H_{jk}(t-\tau,r,\rho)\left[f_k(\tau,\rho) + \delta_+(t)\psi_k(\rho)\right]\varphi_k(\rho)\, d\rho\, d\tau, j = \overline{1,3} \qquad (4)$$

$$\left(\varphi_1(r) = sh\, r, \varphi_2(r) = r^{2\alpha_1 - 1}, \varphi_3(r) = r^{2\alpha_2 - 1}, 2\alpha_j + 1 \geq 0\right)$$

Інтегральне зображення (4) розв'язку задачі (1) – (3) носить алгоритмічний характер і може бути використаний як в теоретичних дослідженнях, так і в інженерних розрахунках.