

УДК 539.3

М. Михайлишин, канд. фіз.-мат. наук; Б. Головатий

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

## ДОСЛІДЖЕННЯ КІНЕТИКИ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ЦИЛІНДРИЧНИХ ДИСКІВ ПРИ ВІДНОВЛЕННІ ЇХ ЕКСПЛУАТАЦІЙНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ШЛЯХОМ НАПЛАВЛЮВАННЯ

**Резюме.** З використанням теорії малих термопружнопластичних деформацій, узагальненої на випадок врахування розвантаження, та на основі принципу Мазінга, узагальненого на випадок неізотермічних процесів деформування, отримано формули для знаходження полів залишкових напружень і деформацій при відновленні циліндричних дисків у наближенні плоскої деформації та розроблено ітераційний алгоритм для отримання числових результатів. Побудовано та проаналізовано графіки, які ілюструють кінетику напружено-деформованого стану, поля залишкових напружень і деформацій після повного остигання конструкції.

**Ключові слова:** термопружнопластична деформація, метод додаткових деформацій, принцип Мазінга, наплавлювання, залишкові напруження, залишкові деформації.

М. Mykhaulyshyn, B. Holovatyu

## INVESTIGATION OF THE STRESS-STRAIN STATE KINETICS OF THE CYLINDER DISKS UNDER RECOVERING OF THEIR OPERATION PROPERTIES BY SURFACING

**The summary.** Basing on the theory of small thermo-elastic strains, generalized in the case of taking into account the unloading, using the Mazing principle, generalized in the case of non-isothermic deformation process, formulae for finding residual stress and strain fields under recovering the cylinder disks in approaching the plane deformation, were found. Besides, iteration algorithm for finding numerical results, were developed. Schemas for illustration of the stress-strain state kinetics, residual stress strain fields after complete cooling of the construction, were built and analyzed.

**Key words:** thermo-elastic strain, additional strains method, Mazing principle, surfacing, residual strains, residual stresses.

**Постановка проблеми.** В сучасному машинобудуванні широко використовуються процеси, пов'язані з інтенсивним нерівномірним нагрівом. Це – відновлювання робочих поверхонь деталей шляхом наплавлення, заміна зношених частин деталей розплавленим металом, який у процесі остигання у формі утворює нову робочу поверхню, процеси зварювання і т.п. Під час таких технологічних операцій відбуваються складні термомеханічні процеси, які призводять до виникнення в готовій деталі залишкових напружень і деформацій. Залишкові напруження суттєво впливають на експлуатаційні властивості деталей, тому важливо вміти визначати характер полів залишкових напружень і деформацій.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Проблемам математичного моделювання кінетики напружено-деформованого стану при інтенсивному нагріванні приділяють велику увагу вчені в усьому світі. Важливі результати отримані в роботах вітчизняних вчених, особливо В. І. Махненка та його учнів [1-3]. Основним механізмом утворення залишкових напружень і деформацій є пружнопластичне деформування. Найбільш точних результатів при моделюванні таких процесів можна досягти на основі теорії пластичного течіння.

**Метою роботи** є побудова доступнішої для інженерних розрахунків моделі для знаходження часових і залишкових напружень та деформацій при наплавлюванні порожнинних циліндрів на основі деформаційної теорії пластичності, узагальненої на випадок урахування можливості розвантаження з виникненням повторних пластичних деформацій із використанням методу додаткових деформацій.

Для моделювання процесів пружнопластичного деформування будемо використовувати теорію малих термопружнопластичних деформацій, узагальнену на випадок урахування розвантаження [4].

Фізичні співвідношення малих пружнопластичних деформацій можна записати у вигляді [4]

$$\tilde{s}_{ij} = \frac{2G(T)}{\psi} \tilde{e}_{ij}, \quad (1)$$

$$\psi = 3G(T) \frac{\tilde{\varepsilon}_i}{\tilde{\sigma}_i}, \quad (2)$$

де

$$\tilde{s}_{ij} = s_{ij} - \frac{G(T)}{G(T_1)} s_{ij}^{(1)}, \quad \tilde{e}_{ij} = e_{ij} - e_{ij}^{(1)}, \quad (3)$$

причому  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0$ ,  $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \varepsilon_0$  – компоненти девіаторів напружень і деформацій,  $\sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma_{ii}$ ,  $\varepsilon_0 = \frac{1}{3} \varepsilon_{ii}$  – середні напруження і деформація,  $s_{ij}^{(1)}$ ,  $e_{ij}^{(1)}$  – компоненти девіаторів напружень і деформацій, які досягнуті в даній точці середовища в момент початку розвантаження (ці величини дорівнюють нулю, якщо в даній точці ще не спостерігалось розвантаження);  $T_1$  – значення температури, зафіксованої в даній точці в момент початку розвантаження;  $G(T)$  – залежний від температури модуль зсуву матеріалу. Величини  $\tilde{\sigma}_i$  і  $\tilde{\varepsilon}_i$  – інтенсивності напружень  $\tilde{s}_{ij}$  і  $\tilde{e}_{ij}$ , які обчислюємо за формулами

$$\tilde{\sigma}_i = \sqrt{\frac{3}{2} \tilde{s}_{ij} \tilde{s}_{ij}}, \quad (4)$$

$$\tilde{\varepsilon}_i = \sqrt{\frac{2}{3} \tilde{e}_{ij} \tilde{e}_{ij}}. \quad (5)$$

Очевидно, що коли в даній точці розвантаження ще не спостерігалось, то величини  $\tilde{\sigma}_i$  і  $\tilde{\varepsilon}_i$  перетворюються у звичайні інтенсивності напружень  $\sigma_i$  і  $\varepsilon_i$ .

У формулі (1)  $\psi$  – параметр пластичності, який визначаємо за формулою (2), причому вважається, що існує однозначна залежність між інтенсивностями  $\tilde{\varepsilon}_i$  і  $\tilde{\sigma}_i$ , яка не залежить від виду напруженого стану, її можна знайти на основі експериментальних даних для найпростіших одновимірних напружених станів.

На етапі початкового деформування з недеформованого і ненапруженого стану фізичні співвідношення (1) мають вигляд

$$s_{ij} = \frac{2G(T)}{\psi} e_{ij}, \quad (6)$$

$$\psi = 3G(T) \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}. \quad (7)$$

Залежність між інтенсивностями напружень і деформацій на цьому етапі для більшості конструктивних матеріалів можна записати у вигляді

$$\sigma_i = \Phi'(\varepsilon_i, T) = \begin{cases} \sigma_s(T) \cdot \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_{is}}, & \varepsilon_i \leq \varepsilon_{is} = \frac{\sigma_s(T)}{3G(T)}, \\ \sigma_s(T) \cdot \left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_{is}}\right)^\gamma, & \varepsilon_i > \varepsilon_{is}, \end{cases} \quad (8)$$

де  $\sigma_s(T)$  – границя текучості матеріалу, яка залежить від температури. Аналогічну залежність  $\tilde{\sigma}_i = \Phi(\tilde{\varepsilon}_i, T)$  можна отримати на основі принципу Мазінга [5], якщо його узагальнити на неізотермічні процеси деформування. В результаті такого узагальнення знайшли [6]

$$\tilde{\sigma}_i = \begin{cases} \sigma_s(T) \frac{\tilde{\varepsilon}_i}{\varepsilon_{is}}, & \tilde{\varepsilon}_i \leq \tilde{\varepsilon}_{s1} = 2\varepsilon_{is} - \frac{1}{3G(T)} \left( \sigma_i'' - \frac{E}{E_1} \sigma_i' \right), \\ 2\sigma_s(T) \left( \frac{\tilde{\varepsilon}_i + 2\varepsilon_{is} - \tilde{\varepsilon}_{s1}}{2\varepsilon_{is}} \right)^\gamma - \left( \sigma_i'' - \frac{E}{E_1} \sigma_i' \right), & \tilde{\varepsilon}_i > \tilde{\varepsilon}_{s1}, \end{cases} \quad (9)$$

де  $\sigma_i'$  – інтенсивність напружень, яка була зафіксована в даній точці тіла в момент початку розвантаження, а  $\sigma_i''$  – відповідна інтенсивність напружень, яка б спостерігалася в даній точці в момент початку розвантаження за умови, що розвантаження розпочиналося б при такому ж рівні інтенсивності пластичної деформації, але при температурі  $T$ , а не  $T_0$ .

Задачу формування полів залишкових напружень і деформацій при відновлюванні експлуатаційних властивостей порожнинних циліндрів розглядаємо в наближенні плоскої деформації, тобто припускаємо, що температура залежить тільки від однієї координати  $r$  і не змінюється вздовж осьової координати  $z$ .

Таким чином, приймаємо

$$\varepsilon_z = 0, \quad \varepsilon_{rz} = \varepsilon_{\varphi z} = 0, \quad \varepsilon_{r\varphi} = 0. \quad (10)$$

Рівняння рівноваги і геометричні співвідношення для цього випадку мають вигляд

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0, \quad (11)$$

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r}. \quad (12)$$

Фізичні співвідношення (1) справедливі для точок, в яких після активного пластичного деформування здійснюється пружне розвантаження або ж розвантаження з розвитком повторних пластичних деформацій. Це регулюється параметром пластичності  $\psi$  (2) на основі залежності (9). Якщо ж в даній точці конструкції здійснюється деформування з початкового ненапруженого і недеформованого стану, то для такої точки  $s'_{ij} = 0$  і  $e'_{ij} = 0$ . У цьому випадку співвідношення (1), (2), (9) переходять у співвідношення (6), (7), (8). Тому надалі використовуватимемо фізичні залежності у вигляді (1), (2) для всіх точок. Залежності (1) в розгорнутому вигляді запишемо так:

$$\varepsilon_{ij} - \varepsilon'_{ij} = \frac{\psi}{2G} \left[ \sigma_{ij} - \frac{(1+\nu)\psi - (1-2\nu)}{(1+\nu)\psi} \delta_{ij} \sigma_0 \right] - \frac{\psi}{2G'} \left[ \sigma'_{ij} - \frac{(1+\nu')\psi - (1-2\nu')}{(1+\nu')\psi} \delta_{ij} \sigma'_0 \right] + \delta_{ij} (\varepsilon_T - \varepsilon'_T). \quad (13)$$

Будемо надалі вважати, що коефіцієнт Пуассона  $\nu$  не залежить від температури і  $\nu' = \nu$ . Тоді залежності (13) запишемо так:

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{\psi}{2G} \left[ \tilde{\sigma}_{ij} - \frac{(1+\nu)\psi - (1-2\nu)}{(1+\nu)\psi} \delta_{ij} \tilde{\sigma}_0 \right] + \delta_{ij} \tilde{\varepsilon}_T, \quad (14)$$

де позначено

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon'_{ij}, \quad \tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{G}{G'} \sigma'_{ij}, \quad \tilde{\sigma}_0 = \sigma_0 - \frac{G}{G'} \sigma'_0. \quad (15)$$

Враховуючи, що для плоского деформованого стану  $\varepsilon_z = 0$  з (14), знайдемо

$$\tilde{\sigma}_z = \frac{(1+\nu)\psi - (1-2\nu)}{2(1+\nu)\psi + (1-2\nu)} (\tilde{\sigma}_r + \tilde{\sigma}_\varphi) - \frac{3E}{2(1+\nu)\psi + (1-2\nu)} \tilde{\varepsilon}_T. \quad (16)$$

Нагадаємо, що змінні параметри пружності у відповідному методі змінних параметрів пружності Біргера, визначають за формулами

$$\nu^* = \frac{(1+\nu)\psi - (1-2\nu)}{2(1+\nu)\psi + (1-2\nu)}; \quad E^* = \frac{3E}{2(1+\nu)\psi + (1-2\nu)}. \quad (17)$$

Залежність (16) з використанням позначень (17) перепишемо так:

$$\tilde{\sigma}_z = \nu^* (\tilde{\sigma}_r + \tilde{\sigma}_\varphi) - E^* \tilde{\varepsilon}_T. \quad (18)$$

Легко бачити, що залежність (18) за формою нагадує аналогічну залежність термопружності для випадку плоскої деформації [7], а у випадку пружного деформування на початковому етапі (тоді  $\psi = 1$ ) повністю співпадає з нею.

Виключимо з залежностей (14)  $\tilde{\sigma}_z$  із використанням (18). Отримаємо

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{\psi}{2G} \left[ \tilde{\sigma}_{ij} - \delta_{ij} \nu^* (\tilde{\sigma}_{11} + \tilde{\sigma}_{22}) \right] + \delta_{ij} (1 + \nu^*) \tilde{\varepsilon}_T \quad (19)$$

або

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_r &= \frac{\psi(1+\nu)(1-\nu^*)}{E} \left( \tilde{\sigma}_r - \frac{\nu^*}{1-\nu^*} \tilde{\sigma}_\varphi \right) + (1+\nu^*) \tilde{\varepsilon}_T, \\ \tilde{\varepsilon}_\varphi &= \frac{\psi(1+\nu)(1-\nu^*)}{E} \left( \tilde{\sigma}_\varphi - \frac{\nu^*}{1-\nu^*} \tilde{\sigma}_r \right) + (1+\nu^*) \tilde{\varepsilon}_T. \end{aligned} \quad (20)$$

Якщо позначити

$$E_1^* = \frac{E}{\psi(1+\nu)(1-\nu^*)}; \quad \nu_1^* = \frac{\nu^*}{1-\nu^*}; \quad \tilde{\varepsilon}_{T1}^* = (1+\nu^*) \tilde{\varepsilon}_T, \quad (21)$$

то залежності (20) набудуть аналогічного вигляду, подібного до випадку термопружності для плоскої деформації

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_r &= \frac{1}{E_1^*} (\tilde{\sigma}_r - \nu_1^* \tilde{\sigma}_\varphi) + \tilde{\varepsilon}_{T1}^*, \\ \tilde{\varepsilon}_\varphi &= \frac{1}{E_1^*} (\tilde{\sigma}_\varphi - \nu_1^* \tilde{\sigma}_r) + \tilde{\varepsilon}_{T1}^*, \end{aligned} \quad (22)$$

а при пружному деформуванні ( $\psi = 1$ ,  $\nu^* = \nu$ ) точно співпадуть з ними.

Для розв'язування задачі формування полів залишкових напружень і деформацій у задачах, які розглядаємо, кращої збіжності можна досягти, використовуючи метод додаткових деформацій [8].

Ітераційний процес методу будується на припущенні деформаційної теорії пластичності, що повна деформація в будь-який момент складається з суми пружної і пластичної складових. Основні рівняння методу додаткових деформацій такі [4].

Фізичні співвідношення для  $k$ -того наближення записуємо у вигляді

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}^{(k)} = \frac{1}{G} \tilde{s}_{ij}^{(k)} + \varepsilon_{ij}^{p(k-1)}, \quad (23)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}^{p(k)} = \frac{\psi^{(k)} - 1}{\psi^{(k)}} \tilde{\varepsilon}_{ij}^{(k)}, \quad (24)$$

$$\psi^{(k)} = 3G \frac{\tilde{\varepsilon}_i^{(k)}}{\tilde{\sigma}_i^{(k)}}. \quad (25)$$

Весь процес навантаження (нагрівання, охолодження) розбиваємо на окремі етапи. Задаючи значення компонент пластичної деформації для нульового наближення в (23) рівними цим компонентам, досягнутим для попереднього етапу навантаження (при деформуванні з початкового недеформованого стану їх приймають нульовими), розв'язуємо пружну задачу з додатковими деформаціями (23). За знайденими повними деформаціями в  $k$ -му наближенні за формулою (5) обчислюємо інтенсивність  $\tilde{\varepsilon}_i^{(k)}$ , а за формулою (9) – інтенсивність  $\tilde{\sigma}_i^{(k)}$ . Далі за формулою (25) для кожної точки конструкції обчислюємо  $k$ -те наближення параметра пластичності  $\psi^{(k)}$  і формулами (24) – компоненти пластичності деформації, які використовуються у формулах (23) у наступному наближенні для знаходження компонент  $\tilde{\varepsilon}_{ij}^{(k+1)}$ . Ітераційний процес продовжується до його повної збіжності, після цього здійснюється перехід до наступного етапу навантаження.

Слід зауважити, що початково на кожній ітерації в кожній точці конструкції припускається таке деформування, яке здійснювалося в ній на попередньому етапі навантаження, тобто початкове пружне чи пластичне деформування, пружне розвантаження чи розвантаження з розвитком повторних пластичних деформацій. Після збіжності процесу ітерацій здійснюємо перевірку в кожній точці конструкції, чи насправді мало місце таке деформування. Якщо в деяких точках характер деформування не відповідав прийнятому на основі інформації з попереднього етапу навантаження, то етап повністю перераховуємо з попередньою заміною в таких точках характеру деформування на протилежний.

Залежності (23) з урахуванням (22) запишемо так:

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_r^{(k)} &= \frac{1}{E_1} (\tilde{\sigma}_r^{(k)} - \nu_1 \tilde{\sigma}_\varphi^{(k)}) + \tilde{\varepsilon}_{T1} + \tilde{\varepsilon}_r^{p(k-1)}, \\ \tilde{\varepsilon}_\varphi^{(k)} &= \frac{1}{E_1} (\tilde{\sigma}_\varphi^{(k)} - \nu_1 \tilde{\sigma}_r^{(k)}) + \tilde{\varepsilon}_{T1} + \tilde{\varepsilon}_\varphi^{p(k-1)}, \end{aligned} \quad (26)$$

де позначено

$$E_1 = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad \nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu}, \quad \tilde{\varepsilon}_{T1} = (1+\nu) \tilde{\varepsilon}_T. \quad (27)$$

Врахувавши всі наведені вище позначення, для знаходження всіх невідомих величин в  $k$ -му наближенні, отримаємо таку систему рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_r^{(k)}}{dr} &= -\frac{1}{r} (\sigma_r^{(k)} - \sigma_\varphi^{(k)}), \\ \frac{du^{(k)}}{dr} &= \varepsilon_r^{(k)}, \\ \sigma_\varphi^{(k)} &= \frac{E}{E'} \sigma_\varphi' + \nu_1 \tilde{\sigma}_r^{(k)} + E_1 \left( \frac{u^{(k)}}{r} - \varepsilon_\varphi' - \tilde{\varepsilon}_{T1} - \tilde{\varepsilon}_\varphi^{p(k-1)} \right), \end{aligned} \quad (28)$$

$$\sigma_r^{(k)} = \sigma_r^{(k)} + \frac{E}{E'} \sigma_r', \quad \tilde{\varepsilon}_{T1} = (1 + \nu)(\varepsilon_T - \varepsilon_T'), \quad (29)$$

$$\varepsilon_r^{(k)} = \varepsilon_r' - \nu_1 \left( \frac{u^{(k)}}{r} - \varepsilon_\varphi' \right) + \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} \tilde{\sigma}_2^{(k)} + (1 + \nu_1) \tilde{\varepsilon}_{T1} + \tilde{\varepsilon}_r^{p(k-1)} + \nu_1 \tilde{\varepsilon}_\varphi^{p(k-1)},$$

$$\tilde{\varepsilon}_r^{p(k-1)} = \varepsilon_r^{p(k-1)} - \varepsilon_r^{p'}, \quad \tilde{\varepsilon}_\varphi^{p(k-1)} = \varepsilon_\varphi^{p(k-1)} - \varepsilon_\varphi^{p'}.$$

Систему рівнянь (28) розв'язуємо при таких граничних умовах:

$$\sigma_r^{(k)} = 0 \text{ при } r = R_1, \quad (30)$$

$$\sigma_r^{(k)} = 0 \text{ при } r = R_2. \quad (31)$$

Інтенсивність деформацій у кожному наближенні знаходимо за формулою

$$\tilde{\varepsilon}_i^{(k)} = \frac{2}{3} \sqrt{\tilde{\varepsilon}_r^{(k)^2 - \tilde{\varepsilon}_r^{(k)} \tilde{\varepsilon}_\varphi^{(k)} + \tilde{\varepsilon}_\varphi^{(k)^2}}. \quad (32)$$

Для отримання числових результатів пропонуємо використовувати числовий метод Годунова інтегрування крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. Слід зауважити, що алгоритм моделювання кінетики напружено-деформованого стану дуже складний, що пов'язано з необхідністю прослідковування історії деформування в кожній точці конструкції. В будь-який момент часу при зміні етапу навантаження в даній точці конструкції може змінитися характер деформування. При цьому необхідно для таких точок змінити фізичні співвідношення, відновити ситуацію, яка мала місце на початку цього етапу навантаження і перерахувати етап заново.

Наведемо для прикладу результати моделювання кінетики напружено-деформованого стану порожнинного циліндра в процесі його наплавлювання. Припускаємо, що наплавлювання здійснюється одночасно по всій зовнішній поверхні циліндра шаром такого самого металу, з якого виконано циліндр. Товщина наплавлюваного шару складає 2 мм. Температурне поле в момент наплавлювання та його зміна при остиганні конструкції зображені на рисунку 1. Кінетика напружено-деформованого стану, поля залишкових напружень і деформацій після повного остигання конструкції зображені на рисунках 2 – 7.

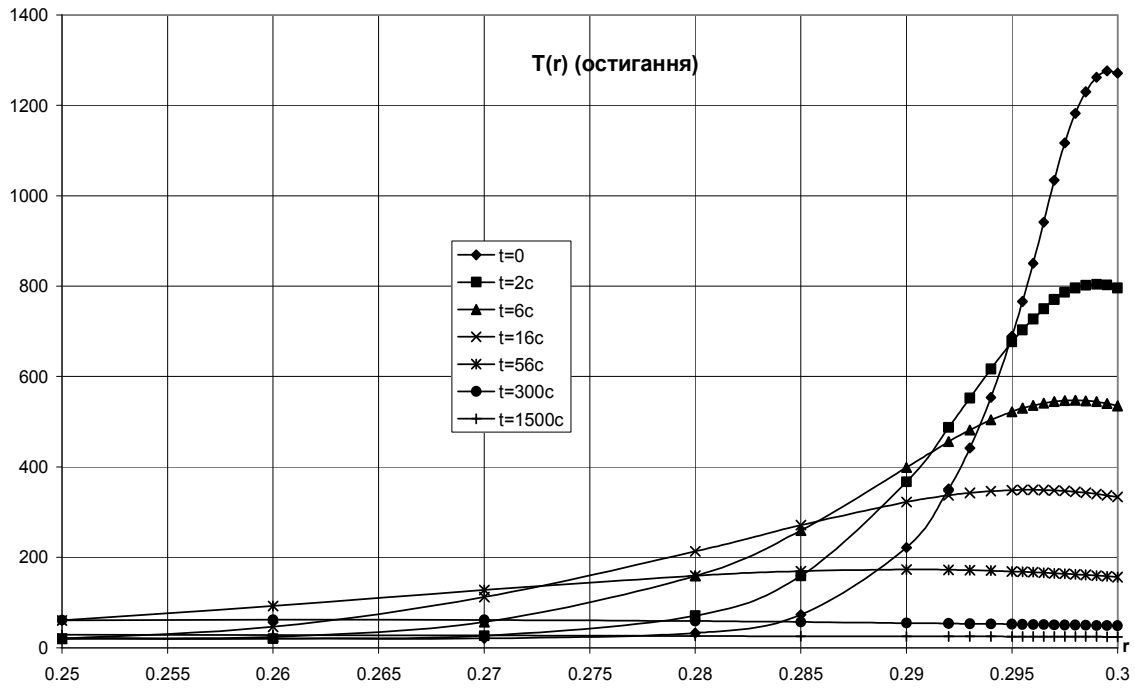


Рисунок 1. Зміна температурного поля порожнинного циліндра при остиганні після процесу наплавлювання

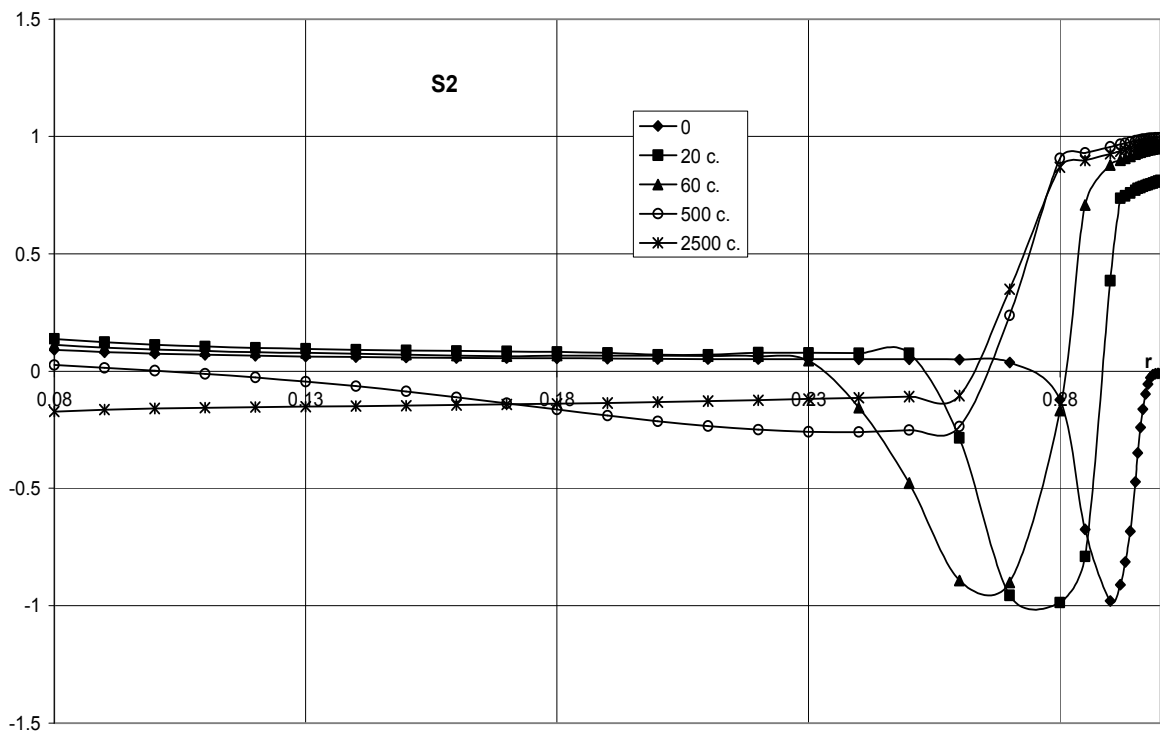


Рисунок 2. Зміна кільцевого напруження  $\sigma_\phi$  у процесі остигання

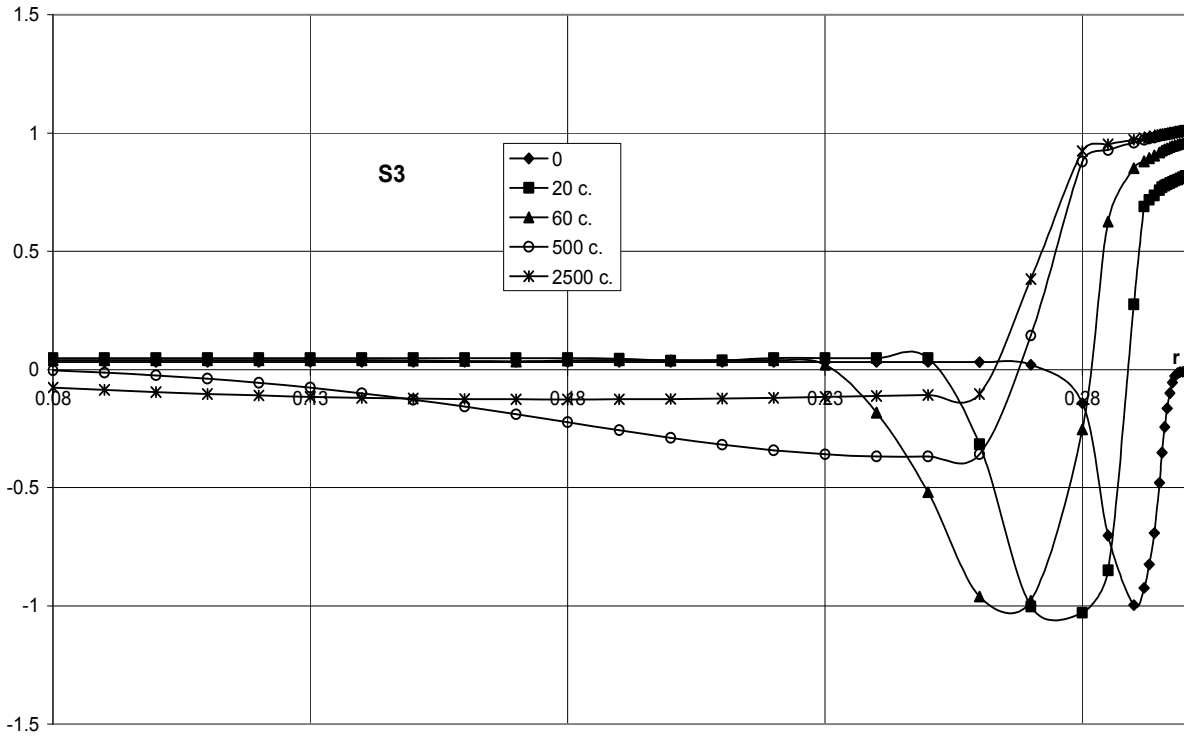


Рисунок 3. Зміна осьового напруження  $\sigma_z$  у процесі остигання

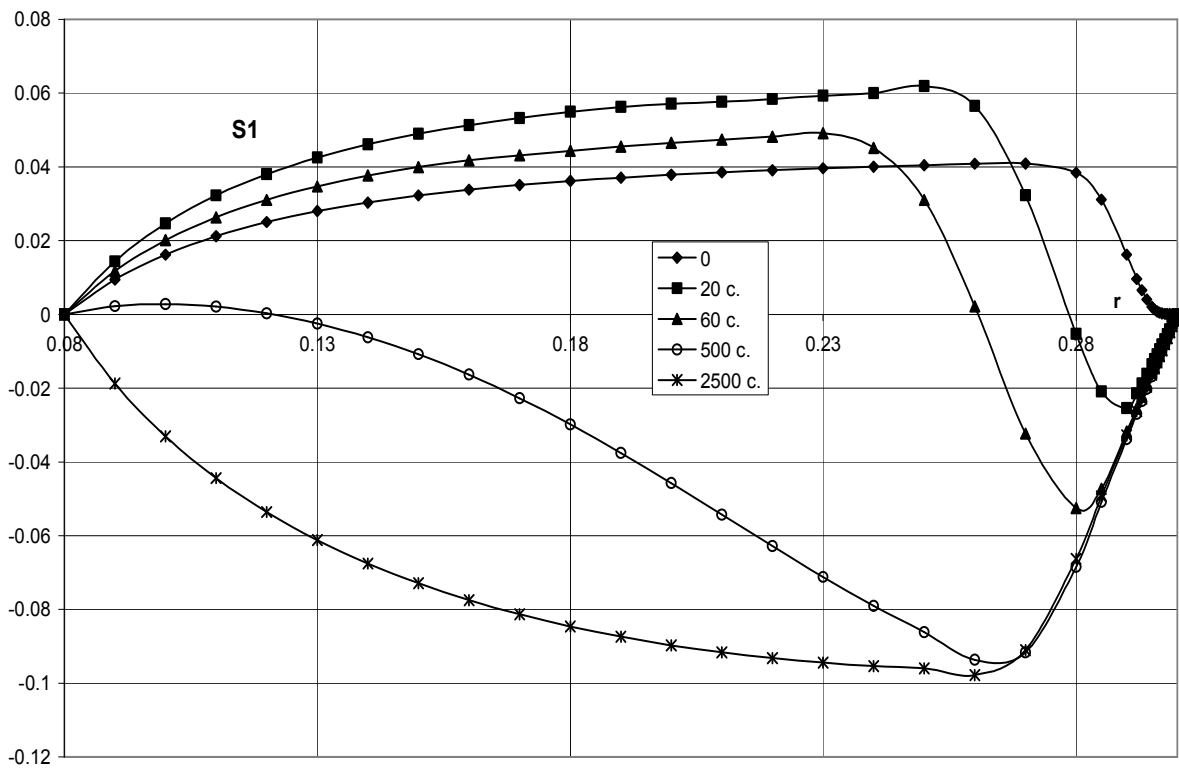


Рисунок 4. Зміна радіального напруження  $\sigma_r$  у процесі остигання



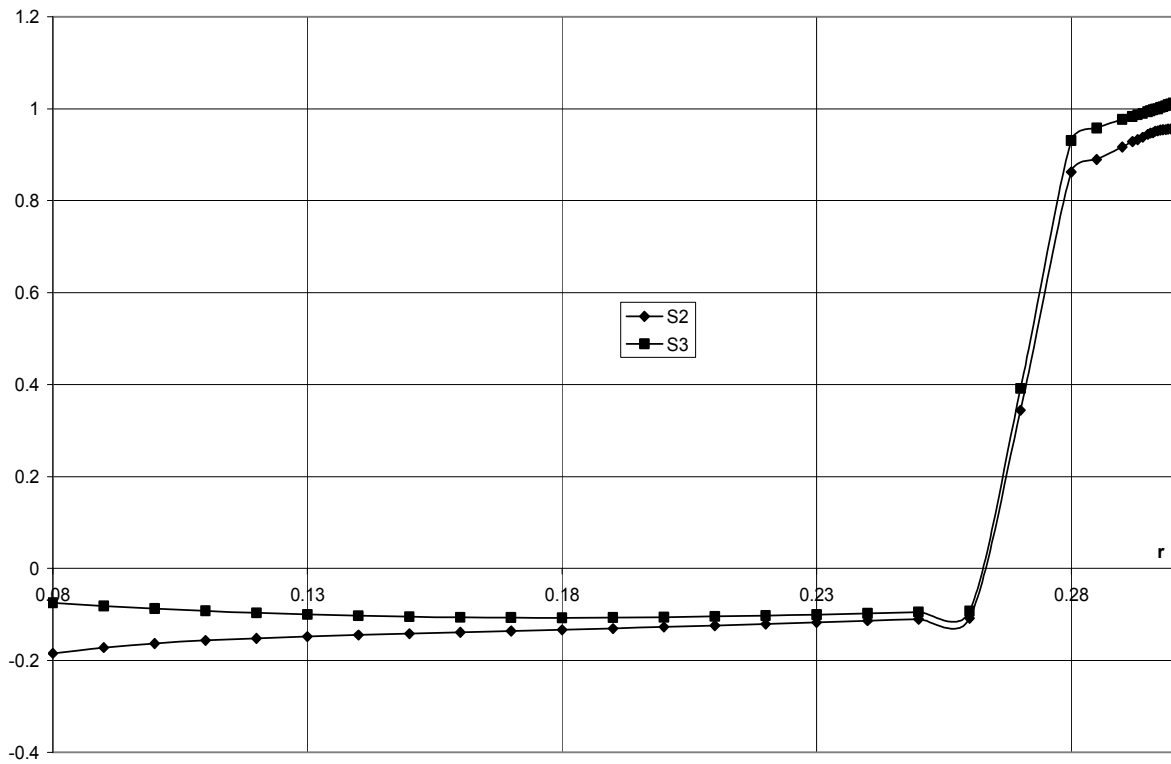


Рисунок 5. Розподіл залишкових напружень  $\sigma_\varphi$  і  $\sigma_z$

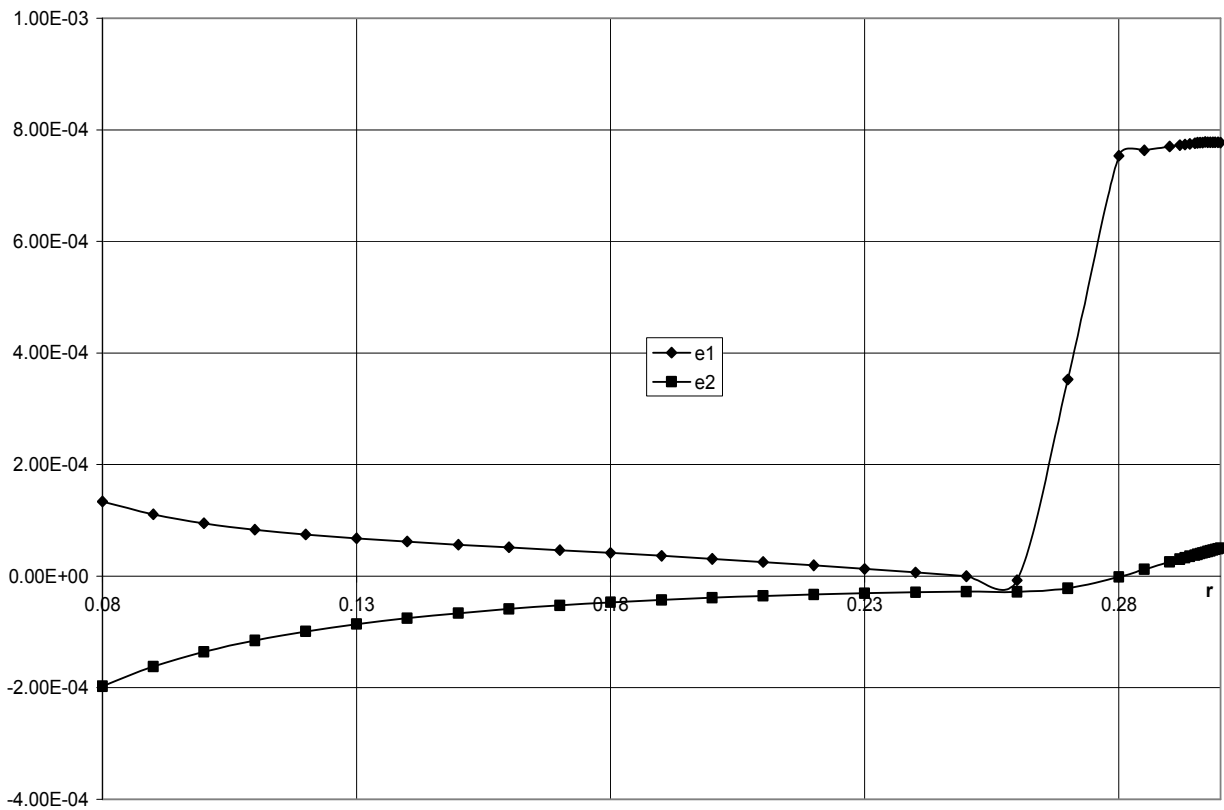
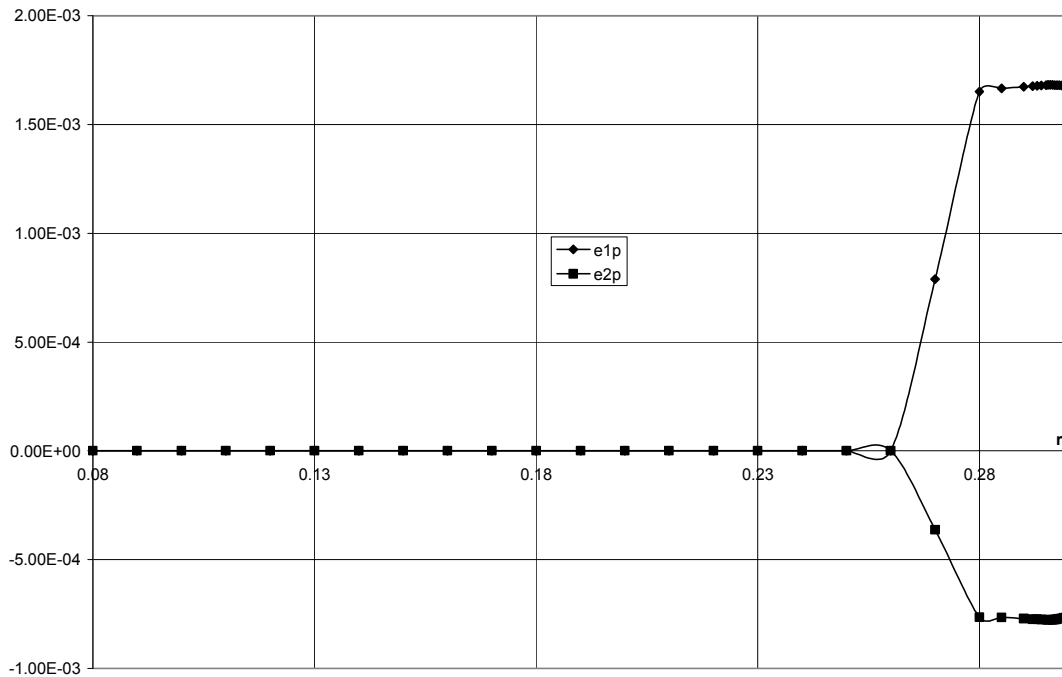


Рисунок 6. Розподіл залишкових деформацій  $\epsilon_r$  і  $\epsilon_\varphi$

Рисунок 7. Розподіл залишкових пластичних деформацій  $\varepsilon_r$  і  $\varepsilon_\varphi$ 

Як бачимо з графіків, радіальні напруження порівняно з кільцевими та осьовими практично дорівнюють нулю. Залишкові кільцеві й осьові напруження в зоні наплавлення розтягуючі й практично майже досягають границі плинності матеріалу.

**Висновки.** Побудовано математичну модель дослідження кінетики напружено-деформованого стану і формування полів залишкових напружень і деформацій при наплавленні зовнішньої поверхні циліндричних дисків. Розроблено алгоритм чисельного розв'язування задачі. Отримано поля часових і залишкових напружень та деформацій. Показано, що залишкові осьові та кільцеві напруження в області наплавки розтягуючі й близькі до границі плинності матеріалу.

#### Література

1. Махненко В.И. Расчетные методы исследования кинетики сварочных напряжений и деформаций / В.И. Махненко. – К.: Наукова думка, 1976. – 320с.
2. Напряжения при наплавке изделий из высокоуглеродистых сталей и риск образования холодных трещин / В.И. Махненко, А.А. Гайворонский, В.А. Саржевский, Е.А. Великоиваненко // Автоматическая сварка. – 2004. – № 7. – С. 3–7.
3. Махненко В.И. Успехи математического моделирования и информационных технологий в сварке и родственных технологиях // Математическое моделирование и информационные технологии в сварке и родственных процессах. Сборник трудов Второй международной конференции / под ред. проф. В.И. Махненко. – К.: Институт электросварки им. Е.О. Патона НАН Украины, 2004. – С. 11–23.
4. Михайлишин М.С. Проблеми утворення залишкових напружень і деформацій при зварюванні / Михайло Михайлишин // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2004. – Том 9. – № 2. – С. 19–26.
5. Москвитин В. В. Пластичность при переменных нагрузениях / В. В. Москвитин. – М.: Изд-во МГУ, 1965. – 263с.
6. Михайлишин М.С. Узагальнення принципу Мазінга на випадок неізотермічних процесів навантаження / Михайло Михайлишин // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2006. – № 2. – С. 12–20.
7. Коваленко А.Д. Основы термоупругости / А.Д. Коваленко – К.: Наукова думка, 1970. – 301с.
8. Биргер И.А. Термопрочность деталей машин / И.А. Биргер, Б.Ф Шорр. – М.: Машиностроение, 1975. – 455с.

Отримано 25.11.2010