УДК 517.52/524:517.58.589
М.Я. Шелестовська, канд. техн. наук, доцент
Тернопільський національний економічний університет

РОЗВ'ЯЗОК СЕПАРАТНОЇ СИСТЕМИ МОДИФІКОВАНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЛЕЖАНДРА І БЕССЕЛЯ

M.Ya. Shelestovska

SOLUTION OF THE SEPARATE SYSTEM OF THE MODIFIED LEGENDRE AND BESSELS DIFFERENTIAL EQUATION

Розглянемо задачу про побудову обмеженого на множині $I_{12}^{+}=\{r: r\in(0,R_1)\cup(R_1,R_2)\cup(R_2,\infty)\}$ розв'язку сепаратної системи модифікованих диференціальних рівнянь Лежандра і Бесселя

$$\left(\Lambda_\mu - q_1^2\right)u_1(r) = -g_1(r),\ r\in(0,R_1),\quad \left(\mathrm{B}_{\nu,\alpha_1}-q_2^2\right)u_2(r) = -g_2(r),\ r\in(R_1,R_2),$$

(1)

$$\left(\mathrm{B}_{\alpha_2}-q_3^2\right)u_3(r) = -g_3(r),\ r\in(R_2,\infty),$$

за умовами спряження

$$\left.\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^k\right)u_k(r)-\left(\alpha_{j2}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^k\right)u_{k+1}(r)\right]\right|_{r=R_k}=\omega_{jk}\,;\ j,k=1,2. \tag{2}$$

У рівностях (1) беруть участь диференціальні оператори Бесселя $\mathrm{B}_{\nu,\alpha}=\dfrac{d^2}{dr^2}+(2\alpha+1)\,r^{-1}\dfrac{d}{dr}-\left(\nu^2-\alpha^2\right)r^{-2}$ і $\mathrm{B}_\alpha=r^2\dfrac{d^2}{dr^2}+(2\alpha+1)\,r\dfrac{d}{dr}+\alpha^2-\lambda^2r^2$ та диференціальний оператор Лежандра $\Lambda_\mu=\dfrac{d^2}{dr^2}+cthr\dfrac{d}{dr}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{\mu^2}{sh^2r}$, де $(2\alpha+1)>0$, $\nu\ge\alpha\ge-\dfrac{1}{2}$, $\mu\ge 0$, $\lambda\in(0,\infty)$. При цьому ми припускаємо, що $q_m\ge 0$, $m=1,3$; $c_{1k}\cdot c_{2k}>0$, $c_{jk}=\alpha_{2j}^k\cdot\beta_{1j}^k-\alpha_{1j}^k\beta_{2j}^k$, $j,k=1,2$.

Фундаментальну систему розв'язків для рівняння Бесселя $\left(\mathrm{B}_{\nu,2}-q^2\right)v=0$ утворюють функції $I_{\nu,\alpha}(qr)$ та $\mathrm{K}_{\nu,\alpha}(qr)$, а для рівняння Бесселя $\left(\mathrm{B}_\alpha-q^2\right)v=0$ - функції $I_{q,\alpha}(\lambda r)$ та $\mathrm{K}_{q,\alpha}(\lambda r)$; фундаментальну систему розв'язків для рівняння Лежандра $\left(\Lambda_\mu-q^2\right)v=0$ утворюють функції Лежандра $\mathrm{P}^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q}(ch\,r)$ і $L^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q}(ch\,r)$.

Наявність фундаментальної системи розв'язків дає можливість будувати розв'язок крайової задачі (1), (2) методом функції Коші:

$$u_1(r)=\mathrm{A}_1\mathrm{P}^{\mu}_{-\frac{1}{2}+q_1}(ch\,r)+\int_0^{R_1}\varepsilon_1(r,\rho)g_1(\rho)sh\rho\,d\rho,$$

$$u_2(r)=\mathrm{A}_2I_{\nu,\alpha_1}(q_2r)+\mathrm{B}_2\mathrm{K}_{\nu,\alpha_1}(q_2r)+\int_{R_1}^{R_2}\varepsilon_2(r,\rho)g_2(\rho)\rho^{2\alpha_1+1}d\rho, \tag{3}$$

$$u_3(r)=\mathrm{B}_3\mathrm{K}_{q_3,\alpha_2}(\lambda r)+\int_{R_2}^{\infty}\varepsilon_3(r,\rho)g_3(\rho)\rho^{2\alpha_2-1}d\rho.$$

Тут $\varepsilon_j(r,\rho)$ - функція Коші: $\left.\varepsilon_j(r,\rho)\right|_{r=\rho+0}-\left.\varepsilon_j(r,\rho)\right|_{r=\rho-0}=0$.