УДК 517.9

О. Панчук, Б. Шелестовський, канд. фіз.-мат. наук, доцент
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

НАБЛИЖЕНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ПАРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ЗАДАЧІ ПРО ТИСК ШТАМПА НА ПІВПРОСТІР

O. Panchuk, B. Shelestovskyi

APPROXIMATION SOLUTION OF DUAL INTEGRAL EQUATIONS IN THE TASK ON THE PREASURE OF PUNCH IN SEMISPACE

У задачі про контактну взаємодію штампа з попередньо напруженим півпростором компоненти напружено-деформованого стану зображаються формулами:

$$\sigma_{rz}\left(r,0\right)=\frac{c_{44}\left(1+m_1\right)}{\sqrt{n_1}}\int_0^\infty \alpha^3\left(F_1+s_0F_2\right)J_0(\alpha r)d\alpha, \tag{1}$$

$$\sigma_{zz}\left(r,0\right)=c_{44}\left(1+m_1\right)l_1\int_0^\infty \alpha^3\left(F_1+sF_2\right)J_0(\alpha r)d\alpha, \tag{2}$$

$$u_z\left(r,0\right)=\frac{m_1}{n_1}\int_0^\infty \alpha^2\left(F_1+s_1F_2\right)J_0(\alpha r)d\alpha. \tag{3}$$

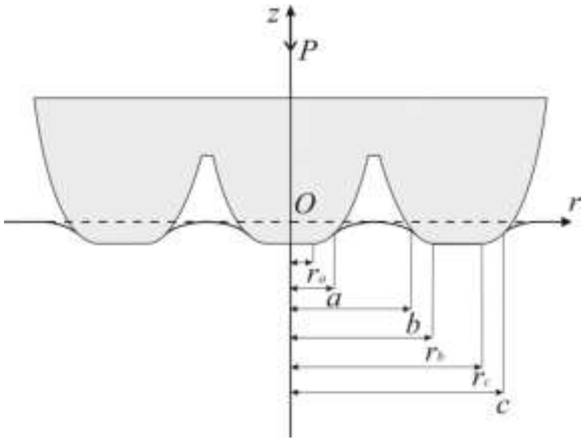

Рис.1 Схема контактної взаємодії

де F_1, та F_2 невідомі функції.

Граничні умови поставленої задачі будуть мати вигляд

$$\sigma_{rz}=0,\ \ 0\le r<\infty;$$
$$\sigma_{zz}=0,\ \ a\le r\le b,\ c\le r<\infty;$$
$$u_z=w_1\left(r\right),\ 0\le r\le a;$$
$$u_z=w_2\left(r\right),\ c\le r<\infty;$$

Задовольнивши граничну умову $\sigma_{rz}=0$, одержуємо співвідношення між невідомими фунціями F_1 та F_2:

$$\frac{c_{44}\left(1+m_1\right)}{\sqrt{n_1}}\int_0^\infty \alpha^3\left(F_1+s_0F_2\right)J_0(\alpha r)d\alpha=0 \tag{4}$$

$$F_1+S_0F_2=0;F_1=-S_0F_2. \tag{5}$$

$$\sigma_{zz}\left(r,0\right)=c_{44}\left(1+m_1\right)l_1\int_0^\infty \alpha^3\left(F_2(S-S_0\right)J_0\left(\alpha r\right)d\alpha, \tag{6}$$

$$u_z\left(r,0\right)=\frac{m_1}{n_1}\int_0^\infty \alpha^2F_2(S_1-S_0)J_0\left(\alpha r\right)d\alpha. \tag{7}$$

Введемо невідомі функції x(r) та y(r), за допомогою яких продовжимо співвідношення (4) на проміжок $0\le r<\infty$:

$$c_{44}\left(1+m_1\right)\left(s-s_0\right)l_1\int_0^\infty \alpha^3F_2J_0\left(\alpha r\right)d\alpha=x\left(r\right)\left(\eta\left(r-a\right)\right)+y\left(r\right)\left(\eta\left(r-b\right)-\eta\left(r-c\right)\right), \tag{8}$$

де $\eta\left(r\right)$ – функція Гевісайда.

Функції x(r) та y(r) визначають розподіл контактних напружень під штампом. Враховуючи неперервність цих функцій, а також рівність нулю на границі області контакту (при $r=\mathrm{a}$ та $r=\mathrm{b}$) представимо $\mathrm{x}\left(r\right)$ та y(r) у вигляді відрізка узагальненого ряду Фур'є:

$$x\left(r\right)=\sum_{n=1}^{N}a_nJ_0\left(\frac{r(\alpha_n)}{a}\right),\ y\left(r\right)=\sum_{n=1}^{N}b_n\left(r\right)L_n\left(r\right).$$

$$\mathrm{L}_n\left(r\right)=J_0\left(\frac{\gamma_n}{\alpha}r\right)Y_0\left(\gamma_n\right)-Y_0\left(\frac{\gamma_n}{\alpha}r\right)J_0\left(\gamma_n\right),$$ – де $\left(\gamma_n\right)$ додатні корені рівняння

$$\left(\frac{c}{b}x\right)Y_0\left(x\right)-Y_0\left(\frac{c}{b}x\right)J_0\left(x\right)=0$$

α_n – додатні корені функції Бесселя $J_0\left(x\right)$.

Застосувавши формулу обернення інтегрального перетворення Ганкеля до співвідношення (8), отримаємо:

$$\alpha^2F_2=\frac{1}{c_{44}\left(1+m_1\right)\left(s-s_0\right)l_1}\left(\int_0^a rx(r)J_0\left(\alpha r\right)dr+\int_b^c ry(r)J_0\left(\alpha r\right)dr\right).$$

Задовольнивши граничні умови для переміщень u_z, маємо:

$$K_1\int_0^\infty\sum_{n=1}^{N}\left(a_n\int_0^a rJ_0\left(\frac{r\alpha_n}{a}\right)J_0\left(\alpha r\right)dr+b_n\int_b^c rL_n\left(r\right)J_0\left(\alpha r\right)dr\right)J_0\left(\alpha r\right)d\alpha=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2R_1}((r_a-r)^2-\left(r_a-a\right)^2)+W_1\left(a\right),\ r_a<r<a\\ \qquad-\frac{1}{2R_1}\left(r_a-a\right)^2+W_1\left(a\right),\ 0<r<r_a,\end{array}\right.$$

$$K_1\int_0^\infty\sum_{n=1}^{N}\left(a_n\int_0^a rJ_0\left(\frac{r\alpha_n}{a}\right)J_0\left(\alpha r\right)dr+b_n\int_b^c rL_n\left(r\right)J_0\left(\alpha r\right)dr\right)J_0\left(\alpha r\right)d\alpha=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2R_2}((r_b-r)^2-\left(r_b-b\right)^2)+W_{22}\left(b\right),\ b<r<r_b\\ \qquad-\frac{1}{2R_2}\left(r_b-b\right)^2+W_2\left(b\right),\ r_b<r<r_1,\end{array}\right.$$

$$K_1\int_0^\infty\sum_{n=1}^{N}\left(a_n\int_0^a rJ_0\left(\frac{r\alpha_n}{a}\right)J_0\left(\alpha r\right)dr+b_n\int_b^c rL_n\left(r\right)J_0\left(\alpha r\right)dr\right)J_0\left(\alpha r\right)d\alpha=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2R_3}(\left(r_c-r\right)^2-\left(r_c-c\right)^2)+W_{22}\left(c\right),\ r_c<r<c\\ \qquad-\frac{1}{2R_3}\left(r_c-c\right)^2+W_2\left(c\right),\ r_1<r<r_c\end{array}\right.$$

Після відповідних перетворень інтегральні рівняння зведено до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $a_n^{(1)},a_n^{(2)},a_n^{(3)}$ та $b_n^{(1)},b_n^{(2)},b_n^{(3)}$, розв'язавши яку отримуються вирази для шуканих функцій $x\left(r\right)$ та $y\left(r\right)$.