УДК 537.8, 539.3
М. Михайлишин, канд. фіз.-мат. наук, професор; О. Король; О. Шаблій, докт. фіз.-мат. наук, професор
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ ПРИ ВІДНОВЛЕННІ ДЕТАЛЕЙ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ФОРМИ

M. Mykhailyshyn, O. Korol, O. Shabliy
STUDY OF TEMPERATURE FIELD IN RESTORATION PARTS CYLINDRICAL

Розроблено математичну модель для визначення температурного поля в області деталі перед заливанням розплавленого рідкого металу в створений технологічний тигель в залежності від питомої потужності теплових джерел нагрівання, коли температура на поверхні деталі не перевищує температуру Кюрі. Температурне поле створюється в області деталі з метою зменшення градієнта температури після заливання розплавленого металу в створений технологічний тигель, та з метою покращення дифузії розплавленого металу в матеріал деталі.

Будемо моделювати деталь нескінченним шаром товщиною H, поверхня $x=0$ якого нагрівається нескінченним плоским індуктором, розміщеним на деякій близькій до цієї поверхні відстані. В результаті протікання індукційних струмів в деталі виникають джерела джоулевого тепла, питома потужність яких визначається формулами [1].

Розглянемо спочатку процес індукційного нагріву деталі для проміжку часу $0 \le t \le t_k$. Тоді питома потужність джерел джоулевого тепла описується функцією $W_0(x)$ і температурне поле в деталі описується диференціальним рівнянням

$$\frac{\partial T^*}{\partial t} - a\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^2} = \frac{a}{\lambda} W_0(x). \qquad (1)$$

На поверхні деталі $x=0$ має місце конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем, а границю шару $x=H$ вважаємо теплоізольованою, тобто

$$\frac{\partial T^*}{\partial x} - hT^* = 0 \text{ при } x=0, \quad T^* = T - T_c, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial x} = 0 \text{ при } x = H. \qquad (3)$$

Тут $h = \frac{\alpha}{\lambda}$, α - коефіцієнт тепловіддачі, $T_c = const$ - температура зовнішнього середовища.

В початковий момент часу температура в деталі дорівнює температурі зовнішнього середовища

$$T^* = 0 \text{ при } t = 0. \qquad (4)$$

Розв’язок задачі шукаємо з використанням методу Фур’є. Подамо розв’язок однорідного рівняння у вигляді

$$T_1 = \theta(t) \cdot X(x).$$

Для знаходження власних функцій задачі по x отримуємо рівняння

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \nu^2 X = 0, \qquad (5)$$

загальний розв'язок якого такий

$$X = C_1 \cos(\nu x) + C_2 \sin(\nu x).$$

В результаті задоволення граничних умов задачі (2), (3) отримаємо власні функції задачі у вигляді

$$X_j = \cos \nu_j x + \frac{h}{\nu_j} \sin \nu_j x,$$

де власні числа ν_j є коренями характеристичного рівняння

$$tg(\nu H) = \frac{h}{\nu}. \tag{6}$$

Розкладемо $W_0(x)$ в ряд за власними функціями задачі X_j.

$$W_0(x) = \sum_{j=1}^{\infty} w_j X_j(x). \tag{7}$$

Коефіцієнти розкладу мають вигляд

$$w_k = \frac{1}{\|X_k\|^2} \int_0^H W_0(x) X_k(x) dx,$$

де $\|X_j\|^2 = \int_0^H X_j^2 dx = \frac{1}{2\nu_j^2}\left[H(\nu_j^2 + h^2) - \frac{\nu_j^2 - h^2}{2\nu_j} \sin 2\nu_j H + 2h \sin^2 \nu_j H \right].$

Тепер розв'язок неоднорідного рівняння (1) шукаємо у вигляді

$$T^* = \sum_{j=1}^{\infty} \theta_j(t) X_j(x). \tag{8}$$

Підставивши в (1) вираз (8) і формулу (7), отримаємо

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{d\theta_j}{dt} X_j - a \sum_{j=1}^{\infty} \theta_j(t) \frac{d^2 X_j}{dx^2} = \frac{a}{\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} w_j X_j.$$

Враховуючи рівняння (6) для знаходження $\theta_j(t)$ отримуємо рівняння

$$\frac{d\theta_j}{dt} + a\nu_j^2 \theta_j = \frac{a}{\lambda} w_j, \tag{9}$$

розв'язок якого, що задовольняє початкову умову (7), має вигляд

$$\theta_j(t) = \frac{w_j}{\lambda \nu_j^2}\left(1 - e^{-a\nu_j^2 t}\right).$$

Таким чином, розв'язок задачі (1) - (4) такий

$$T^*(x,t) = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{w_j}{\nu_j^2}\left(1 - e^{-a\nu_j^2 t}\right)\left(\cos \nu_j x + tg\nu_j H \sin \nu_j x\right). \tag{10}$$

Література:

1. *Шаблій О.М. Створення температурного поля на торці спрацьованого металевого колеса коли температура перевищує температуру Кюрі [Текст] / Шаблій О.М., Пулька Ч.В., Король О.І., Базар М.С. // Вісник ТНТУ ім. Івана Пулюя. – №1 – 2012. – С. 208 – 219.*