Приймак М. Похибка оцінок матриць переходів періодичного ланцюга Маркова / Приймак М., Віцентій О., Прошин С. // Вісник ТНТУ. — 2010. — Том 15. — № 3. — С. 150-159. — (математичне моделювання. математика. фізика).

УДК 519.217

М.Приймак докт.техн.наук; О.Віцентій; С.Прошин

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

ПОХИБКА ОЦІНОК МАТРИЦЬ ПЕРЕХОДІВ ПЕРІОДИЧНОГО ЛАНЦЮГА МАРКОВА

Резюме. *Запропоновано поняття та наведено формули для визначення абсолютної та відносної похибок оцінок матриць переходів періодичного ланцюга Маркова, а також інтегральної, відносної інтегральної та усередненої похибок для оцінок усіх матриць у сукупності. Суть формул зводиться до використання однієї із норм матриць – сферичної. Наведено приклади імітаційного моделювання реалізацій періодичного ланцюга, використовуючи які отримано оцінки матриць переходів, знайдено похибки оцінок цих матриць та усереднену похибку. Проілюстровано, що зі збільшенням об'єму вибірок реалізацій похибки оцінок матриць зменшуються, тобто точність оцінок зростає. Отримані результати підтверджують правильність методу оцінювання матриць переходів періодичних ланцюгів Маркова та ефективність і зручність формул для визначення похибок оцінок.*

Ключові слова: *періодичний ланцюг Маркова, матриця переходу, однорідність пар, оцінка матриць, норма матриці, абсолютна похибка оцінки матриці, інтегральна похибка оцінок матриць.*

M.Pryjmak, O.Vitsentiy, S.Proshyn

ERROR OF ESTIMATIONS OF MATRICES OF TRANSITIONS OF PERIODIC MARKOV'S CHAIN

The summary. *Conceptions and formulas are offered for determination of absolute and relative errors of estimation of each matrices of transitions of periodic Markov's chain, and also integral, relative integral and average error, for the estimations of all matrices. The essence of the formulas lies in the usage of the one of norms of matrices – spherical matrix norm. The examples of imitating simulation of realization of periodic Markov's chain are demonstrated, by using of which, we have got the estimations of matrices of transitions. The errors of estimations of matrices are found, their integral and average errors. In this article illustrated, that with the increase of the size of realization, errors of estimations of matrices become less, that is accuracy of estimations rise. Received results confirm the validity of method of evaluation of matrices of transitions of periodic chains, and efficiency and comfort of formulas, for determination of errors of estimations.*

Key words: *periodic Markov's chain, matrix of transition, homogeneity of pair, estimation of matrices, norm of matrix, absolute error of estimation of matrix, integral error of estimations of matrices.*

Умовні позначення:

$\{\xi_n,\ n=0,1,...\}$ – ланцюг Маркова;

$X=(1,2,...,h,...,i,...)$ – множина станів ланцюга;

$p_{ij}(n)$ – умовна ймовірність переходу зі стану i у стан j;

$\Pi(n)=\|p_{ij}(n)\|$ – матриця ймовірностей переходів;

L – період періодичного ланцюга;

$\varphi=\{0,...,k,...,L-1\}$ – φ-множина фаз періодичного ланцюга;

$\{\Pi(0),...,\Pi(k),...,\Pi(L-1)\}$ – $\Pi_{(\varphi)}$-множина матриць переходів періодичного ланцюга;

$t_s^{(k)}=k+sL$ – позначення числа $k+sL,\ k\in\varphi$-множині;

$\xi_s^{(k)}$ – позначення випадкової величини $\xi_n,\ n=k+sL$;

$\varphi^{(k)}=\{t_s^{(k)}\},\ s=0,1,...$ – $\varphi^{(k)}$-решітка з координатами (вузлами) $t_s^{(k)}=k+sL$;

$\tilde{\xi}_s^{(k)}=\left(\xi_s^{(k)},\xi_{s+1}^{(k)}\right)$ – пара випадкових величин;

$\left\{\tilde{\xi}_s^{(k)}\right\}$, $s = 0,1,...$ – однорідна послідовність пар випадкових величин;

$\Pi_0^{(k)} = \Pi(k)$, $k \in \varphi$-множині – матриця переходів між елементами однорідної послідовності пар $\left\{\xi_s^{(k)}\right\}$, $s = 0,1,...$;

$\Delta\left(\tilde{\Pi}\right)$ – абсолютна похибка матриці $\tilde{\Pi}$;

$\delta\left(\tilde{\Pi}\right)$ – відносна похибка матриці $\tilde{\Pi}$;

$\vec{\tilde{\Pi}} = \left(\tilde{\Pi}(0),...,\tilde{\Pi}(k),...,\tilde{\Pi}(L-1)\right)$ – вектор оцінок матриць;

$\Delta_{інт}\left(\vec{\tilde{\Pi}}\right)$ – інтегральна похибка вектора матриць;

$\Delta_{усер}\left(\vec{\tilde{\Pi}}\right)$ – усереднена похибка вектора матриць.

Вступ. Вивчаючи періодичні ланцюги Маркова, часто припускають, що їх матриці переходів відомі. Однак коли періодичні ланцюги використовують у прикладних дослідженнях як моделі відповідних сигналів, їх матриці переходів, як правило, є невідомими. Тому часто виникає необхідність знаходження оцінок матриць, щоб ці оцінки в подальшому використовувати замість точних значень матриць. Питання побудови оцінок матриць переходів започатковано в [1], де вперше з періодичного ланцюга Маркова виділено однорідні послідовності пар випадкових величин. Ґрунтуючись на їх властивостях, в [2] розроблено метод оцінювання матриць переходів періодичного ланцюга, використовуючи для цього лише одну реалізацію. Оскільки в оцінку кожної матриці розміром $m \times m$ входить m^2 оцінок її окремих елементів – умовних ймовірностей переходів, то важливо якимось чином інтегрально характеризувати точність оцінок як кожної із матриць, так і усереднену похибку оцінок усіх матриць переходів.

Метою роботи є розробити алгоритм знаходження похибок оцінок матриць переходів періодичного ланцюга Маркова: абсолютної похибки кожної із оцінок матриць та їх відносної похибки; інтегральної похибки оцінок усіх матриць у сукупності, їх відносної та усередненої похибок.

Нагадаємо спочатку основні результати робіт [1,2], в яких запропоновано метод оцінювання матриць переходів періодичних ланцюгів Маркова. Послідовність цілочислових випадкових величин

$$\{\xi_n,\ n = 0,1,2,...\},$$

що приймають значення із фазового простору $X = (1,2,...,h,...,i,...)$, називають **ланцюгом Маркова**, якщо для всіх $n \geq 0$

$$P\{\xi_{n+1} = j | \xi_0 = h,...,\xi_{n-1} = k,\ \xi_n = i\} = P\{\xi_{n+1} = j | \xi_n = i\} \overset{df}{=} p_{ij}(n),$$

тобто **умовна ймовірність** того, що випадкова величина ξ_{n+1} прийме значення j, залежить тільки від того, яке значення прийняла випадкова величина ξ_n і не залежить від попередніх значень $h,...,k$, які прийняли випадкові величини $\xi_0,...,\xi_{n-1}$. Для $n = 0$ початковий розподіл ймовірностей $P(\xi_0 = i) \overset{df}{=} p_i(0)$ вважається заданим, причому $\sum_{i \in X} p_i(0) = 1$. Умовні ймовірності переходів $p_{ij}(n)$, які ще часто називають перехідними ймовірностями, в сукупності утворюють матриці переходів

$$\Pi(n) = \left\| p_{ij}(n) \right\|,\ i, j \in X,\ n = 0,1,2,... .$$

Означення 1. Ланцюг Маркова називають **періодичним**, якщо періодичними є його умовні ймовірності переходів, тобто існує ціле $L > 1$, що

$$p_{ij}(n) = p_{ij}(n+L),\ i, j \in X .$$

Очевидно, матриці переходів $\Pi(n)=\left|p_{ij}(n)\right|$ періодичного ланцюга Маркова теж змінюються періодично з цим же періодом L:

$$\Pi(n)=\Pi(n+L),\ n=0,1,\dots . \tag{1}$$

Із означення також випливає, що періодичний ланцюг визначається першими L матрицями переходів

$$\{\Pi(0),\dots,\Pi(k),\dots,\Pi(L-1)\}. \tag{2}$$

Основні властивості періодичних ланцюгів щодо можливостей оцінювання їх матриць переходів. Аргументи матриць (2), тобто сукупність чисел $0,\dots,k,\dots,L-1$ позначимо через φ

$$\varphi=\{0,\dots,k,\dots,L-1\}, \tag{3}$$

і будемо називати її φ**-множиною фаз**, окремі числа k цієї множини – фазами. Подібно до (3) множину матриць

$$\{\Pi(0),\dots,\Pi(k),\dots,\Pi(L-1)\} \tag{2}$$

називають **множиною фазових матриць**, а окремі матриці $\Pi(k)$ – **фазовими** матрицями.

Оскільки довільне ціле число $n\geq 0$ можна записати у вигляді $n=k+sL$, де $s=[n/L]$ – ціла частина числа, $k=n(\operatorname{mod}L)$ – залишок від ділення числа n на L, тобто $k\in\varphi$-можині фаз, то для наших задач вигідно таке зображення числа позначити через $t_s^{(k)}$:

$$n=k+sL\overset{df}{=}t_s^{(k)}. \tag{4}$$

Аналогічно позначимо випадкові величини ланцюга Маркова: для $n=k+sL$ випадкова величина

$$\xi_n=\xi_{k+sL}\overset{df}{=}\xi_s^{(k)}. \tag{5}$$

Якщо тепер вибрати одне із чисел k із φ-множини фаз, то сукупність чисел

$$\left\{t_s^{(k)}\right\},\ s=0,1,\dots .$$

утворює решітку з кроком L, яку будемо називати $\varphi^{(k)}$**-решіткою**. Відповідно виділену із періодичного ланцюга послідовність випадкових величин

$$\left\{\xi_s^{(k)}\right\},\ s=0,1,\dots ,$$

аргументами якої є вузли $\varphi^{(k)}$-решітки, називають $\varphi^{(k)}$**-послідовністю**. Число таких $\varphi^{(k)}$-послідовностей нараховується L – для кожного $k=0,1,\dots,L-1$ із φ-множини фаз.

Враховуючи (4) і (5), подібним чином позначимо матриці переходів

$$\Pi(k+sL)=\Pi\left(t_s^{(k)}\right)\overset{df}{=}\Pi_s^{(k)},\ s=0,1,\dots,\ k=0,1,\dots,L-1. \tag{6}$$

Послідовність матриць

$$\left\{\Pi_s^{(k)}\right\},\ s=0,1,\dots \tag{7}$$

називають $\Pi_s^{(k)}$**-послідовністю**. Число таких $\Pi_s^{(k)}$-послідовностей теж нараховується L.

Беручи до уваги (1) та позначення (6), очевидно, що

$$\Pi_s^{(k)}=\Pi_0^{(k)},\ s=1,2,\dots . \tag{8}$$

Для $s=0$ матриці

$$\Pi_0^{(k)}=\Pi(k),\ k=0,1,\dots,L-1, \tag{9}$$

тобто перші матриці кожної із $\Pi_s^{(k)}$-послідовностей (7) є фазовими матрицями, а замість (2) множину фазових матриць, якими визначається періодичний ланцюг, можна записати у вигляді

$$\left\{\Pi_0^{(0)},\dots,\Pi_0^{(k)},\dots,\Pi_0^{(L-1)}\right\}. \tag{2a}$$

Зафіксуємо одне із чисел k, що належить φ-множині фаз, і утворимо із сусідніх випадкових величин $\xi_s^{(k)} = \xi_{k+sL}$ і $\xi_s^{(k+1)} = \xi_{k+sL+1}$ пару $\left(\xi_s^{(k)}, \xi_s^{(k+1)}\right)$, яку позначимо через $\widetilde{\xi}_s^{(k)}$:

$$\widetilde{\xi}_s^{(k)} = \left(\xi_s^{(k)}, \xi_s^{(k+1)}\right),$$

або в розгорнутому вигляді

$$\widetilde{\xi}_s^{(k)} = \left(\xi_{k+sL}, \xi_{k+sL+1}\right).$$

Означення 2. Виділену із періодичного ланцюга Маркова $\{\xi_n\}, n = 0,1,...$ послідовність пар випадкових величин

$$\left\{\widetilde{\xi}_s^{(k)}\right\}, s = 0,1,... \qquad (10)$$

називають k**-послідовністю пар**, $k = 0,1,..., L-1$.

Легко пересвідчитися, що для кожної пари $\widetilde{\xi}_s^{(k)} = \left(\xi_s^{(k)}, \xi_s^{(k+1)}\right)$ k-послідовності (10) ймовірності переходів від випадкової величини $\xi_s^{(k)}$ до величини $\xi_s^{(k+1)}$ задаються матрицями переходів $\Pi_s^{(k)}$. Оскільки згідно з (8) матриці $\Pi_s^{(k)}, s = 1,2,...$ співпадають із матрицею $\Pi_0^{(k)}$, то це означає, що ймовірності переходів між випадковими величинами кожної пари $\widetilde{\xi}_s^{(k)}$ задаються однією і тією ж матрицею $\Pi_0^{(k)}$. Це є підставою, щоб подібно до поняття однорідності ланцюга k-послідовність пар періодичного ланцюга Маркова назвати **однорідною** k **-послідовністю пар**. Наведені результати в [1] подано у вигляді леми.

Лема. Для однорідної k-послідовність пар $\left\{\widetilde{\xi}_s^{(k)}\right\}, s = 0,1,2,...,$ $k \in \varphi$-множині фаз, переходи від випадкової величини $\xi_s^{(k)}$ до величини $\xi_s^{(k+1)}$ в кожної із пар $\widetilde{\xi}_s^{(k)} = \left(\xi_s^{(k)}, \xi_s^{(k+1)}\right)$ визначаються однією і тією ж фазовою матрицею переходів $\Pi_0^{(k)}$.

Властивість однорідності k-послідовностей пар випадкових величин використано в методі оцінювання матриць переходів періодичного ланцюга Маркова, розглянутому в [2]. Нагадаємо суть цього методу.

Оскільки періодичний ланцюг визначається фазовими матрицями переходів, для оцінювання його матриць переходів достатньо знайти оцінки лише фазових матриць. Будемо вважати, що множина станів періодичного ланцюга є скінченою, тобто $X = (1,...,i,...,m)$, відповідно розмір матриць переходів дорівнює $m \times m$:

$$\Pi_0^{(k)} = \begin{vmatrix} p_{11}^{(k)} & ... & p_{1m}^{(k)} \\ ... & ... & ... \\ ... & p_{ij}^{(k)} & ... \\ ... & ... & ... \\ p_{m1}^{(k)} & ... & p_{mm}^{(k)} \end{vmatrix}, k = 0,1,..., L-1. \qquad (11)$$

Нехай

$$\{x_n\}, n = 0,1,..., N \qquad (12)$$

– реалізація періодичного ланцюга, об'єм якої $N >> m$, тобто набагато більше m. Щоб знайти оцінку матриці переходів (11), тобто знайти оцінки всіх перехідних ймовірностей $p_{ij}^{(k)}, i, j = 1,2,..., m$, із реалізації (11) виділимо k-послідовності пар

$$\left\{\widetilde{x}_s^{(k)}\right\}, s = 0,1,..., z, z = [N/L], \qquad (13)$$

яка є реалізацією k-послідовності пар $\left\{\widetilde{\xi}_s^{(k)}\right\}, s = 0,1,...$. Оскільки кожна пара $\widetilde{x}_s^{(k)} = \left(x_s^{(k)}, x_s^{(k+1)}\right)$ або те саме, що $\widetilde{x}_s^{(k)} = \left(x_{k+sL}, x_{k+1+sL}\right)$, то послідовність (13) ще можна записати у вигляді

$$\{(x_k, x_{k+1}),...,(x_{k+sL}, x_{k+1+sL}),...,(x_{k+zL}, x_{k+1+zL})\}, s = 0,1,..., z, z = [N/L]. \qquad (13а)$$

Для оцінки елемента $p_{ij}^{(k)}, i, j = 1,2,...,m$, матриці $\Pi_0^{(k)}$ у підпослідовності (13) серед перших елементів $x_s^{(k)}$ кожної із пар $\widetilde{x}_s^{(k)} = \left(x_s^{(k)}, x_s^{(k+1)}\right), s = 0,1,...,z$, виявимо ті елементи, значення яких дорівнюють i. Число таких елементів позначимо через $N_i(k)$. Після цього серед тих пар $\widetilde{x}_s^{(k)} = \left(x_s^{(k)}, x_s^{(k+1)}\right)$, значення перших елементів яких дорівнюють i, виявимо ті пари, в яких значення їх других елементів $x_s^{(k+1)}$ дорівнюють j. Кількість таких пар позначимо через $N_{ij}(k)$. Тепер за оцінку перехідної ймовірності $p_{ij}(k)$ приймемо відношення (статистику)

$$\widetilde{p}_{ij}(k) = \frac{N_{ij}(k)}{N_i(k)}, i, j = 1,2,...,m, k = 0,1,...,L-1. \tag{14}$$

Згідно з законом великих чисел, частота (оцінка) $\widetilde{p}_{ij}(k)$ збігається за ймовірністю до перехідної ймовірності $p_{ij}(k)$, тобто

$$\lim_{N_i(k)\to\infty} P\left\{\left|\widetilde{p}_{ij}(k) - p_{ij}(k)\right| > \varepsilon\right\} = 0.$$

У сукупності елементи $\widetilde{p}_{ij}(k)$ утворюють матрицю $\widetilde{\Pi}_0^{(k)}$, яку і приймаємо за оцінку матриці переходів $\Pi_0^{(k)}$. Провівши такі обчислення для всіх $k = 0,1,...,L-1$, знайдемо матриці $\widetilde{\Pi}_0^{(0)},...,\widetilde{\Pi}_0^{(k)},...,\Pi_0^{(L-1)}$, що є оцінками для фазових матриць переходів $\Pi_0^{(0)},...,\Pi_0^{(k)},...,\Pi_0^{(L-1)}$.

Повертаючись до використаних вище позначень, зокрема до (9), бачимо, що статистики $\widetilde{p}_{ij}(k), i, j = 1,2,...,m, k = 0,1,...,L-1$, які обчислюємо згідно з (13), – це не що інше, як оцінки перехідних ймовірностей $p_{ij}(k)$, які є елементами матриць $\Pi(k), k = 0,1,...,L-1$. У сукупності оцінки $\widetilde{p}_{ij}(k)$ утворюють матриці $\widetilde{\Pi}(k), k = 0,1,...,L = 1$, які є оцінками фазових матриць $\Pi(k)$.

Похибки оцінок матриць переходів. Отримавши оцінки матриць переходів періодичного ланцюга Маркова, виникає питання їх точності, яку б можна було виразити певним числовими значенням. Нагадаємо, що в загальному існують два основні підходи до визначення похибок – детермінований і стохастичний. У задачах вимірювання свідчать про похибку числа, абсолютну й відносну похибки. Крім самих похибок мова часто йде і про ймовірнісні характеристики похибок. Наприклад, при оцінюванні ймовірностей появи тих чи інших подій (класичний приклад – оцінка ймовірності випадання герба) похибку визначають як відхилення частоти появи події від її ймовірності, а скориставшись нерівністю Чебишева, можна знайти ймовірність того, що відхилення не перевищить заданої межі.

В нашому випадку теж необхідно визначитися, яким чином характеризувати точність оцінок матриць переходів. Вище було показано, що оцінки перехідних ймовірностей $\widetilde{p}_{ij}(k)$ збігаються за ймовірністю до умовних ймовірностей $p_{ij}(k)$. При цьому похибки оцінок (абсолютна похибка, відносна, гранична абсолютна) будемо визначати з використанням різниць між точними значеннями перехідних ймовірностей та їх оцінками. Що стосується матриць переходів, то тут для характеристики їх точності природно використати поняття норми матриці. При цьому величиною відхилення оцінки матриці від самої матриці буде норма різниці між цими матрицями. Існує кілька різних норм матриць. Будемо користуватися **сферичною** нормою

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}. \tag{15}$$

На основі норми матриці визначаємо поняття відстані між матрицями (одного і того ж розміру $m \times n$) як норму різниці між цими матрицями. Для двох матриць A і B відстань

$$\rho(A, B) = \|A - B\|.$$

Відстань між матрицями використаємо для нового поняття – **абсолютної похибки** оцінки матриці переходів. Нехай $\tilde{\Pi}$ – оцінка матриці Π. Абсолютну похибку матриці $\tilde{\Pi}$ визначимо як відстань (іноді зручно використовувати термін «відхилення») між матрицею Π та її оцінкою $\tilde{\Pi}$:

$$\Delta(\tilde{\Pi}) = \rho\left(\Pi, \tilde{\Pi}\right) = \left\|\tilde{\Pi} - \Pi\right\|. \tag{16}$$

Величина

$$\delta(\tilde{\Pi}) = \frac{\Delta\left(\tilde{\Pi}\right)}{\|\Pi\|} = \frac{\left\|\Pi - \tilde{\Pi}\right\|}{\|\Pi\|}$$

є **відносною похибкою** оцінки $\tilde{\Pi}$.

Коли проводиться оцінювання кількох матриць одночасно, як це має місце при оцінюванні матриць періодичного ланцюга Маркова, має сенс ввести поняття **інтегральної** абсолютної похибки (відхилення) оцінок усіх матриць у сукупності, а також відносної інтегральної похибки та усередненої похибки оцінок матриць. Для цього сукупність матриць $\Pi(0), \ldots, \Pi(k), \ldots, \Pi(L-1)$ позначимо як вектор $\vec{\Pi} = \left(\Pi(0), \ldots, \Pi(k), \ldots, \Pi(L-1)\right)$. Вектор оцінок матриць $\vec{\tilde{\Pi}} = \left(\tilde{\Pi}(0), \ldots, \tilde{\Pi}(k), \ldots, \tilde{\Pi}(L-1)\right)$.

Інтегральну похибку матриць $\vec{\tilde{\Pi}} = \left(\tilde{\Pi}(0), \ldots, \tilde{\Pi}(k), \ldots, \tilde{\Pi}(L-1)\right)$ пропонується визначати за формулою

$$\Delta_{інт}\left(\vec{\tilde{\Pi}}\right) = \rho_{інт}\left(\vec{\Pi}, \vec{\tilde{\Pi}}\right) = \left\|\vec{\Pi} - \vec{\tilde{\Pi}}\right\|_{інт} = \sqrt{\sum_{k=0}^{L-1} \Delta^2\left(\tilde{\Pi}(k)\right)} = \sqrt{\sum_{k=0}^{L-1} \rho^2\left(\Pi(k), \tilde{\Pi}(k)\right)}.$$

Відносною інтегральною похибкою оцінок матриць буде відношення

$$\delta(\vec{\tilde{\Pi}}) = \frac{\Delta_{інт}\left(\vec{\tilde{\Pi}}\right)}{\left\|\vec{\Pi}\right\|_{інт}},$$

де $\left\|\vec{\Pi}\right\|_{інт} = \sqrt{\sum_{k=0}^{L-1} \|\Pi(k)\|^2}$.

Усереднену похибку для матриць $\vec{\tilde{\Pi}} = \left(\tilde{\Pi}(0), \ldots, \tilde{\Pi}(k), \ldots, \tilde{\Pi}(L-1)\right)$ визначаємо за формулою

$$\Delta_{усер}\left(\vec{\tilde{\Pi}}\right) = \sqrt{\frac{\Delta^2_{інт}\left(\vec{\tilde{\Pi}}\right)}{L}} = \sqrt{\frac{\left\|\vec{\Pi} - \vec{\tilde{\Pi}}\right\|^2_{інт}}{L}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=0}^{L-1} \rho^2\left(\Pi(k), \tilde{\Pi}(k)\right)}{L}}, \tag{17}$$

вона характеризує середню точність усієї сукупності оцінок матриць періодичного ланцюга Маркова.

Приклади оцінок матриць переходів та їх похибок. Як вже відзначалося, в [2] було проведено імітаційне моделювання періодичного ланцюга Маркова і за отриманою реалізацією було знайдено оцінки матриць переходів. Аналіз цих оцінок показав, що зі збільшенням об'єму реалізації оцінки перехідних ймовірностей кожної з матриць переходів наближаються до точних значень перехідних ймовірностей. Застосуємо тепер наведені формули для знаходження похибок цих же оцінок матриць переходів, отриманих у [2].

Приклад 1. Для імітаційного моделювання реалізації періодичного ланцюга була задана множина станів $X=(1,2,3)$, період $L=4$ і матриці переходів $\Pi(0), \Pi(1), \Pi(2)$ і $\Pi(3)$, наведені в таблиці 1.

Таблиця 1

$\Pi(0)=\begin{vmatrix} 0.0500 & 0.0500 & 0.9000 \\ 0.0500 & 0.0500 & 0.9000 \\ 0.0500 & 0.0500 & 0.9000 \end{vmatrix}$	$\Pi(1)=\begin{vmatrix} 0.0500 & 0.9000 & 0.0500 \\ 0.0500 & 0.9000 & 0.0500 \\ 0.0500 & 0.9000 & 0.0500 \end{vmatrix}$
$\Pi(2)=\begin{vmatrix} 0.0500 & 0.9000 & 0.0500 \\ 0.0500 & 0.9000 & 0.0500 \\ 0.0500 & 0.9000 & 0.0500 \end{vmatrix}$	$\Pi(3)=\begin{vmatrix} 0.9000 & 0.0500 & 0.0500 \\ 0.9000 & 0.0500 & 0.0500 \\ 0.9000 & 0.0500 & 0.0500 \end{vmatrix}$

У результаті імітаційного моделювання періодичного ланцюга була отримана реалізація об'ємом $N=100000$ значень. Спочатку було проведено оцінювання матриць із використанням частини реалізації об'ємом $N=5000$. Результат оцінювання наведено в таблиці 2.

Таблиця 2

$\tilde{\Pi}(0)=\begin{vmatrix} 0.0448 & 0.0385 & 0.9167 \\ 0.0667 & 0.0267 & 0.9067 \\ 0.0690 & 0.0862 & 0.8448 \end{vmatrix}$	$\tilde{\Pi}(1)=\begin{vmatrix} 0.0678 & 0.9153 & 0.0169 \\ 0.0800 & 0.8800 & 0.0400 \\ 0.0473 & 0.9062 & 0.0465 \end{vmatrix}$
$\tilde{\Pi}(2)=\begin{vmatrix} 0.0645 & 0.9194 & 0.0161 \\ 0.0424 & 0.9125 & 0.0451 \\ 0.0536 & 0.9464 & 0.0000 \end{vmatrix}$	$\tilde{\Pi}(3)=\begin{vmatrix} 0.8727 & 0.0909 & 0.0364 \\ 0.8915 & 0.0604 & 0.0481 \\ 0.9615 & 0.0192 & 0.0192 \end{vmatrix}$

Щоб знайти похибку оцінок матриць, на першому кроці обчислено різниці між точними матрицями (таблиця 1) та їх оцінками (таблиця 2). Результати віднімання наведено в таблиці 3.

Таблиця 3

$\Pi(0)-\tilde{\Pi}(0)= \\ =\begin{vmatrix} 0.0052 & 0.0115 & -0.0167 \\ -0.0167 & 0.0217 & -0.0067 \\ -0.0190 & -0.0362 & 0.0552 \end{vmatrix}$	$\Pi(1)-\tilde{\Pi}(1)= \\ =\begin{vmatrix} -0.0178 & -0.0153 & 0.0331 \\ -0.0300 & 0.0200 & 0.0100 \\ 0.0027 & -0.0062 & 0.0035 \end{vmatrix}$
$\Pi(2)-\tilde{\Pi}(2)= \\ =\begin{vmatrix} -0.0145 & -0.0194 & 0.0339 \\ 0.0076 & -0.0125 & 0.0049 \\ -0.0036 & -0.0464 & 0.0500 \end{vmatrix}$	$\Pi(3)-\tilde{\Pi}(3)= \\ =\begin{vmatrix} 0.0273 & -0.0409 & 0.0136 \\ 0.0085 & -0.0104 & 0.0019 \\ -0.0615 & 0.0308 & 0.0308 \end{vmatrix}$

Використовуючи формулу (16), знайдено похибки оцінок матриць. Виявилося, що при об'ємі вибірки $N = 5000$ для оцінок $\widetilde{\Pi}(0), \widetilde{\Pi}(1), \widetilde{\Pi}(2)$ і $\widetilde{\Pi}(3)$ їх похибки

$$\Delta\left(\widetilde{\Pi}(0)\right) = 0.078, \quad \Delta\left(\widetilde{\Pi}(1)\right) = 0.056,$$
$$\Delta\left(\widetilde{\Pi}(2)\right) = 0.081, \quad \Delta\left(\widetilde{\Pi}(3)\right) = 0.092.$$

Для вектора оцінок $\vec{\widetilde{\Pi}} = \left(\widetilde{\Pi}(0), \widetilde{\Pi}(1), \widetilde{\Pi}(2), \widetilde{\Pi}(3)\right)$ усереднена похибка, обчислена за формулою (17), дорівнює $\Delta_{усер}\left(\vec{\widetilde{\Pi}}\right) = 0.0767$.

Аналогічні оцінки матриць переходів знайдено при використанні вибірок об'ємом $N = 10000$, $N = 50000$ та $N = 100000$ відліків. Для кожного з цих випадків наведемо лише результати обчислень.

При об'ємі вибірки $N = 10000$ похибки оцінок матриць переходів дорівнюють

$$\Delta\left(\widetilde{\Pi}(0)\right) = 0.053, \quad \Delta\left(\widetilde{\Pi}(1)\right) = 0.073,$$
$$\Delta\left(\widetilde{\Pi}(2)\right) = 0.067, \quad \Delta\left(\widetilde{\Pi}(3)\right) = 0.084.$$

Їх усереднена похибка $\Delta_{усер}\left(\vec{\widetilde{\Pi}}\right) = 0.0691$.

При об'ємі вибірки $N = 50000$ похибки оцінок матриць переходів дорівнюють

$$\Delta\left(\widetilde{\Pi}(0)\right) = 0.017, \quad \Delta\left(\widetilde{\Pi}(1)\right) = 0.022,$$
$$\Delta\left(\widetilde{\Pi}(2)\right) = 0.013, \quad \Delta\left(\widetilde{\Pi}(3)\right) = 0.022.$$

Усереднена похибка $\Delta_{усер}\left(\vec{\widetilde{\Pi}}\right) = 0.0184$.

Накінець, при об'ємі вибірки $N = 100000$ похибки оцінок матриць переходів дорівнюють

$$\Delta\left(\widetilde{\Pi}(0)\right) = 0.024, \quad \Delta\left(\widetilde{\Pi}(1)\right) = 0.014,$$
$$\Delta\left(\widetilde{\Pi}(2)\right) = 0.010, \quad \Delta\left(\widetilde{\Pi}(3)\right) = 0.022.$$

Усереднена похибка $\Delta_{усер}\left(\vec{\Pi}, \vec{\widetilde{\Pi}}\right) = 0.0175$.

Для наочності й порівняльного аналізу усереднені похибки оцінок матриць переходів зображено на рисунку 1 у вигляді графіка, де значення похибок зображені кружечками. Із графіка бачимо, що зі збільшенням об'єму вибірки похибки оцінок зменшуються, тобто збільшується їх точність.

Приклад 2. Для моделювання реалізацій періодичного ланцюга вибрано множину станів $X = (1,2,3,4)$, період $L = 5$, матриці переходів наведено в таблиці 4.

Таблиця 4

$\Pi(0) = \begin{vmatrix} 0.9000 & 0.0500 & 0.0250 & 0.0250 \\ 0.9000 & 0.0500 & 0.0250 & 0.0250 \\ 0.9000 & 0.0500 & 0.0250 & 0.0250 \\ 0.9000 & 0.0500 & 0.0250 & 0.0250 \end{vmatrix}$	$\Pi(1) = \begin{vmatrix} 0.0500 & 0.9000 & 0.0250 & 0.0250 \\ 0.0500 & 0.9000 & 0.0250 & 0.0250 \\ 0.0500 & 0.9000 & 0.0250 & 0.0250 \\ 0.0500 & 0.9000 & 0.0250 & 0.0250 \end{vmatrix}$
$\Pi(2) = \begin{vmatrix} 0.0250 & 0.0500 & 0.9000 & 0.0250 \\ 0.0250 & 0.0500 & 0.9000 & 0.0250 \\ 0.0250 & 0.0500 & 0.9000 & 0.0250 \\ 0.0250 & 0.0500 & 0.9000 & 0.0250 \end{vmatrix}$	$\Pi(3) = \begin{vmatrix} 0.0250 & 0.0500 & 0.9000 & 0.0250 \\ 0.0250 & 0.0500 & 0.9000 & 0.0250 \\ 0.0250 & 0.0500 & 0.9000 & 0.0250 \\ 0.0250 & 0.0500 & 0.9000 & 0.0250 \end{vmatrix}$
$\Pi(4) = \begin{vmatrix} 0.0250 & 0.0250 & 0.0500 & 0.9000 \\ 0.0250 & 0.0250 & 0.0500 & 0.9000 \\ 0.0250 & 0.0250 & 0.0500 & 0.9000 \\ 0.0250 & 0.0250 & 0.0500 & 0.9000 \end{vmatrix}$	

Для цього прикладу теж:

- було проведено імітаційне моделювання періодичного ланцюга Маркова об'ємом $N = 100000$ відліків;
- отримано оцінки матриць переходів, використовуючи для цього відрізки реалізації довжиною $N = 5000$, $N = 10000$, $N = 50000$ і $N = 100000$ відліків;
- обчислено похибки оцінок матриць переходів для кожного із цих випадків;
- обчислено відповідні усереднені похибки.

На відміну від попереднього прикладу тут ми лише наведемо похибки оцінок матриць переходів та усереднені похибки. При об'ємі вибірки $N = 5000$ похибки оцінок матриць переходів набули значень

$$\Delta\tilde{\Pi}(0) = 0.166, \quad \Delta\tilde{\Pi}(1) = 0.154, \quad \Delta\tilde{\Pi}(2) = 0.120,$$
$$\Delta\tilde{\Pi}(3) = 0.133, \quad \Delta\tilde{\Pi}(4) = 0.212.$$

Усереднена похибка $\Delta_{усер}\left(\vec{\tilde{\Pi}}\right) = 0.1572$.

Для об'єму вибірки $N = 10000$ похибки оцінок матриць

$$\Delta\tilde{\Pi}(0) = 0.089, \quad \Delta\tilde{\Pi}(1) = 0.097, \quad \Delta\tilde{\Pi}(2) = 0.070,$$
$$\Delta\tilde{\Pi}(3) = 0.060, \quad \Delta\tilde{\Pi}(4) = 0.104.$$

Усереднена похибка $\Delta_{усер}\left(\vec{\tilde{\Pi}}\right) = 0.0839$.

Для об'єму $N = 50000$ похибки оцінок матриць

$$\Delta\tilde{\Pi}(0) = 0.047, \quad \Delta\tilde{\Pi}(1) = 0.067, \quad \Delta\tilde{\Pi}(2) = 0.032,$$
$$\Delta\tilde{\Pi}(3) = 0.044, \quad \Delta\tilde{\Pi}(4) = 0.050.$$

Усереднена похибка $\Delta_{усер}\left(\vec{\tilde{\Pi}}\right) = 0.0481$.

Нарешті для об'єму вибірки $N = 100000$ похибки оцінок матриць

$$\Delta\tilde{\Pi}(0) = 0.026, \quad \Delta\tilde{\Pi}(1) = 0.020, \quad \Delta\tilde{\Pi}(2) = 0.042,$$
$$\Delta\tilde{\Pi}(3) = 0.023, \quad \Delta\tilde{\Pi}(4) = 0.021.$$

Усереднена похибка $\Delta_{усер}\left(\vec{\tilde{\Pi}}\right) = 0.0259$.

Аналізуючи похибки оцінок матриць переходів і усереднені похибки для цього прикладу, бачимо, що, як і в попередньому випадку, зі збільшенням об'єму вибірки похибки зменшуються. Особливо це добре простежується для усереднених похибок. На рисунку 1 значення усереднених похибок зображені на графіку у вигляді квадратиків.

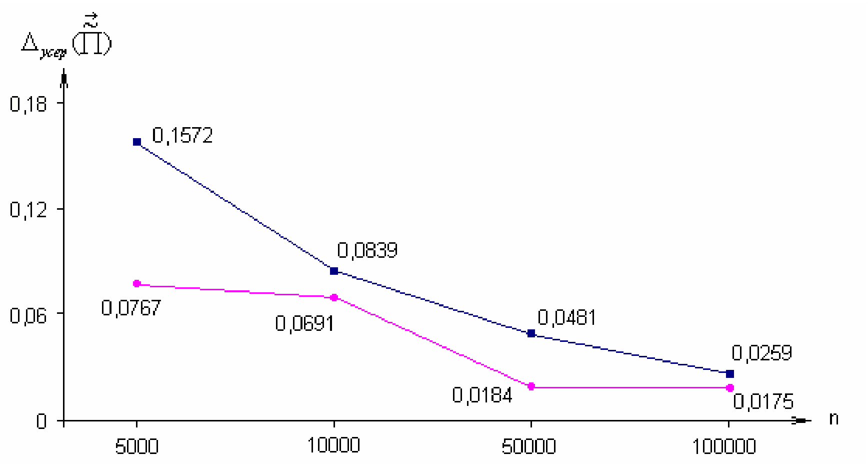

Рис. 1. Значення усереднених похибок матриць переходів для випадку чотирьох матриць розміром 3×3 зображені кружечками, для випадку п'яти матриць розміром 4×4 похибки зображені квадратиками

Порівнюючи поведінку похибок оцінок матриць переходів для прикладів 1 і 2 між собою, бачимо, що зі збільшенням об'єму вибірок похибки в обох випадках зменшуються. Однак для другого випадку похибки є більшими. Це природно, оскільки в першому прикладі знаходилися оцінки 36 перехідних ймовірності (4 матриці по 9 елементів кожна), в другому – 80 перехідних ймовірності (5 матриць по 16 елементів кожна). Тому якщо, наприклад, об'єм вибірки $N = 10000$, то в першому прикладі на оцінку однієї перехідної ймовірності в середньому припадає більше 275 елементів реалізації, в другому – 125 елементів, тобто набагато менше.

Висновки. Вперше для оцінок матриць переходів періодичного ланцюга Маркова запропоновано формули для визначення абсолютної та відносної похибок оцінки кожної із матриць переходів, запропоновано також інтегральну, відносну інтегральну та усереднену інтегральну похибки оцінок усіх матриць у сукупності. Проілюстровано, що зі збільшенням об'єму реалізацій похибки оцінок матриць зменшуються, тобто точність оцінок зростає. Це підтверджує правильність методу оцінювання матриць переходів періодичних ланцюгів, та ефективність і зручність формул для визначення похибок оцінок.

Література

1. Приймак М. Елементи однорідності для періодичних ланцюгів Маркова / М. Приймак, С. Прошин // Вісник ТДТУ. — 2009. — №2(14). — С. 114-123.
2. Приймак М.В. Оцінка матриць переходів періодичних ланцюгів Маркова / М.В. Приймак, С.Ю. Прошин // Електротехніка та системи управління. – 2009. – №3(21) – С. 26 – 33.

Отримано 10.05.2010 р.