

Міністерство освіти і науки України  
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

На правах рукопису

БОЙКО АНДРІЙ РОМАНОВИЧ

УДК 539.375

ЗСУВНЕ ПЛАСТИЧНЕ ВІДШАРОВУВАННЯ ЖОРСТКИХ ВКЛЮЧЕНЬ ЗА  
УМОВ НЕПОВНОГО КОНТАКТУ З СЕРЕДОВИЩЕМ

01.02.04. – Механіка деформівного твердого тіла

Дисертація на здобуття наукового ступеня  
кандидата технічних наук

Науковий керівник:  
Кривень Василь Андрійович  
доктор фізико-математичних  
наук, професор

Тернопіль – 2015

## З М І С Т

|                                                                                                                                                                                     |           |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>ВСТУП.....</b>                                                                                                                                                                   | <b>5</b>  |
| <b>РОЗДІЛ 1. КОРОТКИЙ ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ. ТЕОРЕТИЧНІ ТА ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ПЛАСТИЧНИХ ШАРІВ В ТІЛАХ З ВКЛЮЧЕННЯМИ ЗА УМОВИ ЇХ НЕДОСКОНАЛОГО КОНТАКТУ З СЕРЕДОВИЩЕМ.....</b> | <b>11</b> |
| 1.1. Висновки до розділу.....                                                                                                                                                       | 27        |
| <b>РОЗДІЛ 2. МЕТОДИ І ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ ПЛАСТИЧНИХ ДЕФОРМАЦІЙ ПЛАСТИЧНОГО ВІДШАРОВУВАННЯ ВКЛЮЧЕНЬ.....</b>                                                                         | <b>28</b> |
| 2.1. Основні співвідношення антиплоскої деформації.....                                                                                                                             | 28        |
| 2.2. Постановка задач розвитку пластичних деформацій в околі концентраторів напружень у ідеально пружно-пластичному середовищі.....                                                 | 33        |
| 2.3. Метод конформних відображень у задачах розвитку пластичного відшаровування включень у ідеально пружно-пластичному середовищі.....                                              | 35        |
| 2.3.1. Визначення початкового напрямку поширення пластичних смуг...                                                                                                                 | 35        |
| 2.3.2. Розвиток пластичних смуг від вершин торця щілини.....                                                                                                                        | 39        |
| 2.4. Дослідження початкової стадії розвитку пластичних смуг на основі пружного розв'язку задачі. Лінійна модель пластичної зони.....                                                | 43        |
| 2.5. Висновки до розділу.....                                                                                                                                                       | 46        |
| <b>РОЗДІЛ 3. ПЛАСТИЧНЕ ВІДШАРОВУВАННЯ ВКЛЮЧЕНЬ СКЛАДНОЇ ФОРМИ ЗА УМОВИ ЇХ НЕДОСКОНАЛОГО КОНТАКТУ З СЕРЕДОВИЩЕМ.....</b>                                                             | <b>47</b> |
| 3.1. Пластичне відшаровування тонкого жорсткого прямокутного включення за наявності міжфазних тріщин.....                                                                           | 47        |
| 3.1.1. Постановка і формалізація задачі.....                                                                                                                                        | 47        |

|                                                                                                                             |           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 3.1.2. Аналіз і розв'язування задачі.....                                                                                   | 50        |
| 3.2. Пластичне відшаровування квадратного волокна під зсувним навантаженням за наявності міжфазних тріщин.....              | 57        |
| 3.2.1. Постановка задачі про пластичне відшаровування довгого квадратного включення.....                                    | 58        |
| 3.2.2. Формалізація задачі.....                                                                                             | 59        |
| 3.2.3. Дослідження міжфазного пластичного відшаровування.....                                                               | 64        |
| 3.3. Висновки до розділу.....                                                                                               | 65        |
| <b>РОЗДІЛ 4. ВПЛИВ ФОРМИ КОНЦЕТРАТОРА І ЇХ ВЗАЄМОДІЇ НА РОЗВИТОК ПЛАСТИЧНИХ ШАРІВ.....</b>                                  | <b>68</b> |
| 4.1. Вплив кривизни поверхні включення на його пластичне відшаровування.....                                                | 69        |
| 4.1.1. Постановка задачі про вплив кривизни поверхні включення.....                                                         | 69        |
| 4.1.2. Формалізація розв'язування задачі.....                                                                               | 70        |
| 4.2. Включення нульової товщини.....                                                                                        | 76        |
| 4.3. Кругове включення.....                                                                                                 | 76        |
| 4.4. Вплив сильної взаємодії концентраторів на розвиток пластичних шарів.....                                               | 78        |
| 4.4.1. Постановка задачі про розвиток пластичних шарів від вершин близько-розміщених V-подібних вирізів.....                | 79        |
| 4.4.2. Дослідження розвитку локалізованих пластичних деформацій.....                                                        | 80        |
| 4.4.3. Числовий експеримент.....                                                                                            | 83        |
| 4.4.4. Крайні можливі значення кутів при вершині вирізу.....                                                                | 85        |
| 4.4.5. Пружний розв'язок задачі.....                                                                                        | 86        |
| 4.5. Висновки до розділу.....                                                                                               | 87        |
| <b>РОЗДІЛ 5. ПОЧАТКОВА СТАДІЯ РОЗВИТКУ МІЖФАЗНИХ ПЛАСТИЧНИХ ШАРІВ ЗА УМОВИ ЇХ НЕДОСКОНАЛОГО КОНТАКТУ З СЕРЕДОВИЩЕМ.....</b> | <b>88</b> |

|                                                                                                                    |            |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 5.1. Початкова стадія пластичного відшаровування довгого прямокутного включення за наявності міжфазних тріщин..... | 89         |
| 5.2. Початкова стадія пластичного відшаровування волокна квадратного перерізу.....                                 | 94         |
| 5.3. Початкова стадія розвитку пластичних смуг від вершин двох близьких V-подібних вирізів.....                    | 100        |
| 5.4. Висновки до розділу.....                                                                                      | 105        |
| <b>ВИСНОВКИ.....</b>                                                                                               | <b>106</b> |
| <b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....</b>                                                                             | <b>109</b> |
| <b>ДОДАТКИ.....</b>                                                                                                | <b>123</b> |
| <b>Додаток 1.....</b>                                                                                              | <b>124</b> |

## ВСТУП

**Актуальність теми.** У багатьох композиційних матеріалах містяться дефекти у вигляді тріщин і тонких жорстких включень, повністю з'єднаних з матеріалом або від'єднаних від них частково або повністю. Ці дефекти з'являються в матеріалі як в процесі його виготовлення, так і в процесі експлуатації, наприклад в результаті розриву армуючих елементів. У зв'язку з цим представляють теоретичний і практичний інтерес задачі теорії пружності для кусково-однорідних тіл з дефектами різної природи, зокрема, з дефектами на лінії розділу середовищ.

До теперішнього часу досить докладно вивчено вплив на напружений стан однорідного або кусочно-однорідного матеріалу дефектів одного типу, в основному тріщин. Результати цих досліджень широко представлені в монографіях Н.Ф. Морозова, В.В. Панасюка, Г.Я. Попова, М.П. Саврука, Г.Т. Сулима, Г.П. Черепанова і інших. Дослідженню міжфазних тріщин і її різним моделям у пружному середовищі присвячена велика кількість робіт, детальний огляд яких можна знайти в працях Р.В. Гольдштейна, А.Н. Гузя, А.О. Камінського, І.В. Симонова, Г.П. Черепанова, С. Atkinson, М. Coraninou, J. Dundurs, F. Erdogan, J.R. Rice, G.C. Sih, J.R. Willis та інших. Дослідженню різних типів включень у пружних тілах (пружних, жорстких, повністю зчеплених з середовищем, частково відшарованих і т.д.) присвячені праці Ю.А. Антипова, О.М. Гузя, М.М. Кундрата, Р.М. Кушніра, М.М. Николишина, В.В. Панасюка, Я.С. Підстригача, Г.Я. Попова, В.В. Сільвестрова, В.П. Силованюка, М.М. Стадника, М.Г. Стащука, Г.Т. Сулима, А.О. Сяського, В.І. Шваб'юка, П.В. Яснія, Ballarini, F. Erdogan, X. Markenseoff, K. Wu і інших. Однак на багато принципівих і практично важливих питань стосовно поведінки включень в реальному твердому тілі за умови його недосконалого контакту з середовищем неможливо дати відповідь на основі теорії пружності. Дослідження деформування тіл з

включенням за наявності міжфазних тріщин у пружно-пластичній постановці поки перебувають на початковій стадії. Окремі дослідження М.В. Дудика, А.О. Камінського, Л.А. Кіпніса В.А. Колмакової, В.А. Кривеня, Г.Т. Сулима не вичерпують цієї проблеми. У задачах дослідження пластичного відшаровування актуальними є математичні моделі, які гарантують, що умова пластичності виконується тільки у точках пластичних смуг і ніде поза ними не досягається. Така модель тонкосмугової локалізації пластичних деформацій запропоновану Б.В. Костровим і Л.В. Нікітіним, і узагальнена В.А. Кривенем надає змогу досліджувати збільшення зони ослаблених зв'язків за рахунок пластичного відшаровування та розвитку пластичних шарів від вершин міжфазних тріщин вздовж його поверхні включень. Актуальними сьогодні є практично важливі дослідження пластичного відшаровування включень скінченної товщини. Для квазікрихких тіл залишається актуальним з'ясування можливостей та меж застосовності пружних розв'язків для прогнозу початкової стадії розвитку пластичних відшарувань.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Наукові результати, що містяться у дисертації, отримані автором згідно з індивідуальним планом підготовки аспіранта та в межах держбюджетних науково-дослідних тем Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя: "Пружно-пластичне деформування тіл з концентраторами напружень у середовищі із затримкою текучості" (2009–2011 р., № держреєстрації 0109U002995, дисертант – виконавець), "Математичні моделі і методи аналізу залишкового ресурсу пружно-пластичних тіл з концентраторами напружень складної форми" (2012–2014 р., номер держреєстрації 0112U002201, дисертант – виконавець).

**Мета і завдання дослідження.** Метою роботи є розроблення аналітичного методу дослідження пластичного відшаровування жорстких включень складної форми за наявності міжфазних тріщин, розв'язування

конкретних задач пластичного відшаровування включень, визначення параметрів, важливих для нелінійної механіки руйнування. Для її досягнення у дисертації поставлені та вирішені такі завдання:

- адаптувати нелінійну модель тонкосмугової локалізації пластичних деформацій для дослідження пластичного відшаровування включень складної форми за наявності міжфазних тріщин;
- дослідити вплив ширини прямокутного включення з міжфазними тріщинами при його вершині на пластичне відшаровування включення;
- дослідити вплив кривини поверхні включення на пластичне відшаровування включення;
- отримати залежності довжин міжфазних пластичних шарів від навантаження для включень складної форми;
- отримати спрощені формули для довжин міжфазних пластичних шарів на початковій стадії їх розвитку для включень складної форми на основі відповідних пружних розв'язків і встановити межі їх застосовності.

**Об'єкт дослідження:** пружно-пластичні тіла з жорсткими включеннями складної форми за наявності міжфазних тріщин.

**Предмет дослідження:** розрахункові математичні моделі пластичного відшаровування включень складної форми у ідеально пружно-пластичних тілах за наявності міжфазних тріщин під зсувним навантаженням, конкретні задачі пластичного відшаровування включень з визначенням параметрів, важливих для нелінійної механіки руйнування.

**Методи дослідження.** Методи теорії ідеальної пластичності; математичні методи розв'язування нелінійних крайових задач теорії аналітичних функцій, зокрема методи конформних відображень та задачі Келдиша-Седова.

### **Наукова новизна одержаних результатів:**

- проведено дослідження пластичного відшаровування жорстких включень складної форми за наявності міжфазних тріщин на основі моделі, що не допускає досягнення межі текучості поза пластичними шарами. На її основі отримано аналітичні розв’язки низки нових задач для різних форм включень;
- розв’язано задачу про пластичне відшаровування тонкого прямокутного включення за наявності міжфазних тріщин біля його торця і досліджено вплив ширини на розвиток міжфазних пластичних шарів від вершин тріщин та від вершин включення;
- розв’язано задачу про пластичне відшаровування волокна квадратного перерізу за наявності міжфазних тріщин і досліджено вплив довжини на розвиток міжфазних пластичних шарів;
- розв’язано задачу про пластичне відшаровування включення з перерізом у формі кругового серпанка і з’ясовано вплив кривини включення на його пластичне відшаровування;
- досліджено розвиток пластичних смуг від двох близьких кутових точок і проведено дослідження впливу сильної взаємодії концентраторів на розвиток пластичних шарів;
- досліджено початкову стадію пластичних шарів на основі лінійної моделі пластичних зон (ЛМПЗ) і отримано формули для довжин пластичних шарів через коефіцієнти інтенсивності напружень. Показано, що отримані формули забезпечують високу точність для досить широкого діапазону навантажень.

**Практичне значення одержаних результатів.** Отримані у роботі залежності довжин міжфазних пластичних шарів від навантаження у тілах з включеннями застосовні в розрахунках міцності композитних матеріалів. Вони представляють інтерес для побудови критеріїв руйнування високопластичних матеріалів. Практично важливими є спрощені залежності

для довжин міжфазних пластичних шарів на початковій стадії розвитку і обґрунтування можливості застосувань з цією метою пружних розв'язків, зокрема коефіцієнтів інтенсивності напружень. Результати роботи використовуються при розрахунку напружено-деформівного стану композитних матеріалів у Тернопільському заводі залізобетонних виробів і будівельних конструкцій, що підтверджується відповідним актом.

Достовірність наукових положень і отриманих результатів забезпечується строгістю постановки задач і математичних методів їх розв'язування, збігом отриманих розв'язків, у окремих випадках, з відомими у літературі, що належать іншим авторам.

**Особистий внесок здобувача.** Основні результати та положення, які становлять суть дисертації отримані автором самостійно. У публікаціях, написаних у співавторстві, здобувачеві належить: в [51] – побудова конформного відображення і розв'язування задачі Келдиша-Сєдова; [12, 37, 45, 52, 53,] – зведення крайових задач до конформних відображень та їх побудова, аналіз отриманих результатів; [52] – побудова системи рівнянь відносно параметрів Крістоффеля-Шварца і їх розв'язання; [10, 54] – зведення задачі до конформного відображення і дослідження асимптотики розв'язку в околі вершини вирізу; [8, 11] – зведення крайової задачі до конформного відображення, обґрунтування існування та єдності її розв'язку. В усіх роботах належить проведення числових експериментів і участь у формулюванні висновків та результатів.

**Апробація результатів дисертації.** Основні положення дисертації доповідалися на 19-й та 20-й міжнародних науково-технічних конференціях «Прикладные задачи математики и механики» (м. Севастополь 2011, 2012 р.); 4-й Міжнародній науково – практичній конференції «Теоретичні і експериментальні дослідження в технологіях сучасного матеріалознавства та машинобудування» (3-7 червня 2013 р., Луцьк – Світязь); Міжнародній математичній конференції присвяченій 60-річчю В.І. Рукасова «Крайові

задачі, теорія функцій і їх застосування» (21–24 травня 2014 р., Київ-Слов'янськ); 12-й Міжнародній науковій конференції “Математичні проблеми механіки неоднорідних структур” (Львів, 2014 р.), а також на щорічних науково-технічних конференціях молодих науковців у Тернопільському національному технічному університеті імені Івана Пулюя.

У повному обсязі дисертація доповідалась та отримала позитивні оцінки на розширеному науковому семінарі «Механіка, міцність матеріалів та конструкцій» у Тернопільському національному технічному університеті імені Івана Пулюя; міжкафедральному науковому семінарі під керівництвом д.т.н., проф. В.І. Швабюка у Луцькому національному технічному університеті; на кафедрі механіки Львівського національного університету імені Івана Франка під керівництвом д.ф.-м.н., проф. Г.Т. Сулима.

**Публікації.** За матеріалами дисертації опубліковано 11 праць, з них 6 у наукових фахових виданнях України, в тому числі стаття [53] у журналі з імпакт-фактором і відноситься до статей які входять у базу Web of Science та Scopus; стаття [52] у базі Scopus.

**Структура та обсяг роботи.** Дисертація складається зі вступу, п'яти розділів, висновків, переліку літературних джерел (125 найменувань) та додатків. Загальний обсяг роботи становить 124 сторінок.

## **РОЗДІЛ 1. КОРОТКИЙ ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ. ТЕОРЕТИЧНІ ТА ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ПЛАСТИЧНИХ ШАРІВ В ТІЛАХ З ВКЛЮЧЕННЯМИ ЗА УМОВИ ЇХ НЕДОСКОНАЛОГО КОНТАКТУ З СЕРЕДОВИЩЕМ**

Оцінка якості конструкційних матеріалів з позиції континуальної механіки руйнування займає чільне місце при розробці нових матеріалів і проектуванні різного роду важливих конструкцій. Формулювання умов локального руйнування є найважливішим моментом в механіці руйнування. У теорії міцності конструкційних матеріалів, особливо металів і сплавів, ключове значення належить пластичним деформаціям, що передують руйнуванню. Сучасні конструкційні матеріали, як правило, володіють достатньою в'язкістю і допускають появу в матеріалі робочого тіла безпечних пластичних зон, здатних знизити ризики раптового руйнування. Тому в розрахунках на міцність елементів дороговартісних конструкцій особливе значення має урахування пластичних деформацій в околі різного роду концентраторів напружень: вирізів, включень, накладок, дефектів структури технологічного походження і тріщин, що неминуче pojawiaються в процесі тривалої експлуатації. Аналіз пластичних течій в околі різкої зміни форм є актуальним, оскільки може служити основою для розрахунку необхідної енергії руйнування.

У загальному випадку під руйнуванням розуміється не тільки розпад тіла на частини. У поняття руйнування входить також необоротна пластична течія, яка характеризується залишковими деформаціями і призводить до вичерпування несучої здатності елементів конструкції.

Перші дослідження у теорії пластичності були виконані в сімдесятих роках XIX століття Б. Сен-Венаном і М. Леві, яким належить створення одного з варіантів теорії пластичності, а також отримання основних рівнянь задачі плоскої деформації. У 1909 р. опублікована робота О. Хаара і

Т. Кармана, в якій була зроблена спроба виведення основних рівнянь з варіаційного принципу. Пізніше Р. Мізес доповнив систему рівнянь Сен-Венана – Леві умовою пластичності, яка перед тим була отримана М. Губером. Г. Генкі, Л. Прандтль і Р. Мізес вивели основні рівняння теорії пластичності і отримали розв’язки декількох найпростіших задач плоскої деформації. У 20-х роках ХХ століття були проведені і результати експериментальної перевірки різних гіпотез теорії. Достатньо повний виклад основ теорії пластичності можна знайти у монографіях [32, 34, 77, 89, 92].

Важливим розділом механіки є розрахунок напружено-деформівного стану (НДС) ідеально пружно-пластичних тіл, у яких при збільшенні інтенсивності деформації перестає зростати інтенсивність напружень після досягнення нею певного рівня (границі текучості). До ідеально пружно-пластичних тіл належать м’які сталі та різні металеві сплави [75, 93]. За механічними характеристиками вони найбільш суттєво відрізняються від крихких матеріалів. Теорії і задачам ідеальної пластичності присвячені численні роботи: Б.Д. Анніна, Г.І. Биковцева, Х. Гейрінгера, Г. Генкі, Д.Д. Івлєва, А.Ю. Ішлінського, Л.М. Качанова, В.Д. Ключникова, М.Я. Леонова, В.В. Соколовського, Р. Хілла, С.А. Христіановича та інших.

Виклад сучасної теорії ідеально пружно-пластичних деформацій містять роботи [26, 27, 77].

Теорії міцності і руйнування твердих тіл нерозривно пов’язані із теорією тріщин [82, 97], яка бере початок від фундаментальної праці англійського вченого-механіка А.А. Гріффітса [111], котрий у 1920 р. висловив просту, але надзвичайно плідну ідею: ріст тріщини можливий тільки в тому випадку, коли при її зростанні виділиться більше енергії, ніж потрібно для утворення нових поверхонь при зростанні тріщини. Таким чином був сформульований перший критерій руйнування, відомий тепер як енергетичний. Обчислення енергії у свою чергу потребувало визначення полів напружень та деформацій принаймні поблизу вершини тріщини. Теорія

тріщин опирається на методи розрахунку НДС. Перші спроби у цьому напрямку призвели до здавалося несподіваних результатів: теорія пружності передбачала необмеженість компонент напружень при наближенні до вершини тріщини за законом  $K\rho^{-1/2} + o(\rho)$  при  $\rho \rightarrow 0$ , де  $\rho$  – відстань до вершини тріщини, незалежно від величини навантаження. Це на перший погляд суперечить силовим критеріям руйнування: жодне тіло не здатне витримувати в собі безмежних напружень. Надалі вдалося не тільки досить фізично узаконити цю ситуацію, але зв'язати коефіцієнт  $K$  з фізичними характеристиками матеріалу, що тепер складає фундамент лінійної механіки руйнування.

Найважливішим моментом у лінійній механіці тріщин є формулювання умови локального руйнування в розглянутій точці контуру тріщини. Критерій руйнування не слідує з рівнянь рівноваги і руху механіки суцільного середовища. Він є додатковою крайовою умовою при вирішенні питання про граничну рівновагу тіла з тріщиною. Найбільш просто формулюється умова локального руйнування в теорії квазікрихкого руйнування, коли пластична область у вершини тріщини мала в порівнянні з довжиною тріщини і розмірами зразка.

Якщо в області вершини тріщини тіло зазнає значних пластичних

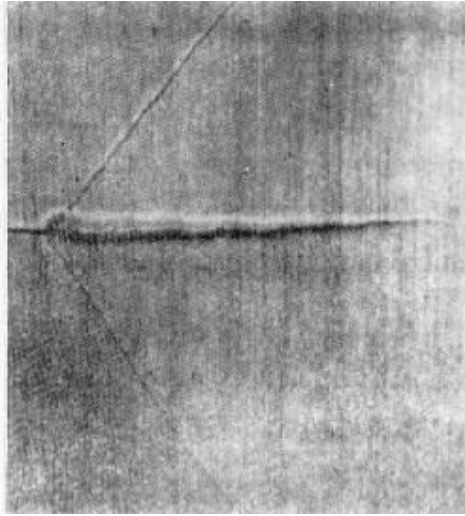


Рис. 1.1. Пластичні смуги, виявлені під час розтягу тонкої пластини з розрізом перпендикулярними до нього зусиллями.

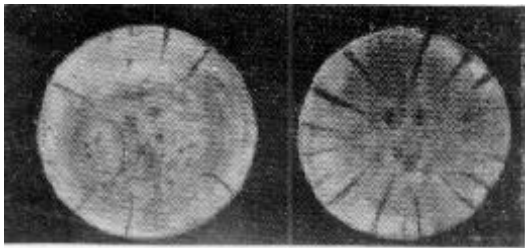


Рис. 1.2. Пластичні смуги, виявлені під час закручування на невеликий кут круглого стержня із армко-заліза.

деформацій, або зразок знаходиться в області загальної плинності, локальні напруження і деформації при вершині тріщини вже не дають змоги побудувати критерій руйнування. Виникає необхідність попереднього розв'язування відповідної пружно-пластичної задачі і врахування характеристик пластичної зони. Дослідження розвитку пластичних деформацій в тілах з концентраторами напружень, вирізів, включень, тріщино-подібних дефектів є важливою науково-практичною проблемою, яка, незважаючи на значну увагу українських і зарубіжних вчених-механіків, залишається актуальною. Особливий інтерес представляють пластичні смуги при вершинах концентраторів напружень та смуг на межі включення-середовище, розвиток яких може призводити до раптової втрати несучої здатності елементів конструкцій.

Дослідження розвитку пластичних деформацій зводиться до крайових задач з вільною границею, для яких існуючі чисельні методи не завжди виявляються достатньо ефективними. Проблема однак не зводиться тільки до можливостей математичних методів, а є більш глибокою і включає адекватність моделей пружно-пластичного деформування твердих тіл. Навіть за наявності точних розв'язків пружно-пластичної задачі, отриманої на основі континуальної механіки суцільного середовища, теоретичні результати стосовно форми і структури пластичної зони далеко не завжди дістають експериментальне підтвердження. Дуже часто замість теоретично-передбачуваного континуального розподілу пластичних деформацій появляються одна чи багато досить довгих пластичних смуг дуже малої товщини (так звані лінії Людерса-Чернова). Вражаючий набір таких експериментів наводиться у монографії А. Надаї [67]. Пізніше подібні результати неодноразово підтверджувалися іншими дослідниками М.Я. Леоновим, С.Я. Яремою, П.М. Витвицьким та іншими. Тут приведемо найбільш характерні з них запозичені з праць М.Я. Леонова, П.М.

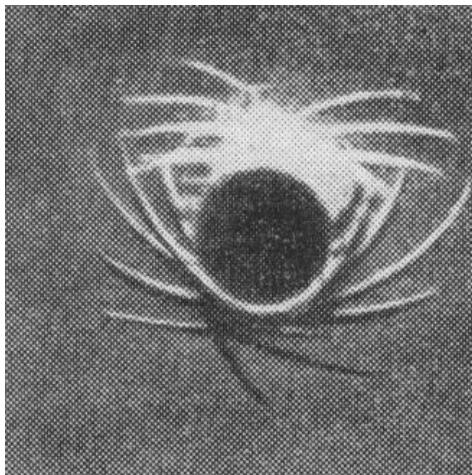


Рис. 1.3. Пластичні смуги,  
виявлені під час розтягу  
тонкої пластини з круговим  
отвором

Витвицького, С.Я.Яреми [63]: пластичні смуги, виявлені під час розтягу тонкої пластини з розрізом перпендикулярними до нього зусиллями (Рис. 1.1); А. Надаї [67]: пластичні смуги, виявлені під час закручування на невеликий кут круглого стержня із армко-заліза (Рис. 1.2); Соколовського В.В. [89]: пластичні смуги, виявлені під час розтягу тонкої пластини з круговим отвором (Рис. 1.3).

Для порівняння на рис. 1.4 наведено межі зон пластичних деформацій під час одновісного розтягу ідеально пружно-пластичної пластини з круговим отвором з вільною від напружень поверхнею, отримані наближеним аналітичним методом.

У випадку кручення вала круглого перерізу теоретично визначена зона

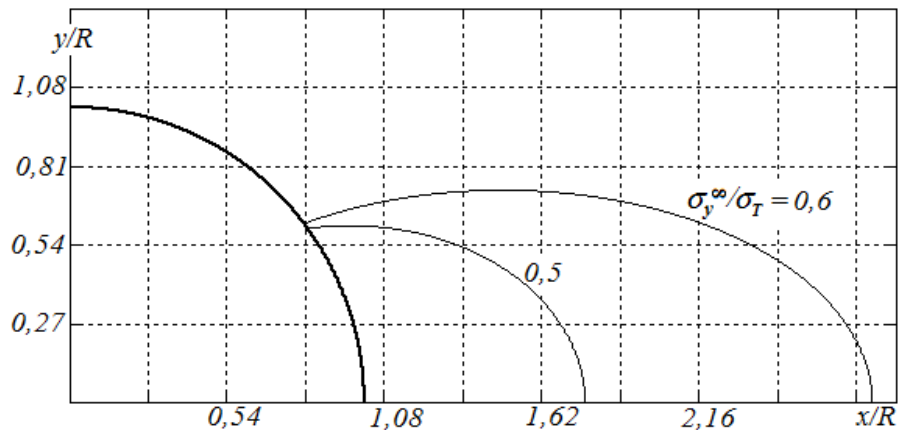


Рис. 1.4. Межі зон пластичних деформацій

пластичності, очевидно збігатиметься із областю, у якій інтенсивність пружних напружень перевищуватиме границю текучості, і на противагу наведених на рис. 1.2 радіально розміщених смуг, являтиме собою циліндричне кільце, зовнішня межа якого співпадатиме з поверхнею вала.

Факт неповної відповідності теорії і експерименту в дослідженнях розвитку пластичних деформацій за неоднорідної деформації твердого тіла висунув задачу їх узгодженості та обґрунтованого вибору структури пластичної зони. В цьому зв'язку слід згадати статтю Г.П. Черепанова [96], у якій на основі загальних принципів теорії пластичності [26, 34, 77] запропоновано критерії вибору структури пластичної зони у ідеально пружно-пластичному середовищі: із можливих структур зони фізично реалізована повинна забезпечувати у зоні максимальну швидкість дисипації енергії. Було встановлено [96], що локалізацію пластичних деформацій у

площині тріщини поздовжнього зсуву спричинятиме невелика анізотропія текучості: границя текучості в площині тріщини в  $\sqrt{3/2}$  разів нижча (приблизно на 20%) за границю текучості в інших напрямках від вершини тріщини. Виникнення пластичних смуг відбувається внаслідок “часткового замороження” росту пластичної зони вздовж усіх площинок, що складають ненульовий кут з тріщиною. Тонкосмугова локалізація пластичних деформацій має декілька фізичних механізмів: скупчення дислокацій, що призводить до появи зуба на діаграмі деформування матеріалу [6, 14, 21, 75, 81], наявність мікронеоднорідностей і кристалічна будова металів і сплавів, яких не бере до уваги механіка суцільного середовища [21, 22, 42, 74, 78, 88, 90, 93, 94].

Ідея моделювання зони пластичних деформацій лінією розриву переміщення, на якій вимагається виконання умови пластичності чи не вперше у 1959 р. висунули J.B. Walch, A.C. Mackenzie [124] для розрахунку НДС під час кручення циліндра з кільцевим надрізом. Майже тоді ж D.S. Dygdale [109] у той же спосіб досліджував НДС під час розтягу тонкої пластини з прямолінійним розрізом. У 1963 р. М.Я. Леонов, П.М. Витвицький і С.Я. Ярема [63] (Фізико-механічний інститут АН УРСР, м. Львів) під час детальніших експериментальних досліджень НДС розтягнутої тонкої пластини з прямолінійним розрізом виявили, що за малих навантажень пластичні деформації зосереджуються у тонкому шарі на продовженні розрізу, а далі, при збільшенні навантаження, приблизно під кутом  $59^\circ$  симетрично від вершин розрізу появляються бокові смуги (див. рис. 1.1). Ці експерименти лягли в основу моделі пружно-пластичного деформування тіл з гострокінцевими концентраторами напружень відомої тепер як модель Леонова-Панасюка-Дагдейла [70, 71].

Модель Леонова-Панасюка-Дагдейла зводить задачу дослідження НДС пружно-пластичних тіл з тріщинами до задач лінійної теорії пружності і тому виявилася дуже зручною. По суті її застосування зводиться до визначення

стрибків переміщення на лінії тріщин, які можна знайти розв'язавши відповідні інтегральні сингулярні рівняння [18, 65, 66].

Модель Леонова-Панасюка-Дагдейла дає змогу визначати залежності довжин пластичних смуг від навантаження, які досить добре підтверджено експериментально [70]. У цій моделі в точках пластичних смуг вимагається виконання умови пластичності Треска, в результаті чого для визначення стрибка переміщення отримуються лінійні інтегральні рівняння.

До недоліків моделі Леонова-Панасюка-Дагдейла можна віднести: 1) перевищення границі текучості поза смугами пластичності; 2) не витримується неперервність переміщень в області пружних і пластичних деформацій та їх неперервність на межі цих областей, що передбачено постановкою пружно-пластичної задачі. Крім того лінія не є областю у площині і вже тому не може бути зоною пластичних деформацій з позиції теорії пластичності.

Вперше розв'язок задачі про розвиток пластичної смуги на продовженні тріщини поздовжнього зсуву, що не призводить до досягнення чи перевищення границі текучості поза смугою отримали Б.В. Костров і Л.В. Нікітін [35]. Їхня модель вимагає виконання в точках пластичних смуг умови пластичності Мізеса, яка забезпечується сталим значення квадратичної форми компонент тензора напружень. У рамках цієї моделі дослідження розвитку пластичних смуг зводиться до нелінійної крайової задачі теорії аналітичних функцій, або нелінійного сингулярного інтегрального рівняння. Модель Б.В. Кострова і Л.В. Нікітіна придатна для дослідження розвитку пластичних смуг в тілах з концентраторами напружень хоча менш доступна за модель Леонова-Панасюка-Дагдейла. У такий спосіб було встановлено, що відмічений перший недолік моделі Леонова-Панасюка-Дагдейла пов'язаний не з припущенням локалізації деформацій у смузі нульової товщини, а з накладеними на смузі умовами. Розрив переміщення при перетині пластичної смуги у модель Б.В. Кострова і Л.В. Нікітіна залишається.

Згодом стало зрозумілим, що проблеми неєдиності, як такої, у теорії пластичності не існує [38]. Це питання не зв'язане з фізикою явища пластичності, а виключно з простором функцій, у якому визначаються переміщення. Якщо розв'язок шукаємо в класі неперервних у області зайнятій пружно-пластичним тілом функцій – зона пластичних деформацій континуальна. Допустивши можливість розривів переміщень у зайнятій тілом області – дістаємо дискретно-лінійчату структуру зони, вигляд та форма якої залежатиме від припущень про розміщення ліній розриву, зроблених під час постановки задачі. У такий спосіб модель Б.В. Кострова і Л.В. Нікітіна була узагальнена В.А. Кривенем [38, 39] на випадок в'язки довільної кількості  $n$  пластичних смуг (дискретно-лінійчатий розподіл пластичних деформацій) при вершинах гострокінцевого концентратора напружень. Дискретно-лінійчатий розподіл пластичних деформацій не є альтернативою континуальному: як окремі випадки він містить одну пластичну смугу ( $n=1$ ) і континуальну пластичну зону ( $n=\infty$ ). Строго доведено [38], що дискретно-лінійчата пластична зона за умови необмеженого зростання кількості пластичних смуг переходить у континуальну. Порівняння континуальної пластичної зони і дискретно-лінійчатих для декількох в'язок пластичних смуг, запозичено із [38], наведено на рис. 1.5. Шляхом граничного переходу від дискретно-лінійчатої до континуальної пластичної зони вдалося звести [39] антиплоскі пружно-пластичні задачі до задачі Келдиша-Сєдова [18, 60] і отримати досить загальний, ефективний метод розв'язування антиплоских пружно-пластичних задач.

Сучасні експериментальні дослідження множинної тонкосмугової локалізації пластичних деформацій активно проводяться у СВ РАН під керівництвом академіка В.Є. Паніна. Відзначимо тут їхні роботи [6, 14, 22].

Шляхом зведення до задачі Келдиша-Сєдова та методами конформних відображень [25, 36, 61, 105, 106] В.А. Кривень зі співавторами розв'язали

клас нових важливих пружно-пластичних задач і дослідили розвиток континуальних та смугових пластичних зон для двоперіодичної системи ромбічних вирізів [114], для прямокутної та закругленої щілини [50, 114], для двоперіодичних систем включень [115] та інші.

Теорія пластичності, яка є частиною механіки твердого тіла [9, 79] тепер ділиться на фізичні основи теорії [23, 27, 32] і математичну теорію пластичності [2, 5, 17, 33, 73, 80, 87, 92].

У класичній постановці теорії пружно-пластичних середовищ її

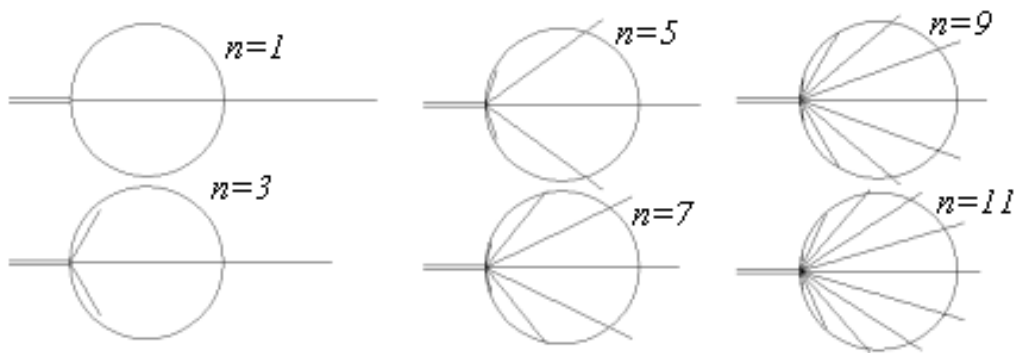


Рис. 1.5. Континуальна (круг) та  $n$ -смугові дискретно-лінійчаті пластичні зони при вершині півбезмежної тріщини поздовжнього зсуву.

розв'язування пов'язане зі значними математичними труднощами. Виникає необхідність сумісного розв'язання двох різних рівнянь: одного – в пружній області, іншого – в пластичній із наперед невідомою границею розділу цих областей. Перше найповніше дослідження пружно-пластичної задачі для ідеально пружно-пластичного тіла належить Б.Д. Анніну і Г.П. Черепанову [2], якими обґрунтовано метод знаходження зон пластичності поза контуром, утвореним відрізками прямих і дуг кіл, повністю охоплених пластичною зоною. Пружно-пластична задача зведена до нелінійної задачі спряження теорії аналітичних функцій, для якої вдалося знайти точний розв'язок.

Зокрема в роботах [2, 97], досліджено форму пластичної зони в околі кінців тріщини поздовжнього зсуву.

Для аналітичних методів, що дають точні розв'язки задач, дослідження континуального розподілу пластичних деформацій значно складніші, ніж дослідження розвитку пластичних смуг. І, навпаки, для дослідження континуальних пластичних зон, добре підходять сучасні чисельні методи математичної фізики, що використовують варіаційні принципи механіки.

Інтерес до дослідження локалізованих пластичних деформацій пояснюється не тільки відповідністю їх реально-спостережуваним схемам їх розподілу, а також і тим, що саме вони можуть спричиняти виникнення розриву зміщення, появу тріщин і руйнувань. Це тим більш ймовірно для тіл з включеннями, жорсткість яких суттєво вища, ніж основної матриці матеріалу. Можливі недосконалості механічного контакту на межі включення-середовище сприятимуть локалізації пластичних деформацій на межі включення-середовище і в результаті міжфазному відшаровуванню включень. Ця проблема актуальна як для механіки матеріалів у зв'язку з їх неоднорідністю технологічного походження, так і для механіки композиційних і армованих матеріалів, у яких включення є їх невід'ємною частиною, а також для розрахунку елементів конструкції, які містять нерухомі механічні з'єднання різномодульних матеріалів. Проблема урахування пластичних деформацій для тіл з включеннями і особливо дослідження міжфазного відшаровування включень залишається мало дослідженою навіть для ідеально пружно-пластичних середовищ.

Паралельно з дослідженнями напружено-деформівного стану тіл з тріщинами і вирізами розвиваються дослідження напружено-деформівного стану тіл з включеннями. Основна відмінність тих задач полягає в інших крайових умовах: на поверхні вирізу мають бути нульовими відповідні компоненти напружень, а на поверхні жорсткого включення – переміщень. Найдоступніші для досліджень жорсткі включення нульової товщини.

Дослідження НДС у такому випадку можливе при допомозі функцій стрибка та як і для тіл з тріщинами описується лінійними сингулярними інтегральними рівняннями з ядром Коші. Сучасний виклад теорії тонких включень у пружних тілах і її застосувань наведено у монографіях Г.Т. Сулима [91], В.В.Панасюка, М.М.Стадника, В.П. Силованюка, Р.Я. Юхима [72, 83]. Тонкі жорсткі включення в пружному тілі багато в чому аналогічні тріщинам: наприклад, в обох випадках показник сингулярності поля напружень дорівнює  $\frac{1}{2}$ .

У роботі [46] модель локалізованих пластичних деформацій Б.В. Кострова і Л.В. Нікітіна поширена на задачі для тіл з жорсткими включеннями. Виявилось, що на відміну від тріщин, пластичні смуги не розвиваються на продовженні включення, а облямовують його, призводячи до пластичного відшаровування. У цьому випадку, можливо, є навіть більше підстав для припущення про локалізацію пластичних деформацій в окремих поверхнях, ніж у задачах для тіл з тріщинами, оскільки досконалий адгезійний зв'язок включення з середовищем з різних причин може бути ослабленим. Тоді ослаблення такого зв'язку проявлятиметься аналогічно анізотропії текучості, яка, як відомо, [42] сприяє явищу локалізації. У припущенні про локалізацію пластичних деформацій на поверхні включення-середовище досліджено міжфазне пластичне відшаровування включень різних форм і конфігурацій [40, 43, 45, 47, 48, 54, 55, 64]. Проведені дослідження знайшли практичне застосування при проектуванні композиційних матеріалів [49].

Дослідження пластичного відшаровування включень необхідні для розробки конструкційних матеріалів [13, 15] і дослідження їх механічних, зокрема експлуатаційних характеристик [56 – 59, 76, 98].

Окремий важливий клас задач для тіл з включеннями складають дослідження напружено-деформівного стану за умови неповного контакту включення з середовищем. Важливі особливості таких задач проявляться вже

у лінійно-пружній постановці: залежно від способу навантаження сингулярність поля напружень однобічно відшарованого включення може бути рівною  $\frac{1}{2}$  або  $\frac{3}{4}$ , тоді як за умови ідеального механічного контакту цей показник завжди дорівнює  $\frac{1}{2}$ . [72].

Пластичне відшаровування тонких включень за умови їх неповного контакту з середовищем раніше досліджувалося у роботах [48], але практично важливі задачі міжфазного відшаровування включень скінченної ширини, за умови їх неповного контакту з середовищем залишаються не розглянутими.

Аналогічно як для вирізів, задачі про континуальний розподіл пластичних деформацій в тілах з включеннями за умови повного чи часткового контакту із середовищем можна звести до задачі Келдиша-Сєдова. Таким способом досліджено розвиток пластичних деформацій у тілі з жорстким ромбічним включенням [47] і їх двоперіодичною системою [49], при витягуванні жорсткого призматичного включення із пружно-пластичного середовища [116].

Для тонких включень, товщина яких приймається рівною нулю, необхідно з'ясувати точність та межі застосовності такого припущення. Тому дослідження пластичних деформацій в околі щілини та включень скінченної ширини, які дають змогу з'ясувати вплив реальних розмірів концентраторів напружень на розподіл полів напружень та деформацій в їх околі є актуальною і назрілою задачею.

До теперішнього часу досить багато вивчено вплив дефектів у вигляді тріщин і тонких жорстких включень на напружений стан однорідного або кусково-однорідного матеріалу. Результати цих досліджень можна знайти в монографіях В.В. Панасюка, М.М. Стадника, В.П. Силованюка [70], Г.Я. Попова [76], М.П. Саврука [82], Г.Т. Сулима [91], Г.П. Черепанова [97, 98], та ін.

Зупинимось детальніше на задачах про НДС тіл з включеннями за умови неповного контакту з середовищем.

Більшість досліджень цього виконані у рамках лінійної теорії пружності і стосуються НДС, за яким можна зробити висновок про граничну рівновагу тіла, але можна досліджувати поступове відшаровування включення при збільшенні навантаження.

Математичні методи дослідження пружного НДС у кусково-однорідних тілах за наявності міжфазних тріщин висвітлено в працях [100, 107, 112, 120, 121].

Перші спроби розв'язання задачі про НДС для включення за наявності міжфазної тріщини несподівано призвели до появи осцилюючої особливості [24, 108], які вдалося усунути [104, 122] способом уведення зони контакту при вершині тріщини. Цей спосіб надалі використовувало багато авторів, надаючи зоні контакту того чи іншого фізичного змісту. Так у роботах [3, 4, 100] її трактують як наявність тертя. І.В. Сімонов аналогічним способом розв'язав задачу про міжфазну тріщину під час розклинювання різномодульних матеріалів [85, 86].

Оцінку зони контакту дав В.В. Лобода [119] і показав, що вона дуже мала у порівнянні з тріщиною за розтягуючого навантаження, але є співмірною з нею для зсувного.

У задачах про тріщину на межі двох матеріалів В.Ф. Бакіровим [7], Р.В. Гольштейном [20], В.В. Ларкіною і В.В. Твардовським [62] використано модель Леонова-Панасюка-Дагдейла. Зони при вершинах тріщини розглядаються як області сил зв'язку берегів тріщини. Аналогічний підхід для складнішої геометрії застосовано В.М. Александровим [1]. У статтях Є.Л. Нахмейна [68, 69] міжфазну тріщину використано для розв'язання контактних задач про тиск штампа на пружну півплощину за умов невизначеної зони контакту.

Складніші форми міжфазних тріщин вивчалися у роботах [103]. Задача про взаємодію тріщини і відшарованого включення розв'язана у роботі [84].

Значно слабше дослідженим залишається НДС у пружно-пластичних тілах з включеннями, не ідеально зчепленими з середовищем, зокрема за наявності на поверхнях включень міжфазних тріщин. У цьому випадку окрім визначення НДС особливо важливо є дослідження пластичного відшаровування включень за рахунок розвитку пластичних шарів вздовж межі включення-середовище. Відомі такі дослідження стосуються антиплоскої деформації ідеально пружно-пластичних тіл з тонкими (прямокутними) включеннями, що не контактують з середовищем повністю вздовж одної сторони (одної пари паралельних сторін). У роботі [48] досліджено пластичне відшаровування тонкого жорсткого включення за умови попереднього одnobічного контакту з середовищем під зсувним навантаженням, прикладеними на великій від включення віддалі. Аналогічна але складніша задача розв'язана в роботі [114]: включення жорстке прямокутної форми не контактує з середовищем вздовж одної пари паралельних сторін та навантажене на нескінченності зсувними зусиллями. Питання про можливість нехтування товщиною тонкого включення з метою застосування методу функцій стрибка вивчається у роботі [116], у якій розв'язано задачу про пластичне відшаровування прямокутного включення під впливом прикладеної до нього зосередженої сили і запропоновано такий критерій тонкого включення: тонке включення вважаємо нехтовно тонким з точністю не нижчою за  $\varepsilon$ , якщо відносна різниця довжин міжфазних пластичних шарів від навантаження для тонкого включення і включення нульової товщини не перевищує  $\varepsilon$ . У такий спосіб показано, що включення, довжина якого принаймні у 20 разів перевищує його товщину можна вважати включенням нульової товщини з точністю 0,05.

Серед інших досліджень розвитку пластичних шарів на межі двох різномодульних матеріалів слід відзначити роботи А.О. Камінського, Л.А. Кіпніса та В.А. Колмакової [28, 30], у яких визначено зону передруйнування поблизу вершини міжфазної тріщини в кусково-

однорідному ізотропному тілі за умов плоскої деформації. Зона передруйнування моделюється пластичною смугою, що починається з вершини тріщини і розвивається під деяким кутом до межі розділу середовищ.

Дослідження пластичного відшаровування включень складної форми, що перебувають у неповному механічному контакті з середовищем, актуальні та потребують подальшого розвитку та продовження.

Дослідження розвитку пластичних деформацій при неоднорідній деформації твердих тіл, в тому числі міжфазних пластичних розшарувань зводяться до нелінійних крайових задач і є досить складними в математичному плані, що утруднює їх практичне використання у інженерній практиці. Тому паралельно з розвитком чисельних і аналітичних методів розв'язування пружно-пластичних задач розроблялись спрощені моделі для урахування пластичних ефектів у тілах з концентраторами напружень. Одна з найважливіших таких спроб пов'язана з використанням пружних розв'язків для наближеного врахування характеристик пластичних зон [82, 97]. Для механіки руйнування особливо цікавим видається зв'язок коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) з характеристиками пластичних зон при вершинах тріщин, що виглядає оправданим для квазікрихких матеріалів, у яких до руйнування зони пластичних деформацій залишаються малими у порівнянні з розмірами концентратора. У цьому зв'язку дуже важливим є питання про умови застосовності пружних розв'язків для наближеного врахування пластичних деформацій, особливо коли матеріал тіла не можна вважати достатньо крихким. Обґрунтована модель початкової стадій розвитку пластичної зони в околі гострокінцевого концентратора напружень, що базується на пружному розв'язку задачі запропонована у роботі [44], про що більш детально йтиме мова у наступному розділі цієї роботи.

### **1.1. Висновки до розділу 1**

1. Дослідження пластичного відшаровування включень складної форми, що перебувають у неповному механічному контакті з середовищем, актуальні та потребують подальшого розвитку та продовження.
2. Для адекватного опису міжфазних пластичних відшаровувань слід віддати перевагу моделям локалізованих на межі включення-середовище пластичних деформацій, що не призводять до досягнення чи перевищення умови пластичності поза пластичними шарами.
3. У дослідженнях міжфазних пластичних відшаровувань доцільно приділити окрему увагу початковим стадіям розвитку пластичних деформацій і можливості застосувань пружних розв'язків відповідних задач та отримання обґрунтованих спрощених формул для інженерних розрахунків.

## **РОЗДІЛ 2. МЕТОДИ І ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ ПЛАСТИЧНИХ ДЕФОРМАЦІЙ ПЛАСТИЧНОГО ВІДШАРОВУВАННЯ ВКЛЮЧЕНЬ**

Існують дві основні схеми пластичного відшаровування жорстких включень: розвиток пластичних шарів на межі включення- середовище, або розвиток континуальних пластичних зон, що прилягають до включення і проникають вглиб середовища. Крім того при вершині гострокінцевого концентратора напружень можливе виникнення в'язки пластичних смуг, утвореної деякою кількістю окремих смуг [67, 89]. Однак у випадку жорстких включень найімовірнішим (і найнебезпечнішим для міцності тіла) є розвиток локалізованих пластичних деформацій на межі включення-середовище (міжфазне пластичне відшаровування), якому сприяють будь які недосконалості механічного контакту включення з основним середовищем. Методам дослідження міжфазних пластичних відшаровувань присвячено цей розділ роботи. Основний з них – аналітичний метод конформних відображень для випадку антиплоскої деформації викладено нижче на основі роботи автора [53].

### **2.1. Основні співвідношення антиплоскої деформації**

Під антиплоскою деформацією (складним зсувом, поздовжнім зсувом) розуміють напружений стан у циліндричному тілі нескінченної висоти, який виникає під навантаженнями, що діють вздовж твірних циліндра і незмінними поперек них. Такий стан зокрема виникає під час кручення, коли досліджувана область є достатньо малою в порівнянні з розміром скручуваного контура.

Якщо вісь аплікату декартової системи координат направити вздовж осі циліндра, то за умов антиплоскої деформації переміщення відбуваються тільки в напрямку осі  $Oz$ . Тобто:

$$u = v = 0, \quad w = w(x, y).$$

Ненульовими є тільки дві компоненти тензора напружень:

$$\begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0, \quad \tau_{xy} = 0, \\ \tau_{xz} = \tau_{zx}(x, y), \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}(x, y). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Рівняння рівноваги зводяться до одного рівняння [79]:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0. \quad (2.2)$$

Закон Гука для пружної частини тіла зв'язує дві відмінні від нуля компоненти тензора деформацій  $\gamma_{xz}$  і  $\gamma_{yz}$  з напруженнями співвідношеннями:

$$\tau_{xz} = \mu \gamma_{xz}, \quad \tau_{yz} = \mu \gamma_{yz}, \quad (2.3)$$

де  $\mu$  – модуль зсуву.

І, оскільки деформації виражаються через переміщення формулами

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y}, \text{ то зі співвідношень (2.2) і (2.3) випливає, що}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad (2.4)$$

у пружній частині тіла переміщення є гармонічною функцією. А, отже в цій частині тіла функція комплексної змінної  $\zeta = x + iy$ ,

$$\tau(\zeta) = \tau_{yz}(x, y) + i\tau_{xz}(x, y), \quad (2.5)$$

утворена компонентами напружень є аналітичною.

Таким чином, у рамках лінійної теорії пружності, антиплоскі задачі механіки зводяться до крайових задач теорії функцій комплексної змінної. Такі задачі ефективно розв'язуються методами інтегралів типу Коші [18, 66], зокрема сингулярних інтегральних рівнянь у випадку тіл з тріщинами [66].

Приведемо тепер формули компонент тензора напружень на довільно орієнтованій площинці. Уведемо два взаємно-перпендикулярні орти  $\vec{n}_1$  і  $\vec{n}_2$ . Нехай  $\cos\alpha$ ,  $\sin\alpha$  - напрямні косинуси першого з них, і другий відносно першого орієнтований вліво. Виразимо через  $\tau(\zeta)$  зсувне напруження  $\tau_{n_2z}$  і  $\frac{\partial w}{\partial n_1}$  похідну переміщення за напрямком вектора  $\vec{n}_1$ .

За формулами перетворення тензора напружень при заміні системи координат, отримуємо:

$$\tau_{n_2z} = -\tau_{xz} \sin\alpha + \tau_{yz} \cos\alpha. \quad (2.6)$$

Похідну  $\frac{\partial w}{\partial n_1}$  знайдемо за формулою  $\frac{\partial w}{\partial n_1} = (\text{grad } w, \vec{n}_1)$ . На основі співвідношення (2.3), маємо:

$$\frac{\partial w}{\partial n_1} = \frac{1}{\mu} (\tau_{xz} \cos\alpha + \tau_{yz} \sin\alpha). \quad (2.7)$$

Подамо тепер  $\tau_{n_2z}$  і  $\frac{\partial w}{\partial n_1}$  через функцію напружень  $\tau(\zeta)$ .

$$\tau_{n_2z} = \operatorname{Re}(\tau(\zeta)e^{i\alpha}), \quad \frac{\partial w}{\partial n_1} = \frac{1}{\mu} \operatorname{Im}(\tau(\zeta)e^{i\alpha}).$$

Через інтеграл від функції напружень  $\tau(\zeta)$  можна виразити головний вектор сили  $Q$ , що діє на дугу кривої з початком в точці  $\zeta_1 = x_1 + iy_1$  та кінцем у точці  $\zeta_2 = x_2 + iy_2$ , яка повністю лежить у пружній області. Для того розглянемо інтеграл  $\int_{\Gamma} \tau(\zeta) d\zeta$ . Внаслідок (2.5) і (2.7) маємо:

$$\int_{\Gamma} \tau(\zeta) d\zeta = \int_{\Gamma} (\tau_{yz} dx - \tau_{xz} dy) + i \int_{\Gamma} (\tau_{yz} dy + \tau_{xz} dx) = \int_{\Gamma} \tau_{n_2z} ds + i\mu \int_{\Gamma} dw.$$

Інтеграли  $\int_{\Gamma} \tau_{n_2z} ds$  і  $\int_{\Gamma} dw$  мають зміст головного вектора сил і відносного переміщення кінцевої і початкової точок лінії  $\Gamma$ . Таким чином:

$$Q = \operatorname{Re} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \tau(\zeta) d\zeta, \quad w(x_2, y_2) - w(x_1, y_1) = \frac{1}{\mu} \operatorname{Im} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \tau(\zeta) d\zeta. \quad (2.8)$$

Нехай тепер в деякій точці тіла напружено-деформівний стан описується тензором (2.1). Потрібно визначити максимальне зсувне напруження у цій точці і орієнтацію площинки на якій воно досягається.

За формулою (2.6) на площинці, напрямні косинуси нормального вектора  $\vec{n}$  якої дорівнюють  $\cos\alpha$  та  $\sin\alpha$  зсувне напруження рівне:

$$\tau_{nz} = \tau_{xz} \cos\alpha + \tau_{yz} \sin\alpha.$$

Потрібно знайти  $\vec{m}$ , для якого  $\tau_{mz} = \max_n \tau_{nz}$  і знайти  $\tau_{mz}$ . Уведемо два вектори:  $\vec{\tau} = \{\tau_{xz}, \tau_{yz}\}$  і  $\vec{n} = \{\cos\alpha, \sin\alpha\}$ . Тоді  $\tau_{nz}$  можна подати як

скалярний добуток:  $\tau_{nz} = (\vec{\tau}, \vec{n})$ . Тому  $\tau_{nz} = |\vec{\tau}| \cos(\vec{\tau}, \vec{n})$ ,  $\max_n \tau_{nz} = |\vec{\tau}|$ . Таким чином максимальне зсувне напруження досягається на площинці з нормальним вектором:

$$\vec{m} = \left\{ \frac{\tau_{xz}}{\sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}}, \frac{\tau_{yz}}{\sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}} \right\}$$

і має значення:

$$\tau_{mz} = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}. \quad (2.9)$$

Другий інваріант тензора (2.1) дорівнює  $\sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}$  тому для ідеально пружно-пластичного середовища умова пластичності в формі Губера-Мізеса виглядатиме так [89]:

$$\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = \tau_s^2, \quad (2.10)$$

де  $\tau_s$  - границя текучості за умов чистого зсуву.

Оскільки максимальне октаедричне напруження для тензора (2.1) дорівнює  $\sqrt{3}\sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2}/2$ , то в формі Треска-Сен-Венана умова пластичності прийме вигляд [89]:

$$\sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} = \frac{2\tau_s}{\sqrt{3}}. \quad (2.11)$$

Умови (2.10) і (2.11) можна об'єднати і записати для функції напружень (2.5) одним співвідношенням:

$$|\tau(\zeta)| = k, \quad (2.12)$$

де  $k = \tau_s$  для умови Мізеса і  $k = 2\tau_s/\sqrt{3}$  - для Треска-Сен-Венана.

В зоні суцільних пластичних деформацій ідеально пружно-пластичного середовища повинно виконуватися також співвідношення Генкі [26]:

$$\tau_{yz} \frac{\partial w}{\partial x} - \tau_{xz} \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Напруження у континуальній пластичній зоні визначаються за напруженнями на її межі незалежно від поля переміщень. У пластичній зоні ідеально пружно-пластичного середовища зручно представляти компоненти тензора напружень у формі [89]:

$$\tau_{xz} = -k \sin \theta(x, y), \quad \tau_{yz} = k \cos \theta(x, y).$$

Тоді умова пластичності виконується автоматично, а функція  $\theta(x, y)$  внаслідок умов рівноваги повинна задовольняти рівнянню першого порядку:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} \cos \theta(x, y) + \frac{\partial \theta}{\partial y} \sin \theta(x, y) = 0. \quad (2.13)$$

Характеристиками останнього рівняння є лінії  $y = x \operatorname{tg} \theta + C$ . Вони співпадають з лініями ковзання і у кожній точці перпендикулярні до вектора  $(\tau_{xz}, \tau_{yz})$ .

Таким чином, поле напружень у континуальній пластичній зоні цілком визначається формою межі зони і напруженнями в точках межі. Крім того на лінії, що розмежовує континуальну пластичну зону і пружну область необхідна неперервність напружень та переміщень.

## **2.2. Постановка задач розвитку пластичних деформацій в околі концентраторів напружень у ідеально пружно-пластичному середовищі**

Пластичні деформації в тілі при його неоднорідній деформації виникають, коли в деякій точці тіла, яке у відповідній системі координат займає область  $D$ , компоненти тензора напружень задовольняють умову пластичності. Під час подальшого поступового збільшення навантаження

зона пластичних деформацій розширюється і може змінюватися за формою, займаючи область  $G \subset D$  (континуальна пластична зона). Границя області  $G$  (лінія  $L$ , що розмежовує область пружних і пластичних деформацій) наперед не відома і повинна бути визначеною в процесі розв'язування задачі. За умов активного навантаження постановка пружно-пластичної задачі включає розв'язування систем рівнянь рівноваги і сумісності в областях  $D$  і  $G$ , в області  $G$  додатково повинна виконуватися умова пластичності, а на границі цієї області умови неперервності переміщень і напружень. У такій формі постановка пружно-пластичної задачі описана, наприклад, у роботі [77], а у [34] приведені відповідні теореми існування та єдиності її розв'язку.

У припущенні локалізації пластичних деформацій в окремих лініях (поверхнях) слід спочатку на основі евристичних міркувань вибрати систему  $S$  ліній (поверхонь) у яких локалізуються пластичні деформації. На лініях системи  $S$  допускається існування стрибка переміщень під час деформування тіла. В області  $D$ , розрізаній по системі ліній  $S$  слід розв'язати пружну задачу, вимагаючи на системі  $S$  виконання умови пластичності. При тому ніде в області  $D$  поза лініями  $S$  умова пластичності не повинна виконуватися. Якщо такий розв'язок існує, то він описує квазістатичний розвиток пластичних локалізованих в окремих лініях. Оскільки система  $S$  вибирається до побудови розв'язку і розв'язок шукається у класі кусково-неперервних функцій (ширшому класі, ніж двічі кусково-неперервні як у пружно пластичній задачі з континуальною пластичною зоною), розв'язок може бути неєдиним. Саме таку множину розв'язків, залежну від кількості ліній системи  $S$ , було побудовано в роботі [38].

### 2.3. Метод конформних відображень у задачах розвитку пластичного відшаровування включень у ідеально пружно-пластичному середовищі

Викладемо його на прикладі задачі про розвиток пластичних смуг при вершинах вузької довгої прямокутної щілини [53], у якому всі основні аспекти методу, в тому числі і визначення напрямку поширення смуги, у випадках коли це не є очевидним.

Розглянемо задачу про розвиток пластичних смуг від вершин вузької прямокутної щілини під впливом зсувного навантаження, прикладеного на великій віддалі від її торців. Для аналізу напружено-деформівного стану в околі вершин щілини вважатимемо її півнескінченною.

Визначимо напрямок поширення одної пластичної смуги від вершин півбезмежної щілини  $x \leq 0, -b \leq y \leq b, -\infty < z < +\infty$  у необмеженому тілі та дослідимо її розвиток під квазістатично-зростаючим зсувним навантаженням (рис.2.1).

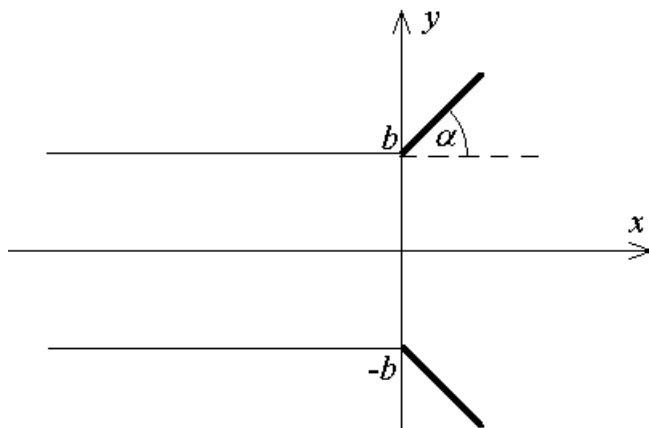


Рис. 2.1. Поперечний переріз тіла з щілиною шириною  $2b$ . Потовщені лінії – пластичні смуги.

Матеріал тіла вважатимемо ідеально пружно-пластичним із зсувною границею текучості рівною  $k$ .

#### 2.3.1. Визначення початкового напрямку поширення пластичних смуг

За малих навантажень довжина смуги є набагато меншою проти геометричних параметрів задачі з розмірністю довжини. Тому початковим напрямком розвитку смуги буде напрямок смуги для вирізу з

кутом при вершині рівним  $90^\circ$ . Переріз тіла подано на рис. 2.2. Поза вирізом та поза пластичною смугою (область  $D_1$ ) тіло перебуває у пружному стані.

Компоненти тензора напружень є гармонічними в  $D_1$  функціями, які внаслідок співвідношень (2.4), (2.5), (2.7) задовольняють у цій області таким умовам:

$$\begin{aligned}
 \tau_{yz}(x,0) &= 0 \quad (-\infty < x < 0); \\
 \tau_{xz}^2(x,y) + \tau_{yz}^2(x,y) &= k^2 \quad (x = \rho \cos \alpha, y = \rho \sin \alpha; \quad \rho \in [0;d]); \\
 \frac{\tau_{xz}(d \cos \alpha, d \sin \alpha)}{\tau_{yz}(d \cos \alpha, d \sin \alpha)} &= \operatorname{tg} \alpha; \\
 \tau_{xz}(x,0) &= 0 \quad (-\infty < y < 0); \\
 \tau_{xz}(x,y) &= o(1), \quad \tau_{yz}(x,y) = o(1) \quad (x \text{ або } y \rightarrow \infty).
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

І, отже, для утвореної компонентами напружень аналітичної в області  $D_1$  функції  $\tau_1(\zeta) = \tau_{yz}(x,y) + i\tau_{xz}(x,y)$  приходимо до відповідної крайової задачі у цій області:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re} \tau_1(\zeta) &= 0, \quad (\zeta = x + ib, -\infty < x < 0); \\
 |\tau_1(\zeta)| &= k, \quad (\zeta = \rho e^{i\alpha}, 0 \leq \rho \leq d); \\
 \arg \tau(\zeta) &= -\alpha \quad (\zeta = d e^{i\alpha}); \\
 \operatorname{Im} \tau_1(\zeta) &= 0 \quad (\zeta = 0 + iy, -\infty < y < 0); \\
 \tau_1(\zeta) &\rightarrow 0, \quad \text{якщо } \zeta \rightarrow \infty,
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

де  $\alpha$  – кут, що визначає напрямок поширення смуги,  $d$  – довжина смуги. Перша й четверта умови виражають відсутність напружень на гранях вирізу, друга – умову пластичності, третя є умовою прямолінійності розвитку пластичної смуги і означає що в кінцевій точці смуги площадка

максимального дотичного напруження дотична до смуги [39], остання – асимптотичну рівність нулю напружень у нескінченно-віддаленій точці.

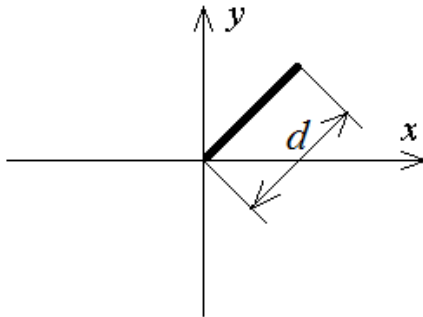


Рис. 2.2. Поперечний переріз тіла.  
Виріз – третій квадрант.

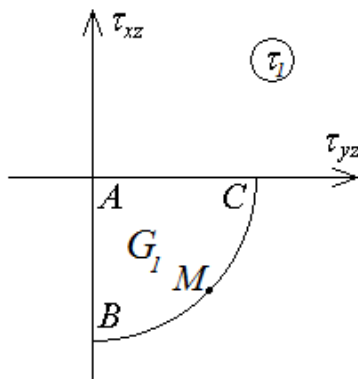


Рис. 2.3 Область у площині  $\tau_1$ .

Покажемо, що поставлена задача матиме розв'язок лише для одного значення кута  $\alpha$ , який визначає початковий напрямок розвитку смуги в задачі для вузької щілини.

Для визначення функції  $\tau_1(\zeta)$  скористаємося здійснюваним цією функцією конформним відображенням. Внаслідок умов (2.15) конформним образом області  $D_1$  у площині  $\tau$  є круговий сектор  $G_1$ , наведений на рис. 2.3. Не описуючи повністю наведеного відображення зауважимо, що образом лівого та правого берегів пластичної смуги є дуги  $BM$  та  $MC$ , а її вершині відповідає точка  $M$ . Усі вказані чотири точки на межі області  $G_1$  фіксовані. Тому

відображення  $\tau_1(\zeta)$  існує тільки при  $\alpha = 45^\circ$ . Отже, напрямок початкового розвитку смуг від вершин щілини визначено: вони розвиватимуться на продовження бісектрис кутів торця щілини.

Розв'язок задачі (2.15) при  $\alpha = 45^\circ$  знайдемо композицією елементарних відображень:

$$\tau_1(\zeta) = k \frac{\sqrt{2}d^{1/3}}{\sqrt{d^{2/3} - \sqrt{d^{4/3} - \zeta^{4/3}e^{-i\pi/3}} + i\sqrt{d^{2/3} + \sqrt{d^{4/3} - \zeta^{4/3}e^{-i\pi/3}}}}, \quad (2.16)$$

тут під  $\sqrt{d^{4/3} - \zeta^{4/3}e^{-i\pi/3}}$  розумітимемо аналітичну в області  $D_1$  функцію, що приймає дійсні додатні значення, коли  $\zeta$  є дійсним та від'ємним.

В околі нескінченно віддаленої точки  $\tau_1(\zeta)$  володіє такою асимптотикою:

$$\tau_1(\zeta) = \frac{ke^{i\pi/3}}{i\sqrt{2}} \left(\frac{d}{\zeta}\right)^{1/3} + o\left(\frac{1}{\zeta}\right)^{1/3}. \quad (2.17)$$

Нагадаємо одну особливість постановки задач про визначення напружено-деформованого стану тіл вирізами безмежних розмірів. За умови вільності від напружень берегів розрізу навантаження у нескінченно-віддаленій точці тіла слід приймати нульовим. У цьому випадку навантаження на нескінченності задається не прирівнюванням компонент напружень до певних величин, а їх асимптотикою при наближенні до нескінченності. У задачі для напівбезмежної щілини сталої ширини напруження на нескінченності можна вважати асимптотично рівними напруженням на нескінченності напівбезмежної тріщини, які, як відомо [97], задаються через коефіцієнт інтенсивності напружень:

$$\tau(\zeta) = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi\zeta}},$$

$K_{III}$  – коефіцієнт інтенсивності напружень прямолінійної півбезмежної тріщини поздовжнього зсуву.

### 2.3.2. Розвиток пластичних смуг від вершин торця щілини.

Сформулюємо крайову задачу в напруженнях для функції  $\tau(\zeta) = \tau_{yz}(x, y) + i\tau_{xz}(x, y)$  у верхній півплощині  $\text{Im}\zeta > 0$  без півсмуги  $0 < \text{Im}\zeta < b, -\infty < \text{Re}\zeta < 0$ , розрізаний вздовж пластичної смуги  $y = x + b, 0 \leq x^2 + (y - b)^2 \leq d^2$  (область  $D$ ):

$$\text{Re}\tau(\zeta) = 0, (\zeta = x + ib, -\infty < x < 0);$$

$$|\tau(\zeta)| = k (\zeta = \rho e^{i\pi/4}, 0 \leq \rho \leq d);$$

$$\arg\tau(\zeta) = -\pi/4 (\zeta = de^{i\pi/4});$$

$$\text{Im}\tau(\zeta) = 0, (\zeta = iy, 0 < y < b);$$

$$\text{Re}\tau(\zeta) = 0, (\zeta = x, 0 < x < +\infty);$$

$$\tau(\zeta) = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi\zeta}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\zeta}}\right), \text{ якщо } \zeta \rightarrow \infty. \quad (2.18)$$

Тут  $d$  – шукана залежна від  $K_{III}$  довжина пластичної смуги, яку слід визначити в процесі розв’язання задачі.

Внаслідок умов (2.18) функція  $\tau(\zeta)$  конформно відображає верхню півплощину  $\zeta$  без смуги  $x \leq 0, 0 < y < b$  і без відповідного пластичній смузі відрізка  $y = b + x, 0 \leq x \leq d/\sqrt{2}$  (область  $D$ ) на чверть круга  $|\tau| < k, -\pi/2 < \arg\tau < 0$  (область  $G$ ) (рис. 2.4). Нехай  $\tau_0 = \min_{[-b;b]} \tau_{yz}(0, y)$  – координата точки  $D$  у площині  $\tau$ .

Відображення  $\tau(\zeta)$  шукатимемо в параметричній формі:

$$\tau = \tau(t), \zeta = \zeta(t), \quad (t \in H = \{\text{Im}t > 0\}), \quad (2.19)$$

увівши площину допоміжного комплексного параметра  $t$ , так аби відповідним точкам межі областей  $D$  і  $G$  відповідала одна і та ж точка на межі області  $H$  (рис. 2.5).

Відомо, що конформне відображення існує і єдине, коли на межі обох областей зафіксовано по три взаємно відповідні точки [60]. У нашому випадку такими є  $A$ ,  $B$  та  $C$ .

Першу із функцій (2.19) знайдемо композицією елементарних відображень:

$$\tau(t) = k(\sqrt{t} - \sqrt{t-1}). \quad (2.20)$$

Тут і далі під  $(t-p)^q$  ( $p, q$  – дійсні числа,  $q$  – неціле) розумітимемо аналітичну в області  $H$  функцію, яка приймає дійсні додатні значення, коли  $t$  дійсне та більше за  $p$ .

Остання формула дає можливість виразити  $t_D$  через  $\tau_0$ . Оскільки  $\tau(t_D) = \tau_0$ , то із формули (2.20) отримуємо:

$$t_D = \frac{(k^2 + \tau_0^2)^2}{4k^2\tau_0^2}. \quad (2.21)$$

Функцію  $\zeta(t)$  знайдемо за допомогою перетворення Крістоффеля-Шварца:

$$\zeta(t) = ib + \frac{b}{R} \int_0^t \frac{(\eta - t_M)d\eta}{\sqrt[4]{\eta(\eta-1)}\sqrt{\eta-t_D}}, \quad (2.22)$$

де  $R = \int_1^{t_D} F(\eta)d\eta$ ,  $F(\eta) = \frac{|\eta - t_M|}{\sqrt[4]{\eta(\eta-1)}\sqrt{t_D - \eta}}$ ,  $t_M$  – розв'язок рівняння

$$\int_0^{t_M} F(\eta)d\eta = \int_{t_M}^1 F(\eta)d\eta, \quad (2.23)$$

яке забезпечує рівність берегів  $BM$  та  $MC$  розрізу в області  $D$  (див. рис 2.4).

Можна переконатися що рівняння (2.23) відносно  $t_M$  має єдиний

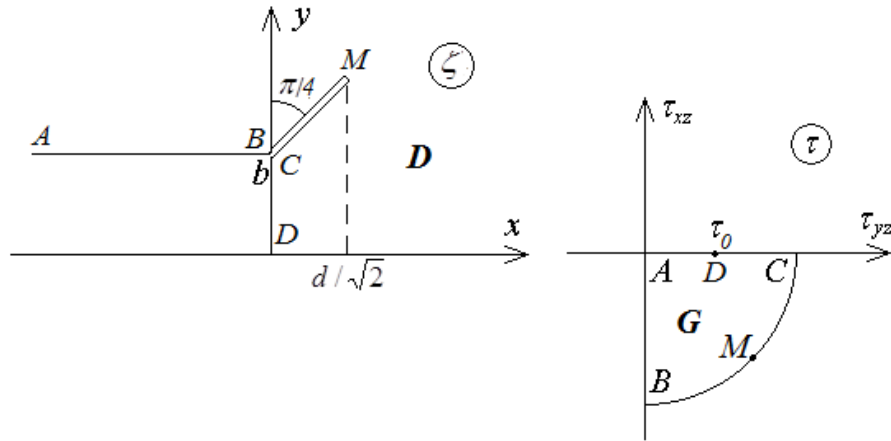


Рис. 2.4. Области у площинах  $\zeta$ ,  $\tau$  для конформного відображення (пружно-пластичний розв'язок).

розв'язок на інтервалі  $(0;1)$ . Його можна знайти методом послідовних наближень:

$$t_M^{(j+1)} = t_M^{(j)} - \frac{1}{20} \frac{BM^{(j)} - MC^{(j)}}{BM^{(j)} + MC^{(j)}} \quad (j=0,1,\dots), \quad (2.24)$$

$$\text{де } t_M^{(0)} = 0,5, \quad BM^{(j)} = \int_0^{t_M^{(j)}} F^{(j)}(\eta) d\eta, \quad MC^{(j)} = \int_{t_M^{(j)}}^1 F^{(j)}(\eta) d\eta, \quad F^{(j)}(\eta) = F(\eta)|_{t_M=t_M^{(j)}}.$$

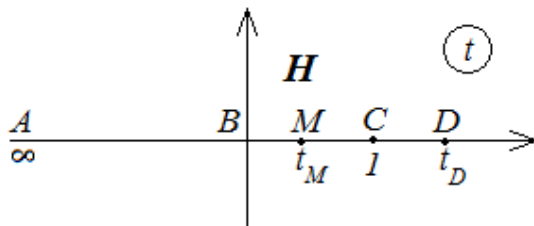


Рис. 2.5. Область  $H$  у площині  $t$ .

Координата  $t_M$ , яка відповідає вершині пластичної смуги у площині  $t$ , є границею збіжної послідовності (2.24).

Довжина пластичної смуги виражається через мінімальне значення  $\tau_0$  напруження  $\tau_{yz}$  на торці щілини формулою:

$$d = \frac{b}{R} \int_0^{t_M} F(\eta) d\eta, \quad (2.25)$$

за умови, що для знайденого значення  $d$  виконується третя із умов (2.18) – умова прямолінійного розвитку смуги. Відслідковуватимемо цю умову в процесі числового експерименту і визначатимемо відхилення кута нахилу площинки максимального дотичного напруження у вершині смуги під час росту смуги  $\varphi$  від початкового значення величини цього кута:  $\Delta = \pi/4 - \varphi$ .

Дослідимо асимптотику функції  $\tau(\zeta)$  на нескінченності і встановимо залежність між  $\tau_0$  та  $K_{III}$ .

Із формул (2.20), (2.22) для  $t \rightarrow \infty$  отримуємо, що  $\zeta = \frac{b}{R}t + o(t)$ ,

$$\tau = \frac{k}{2\sqrt{t}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \text{ і, отже, } \tau = \frac{k}{2} \sqrt{\frac{b}{R}} \frac{1}{\sqrt{\zeta}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\zeta}}\right) \text{ при } \zeta \rightarrow \infty.$$

Прирівнюючи асимптотики напружень для щілини і тріщини на нескінченності, знаходимо:

$$\frac{K_{III}}{k\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2R}}. \quad (2.26)$$

Таким чином довжину пластичної смуги  $d$ , як функцію безрозмірного аргумента  $K_{III}/(k\sqrt{b})$ , можна визначити через параметр  $\tau_0 \in [0; k]$  за формулами (2.25), (2.26) у яких  $t_D$  задане рівністю (2.19), а  $t_M$  є розв'язком рівняння (2.23).

Задача про розвиток континуальних пластичних зон від вершини півбезмежного прямокутного вирізу розв'язана в роботі [50], де, зокрема, визначено форму пластичних зон і показано, що на початковій стадії максимальна протяжність зони спостерігається на продовженні бісектриси кута вирізу, а збільшенням навантаження напрямом максимальної протяжності зони поступово наближається до осі вирізу.

#### 2.4. Дослідження початкової стадії розвитку пластичних смуг на основі пружного розв'язку задачі. Лінійна модель пластичної зони

На початковій стадії розвитку континуальні пластичні зони в околі гострокінцевого

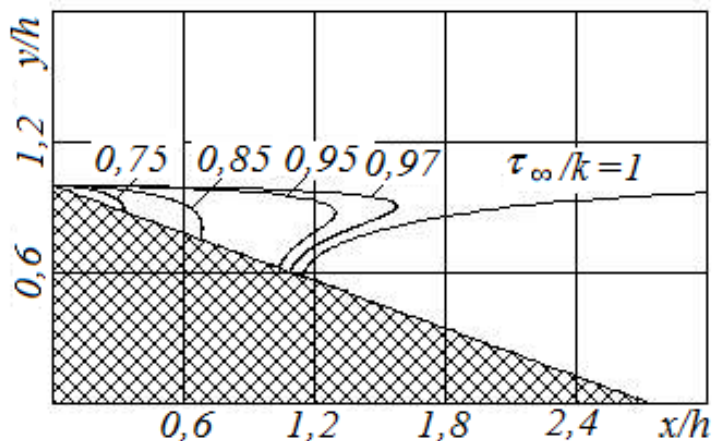


Рис. 2.6. – Форми пластичних зон у ідеально пружно-пластичному тілі з ромбічним включенням  $|x|/l + |y|/h \leq 1$ ,  $-\infty < z < \infty$ , спричинені діючим на нескінченності зсувним навантаженням  $\tau_{xz} = 0$ ,  $\tau_{yz} = \tau_{\infty}$

( $l$  – півдовжина горизонтальної діагоналі,  $h = l \tan 20^\circ$  – півдовжина вертикальної діагоналі,  $k$  – зсувна границя текучості).

концентратора напружень збільшуються майже гомотетично, на їхню форму не впливає ані форма тіла, ані наявність інших концентраторів напружень [31,77]. Форму і розміри зони визначає сингулярний член пружного розв'язку (у випадку тріщини – коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН)).

Для прикладу наведемо зміну форми континуальної пластичної

зони біля вершини жорсткого ромбічного включення у ідеально пружно-пластичному тілі за умов антиплоскої деформації [47].

Зона біля вершин включення на вертикальній діагоналі з ростом навантаження спочатку збільшується пропорційно в усіх напрямках, а потім вздовж грані включення її ріст гальмується в порівнянні із розвитком у горизонтальному напрямку.

Практично дуже важливим є той факт, що гомотетичний розвиток зони зберігається навіть для досить великих навантажень. У випадку наведеному на рис. 2.6 – аж поки навантаження не перевищує  $0,85k$ . Це дає підстави сподіватися, що лінійна механіка руйнування, що базується на пружних розв'язках задачі може забезпечувати правильні результати не тільки для досить крихких тіл, а також за наявності значних пластичних деформацій при вершинах гострокінцевих концентраторів напружень. Відповідна математична модель зони пластичних деформацій (лінійна модель пластичної зони (ЛМПЗ)) запропонована В.А. Кривенем [44]. Вона буде суттєво використаною у цій роботі. Викладемо ідею ЛМПЗ.

У двовимірному випадку при простому навантаженні рівняння пружно-пластичної границі в околі вершини гострокінцевого концентратора напружень є таким:

$$\rho = f(\tau_{\infty}/k, \varphi), \quad (2.27)$$

де  $(\rho, \varphi)$  – полярні координати,  $\tau_{\infty}$  – параметр навантаження,  $k$  – границя текучості. Оскільки  $f(\tau_{\infty}/k, \varphi) \rightarrow 0$  при  $\tau_{\infty} \rightarrow 0$  рівняння (2.27) можна подати як:

$$\rho(\varphi) = q(\varphi)(\tau_{\infty}/k)^r + o(\tau_{\infty}/k)^r, \quad (r > 0),$$

Для дуже малих навантажень, знехтувавши другим доданком, маємо:

$$\rho(\varphi) = \rho_0(\varphi) = q(\varphi)(\tau_\infty / k)^r. \quad (2.28)$$

Тобто пластична зона розвивається гомотетично, а  $(\tau_\infty / k)^r$  є коефіцієнтом гомотетії, котрий однозначно виражається через КІН або через коефіцієнт сингулярного члена поля напружень. Спосіб опису пластичної зони у вигляді (2.28), при поданні  $(\tau_\infty / k)^r$  через коефіцієнт сингулярного члена поля пружних напружень (КІН у випадку тріщини) називатимемо лінійною моделлю пластичної зони (ЛМПЗ). Точність ЛМПЗ визначається величиною:

$$\Omega = \max_{\varphi} |\rho(\varphi) - \rho_0(\varphi)| / \max_{\varphi} \rho(\varphi), \quad (2.29)$$

яку називатимемо мірою неавтомодельності форми зони і яка є тим меншою, що ближча, з точністю до гомотетії, форма досліджуваної зони до своєї форми на початковій стадії розвитку (безмежно мале навантаження).

Лінійна модель не збігається із першим наближенням пластичної зони [97] – областю, у якій поле пружних напружень перевищує границю текучості. Розбіжність може спостерігатися навіть за як завгодно малого навантаження.

Міра неавтомодельності форми зони дає оцінку наближення, що отримується при заміні функції  $f(\tau_\infty / k, \varphi)$  її першим ненульовим членом ряду по змінній  $\tau_\infty / k$ , тобто окреслює діапазон навантажень, при яких пластична зона визначається коефіцієнтом при сингулярному члені поля пружних напружень із заданою точністю.

ЛМПЗ включає такі етапи.

1. Визначаємо пружний розв'язок задачі, який містить усі геометричні параметри вихідної задачі, яку слід розв'язати у пружно-пластичній постановці.

2. Будуємо допоміжну задачу, що не містить параметра з розмірністю довжини.
3. Визначаємо пружний та пружно-пластичний розв'язок допоміжної задачі, кожен з яких містить по одному невизначеному параметру.
4. Узгоджуємо пружні розв'язки основної та допоміжної задач, зрівнюючи їх асимптотики у вершині концентратора напружень.
5. Узгоджуємо пружний та пружно-пластичний розв'язок допоміжних задач, зрівнюючи їх асимптотики на нескінченності.
6. Характеристики пластичної зони (форма, довжини пластичних смуг і т.п.), визначеної за узгодженим розв'язком допоміжної пружно-пластичної задачі, який містить величину навантаження та усі геометричні параметри вихідної задачі, приймаються за характеристики пластичної зони вихідної задачі.

## **2.5. Висновки до розділу 2.**

Обґрунтовано застосування методу конформних відображень у задачах дослідження розвитку пластичних смуг в околі гострокінцевих концентраторів напружень в твердому ідеально пружно-пластичному тілі у стані антиплоскої деформації.

До основних переваг методу конформних відображень слід віднести:

- а) можливість отримання розв'язку задачі в аналітичному вигляді;
- б) фізично обґрунтоване визначення напрямку поширення смуги;
- в) єдиний підхід до аналізу континуальних та дискретно-лінійчастих (в тому числі односмугових) пластичних зон в рамках запропонованої В.А. Кривенем [38, 39] узагальненої моделі пластичної зони.

### **РОЗДІЛ 3. ПЛАСТИЧНЕ ВІДШАРОВУВАННЯ ВКЛЮЧЕНЬ СКЛАДНОЇ ФОРМИ ЗА УМОВИ ЇХ НЕДОСКОНАЛОГО КОНТАКТУ З СЕРЕДОВИЩЕМ**

Дослідження НДС тіл з включеннями є важливою задачею механіки, яка потребує подальшого розвитку стосовно включень, що перебувають у недосконалому механічному контакті із середовищем. Актуальним є вивчення НДС пружно-пластичних тіл з включеннями за наявності міжфазних тріщин і, зокрема, пластичного відшаровування включення (розвитку пластичних шарів на межі включення-середовище). Ці дослідження, виконані на основі праць автора [11, 45, 52, 53], викладено в даному розділі.

#### **3.1. Пластичне відшаровування тонкого жорсткого прямокутного включення за наявності міжфазних тріщин**

##### **3.1.1. Постановка і формалізація задачі.**

Дослідимо пластичне відшаровування жорсткого тонкого прямокутного включення за наявності однакових міжфазних тріщин на його більших гранях (рис.3.1), розташованих на деякій однаковій від його вершин відстані. Вважатимемо також, що поверхні тріщин є вільними і не контактують з включенням. Деформування спричинено квазістатично-зростаючим зсувним навантаженням, паралельним довшим граням включення, прикладеним на великій віддалі від включення. Вершини включення та вершини міжфазних тріщин є концентраторами напружень, починаючи від яких вздовж поверхні включення поширюватимуться смуги пластичного відшаровування, розвиток яких належить дослідити. Матеріал тіла вважатимемо ідеально пружно-пластичним із зсувною границею текучості рівною  $k$ .

Довжину включення і міжфазних тріщин вважатимемо настільки великими проти товщини включення, що для аналізу розвитку пластичних смуг довжину включення можна приймати нескінченною  $-\infty < x \leq 0$ . У поперечному перерізі тіла включення займає область  $-\infty < x \leq 0, -b \leq y \leq b$ ,

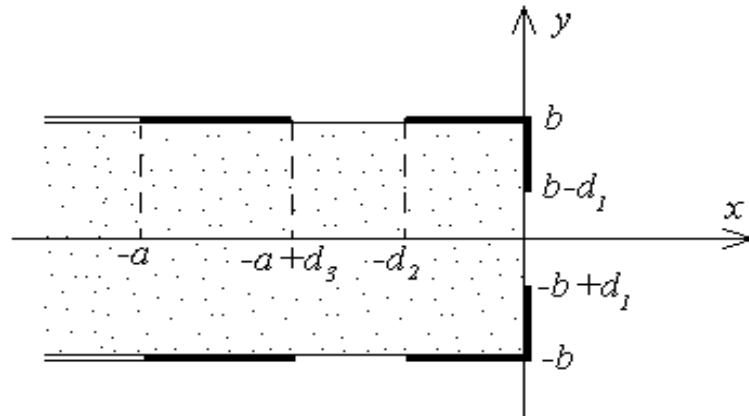


Рис. 3.1. Поперечний переріз тіла. Потовщені лінії – смуги пластичного відшаровування.

$b$  – півтовщина включення. Міжфазним тріщинам у площині поперечного перерізу відповідають промені  $-\infty < x \leq a, y = \pm b$ . У початковому стані контакт включення із середовищем був втраченим вздовж його горизонтальних граней за винятком ділянок довжиною  $a$ , що безпосередньо примикають до вершин включення. Довжини вертикального й горизонтального пластичних шарів, що розвиваються від вершин включення, відповідно рівні  $d_1$  і  $d_2$ , а довжина шару на продовженні міжфазних тріщин –  $d_3$ .

Дамо постановку крайової задачі у напруженнях. Поза включенням тіло перебуває у пружному стані, а складена із компонент напружень функція  $\tau(\zeta) = \tau_{yz}(x, y) + i\tau_{xz}(x, y)$  є аналітичною у області  $D = \{x > 0, y > 0\} \cup \{x \leq 0, y > b\}$ . Перейдемо від задачі відносно компонент тензора напружень аналогічно

переходу від (2.14) до (2.15) отримуємо в області **D** крайову задачу для функції  $\tau(\zeta)$ :

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re} \tau(\zeta) &= 0, (\zeta = x + ib, -\infty < x < -a); \\
 |\tau_1(\zeta)| &= k, (\zeta = x + ib, -a < x < -a + d_3); \\
 \operatorname{Re} \tau(\zeta) &= 0, (\zeta = x + ib, -a + d_3 < x < -d_2); \\
 |\tau_1(\zeta)| &= k, (\zeta = x + ib, -d_2 < x < 0); \\
 |\tau_1(\zeta)| &= k, (\zeta = iy, b - d_1 \leq y \leq b); \\
 \operatorname{Im} \tau(\zeta) &= 0, (\zeta = iy, 0 \leq y \leq b - d_1); \\
 \operatorname{Re} \tau(\zeta) &= 0, (\zeta = x, 0 < x < +\infty); \\
 \tau(\zeta) &= \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi\zeta}} + o\left(\zeta^{-\frac{1}{2}}\right), \zeta \rightarrow \infty.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Умови (3.1) послідовно виражають: перша – відсутність напружень на поверхнях міжфазних тріщин; друга, четверта і п'ята – виконання умов пластичності в точках пластичних смуг; третя і шоста – відсутність переміщення на ділянках поверхні тіла, які залишаються у ідеальному механічному контакті з включенням; сьома – відсутність переміщення на лінії симетрії тіла. Окремого пояснення вартує остання із умов (3.1). Оскільки включення є півбезмежними, напруження у нескінченно віддаленій точці повинні бути нульовими. Крім того півбезмежними та паралельними між собою є обидві міжфазні тріщини. Тому напружено-деформований стан на нескінченності можна вважати асимптотично-рівним полю напружень півнескінченної тріщини поздовжнього зсуву, вираженому через коефіцієнт інтенсивності напружень  $K_{III}$  [98].

### 3.1.2. Аналіз і розв'язання задачі.

Розв'язання задачі (3.1) зводиться до знаходження довжини пластичних шарів  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$  як функцій від  $K_{III}$  та визначення  $\tau(\zeta)$ . Додатково при цьому слід забезпечити виконання умови  $|\tau(\zeta)| < k$  всюди поза пластичними смугами, яка означає що пластичний стан досягається тільки в точках пластичних смуг. Крім того функція  $\tau(\zeta)$  додатково повинна задовольняти ще одній умові, яка забезпечуватиме неперервність переміщення вздовж вертикального та горизонтального пластичних шарів, що починаються від вершини включення:

$$w(-0, b) = -w(0, b - 0), \quad (3.2)$$

де  $w(x, y)$  – переміщення у напрямку осі аплікат. Співвідношення (3.2) означає рівність величин розривів переміщення для горизонтального і вертикального пластичних шарів, які починаються від вершини включення, при наближенні до неї.

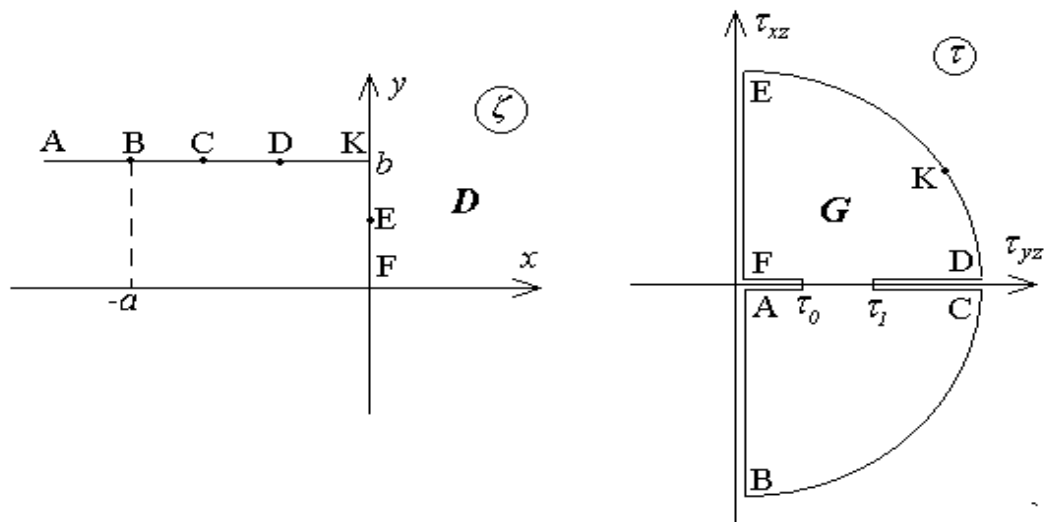


Рис. 3.2. Области конформних відображень у площинах  $\zeta$  і  $\tau$ .

Для визначення функції  $\tau(\zeta)$  скористаємося здійснюваним цією функцією конформним відображенням. Зробимо попередньо два зауваження щодо відображення  $\tau(\zeta)$ . У вершинах горизонтальних пластичних шарів

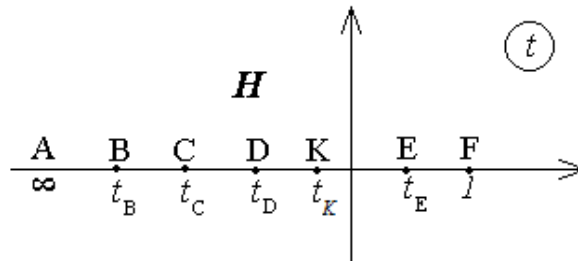


Рис. 3.3. Область  $H$  у площині допоміжного комплексного параметра  $t$ .

напруження  $\tau_{yz}$  рівне  $k$  – максимально можливій величині. Тому у деякій точці ділянки  $[-a + d_3; -d_2]$  воно досягає свого мінімуму  $\tau_1 = \min_{[-a+d_3; -d_2]} \tau(x, b)$ .

У точці  $(0,0)$  та на нескінченності це напруження є нульовим. Тому у деякій точці додатної півосі абсцис воно набуває свого максимуму  $\tau_0 = \max_{[0, +\infty)} \tau(x, 0)$ .

Ця та умови (3.1) дають підстави для висновку, що конформним образом області  $D$  у площині  $G$  є півкруг з двома розрізами, довжини яких апріорі невідомі, але задовольняють співвідношенню  $0 < \tau_0 \leq \tau_1 < k$  (рис. 3.2).

Наведене відображення володіє трьома парами фіксованих точок:  $A$ ,  $B$  та  $F$  і тому, за теоремою про існування і єдиність конформного відображення залежна від параметрів функція  $\tau_0$ ,  $\tau_1$  що реалізує наведене на рис.3.2 і рис. 3.3 відображення, для якого фіксовано вибрано три пари точок  $A$ ,  $K$  і  $F$ , можна знайти при допомозі перетворення Крістоффеля-Шварца.

$$\zeta(t) = ib + \frac{b}{\int_{t_K}^1 F(\eta) d\eta} \int_{t_K}^t \sqrt{\frac{\eta - t_K}{\eta - 1}} d\eta \quad (3.3)$$

Інтеграл, що входить у останню формулу, обчислюється аналітично і дає такий результат:

$$\zeta(t) = ib + \frac{2b}{\pi(1-t_K)} \left( \sqrt{(t-1)(t-t_K)} + \ln(\sqrt{1-t} - \sqrt{t_K-t}) \right), \quad (3.4)$$

де  $\ln(\sqrt{1-t} - \sqrt{t_K-t})$  означає аналітичну в  $H$  функцію, що набуває дійсних значень, коли аргумент логарифма є дійсним і додатним, а  $\sqrt{(t-1)(t-t_K)} = t + o(t)$ , при  $t \rightarrow \infty$ .

Беручи до уваги, що вершина тріщини знаходиться у точці  $B(-a, b)$  визначимо параметр  $t_B$  із рівняння:

$$\sqrt{(t_B-1)(t_B-t_K)} + \ln(\sqrt{1-t_B} - \sqrt{t_K-t_B}) = \frac{\pi a}{2b}, \quad (3.5)$$

яке має єдиний розв'язок  $t_B \in (-\infty; t_K)$  для довільного значення  $a/b > 0$ .

Перше відображення (3.3) можна отримати комбінацією елементарних. Після низки перетворень отримуємо формулу:

$$\tau(t) = k \sqrt{\frac{1-t_E}{(t_E-t_C)(t_E-t_D)}} \frac{\sqrt{(t-t_B)(t-t_E)} - \sqrt{(t-t_C)(t-t_D)}}{\sqrt{t-1}}, \quad (3.6)$$

де  $t_C = f\left(-\frac{\tau_0}{\tau_1} \frac{k^2 - \tau_1^2}{k^2 - \tau_0^2}\right),$

$$t_D = f\left(\frac{\tau_0}{\tau_1} \frac{k^2 - \tau_1^2}{k^2 - \tau_0^2}\right),$$

$$t_B = f\left(\frac{\tau_0}{\tau_1} \frac{k^2 + \tau_1^2}{k^2 + \tau_0^2}\right),$$

$$f(u) = \frac{2(u - u_0)}{(u + 1)(1 - u_0)},$$

$$u_0 = \frac{\tau_0}{\tau_1} \sqrt{\frac{(k^4 + \tau_1^4)(t_B t_E - t_C t_D) - 2k^2 \tau_1^2(t_B t_E + t_C t_D)}{(k^4 + \tau_0^4)(t_B t_E - t_C t_D) - 2k^2 \tau_0^2(t_B t_E + t_C t_D)}}.$$

Під  $(t - p)^{1/2}$  ( $p$  – дійсне число) в рівності (3.6) і далі у цьому параграфі розумітимемо аналітичну в області  $H$  функцію, яка приймає дійсні додатні значення, коли  $t$  дійсне та більше за  $p$ .

Координати  $t_B$ ,  $t_E$ ,  $t_C$  і  $t_D$  ( $-\infty < t_B < t_C < t_D < 0 < t_E < 1$ ) точок В, Е, С і D у площині  $t$  пов'язані співвідношенням:

$$t_E t_B - t_C t_D = t_E + t_B - t_C - t_D. \quad (3.7)$$

Із рівностей (3.5) і (3.7) випливає, що (3.4) і (3.6) і визначають двопараметричну множину функцій  $\tau(\zeta)$ .

Для розв'язання задачі (3.1), (3.2) досить визначити напруження  $\tau_0$  і  $\tau_1$  так, аби виконувалися остання із умов (3.1) та умова (3.2), що досягається вибором пов'язаних співвідношенням (3.7) параметрів  $t_E$ ,  $t_C$  і  $t_D$ .

Окрім рівності (3.2)  $t_E$ ,  $t_C$  і  $t_D$  задовольняють ще двом зв'язкам, що впливають із асимптотики функції  $\tau(\zeta)$  на нескінченності та неперервності переміщення вздовж межі включення.

Із формул (3.4) і (3.6) отримуємо, що при  $t \rightarrow \infty$

$$\zeta = \frac{2b}{\pi} t + o(t), \quad (3.8)$$

$$\tau(t) = k \sqrt{\frac{(t_B - t_C)(t_B - t_D)}{1 - t_B}} \frac{2}{\sqrt{t}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

I, отже, при  $\zeta \rightarrow \infty$ :

$$\tau(\zeta) = \frac{\sqrt{2bk}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{(t_B - t_C)(t_B - t_D)}{1 - t_B}} \frac{1}{\sqrt{\zeta}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\zeta}}\right).$$

Остання умова (3.1) виконуватиметься, коли параметри  $t_C$ ,  $t_D$  задовольнятимуть співвідношенню:

$$(t_B - t_C)(t_B - t_D) = (1 - t_B) \left( \frac{K_{III}}{2\sqrt{bk}} \right)^2. \quad (3.9)$$

Аби досягти виконання умови (3.2), знайдемо величину розриву переміщення між включенням та матрицею в точках пластичних шарів при вершині включення. Як відомо [80], відносно зміщення точок  $\zeta_2 = x_2 + iy_2$  і  $\zeta_1 = x_1 + iy_1$  можна знайти за формулою:

$$w(x_2, y_2) - w(x_1, y_1) = \frac{1}{G} \operatorname{Im} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \tau(\zeta) d\zeta,$$

де  $G$  - модуль зсуву матеріалу матриці.

Розриви переміщень між включенням та матрицею для вертикального  $\Delta_1$  та горизонтального  $\Delta_2$  пластичних шарів у вершинах включення відповідно рівні:

$$\Delta_1 = M \int_{t_D}^0 \frac{\sqrt{(t - t_B)(t_E - t)}}{1 - t} t dt,$$

$$\Delta_2 = M \int_0^{t_E} \frac{\sqrt{(t-t_C)(t-t_D)}}{1-t} dt, \quad (3.10)$$

$$\text{де } M = \frac{2bk}{\pi G} \sqrt{\frac{1-t_E}{(t_E-t_C)(t_E-t_D)}}.$$

Зрівнюючи  $\Delta_1$  та  $\Delta_2$  отримуємо наступний (третій) зв'язок параметрів

$t_E, t_C, t_D$ :

$$\int_{t_D}^0 \frac{\sqrt{(t-t_B)(t_E-t)}}{1-t} dt = \int_0^{t_E} \frac{\sqrt{(t-t_C)(t-t_D)}}{1-t} dt. \quad (3.11)$$

Інтеграли, що входять у формулу (3.11), можна обчислити аналітично, але відповідні вирази є досить громіздкими і мало придатними для подальшого використання.

Розв'яжемо систему рівняння (3.7), (3.9) відносно  $t_E, t_C$ :

$$t_C = t_B + \frac{1-t_B}{4(t_D-t_B)} \left( \frac{K_{III}}{k\sqrt{b}} \right)^2,$$

$$t_E = t_D + \frac{1-t_D}{4(t_D-t_B)} \left( \frac{K_{III}}{k\sqrt{b}} \right)^2,$$

і отримаємо формули, що виражають параметри  $t_E, t_C$  через  $t_D \in (t_C; 0)$ , який, в свою чергу, знайдемо із рівняння (3.10).

Маючи параметри  $t_E, t_C, t_D$ , як функції коефіцієнта інтенсивності напружень півбезмежної прямолінійної тріщини поздовжнього зсуву  $K_{III}$ , отримуємо залежні від нього довжини міжфазних пластичних шарів:

$$d_1 = \frac{2b}{\pi} \left( \sqrt{t_E - t_E^2} + \arctg \left( \sqrt{\frac{t_E}{1-t_E}} \right) \right),$$

$$d_2 = \frac{2b}{\pi} \left( -\sqrt{t_D^2 - t_D} + \ln(\sqrt{1-t_D} - \sqrt{-t_D}) \right),$$

$$d_3 = \frac{2b}{\pi} \left( -\sqrt{t_C^2 - t_C} + \ln(\sqrt{1-t_C} - \sqrt{-t_C}) \right) + a. \quad (3.12)$$

Формули для довжин міжфазних пластичних шарів від навантаження

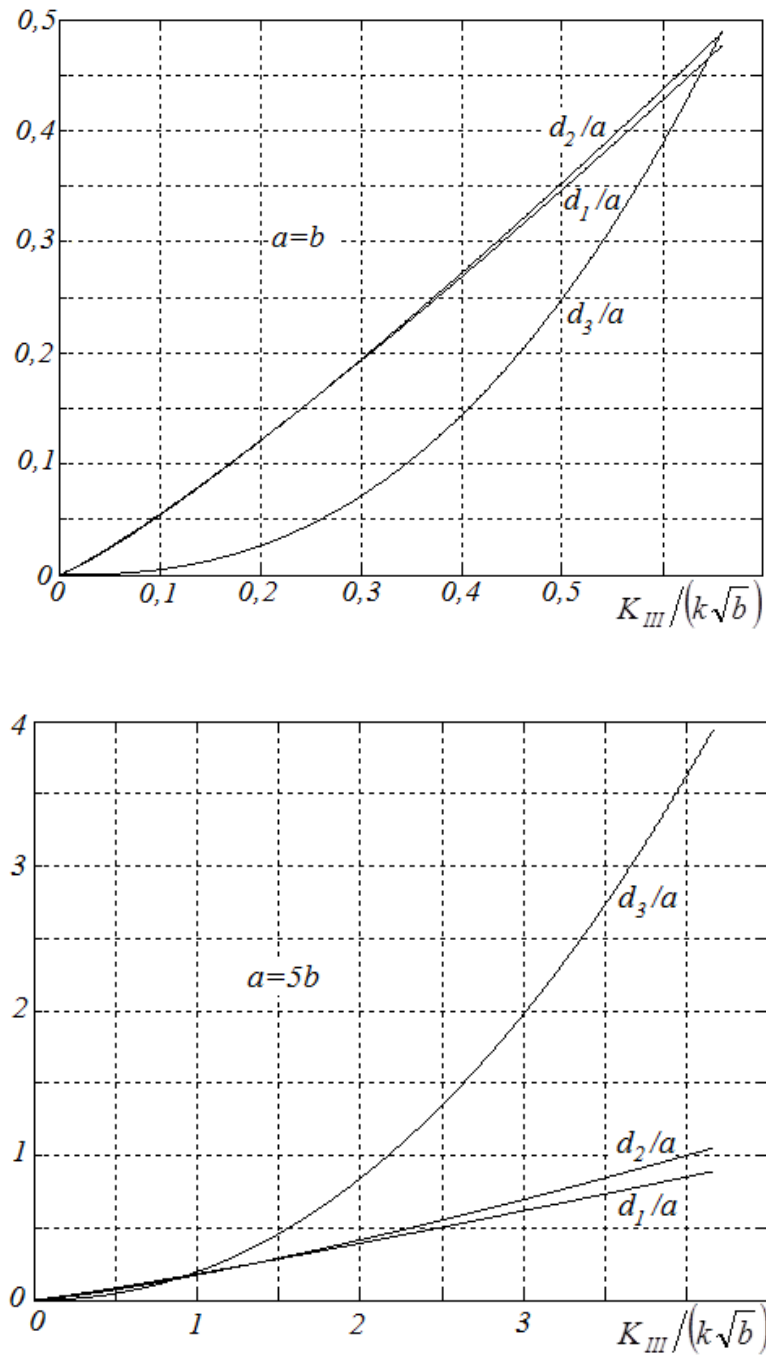


Рис. 3.4. Залежності довжин міжфазних пластичних шарів від навантаження.

$K_{III}$  мають сенс (рис. 3.4), до настання повного пластичного відшарування вздовж горизонтальних або вертикальних граней включення. Шари, що розвиваються вздовж горизонтальних граней, змикаються, коли  $t_C = t_D$ , тобто якщо  $\frac{K_{III}}{k\sqrt{b}} = \frac{2}{\sqrt{1-t_B}}$ . На цей момент вертикальні шари середини грані включення ще не досягають.

### **3.2. Пластичне відшаровування квадратного волокна під зсувним навантаженням за наявності міжфазних тріщин**

Деформування тіл з включеннями, жорсткість яких суттєво перевищує матрицю, може спричиняти міжфазне розшаровування як наслідок появи тріщин або пластичних деформацій на межі включення-середовище. Аналіз пружно-пластичного напружено-деформівного стану при вершинах гострокінцевих концентраторів напружень [90, 115] показує, що розвиток міжфазних пластичних смуг супроводжується поступовим ослабленням механічного зв'язку включення і матриці: що довша смуга, то слабший зв'язок на її початку. Тому у точках найвищої концентрації напружень досить імовірна поява тріщин, як наслідок попередніх локальних розривів переміщень або пластичних зсувів. На даний час найповніше вивчено напружено-деформівний стан пружних тіл з включеннями за наявності міжфазних тріщин [76]. Аналогічні дослідження для пружно-пластичних тіл стосуються лише випадків міжфазного пластичного відшаровування включень, які до навантаження перебували у ідеальному механічному контакті з середовищем [115].

3.2.1. Постановка задачі про пластичне відшаровування довгого квадратного включення.

Дослідимо пластичне відшаровування нескінченно-довгого включення квадратного перерізу  $|x| + |y| \leq a$ ,  $-\infty < z < +\infty$  у нескінченному ідеально пружно-пластичному середовищі під впливом прикладеного на безмежності зсувного навантаження  $\tau_{xz} = 0, \tau_{yz} = \tau_\infty$ .

За умови, що на поверхні включення наявні міжфазні тріщини довжини  $l$ , ( $l < b$ ) ( $b = a\sqrt{2}$  – довжина грані включення), які починаються у вершинах

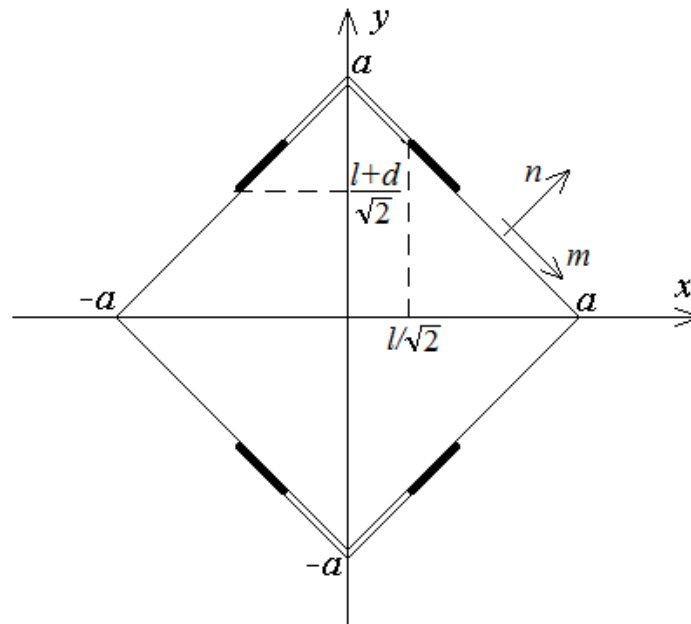


Рис. 3.5. Поперечний переріз тіла. Потовщені лінії – пластичні смуги.

включення на його вертикальних діагоналях. Контакт решти поверхні включення з середовищем до навантаження вважаємо ідеальним.

Дослідимо напружено-деформівний стан та розвиток міжфазних пластичних смуг від вершин тріщин (рис. 3.5).

### 3.2.2. Формалізація задачі.

Поставимо задачу у напруженнях. Враховуючи симетрію задачі (парність переміщення відносно ординат і його непарність відносно абсцис) сформулюємо цю задачу для області  $D$  – частини першого квадранта поза включенням:

$$\begin{aligned}
 & x > 0, y > 0, x + y > a; \\
 & \tau_{xz}(x, 0) = 0, \quad (y > a); \\
 & \tau_{nz}(x, y) = 0, \quad (x + y = a, 0 < x < l/\sqrt{2}); \\
 & \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k^2, \quad (x + y = a, l/\sqrt{2} < x < (l + d)/\sqrt{2}); \\
 & \tau_{mz}(x, y) = 0, \quad (x + y = a, (l + d)/\sqrt{2} < x < a); \\
 & \tau_{xz}(0, y) = 0, \quad (x > a); \\
 & \tau_{xz}(x, y) = 0 + o(1), \tau_{yz}(x, y) = \tau_{\infty} + o(1), \quad (\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty), \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

де  $d$  – залежна від величини навантаження  $\tau_{\infty}$  довжина смуги пластичного відшарування;  $n$ ,  $m$  – відповідно нормальний і тангенціальний одиничні вектори до поверхні включення.

Крайові умови (3.13) виражають симетричність переміщення відносно осі аплікату; відсутність напруження на поверхні тріщини; умову пластичності; відсутність переміщення на невідшарованій частині поверхні включення; антисиметричність переміщення відносно осі абсцис; спосіб і величину навантаження відповідно.

У випадку антиплоскої деформації у пружній частині тіла компоненти напружень утворюють аналітичну функцію  $\tau(\zeta) = \tau_{yz}(x, y) + i\tau_{xz}(x, y)$ ,  $(\zeta = x + iy)$ . Стосовно  $\tau(\zeta)$  умови (3.13) набувають такого вигляду:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re} \tau(\zeta) = 0, \quad (\zeta = iy, y > a); \\
&\arg \tau(\zeta) = -\pi/4, \quad (\zeta = x + iy, x + y = a, 0 < x < l/\sqrt{2}); \\
&|\tau(\zeta)| = k, \quad (\zeta = x + iy, x + y = a, l/\sqrt{2} < x < (l+d)/\sqrt{2}); \\
&\arg \tau(\zeta) = \pi/4, \quad (\zeta = x + iy, x + y = a, (l+d)/\sqrt{2} < x < a); \\
&\operatorname{Re} \tau(\zeta) = 0, \quad (\zeta = x, y > a); \\
&\tau(\zeta) = \tau_\infty + o(1), \quad (\zeta \rightarrow \infty).
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Задачу (3.14) слід розуміти так. Для заданого  $\tau_\infty \in (0; k)$  слід знайти  $d$ , за якого вона має розв'язок і визначити функцію  $\tau(\zeta)$  в області  $D$ . Тоді  $d$  як функція  $\tau_\infty$  виражатиме залежність довжини смуги пластичного відшаровування від величини прикладеного навантаження. Додатково слід забезпечити виконання умови:

$$|\tau(\zeta)| < k \quad (\zeta \in D), \tag{3.15}$$

яка гарантуватиме що пластичний стан поза пластичними смугами не досягається.

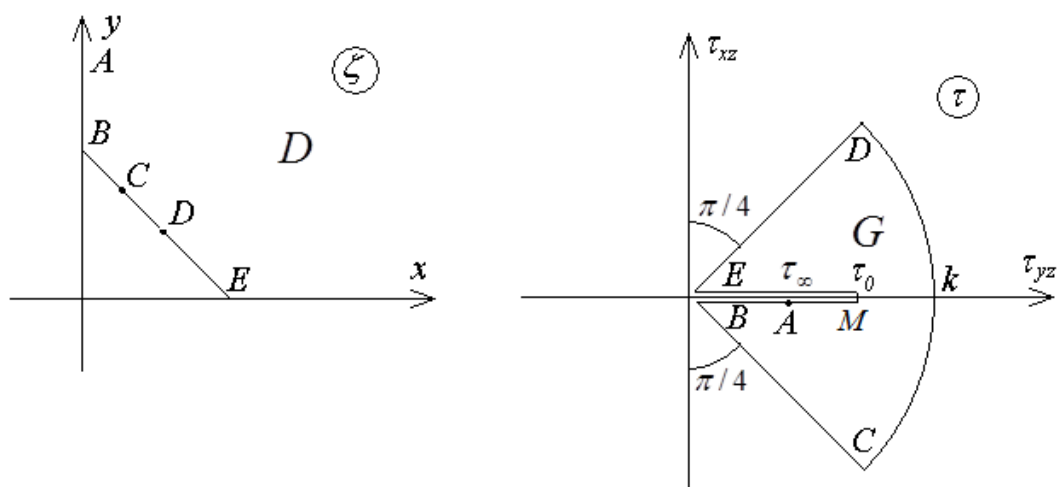


Рис. 3.6. Области конформного відображення.

Умови (3.14) дають змогу побудувати конформний образ області  $D$  у комплексній площині  $\tau$  (Рис. 3.6).

Пояснення потребує параметр  $\tau_0$ , уведений в область  $G$ , у яку відображається область  $D$  функцією  $\tau = \tau(\zeta)$ . На відміну від більшості задач при зведенні до конформних відображень задачі, аналогічної до (3.14), конформний образ області  $D$  є повністю визначеним [33]. У даному випадку неможливо припустити, що перша четверта та п'ята із умов (3.14) означають, що частина границі області  $D$ , яка збігається з ділянками координатних осей, відображається на площину  $\tau$  в розріз вздовж відрізка  $[0; \tau_\infty]$ . Таке припущення означало б, що на координатних осях на ділянках межі області  $D$  напруження  $\tau_{yz}$  монотонно змінюється від 0 до  $\tau_\infty$ . У такому випадку на межі областей  $D$  і  $G$  було б чотири точки  $A, B, C, E$ , координати котрих є наперед відомими, що суперечить теоремі Рімана про існування конформного відображення [25]. Тому зробимо припущення про немонотонність напруження  $\tau_{yz}$  на вказаних ділянках границі області  $D$ , а через  $\tau_0$  позначено його максимальне значення:

$$\tau_0 = \max\{\max_{[a; +\infty)} \tau_{yz}(0, y); \max_{[a; +\infty)} \tau_{yz}(x, 0)\}.$$

Вибором значення величини  $\tau_0$  (довжини розрізу в області  $G$ ) можна забезпечити існування потрібного відображення принаймні для деякого інтервалу навантажень із діапазону  $(0; k)$ .

Уведемо допоміжну комплексну площину і шукатимемо потрібне нам відображення у параметричній формі:

$$\tau = \tau(t), \zeta = \zeta(t) \quad (t \in H = \{\operatorname{Im} t > 0\}). \quad (3.16)$$

Взаємна відповідність точок межі областей  $D$  і  $H$  подана на рис. 3.6 і рис. 3.7.

Друге із відображень (3.16) легко знайти при допомозі перетворення Крістоффеля-Шварца [25]:

$$\zeta = \frac{b}{B(3/4, 3/4)} \int_0^t \frac{d\eta}{\sqrt[4]{\eta(\eta-1)}}. \quad (3.17)$$

Тут  $B(x, y)$  – повна бета функція,  $B(3/4, 3/4) = 1,694$ . Під  $(t-p)^q$  ( $0 < q < 1$ ,  $p$  – дійсне число) розумітимемо аналітичну в  $H$  функцію, що приймає дійсні додатні значення в точках  $t > p$  дійсної осі.

Координату точки  $C$  у площині  $t$  визначимо як розв’язок рівняння:

$$\frac{l}{b} = \frac{1}{B(3/4, 3/4)} \int_0^{t_c} \frac{d\eta}{\sqrt[4]{\eta(1-\eta)}}, \quad (3.18)$$

який для всіх допустимих довжин тріщин  $l \in [0; b]$  існує, єдиний та може

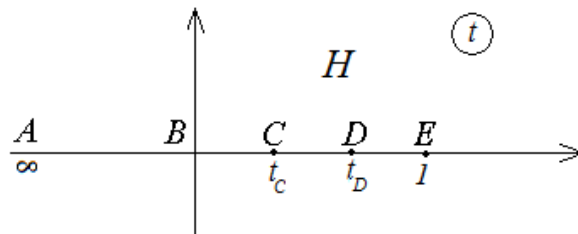


Рис. 3.7 Допоміжна комплексна площина  $t$ .

бути знайдений методом половинного ділення.

Першу із функцій (3.16) знаходимо компонентуючи елементарні відображення. Забезпечивши вказану на рис. 3.6 і рис. 3.7 відповідність точок  $A, B$  отримуємо:

$$t = \frac{A+B}{2} \frac{(f_1(\tau, \tau_0, \tau_\infty) + f_2(\tau, \tau_0, \tau_\infty))}{(Af_1(\tau, \tau_0, \tau_\infty) + Bf_2(\tau, \tau_0, \tau_\infty))}, \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \text{де } f_1(\tau, \tau_0, \tau_\infty) &= \tau_0^2 \sqrt{(k^8 + \tau_\infty^8) - 2k^4 \tau^4}, \\ f_2(\tau, \tau_0, \tau_\infty) &= \sqrt{(k^8 + \tau^8) \tau_0^4 - (k^8 + \tau_0^8) \tau^4}, \\ A &= \tau_0^2 (k^4 - \tau_\infty^4), \quad B = \sqrt{(k^8 + \tau_\infty^8)(\tau_0^4 - \tau_\infty^4)}. \end{aligned}$$

Беручи до уваги, що в площині  $\tau$  координати точок  $C$  і  $D$  є відповідно рівними  $k \exp(-i\pi/4)$  і  $k \exp(i\pi/4)$ , за формулою (3.18) знаходимо їхні координати в площині  $t$ :

$$t_{C,D} = \frac{(k^2 \mp \tau_\infty^2)^2 (f_1(\tau_\infty, \tau_0, \tau_\infty) - f_2(\tau_\infty, \tau_0, \tau_\infty))}{2((k^4 + \tau_0^4) f_1(\tau_\infty, \tau_0, \tau_\infty) \pm 2k^2 \tau_0^2 f_2(\tau_\infty, \tau_0, \tau_\infty))}, \quad (3.20)$$

(верхній знак у формулі (3.20) стосується точки  $t_C$ , нижній –  $t_D$ ).

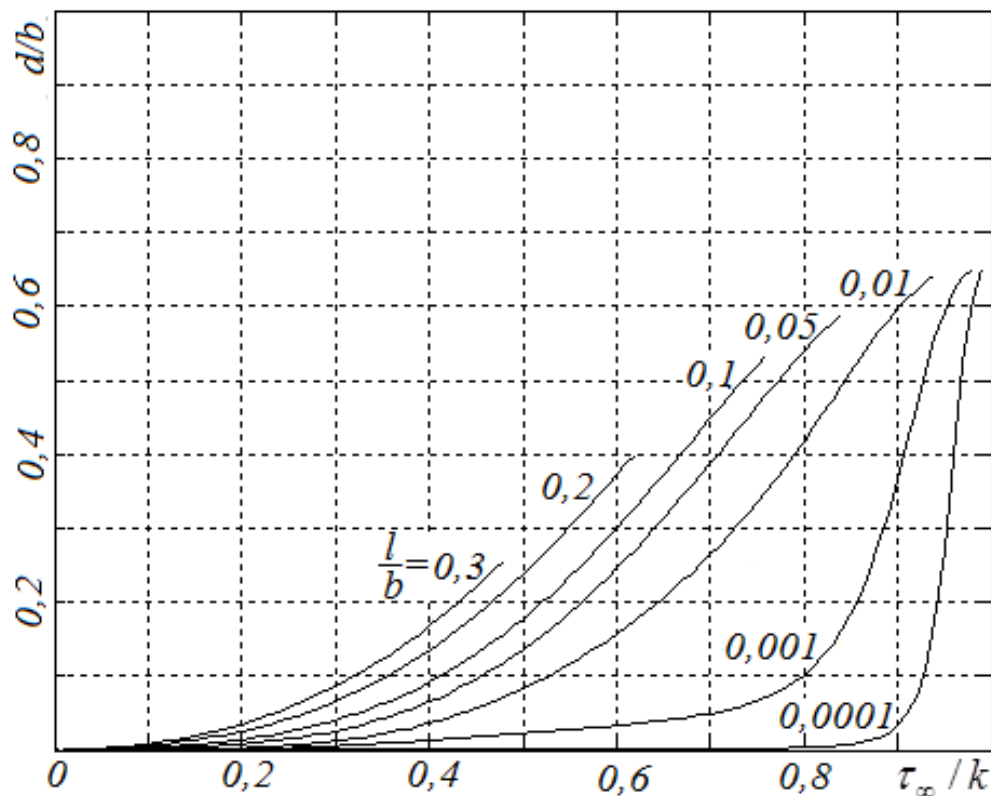


Рис. 3.8. Залежності довжини пластичних смуг від величини навантаження.

За відомою величиною  $t_C$  (формула (3.18)), знайдемо параметр  $\tau_0$ , розв'язавши відносно нього рівняння (3.20). Зауважимо, розв'язок (3.20) існує не для всіх  $t_C \in (0;1)$ ,  $\tau_\infty \in (0;k)$ , що буде роз'яснено пізніше.

### 3.2.3. Дослідження міжфазного пластичного відшаровування.

Довжину смуги пластичного відшаровування в одиницях довжини грані включення дає формула:

$$d = \frac{1}{B(3/4, 3/4)} \int_{t_C}^{t_D} \frac{d\eta}{\sqrt[4]{\eta(1-\eta)}}. \quad (3.21)$$

Залежності довжини смуг пластичного відшаровування для декількох співвідношень між довжиною тріщин і довжиною грані включення наведено на рис. 3.8.

Для з'ясування впливу міжфазної тріщини на пластичне відшаровування включення звернемося до властивостей пластичного відшаровування аналогічного включення, яке у недеформованому середовищі перебувало в ідеальному з ним контакті, за такого ж способу навантаження. Відомі дослідження для цього випадку виконано у припущенні про локалізацію пластичних смуг вздовж межі включення-середовище, які розпочинаються від вершин включення на його вертикальній діагоналі [47], а також дослідження розвитку континуальних пластичних зон з початками у цих же точках [47]. Міжфазні пластичні смуги поступово збільшуються з ростом навантаження, покриваючи всю поверхню включення коли  $\tau_\infty$  наближається до  $k$ . Континуальні пластичні зони зосереджені у кутах, утворених гранями включення і перпендикуляром до його вертикальної діагоналі. Зі збільшенням навантаження вони спочатку збільшуються майже гомотетично, а згодом ріст пластичних деформацій

вздовж граней включення поступово припиняється. Навіть коли  $\tau_{\infty}$  наближається до  $k$ , континуальні пластичні зони не охоплюють цілої поверхні включення, при великих навантаженнях пластичні смуги не просуваються далі вздовж включення і ростуть в напрямку перпендикулярному його вертикальній діагоналі.

Для наведених на рис. 3.8 числових експериментів сумарна довжина тріщини та міжфазної тріщини знаходиться у межах від  $0,55b$  до  $0,65b$ . Якщо  $l = 0,5b$  пластичне відшаровування за односмуговою схемою стає неможливим вже для навантаження  $0,01k$ .

Аналізуючи наведену на рис. 3.8 картину розвитку пластичного відшаровування, можна зауважити декілька його стадій: близьку до квадратичної залежність на початку за малих навантажень, далі приблизно лінійну і під кінець гальмування росту смуги. На всьому діапазоні розвитку ріст пластичних смуг описується досить складними співвідношеннями. Тому у розділі 5 зупинимося детальніше на практично важливому етапі початкового їх розвитку і застосуємо з цією метою лінійну модель пластичної зони (ЛМПЗ) [44].

### 3.3. Висновки до розділу

1. Отримано аналітичний розв'язок задачі про пружно-пластичний напружено-деформований стан тіла з жорстким півбезмежним включенням скінченної ширини. Торець включення прямокутний. Вздовж обох довгих граней включення наявні міжфазні тріщини, вершини яких знаходяться на певній відстані від кутових точок включення. Досліджено квазістатичний ріст пластичних шарів, що розвиваються від вершин тріщин і вершин включення.

## 2. Зокрема з'ясовано що:

2.1. Умови за яких відбувається злиття пластичних смуг, що виходять з вершин тріщин і вершин включення та показано, що до цього моменту не наступатиме повне пластичне відшарування вздовж коротшої грані включення;

## 2.2. Вплив віддалі від вершини включення до вершини тріщини:

а) Якщо віддаль від вершини включення до вершини тріщини набагато більша ширини включення, смуга на продовженні тріщини розвивається приблизно за квадратичним законом, аналогічно до смуги на продовженні окремої тріщини за відсутності включення;

б) Зближення вершин включення і тріщини пришвидшує пластичне відшарування, але до їх злиття певна центральна частина торця включення залишається невідшарованою;

в) Зі зменшенням товщини включення до нуля НДС на відстанях, більших за відстань між вершинами включення і міжфазної тріщини рівномірно наближається до НДС окремої тріщини, однак в околі торця включення поле напружень залишається суттєво відмінним від поля напружень для включення нульової товщини.

3. З огляду на можливе руйнування при вершинах включення навіть досить тонке включення не можна наближено замінювати включенням нульової товщини.

4. Основною відмінністю розвитку міжфазних пластичних смуг на продовженні міжфазних тріщин є обмеженість діапазону навантажень, в якому пластичні деформації можуть бути локалізованими лише на межі включення-середовище. Цей діапазон тим вузьчий, що більші довжини тріщин. Наприклад для зовсім малих тріщин ( $l = 0,001b$ ) максимально допустиме навантаження всього на 2% менше границі текучості матеріалу, а коли міжфазна тріщина сягає 20% грані включення – максимально допустиме навантаження становить  $0,62k$ .

5. Пластичні смуги, що розвиваються на продовженні міжфазних тріщин не досягають вершин включення, в околі яких контакт включення з середовищем є ідеальним, оскільки у цих вершинах включення обидві компоненти напружень дорівнюють нулю.

6. Факт, що пластичні смуги не можуть продовжувати розвиватися по поверхні, покривши лише її частину, свідчить про вперше виявлену обмежену спроможність односмугової моделі пластичного відшаровування включення. Є підстави вважати, що для дослідження відшаровування включення за наявності міжфазних тріщин слід допускати крім появи міжфазних пластичних смуг виникнення смуг, що розвиваються вглиб середовища, або континуальних пластичних зон.

## **РОЗДІЛ 4. ВПЛИВ ФОРМИ КОНЦЕТРАТОРА І ЇХ ВЗАЄМОДІЇ НА РОЗВИТОК ПЛАСТИЧНИХ ШАРІВ**

У механіці руйнування важливе значення мають дослідження полів напружень і деформацій в твердих тілах з концентраторами напружень, які майже неминуче присутні у конструкційних матеріалах і мають технологічне походження, або є функціонально необхідними в елементах конструкції. Як правило, зазначені дефекти мають складну форму, їх взаємне розташування суттєво впливає на НДС тіла, що суттєво ускладнює математичні методи аналізу відповідних задач. Для теорії міцності композитів і армованих матеріалів та прогнозування і оптимізації їх деформаційних характеристик значний інтерес представляють дослідження напружено-деформованого стану тіл з включенням.

Сучасні дослідження розвитку пластичних зон в тілах з концентраторами напружень виконані переважно чисельними методами [64, 123]. Побудова найбільш бажаних для наукових досліджень аналітичних розв'язків таких задач якраз і є дуже складною, особливо для включень складної форми. Невирішеними залишаються практично-важливі задачі міжфазного пластичного розшарування [114], що можуть призводити до втрати міцності чи функціональних характеристик механічної конструкції.

У даному розділі викладено дослідження впливу форми концентратора напружень та взаємовпливу концентраторів на розвиток пластичних шарів на основі праць автора [8, 12, 51].

#### 4.1. Вплив кривизни поверхні включення на його пластичне відшаровування

##### 4.1.1. Постановка задачі про вплив кривизни поверхні включення.

Дослідимо напружено-деформівний стан ідеально пружно-пластичного необмеженого тіла, що містить абсолютно жорстке включення:

$x_0 - \sqrt{R^2 - y^2} \leq x \leq -x_0 + \sqrt{R^2 - y^2}$ ,  $-l \leq y \leq l$ ,  $-\infty < z < +\infty$ . Радіус  $R$  поверхонь, що його обмежують, і кут  $\alpha$  при вершинах включення зв'язані з

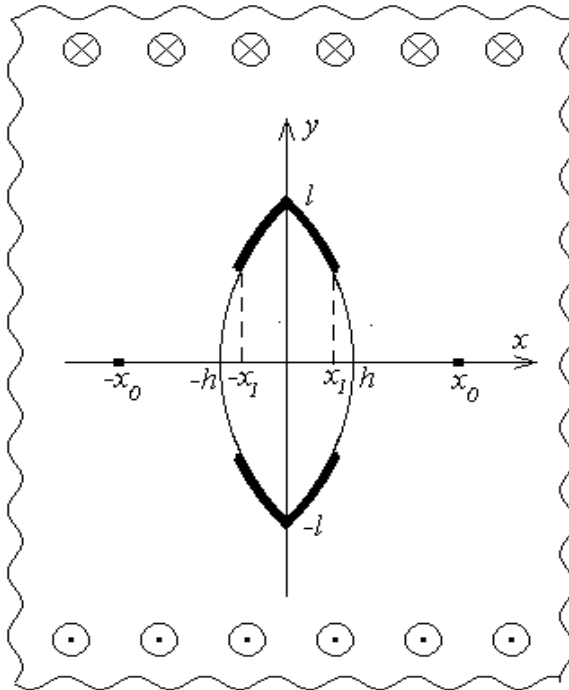


Рис. 4.1. Поперечний переріз тіла

висотою включення співвідношенням  $R = l \sec \frac{\alpha}{2}$ . Максимальна ширина

включення дорівнює  $2h$ ,  $h = 2R \sin^2 \frac{\alpha}{4}$ . Центр поверхонь знаходиться в

точках  $x_0 = \pm l \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ .

Деформування спричинено прикладеними у нескінченно віддаленій точці зусиллями  $\tau_{xz} = 0$ ;  $\tau_{yz} = \tau_{\infty}$  (рис. 4.1). Матеріал тіла ідеально пружно-пластичний із зсувною границею текучості рівною  $k$ . Задача полягає у визначенні напружено-деформівного стану тіла та закону розвитку пластичних смуг під впливом квазістатично-зростаючого навантаження.

#### 4.1.2. Формалізація і розв'язок задачі.

Внаслідок концентрації напружень в околі вершин включень розвиваються пластичні зони, які ми вважатимемо локалізованими на межі включення-середовища у смугах  $(x \pm x_0)^2 + y^2 = R^2$ ,  $|x| \leq x_1$ ,  $\pm x_1$  - залежні від рівня навантаження абсциси кінців смуг. Пластичні деформації призводять до порушення механічного зв'язку матриці із середовищем з виникненням між ними тангенціального розриву переміщення (пластичне відшаровування).

Дослідимо напружено-деформівний стан тіла поза включенням у другому квадранті (область  $D = \{(x, y) \mid x < 0, y > 0, (x - x_0)^2 + y^2 > R^2\}$ ).

Поставимо крайову задачу у напруженнях в області  $D$ :

$$\begin{aligned} \tau_{xz}(x, 0) &= 0, \quad -\infty < x < -h; \\ \tau_{nz}(x, y) &= 0, \quad (-h < x < x_1, (x - x_0)^2 + y^2 = R^2); \\ \tau_{xz}^2(x, y) + \tau_{yz}^2(x, y) &= k^2, \quad (-x_1 < x < 0, (x - x_0)^2 + y^2 = R^2); \\ \tau_{xz}(0, y) &= 0, \quad (l < y < +\infty); \\ \lim_{\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \infty} \tau_{xz}(x, y) &= 0; \quad \lim_{\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \infty} \tau_{yz}(x, y) = \tau_{\infty}; \end{aligned} \quad (4.1)$$

де  $\vec{n}$  - одиничний тангенціальний вектор на межі включення-середовища.

Умови (4.1) послідовно виражають: непарність переміщення відносно осі абсцис; відсутність переміщення на пластично-невідшарованих ділянках

поверхні включення; умову пластичності на частині відшарованої поверхні включення; парність переміщення відносно осі ординат та спосіб і величину навантаження.

Додатково повинна виконуватися умова:

$$\tau_{xz}^2(x,y) + \tau_{yz}^2(x,y) = k^2, \quad (x \notin [0;h], (x-x_0)^2 + y^2 = R^2), \quad (4.2)$$

яка гарантує, що пластичний стан не досягається ніде поза смугами.

Складена із компонент напружень функція  $\tau(\zeta) = \tau_{yz}(x,y) + i\tau_{xz}(x,y)$ ,  $\zeta = x + iy$  є аналітичною та однолистою в області  $D$  і конформно відображає її на область  $G$  комплексної площини  $\tau$  (рис. 4.2).

Стосовно функції  $\tau(\zeta)$  крайова задача (4.1) набуває такого вигляду:

$$\operatorname{Im} \tau(\zeta) = 0, \quad (\zeta = x, -\infty < x < -h);$$

$$\operatorname{Im} \tau(\zeta) d\zeta = 0, \quad (\zeta \in BC);$$

$$|\tau(\zeta)| = k, \quad (\zeta \in CD);$$

$$\operatorname{Im} \tau(\zeta) = 0, \quad (\zeta = iy, l < y < +\infty);$$

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \tau(\zeta) = \tau_\infty. \quad (4.3)$$

Для розв'язання задачі (4.3) застосуємо конформні відображення [25, 105, 106].

Зауважимо, що оскільки ділянка  $BC$  границі області  $G$ , відповідна невідшарованій частині поверхні включення, апріорі невідома, неможливо знайти функцію  $\tau(\zeta)$  безпосередньою побудовою відображення.

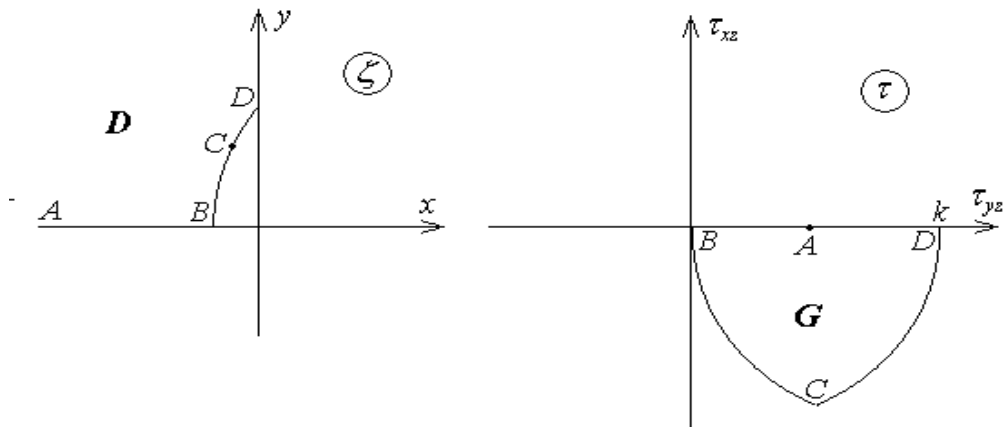


Рис. 4.2. Області у площинах  $\zeta$  і  $\tau$ .

Уведемо площину допоміжного комплексного параметра  $t$  так аби її

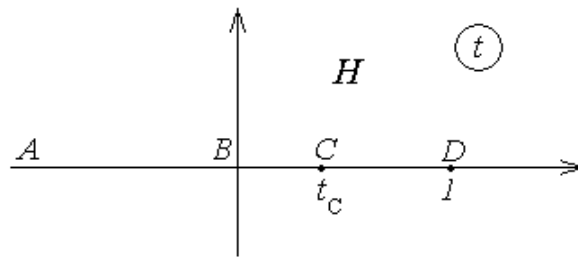


Рис 4.3. Площина допоміжного комплексного параметра  $t$ .

верхня частина  $H = \{t \mid \text{Im} t > 0\}$  конформно відображалася на область  $D$  (рис. 4.3) і шукатимемо розв'язок крайової задачі (4.3) у параметричному вигляді:

$$\tau = \tau(t), \zeta = \zeta(t), \quad (t \in H). \quad (4.4)$$

У площинах  $\zeta$  і  $t$  області конформних відображень є наперед відомими, а саме відображення  $\zeta = \zeta(t)$  визначається композицією функцій:

$$\zeta(t) = l \frac{(\sqrt{t} + 1)^\lambda + (\sqrt{t} - 1)^\lambda}{(\sqrt{t} + 1)^\lambda - (\sqrt{t} - 1)^\lambda}, \quad (4.5)$$

де  $\lambda = \frac{2\pi - \alpha}{2\pi}$ . Тут і даліше у цьому параграфі під  $t^q$  ( $t$  - комплексна змінна,  $q$  - дійсне число,  $|q| < 1$ ) розумітимемо аналітичну в області  $H$  функцію, що приймає дійсні додатні значення на дійсній додатній півосі.

Покажемо тепер, що визначення функції  $\tau(t)$  зводиться до задачі Келдиша-Сєдова [66]. Введемо нову невідому функцію:

$$\varphi(t) = \ln \frac{\tau(t)}{k}. \quad (4.6)$$

Внаслідок умов (4.3) отримаємо для  $\varphi(t)$  таку крайову задачу в області  $H$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \varphi(t) &= 0, \quad (t \in (-\infty; 0)); \\ \operatorname{Im} \varphi(t) &= -\arg \zeta'(t), \quad (t \in [0; t_c]); \\ \operatorname{Re} \varphi(t) &= 0, \quad (t \in (t_c; 1)); \\ \operatorname{Im} \varphi(t) &= 0, \quad (t \in [1; +\infty)). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Оскільки, ділянка  $t \in [0; 1]$  границі області  $H$  відображається функцією  $\zeta(t)$  у дугу  $BC$  межі області  $D$ , із формули (4.5) отримуємо:

$$x(t) = -2l \sin(\pi\lambda) f_5(t) / w(t), \quad y(t) = l(f_1(t) - f_2(t)) / w(t), \quad (4.8)$$

де  $f_1(t) = (1 + \sqrt{t})^{2\lambda}$ ,

$$f_2(t) = (1 - \sqrt{t})^{2\lambda},$$

$$f_3(t) = (1 + \sqrt{t})^{2\lambda-1},$$

$$f_5(t) = (1 - t)^\lambda,$$

$$w(t) = f_1(t) + f_2(t) - 2 \cos(\pi \lambda) f_5(t).$$

І, отже, на відрізку  $t \in [0; 1]$ :

$$\arg \zeta'(t) = \operatorname{arctg} \frac{y'(t)}{x'(t)}, \quad (4.9)$$

$$\text{де: } x'(t) = 2l \sin(\pi \lambda) \frac{(f_3(t)f_6(t) - f_4(t)f_6(t) + 2 \cos(\pi \lambda) f_7(t)) f_5(t)}{w^2(t)} + l \frac{f_7(t)}{w(t)},$$

$$y'(t) = -l \cdot \frac{(f_3(t)f_6(t) - f_4(t)f_6(t) + 2 \cos(\pi \cdot \lambda) f_7(t)) \cdot (f_1(t) - f_2(t))}{w^2(t)} + \\ + l \cdot \frac{f_6(t)(f_4(t) + f_3(t))}{w(t)},$$

$$f_4(t) = (1 - \sqrt{t})^{2\lambda-1},$$

$$f_6(t) = \frac{\lambda}{\sqrt{t}},$$

$$f_7(t) = \lambda(1-t)^{\lambda-1}.$$

Розв'язок крайової задачі Келдиша-Сєдова (4.7) зводиться до квадратур:

$$\varphi(t) = \frac{\sqrt{(t-t_c)(t-1)}}{\pi} \int_0^{t_c} \frac{\arg \zeta'(\eta) d\eta}{\sqrt{(\eta-t_c)(\eta-1)(\eta-t)}}. \quad (4.10)$$

Із формули (4.6) отримуємо:

$$\tau(t) = k e^{\varphi(t)}. \quad (4.11)$$

Оскільки

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{t_c} \frac{\arg \zeta'(\eta) d\eta}{\sqrt{(\eta-t_c)(\eta-1)}},$$

то із формул (4.3) і (4.11) отримуємо зв'язок параметра  $t_c$  з величиною діючого навантаження  $\tau_\infty$ :

$$\ln \frac{\tau_{\infty}}{k} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{t_c} \frac{\arg \zeta'(\eta) d\eta}{\sqrt{(\eta - t_c)(\eta - 1)}}. \quad (4.12)$$

Можна переконатися, що права частина рівняння (4.12) є монотонно-спадною функцією від  $t_c$  і при зміні  $t_c$  на відрізку  $[0;1]$  змінюється від 0 до  $-\infty$ . І, отже, для кожного  $\tau_{\infty} \in [0;k]$  рівняння (4.12) має єдиний розв'язок на відрізку  $[0;1]$ .

Таким чином розв'язок крайової задачі (4.3) дають функції (4.5), (4.11) для яких параметр  $t_c$  визначається із розв'язку рівняння (4.12).

Знайдемо тепер довжини смуг пластичного відшаровування у залежності від величини навантаження.

Кінцевій точці смуги у площині  $t$  відповідає  $t = t_c$ . Тому, за формулою (4.8):

$$\begin{aligned} x_1 &= -2l \sin(\pi\lambda) f_5(t_c) / w(t_c), \\ y_1 &= l(f_1(t_c) - f_2(t_c)) / w(t_c). \end{aligned}$$

Кутову величину пластичних смуг і частину відшарованої поверхні включення дають формули:

$$\psi = 2 \arcsin \frac{\sqrt{x_1^2 + (l - y_1)^2}}{2R} \quad \text{та} \quad \theta = \frac{2\psi}{\alpha}. \quad (4.13)$$

Розглянемо часткові випадки знайденого розв'язку.

## 4.2. Включення нульової товщини.

Якщо кут при вершині включення  $\alpha = 0$ , то ширина включення стає нульовою, а саме включення прямолінійним плоским:  $x = 0; |y| \leq l$ . Тоді  $\lambda$  у формулі (4.5) дорівнює одиниці, а  $\zeta(t) = il\sqrt{t}$ . На відрізку  $[0;1]$  дійсної осі  $t$   $\arg \zeta'(t) = \pi/2$ . Із формул (4.10), (4.11) для цього випадку отримуємо:

$$\tau(t) = k \frac{\sqrt{t_c - t} + i\sqrt{1 - t_c}\sqrt{t}}{\sqrt{t_c}\sqrt{1 - t}},$$

$$t_c = 4 \frac{k^4 \tau_\infty^4}{(k^2 + \tau_\infty^2)^2}.$$

Для довжини  $d$  смуги пластичного відшарування отримуємо просту явну залежність:

$$d = 2l \frac{\tau_\infty^2}{k^2 + \tau_\infty^2} \quad (4.14)$$

Знайдені для цього часткового випадку функція напружень і довжина шару пластичного відшарування співпадають із раніше відомими [115].

## 4.3. Кругове включення

Якщо кут при вершині включення  $\alpha = \pi$ , зникає кутова точка у включення і воно набуває кругової форми  $x^2 + y^2 = l^2$ ,  $R = l$ . Параметр  $\lambda = 1/2$ .

$$\zeta(t) = l \frac{\sqrt{\sqrt{t} + 1} + \sqrt{\sqrt{t} - 1}}{\sqrt{\sqrt{t} + 1} - \sqrt{\sqrt{t} - 1}}.$$

За наявності кутової точки на поверхні включення пружне поле напружень сингулярне і пластичні зони проявлятимуться навіть за як завгодно малого навантаження. Навпаки, у випадку гладкої границі для достатньо малих навантажень границя текучості не досягається, тому для гладких включень не завжди можна припускати наявність дугової ділянки на межі області  $G$ . Зокрема для кругового включення воно справедливе для навантажень  $\tau_{\infty} > k/2$ . Для цього випадку одержуємо:

$$\tau(\zeta) = \frac{(\zeta^2 + R^2)f(\zeta) + \tau_{\infty}(\zeta^2 + R^2)^2 - 4kR^2\zeta^2}{2\zeta^2(\zeta^2 - R^2)},$$

$$\text{де } f(\zeta) = \sqrt{\tau_{\infty}^2(\zeta^2 + R^2)^2 - 4kR^2\zeta^2(2\tau_{\infty} - k)}.$$

Кутовий розмір пластичної смуги дає формула:

$$\theta = \begin{cases} \arccos \frac{k - \tau_{\infty}}{\tau_{\infty}}, & \tau_{\infty} \geq k; \\ 0, & k < \tau_{\infty}. \end{cases} \quad (4.15)$$

Залежності частини відшарованої поверхні включення від навантаження для декількох значень кута при вершині включення наведено на рис. 4.4.

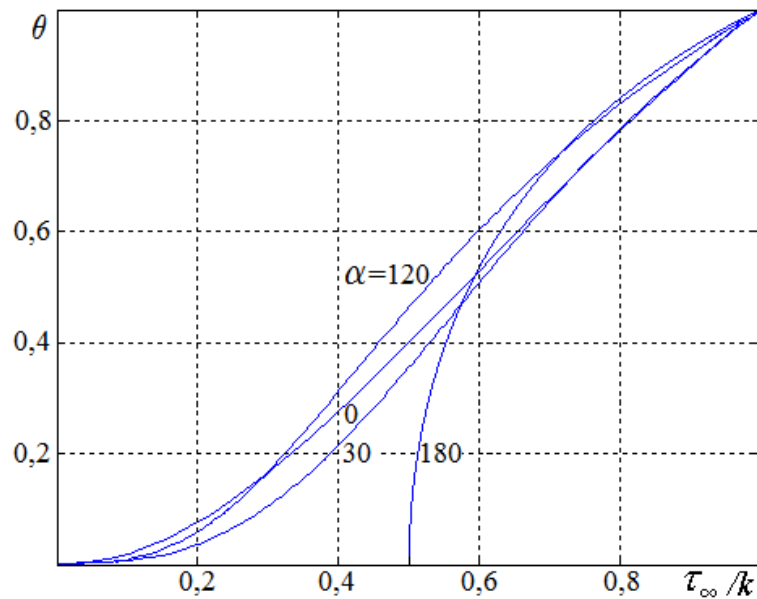


Рис. 4.4. Залежності частини відшарованої поверхні включення  $\theta$  від навантаження для чотирьох значень кута при вершині включення

#### 4.4. Вплив сильної взаємодії концентраторів на розвиток пластичних шарів

Розвиток пластичних шарів найдоступніший для досліджень у випадку малої товщини вирізів і жорстких тонких включень, коли в результаті нехтування шириною вирізу (товщиною включення) можливе застосування методом функцій стрибка і зведення задачі до інтегральних рівнянь [80, 91].

Значно складніша ситуація виникає при потребі дослідження розвитку пластичних зон для тіл з вирізами та включеннями загальнішого виду, зокрема V- подібних вирізів. [101, 102, 117, 118], прямокутних вирізів та включень [114 - 116]. Суттєво ускладнюються задачі дослідження НДС тіла за наявності у ньому близько-розташованих (сильно-взаємодіючих) концентраторів напружень. Актуальними залишаються дослідження пластичних зон поблизу вершин кутових точок вирізу [110, 114] та з'ясування впливу величини кута при вершині на форму та розвиток

пластичних зон в околі концентратора напружень. Недослідженою на разі є зміна форми пластичної зони в околі кутової точки межі тіла, яка у граничному випадку стає гладкою.

4.4.1 Постановка задачі про розвиток пластичних шарів від вершин близько-розміщених V-подібних вирізів.

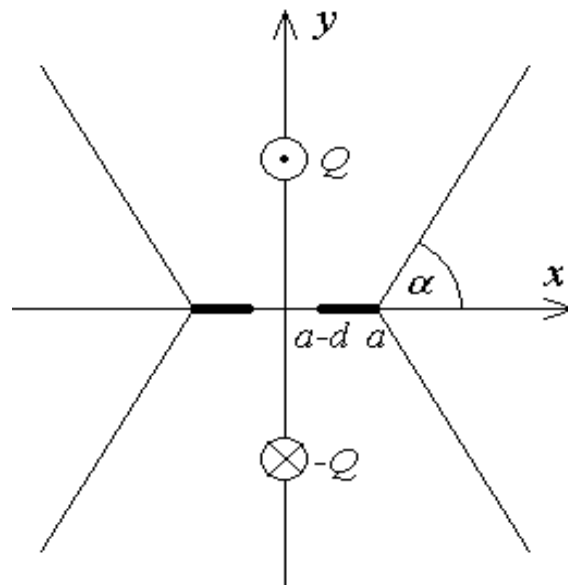


Рис. 4.5. Поперечний переріз тіла. Потовщені лінії – пластичні шари.

Дослідимо розвиток пластичних деформацій, зосереджених у площині на продовженні бісектриси вирізу (рис. 4.5). У системі координат  $Oxy$  межі смуги задаються рівнянням:  $|y| = (|x| - a) \operatorname{tg} \alpha$  ( $|x| \geq a$ ), вершини вирізів віддалені на відстань  $2a$ . Зосереджені сили  $\pm Q$  прикладені настільки далеко від вершин вирізів, що можна брати до уваги лише величину цих сил і нехтувати впливом їх відстані від вершин вирізів.

Задача полягає у визначенні залежності довжини шарів  $d$  від величини сил  $Q$  і знаходженні величини сили  $Q = Q^*$ , за якої пластичні шари, що розвиваються від обох вершин клина зникають, в результаті чого тіло

втрачає опір навантаженню. Зауважимо, що у випадку  $\alpha = 0$  тіло являє собою простір з двома півбезмежними тріщинами, а у випадку  $\alpha = \pi/2$  отримуємо смугу з паралельними гладкими гранями без концентраторів напружень.

#### 4.4.2. Дослідження розвитку локалізованих пластичних деформацій.

За вищевказаних умов у тілі виникне антиплоский напружено-деформівний стан, а складена із компонент напружень функція  $\tau(\zeta) = \tau_{yz}(x, y) + i\tau_{xz}(x, y)$  є аналітичною у пружній частині тіла. Компоненти напружень парні функції обох аргументів.

Зауважимо, що оскільки зосереджена сила прикладена далеко від вершин вирізів, можна вважати відомим напруження в одній довільно взятій точці тіла, зв'язавши його з величиною сили  $Q$ . Зручно покласти  $\tau_{yz}(0,0) = \tau_0$  ( $0 < \tau_0 < k$ ).

Вважаємо, що пластичні деформації зосереджені у шарах нульової товщини на бісектрисах кутових вирізів (див. рис 4.5.). Внаслідок симетрії функцію  $\tau(\zeta)$  достатньо визначити в області  $D$  – частині першого квадранта, обмеженого віссю абсцис, віссю ординат та прямою  $y = a + x \operatorname{tg} \alpha$ .

На межі цієї області повинні виконуватися такі умови:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \tau(\zeta) &= 0 \quad (\zeta = iy, 0 < y < +\infty); \\ \operatorname{Re} \tau(\zeta) &= 0 \quad (\zeta = x, 0 \leq x < a - d); \\ |\tau(\zeta)| &= k \quad (\zeta = x, a - d \leq x < a); \\ \arg \tau(\zeta) &= \frac{\pi}{2} - \alpha \quad (\zeta = x + iy, y = x \operatorname{tg} \alpha, a \leq x < +\infty); \\ \tau(\zeta) &= o(1), (\zeta \rightarrow \infty). \end{aligned} \tag{4.16}$$

Крім того, оскільки пластичний стан не може досягатися ніде поза пластичними шарами, всередині області  $D$  повинна виконуватися умова:

$$|\tau(\zeta)| < k. \tag{4.17}$$

Зрозуміло, що зосереджені сили, під впливом яких відбувається деформування тіла, врівноважуються напруженням  $\tau_{yz}$  на лінії, яка з'єднує вершини вирізів. Тому повинна виконуватися рівність:

$$\int_{-a}^a \tau_{yz}(x,0)dx = Q. \quad (4.18)$$

Можна переконатися, що функція  $\tau(\zeta)$  є однолистою в області  $D$  і конформно відображає її на круговий сектор  $0 < |\tau| < k, 0 < \arg \tau < \frac{\pi}{2} - \alpha$  (область  $G$ ) площини  $\tau$  (рис. 4.6).

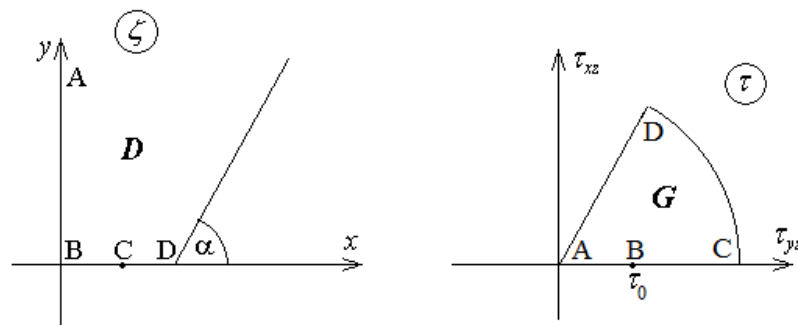


Рис. 4.6. Області конформного відображення у площинах  $\zeta$  і  $\tau$ .

Розв'язання задачі (4.16)-(4.17) звелось до побудови конформного відображення, поданого на рис.4.6. Уведемо допоміжну комплексну площину  $t$ , у якій областям  $D$  і  $G$  відповідатиме верхня півплощина (рис. 4.7, область  $H$ ).

Пара функцій

$$\zeta = \zeta(t), \tau = \tau(t), (t \in H) \quad (4.19)$$

визначатиме шукане відображення, якщо відповідні точки на межах областей  $D$  і  $G$  матимуть спільний прообраз на межі півплощини  $H$ .

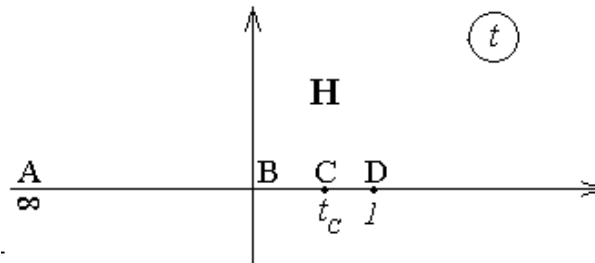


Рис. 4.7. Допоміжна комплексна площина.

Оскільки  $D$  прямолінійний многокутник відображення  $\zeta(t)$  можна отримати з допомогою перетворенням Крістоффеля-Шварца [25]:

$$\zeta = \frac{a}{C} \int_0^t \frac{d\eta}{\sqrt{\eta(\eta-1)}^{\alpha/\pi}}, \quad (4.20)$$

де  $C = \int_0^1 F(\eta) d\eta$ ,  $F(\eta) = \eta^{-1/2} (1-\eta)^{-\alpha/\pi}$ . Тут і далі під виразами  $(\eta - q)^\beta$  ( $q, \beta$  - дійсні числа,  $\eta \in H$ ) розуміємо аналітичні в області  $H$  функції, які приймають дійсні додатні значення, коли  $\eta$  є дійсним додатним і достатньо великим числом.

Другу із функцій (4.18) знаходимо композицією елементарних відображень:

$$\tau(t) = \frac{(k^p + \tau_0^p)^{2/p}}{4^{1/p} \tau_0} \left( \sqrt{t_c - t} - \sqrt{1 - t} \right)^{2/p}, \quad (4.21)$$

де 
$$p = \frac{2\pi}{\pi - 2\alpha},$$

$$t_c = \left( \frac{k^p - \tau_0^p}{k^p + \tau_0^p} \right)^2.$$

Надалі нам потрібна буде також обернена до  $\tau(t)$  функція:

$$t(\tau) = \frac{(k^{2p} - \tau_0^p \tau^p)(\tau^p - \tau_0^p)}{(k^p + \tau_0^p)\tau^p}.$$

Тепер подамо довжину пластичних шарів як функцію параметра  $\tau_0$ :

$$d = a \left( 1 - \frac{1}{C} \int_0^{t_c} F(\eta) d\eta \right). \quad (4.22)$$

Для завершення розв'язку задачі (4.16) – (4.18) залишилося зв'язати параметр  $\tau_0$  із силою  $Q$ . Оскільки  $Q = 2 \int_0^a \tau_{yz}(x, 0) dx$  то, скориставшись рівностями (4.20), (4.21), отримуємо:

$$Q = \frac{2a}{C} \left( K \int_0^{t_c} \frac{(\sqrt{1-\eta} - \sqrt{t_c - \eta})^{2/p}}{\sqrt{\eta}(1-\eta)^{\alpha/\pi}} d\eta + \int_{t_c}^1 \frac{\cos\left(\frac{2}{p} \arctg \sqrt{\frac{\eta - t_c}{1-\eta}}\right)}{\sqrt{\eta}(1-\eta)^{\alpha/\pi}} d\eta \right), \quad (4.23)$$

$$\text{де } K = \frac{\tau_0}{4^{1/p}} \left( 1 + \left( \frac{k}{\tau_0} \right)^p \right)^{2/p}.$$

#### 4.4.3. Числовий експеримент.

Залежність довжини пластичних шарів від навантаження для декількох величин кутів вирізу наведена на рис. 5.7 (суцільні лінії). Зі збільшенням навантаження довжини пластичних шарів збільшуються. Коли ж вони досягають величини  $a$  відбувається злиття пластичних шарів, що

розвиваються від протилежних вершин вирізів, і настає пластичне руйнування тіла. Найменшу величину сили  $Q = Q^*$ , за якої тіло перестає чинити опір зсуву, називатимемо критичним навантаженням. Як видно із рис. 4.7 пластичні шари зливатимуться коли  $t_c = 0$ . За формулою (4.23) знаходимо:

$$Q^* = \frac{2aK}{C} \int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{2}{p} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\eta}{1-\eta}}\right)}{\sqrt{\eta}(1-\eta)^{\alpha/\pi}} d\eta.$$

Критична сила тим більша, що більша величина кута при вершині вирізів. Коли кут  $\alpha = 0$  ця сила є найменшою і рівною, як це випливає із формули (4.25) величині  $Q_1^* = \pi ak/2$ . У граничному випадку  $\alpha \rightarrow \pi/2$  (грані смуги стають гладкими) пластичне руйнування можливе тільки за умови переходу всієї смуги в пластичний стан. Відповідне значення критичної сили  $Q_2^* = 2ak$ .

Вздовж обох пластичних шарів відбувається відносно проковзування нижнього і верхнього берегів та появляється тангенціальний розрив переміщення. Максимальне значення розриву  $g = w(a, +0) - w(a, -0)$  ( $w(x, y)$  – переміщення вздовж осі аплікат) досягається у вершинах вирізів.

$$g = \frac{2}{\mu} \int_{a-d}^a \tau_{xz}(x, 0) dx = \frac{2aK}{\mu C} \int_{t_c}^1 \frac{\sin\left(\frac{2}{p} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\eta - t_c}{1-\eta}}\right)}{\sqrt{\eta}(1-\eta)^{\alpha/\pi}} d\eta.$$

#### 4.4.4. Крайні можливі значення кутів при вершинах вирізу

$\alpha = 0$  і  $\alpha = \pi/2$ . Нехай спочатку  $\alpha \rightarrow \pi/2$  – вершини вирізу зникають а грані смуги стають гладкими. У цьому випадку  $p \rightarrow \infty$  і, відповідно,  $t_C \rightarrow 1$ . Із очевидного співвідношення

$$\tau(t) = \frac{(k^p + \tau_0^p)^{2/p}}{4^{1/p} \tau_0} \left( \frac{t_C - 1}{\sqrt{t_C - t} + \sqrt{1 - t}} \right)^{2/p}$$

випливає, що:

$$\tau(t) = \frac{(k^p + \tau_0^p)^{2/p}}{4^{1/p} \tau_0} \left( \frac{t_C - 1}{2\sqrt{1 - t}} + o(t_C - 1) \right)^{2/p}, \text{ при } t_C \rightarrow 1.$$

$$\text{Оскільки } (t_C - 1)^{2/p} = \left( \frac{16k^{2p} \tau_0^{2p}}{(k^p + \tau_0^p)^4} \right)^{1/p},$$

то при  $t_C \rightarrow 1$ , для усіх  $t \neq 1$  маємо:

$$\tau(t) = \frac{k^2 \tau_0^2}{\tau_0 (k^p + \tau_0^p)^{2/p}} + o(t_C - 1).$$

І, отже,  $\tau(t)$  при  $\alpha \rightarrow \pi/2$  поточково збіжна до  $\tau_0$ . Ми отримали цілком сподіваний результат: коли грані стають гладкими тіло деформується однорідно і поки  $\tau_0 < k$  пластичні деформації не виникають, а коли  $\tau_0 = k$  вся смуга переходить у пластичний стан.

Для найменшого можливого кута при вершинах вирізу смуга вироджується у тіло з двома півбесмежними розрізами. У цьому випадку з формул (4.20) та (4.21) отримуємо функцію напружень у явному вигляді:

$$\tau(\zeta) = \frac{k}{\sqrt{2ad - d^2}} \left( \sqrt{a^2 - \zeta^2} - \sqrt{(a - d)^2 - \zeta^2} \right). \quad (4.24)$$

Тут  $d = \frac{\pi a k - \sqrt{\pi^2 a^2 k^2 - 4Q^2}}{\pi k}$  для  $Q \leq Q^* = \frac{\pi a k}{2}$ . Коли  $Q \ll Q^*$ , то

$$d = \frac{2a}{\pi^2} \left( \frac{Q}{a k} \right)^2.$$

#### 4.4.5. Пружний розв'язок.

Із формул (4.20), (4.21) як частковий випадок можна отримати пружний розв'язок задачі спрямувавши границю текучості  $k$  до нескінченності. У такий спосіб знаходимо:

$$\tau^{(e)}(t) = \frac{\tau_0}{(1-t)^{1/p}}. \quad (4.25)$$

Формули (4.20), (4.25) дають пружний розв'язок задачі, для якого сила  $Q$  лінійно пов'язана із напруженням  $\tau_0$ :

$$Q = \frac{2a\tau_0}{C} \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{\eta(1-\eta)}} = \frac{2\pi a\tau_0}{C}. \quad (4.26)$$

Дослідимо поле пружних напружень в околі вершин вирізів. Із формул (4.20) для  $t \rightarrow 1$  отримуємо:

$$\zeta(t) = a + \frac{a}{C} \left( \frac{\pi}{\pi - \alpha} (t-1)^{\frac{\pi-\alpha}{\pi}} + o(t-1)^{\frac{\pi-\alpha}{\pi}} \right).$$

І, отже, при  $\zeta \rightarrow a$  отримуємо:

$$\tau^{(e)}(\zeta) = \tau_0 \left( C \frac{\pi - \alpha}{\pi} \right)^{-\frac{\pi-2\alpha}{2(\pi-\alpha)}} \left( \frac{\zeta - a}{a} \right)^{-\frac{\pi-2\alpha}{2(\pi-\alpha)}} + o \left( \left( \frac{\zeta - a}{a} \right)^{-\frac{\pi-2\alpha}{2(\pi-\alpha)}} \right). \quad (4.27)$$

Поле пружних напружень в околі вершин вирізів сингулярне з показником  $\frac{\pi-2\alpha}{2(\pi-\alpha)}$ . Коефіцієнт при сингулярному члені рівний

$$K_{III}^V = \frac{QC}{2\pi a} \left( C \frac{\pi - \alpha}{\pi} \right)^{-\frac{\pi-2\alpha}{2(\pi-\alpha)}}. \text{ Коли кут } \alpha \text{ наближається до нуля } K_{III}^V \rightarrow K_{III}.$$

#### 4.5. Висновки до розділу

1. Знайдено аналітичний розв'язок задачі про міжфазне пластичне відшаровування жорсткого тунельного включення, обмеженого циліндричними поверхнями. Для довільного кута при вершинах включення визначено напружено-деформівний стан середовища і залежності довжин пластичних смуг від величини навантаження. Отримані результати дають можливість встановити межі застосовності часто вживаного у механіці руйнування припущення нульової товщини тонкого включення.

2. Отримано аналітичний розв'язок антиплоскої пружно-пластичної задачі про розвиток пластичних шарів для ідеально пружно-пластичної смуги з кутовими точками на її межі для випадку коли відношення відстані між вершинами до довжини граней вирізу рівна нулю, зокрема:

а) знайдено довжину пластичних шарів у залежності від величини зосередженої сили, прикладеної на великій відстані від вершин кутів;

б) визначено величину критичного навантаження  $Q^*$ , за якого зливаються пластичні шари, що розвиваються від протилежних вершин вирізів і смуга втрачає опір навантаженню;

в) встановлено, що критичне навантаження менше за  $2ak$ , причому різниця  $2ak - Q^*$  тим більша, що менший кут при вершинах вирізу;

г) встановлено, що при наближенні величини кута при вершинах вирізу до максимально-допустимого значення  $90^\circ$ , за якого кутові точки щезають а грані смуги стають гладкими, пластичні шари теж поступово зникають, а напружено деформований стан поступово стає однорідним.

## РОЗДІЛ 5. ПОЧАТКОВА СТАДІЯ РОЗВИТКУ МІЖФАЗНИХ ПЛАСТИЧНИХ ШАРІВ ЗА УМОВИ ЇХ НЕДОСКОНАЛОГО КОНТАКТУ З СЕРЕДОВИЩЕМ

Визначення НДС на основі лінійної теорії пружності призводить до появи сингулярності поля напружень у вершинах кутових точок вирізів. Компоненти напружень на відстані  $\rho$  від вершини концентратора асимптотично рівні  $K\rho^{-\alpha} + o(\rho^{-\alpha})$ , де  $\alpha \in (0;1)$  і, зокрема у випадку тріщини з вільними від напружень берегами,  $\alpha = 1/2$ . Така особливість пружних розв'язків, без уваги прийняту в теорії пружності гіпотезу суцільності та без огляду на атомарну будову речовини, виглядає фізично некоректною: реальне тіло не в стані витримувати необмежених напружень. Однак саме визначення параметрів  $K$  і  $\alpha$  дозволило створити важливий розділ науки про міцність твердих тіл з дефектами – лінійну механіку руйнування, яка сьогодні є загально-визнаною та практично спроможною для достатньо крихких тіл – тіл у яких перед руйнуванням не виникає великих зон пластичного деформування. Успіхи у визначенні КІН для тіл з тріщинами різних форм і конфігурацій [76, 82] якось відсунули питання про межі застосовності лінійної механіки руйнування та питання про можливість використання параметрів  $K$  і  $\alpha$  для оцінки пластичних деформацій, що неминуче виникатимуть біля вершини концентратора навіть при зовсім невеликих навантаженнях. Успішна спроба у цьому напрямку зроблена В.А. Кривенем у роботі [44], де для аналізу розвитку пластичних зон на початковій стадії розвитку запропоновано ЛМПЗ, яка опирається на параметри  $K$  і  $\alpha$  пружного розв'язку задачі.

Основу робіт розділу складають праці автора [10, 11, 12, 45, 54].

### 5.1. Початкова стадія пластичного відшаровування довгого прямокутного включення за наявності міжфазних тріщин

Крім пружного розв'язку вихідної задачі ЛМПЗ потребує також двох відповідних допоміжних розв'язків задач, що не містять параметрів розмірності довжини, у пружній та пружно-пластичній постановках для кожного концентратора напружень. Згідно з ЛМПЗ пластичну зону визначають за допоміжним пружно-пластичним розв'язком, узгодженим з допоміжним пружним розв'язком, котрий, у свою чергу, узгоджено з основним пружним розв'язком. У нашому випадку є два концентратори напружень: вершина включення і вершина міжфазної тріщини. Для вершини включення допоміжними будуть розв'язки для тіла з включенням, яке займає у площині  $Oxy$  третій квадрант, а для вершини тріщини розв'язки для півбезмежної прямолінійної тріщини  $x < 0, y = \pm 0$  поздовжнього зсуву.

Займемося спочатку пружним розв'язком вихідної задачі. Його можна отримати із пружно-пластичного граничним переходом до безмежно великої границі текучості ( $k \rightarrow \infty$ ). Перетворимо з цією метою рівність (3.6) і з урахуванням співвідношення (3.7) надамо її такого вигляду:

$$\tau(t) = k \sqrt{\frac{1-t_E}{(t_E-t_C)(t_E-t_D)}} \frac{(t_C+t_D-t_B-t_E)\sqrt{t-1}}{\sqrt{(t-t_B)(t-t_E)} + \sqrt{(t-t_C)(t-t_D)}}.$$

Беручи до уваги, що при  $k \rightarrow \infty$  пластичні шари стають безмежно малими і, отже,  $t_C \rightarrow t_B$ ,  $t_D \rightarrow 0$ ,  $t_E \rightarrow 0$  для пружного розв'язку задачі отримуємо:

$$\tau^{(e)}(t) = C \frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{t(t-t_B)}}, \quad (5.1)$$

де  $C$  - стала із розмірністю напруження, яку можна знайти урахувавши, що на нескінченності асимптотики поля пружного і пружно-пластичного розв'язків повинні бути однаковими і визначаються останнім із співвідношень (3.1). Однаковими для обох цих розв'язків є також функції  $\zeta(t)$ .

В результаті із формул (3.4), (5.1) при  $\zeta \rightarrow \infty$  отримуємо:

$$\tau^{(e)}(\zeta) = C \sqrt{\frac{2b}{\pi\zeta}} + (\zeta^{-1/2}). \text{ І, таким чином порівнюючи знайдену асимптотику}$$

із потрібною (3.1), знаходимо:

$$\tau^{(e)}(t) = \frac{K_3}{2\sqrt{b}} \frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{t(t-t_B)}}. \quad (5.2)$$

Формули (3.4), (5.2) дають пружний розв'язок вихідної задачі.

Визначимо його асимптотику у вершині включення.

Оскільки при  $t \rightarrow 0$

$$\zeta(t) - ib = \frac{4b}{3\pi i} t^{3/2} + o(t^{3/2}), \quad \tau^{(e)}(t) = \frac{K_3}{2\sqrt{bt_B}} \frac{1}{\sqrt{t}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right), \text{ то:}$$

$$\tau^{(e)}(\zeta) = -\frac{K^V}{(\zeta - ib)^{1/3}} + o(\zeta - ib)^{-1/3}, \quad K^V = \frac{K_3}{\sqrt[6]{36\pi^2 b \sqrt{-t_B}}}, \quad (5.3)$$

при  $\zeta \rightarrow ib$

Для дослідження початкової стадії розвитку шарів пластичного відшаровування при вершинах включення поставимо і розв'яжемо крайову задачу для функції напружень  $\tau_1(\zeta)$  пружно-пластичної задачі для включення, що в поперечному перерізі тіла займає третій квадрант:

$$\operatorname{Im} \tau_1(\zeta) = 0, \quad (\zeta = x, -\infty < x < d_{01});$$

$$\begin{aligned}
|\tau_1(\zeta)| &= k, \quad (\zeta = x, d_{01} \leq x \leq 0); \\
|\tau_1(\zeta)| &= k, \quad (\zeta = iy, b - d_{01} \leq y \leq b); \\
\operatorname{Re} \tau_1(\zeta) &= 0, \quad (\zeta = iy, 0 < y < b - d_{01}),
\end{aligned} \tag{5.4}$$

де  $d_{01}$  - довжини горизонтального і вертикального пластичних шарів, які у цьому випадку є рівними.

Крім того функція у вершині вирізу  $\tau_1(\zeta)$  повинна володіти асимптотикою (5.3), при  $\zeta \rightarrow 0$ :

$$\tau_1(\zeta) = -\frac{K^V}{\zeta^{1/3}} + o(\zeta)^{-1/3} \tag{5.5}$$

і всюди поза шарами пластичного відшаровування повинна виконуватись умова  $|\tau_1(\zeta)| < k$ .

Внаслідок співвідношень (5.4) функція  $\tau_1(\zeta)$  конформно відображає область площини  $\zeta$ , що є об'єднанням першого, другого та третього квадрантів на круговий сектор  $|\tau_1| < k$ ,  $0 < \arg \tau_1 < \pi/2$  площини  $\tau_1$  (рис. 5.1).

Безпосередньою побудовою конформного відображення отримуємо:

$$\tau_1(\zeta) = \frac{\sqrt{2}kd_{01}^{1/3}}{\sqrt{d_{01}^{2/3} - \zeta^{2/3}} + \sqrt{-d_{01}^{2/3} - \zeta^{2/3}}}, \tag{5.6}$$

де  $\sqrt{d_{01}^{2/3} - \zeta^{2/3}}$  - аналітична у перших трьох квадрантах функція, рівна  $-\zeta^{1/3} + o(\zeta^{1/3})$  при  $\zeta \rightarrow \infty$ .

Спрямувавши  $k \rightarrow \infty$  і беручи до уваги цьому  $d_{01} \rightarrow 0$ , отримуємо із формули (5.6) пружний розв'язок допоміжної задачі:

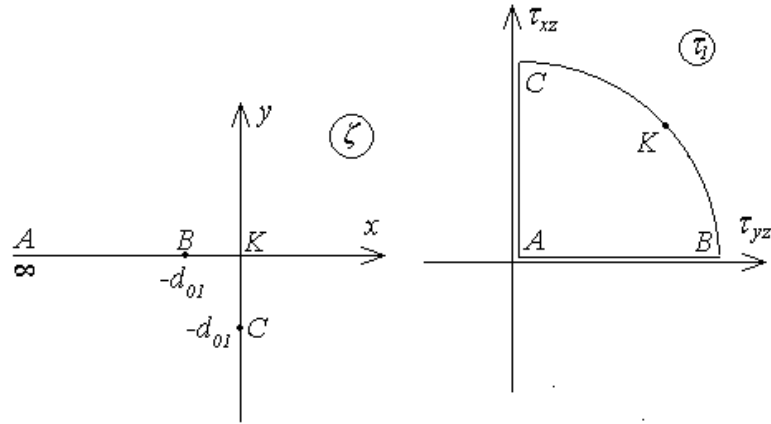


Рис. 5.1. Конформне відображення для допоміжної пружно-пластичної задачі.

$$\tau_1^{(e)}(\zeta) = -\frac{kd_{01}^{1/3}}{\sqrt{2}\zeta^{1/3}},$$

який узгоджуватиметься з основним пружним розв'язком, коли

$$\frac{kd_{01}^{1/3}}{\sqrt{2}} = K^v. \quad (5.7)$$

Зрівнюючи (5.3) і (5.7) отримуємо формулу для довжини шарів пластичного відшаровування при вершинах включення на початковій стадії розвитку:

$$d_{01} = \frac{\sqrt{2}}{3\pi\sqrt{-bt_B^3}} \left( \frac{K_3}{k} \right)^3. \quad (5.8)$$

Для дослідження початкової стадії розвитку шарів пластичного відшаровування при вершинах міжфазної тріщини скористаємося розв'язком

$\tau_2(\zeta)$  задачі про розвиток пластичної смуги на продовження півбезмежної прямолінійної тріщини  $x < 0, y = \pm 0$  поздовжнього зсуву [38]:

$$\tau_2(\zeta) = k \frac{\sqrt{\zeta} - \sqrt{\zeta - d_{02}}}{\sqrt{d_{02}}},$$

де  $d_{02}$  - довжина пластичного шару при вершині міжфазної тріщини.

Асимптотично еквівалентний йому на нескінченності пружний розв'язок дістанемо в результаті граничного переходу  $k \rightarrow \infty$ :

$$\tau_2^{(e)}(\zeta) = \frac{k\sqrt{d_{02}}}{2\sqrt{\zeta}}. \quad (5.9)$$

Визначимо асимптотику поля пружних напружень в околі вершини міжфазної тріщини.

Із формул (3.4), (5.2) для  $t \rightarrow t_B$  знаходимо:

$$\zeta = -a + ib + \frac{2b}{\pi} \sqrt{\frac{t_B}{1-t_B}}(t-t_B) + o(t-t_B),$$

$$\tau^{(e)}(t) = \frac{K_3}{2\sqrt{b}} \sqrt{\frac{t_B-1}{t_B}} \frac{1}{\sqrt{t-t_B}} + o((t-t_B)^{-1/2}).$$

І, отже:

$$\tau^{(e)}(\zeta) = \frac{K_3}{\sqrt{2\pi}} \sqrt[4]{\frac{t_B-1}{t_B}} \frac{1}{\sqrt{\zeta+a-ib}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{\zeta+a-ib}}\right), \quad (5.10)$$

при  $\zeta \rightarrow -a + ib$ .

Із формул (5.3) і (5.7) отримуємо формулу для довжини пластичних шарів при вершині міжфазної тріщини для початкової стадії розвитку:

$$d_{02} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{t_B - 1}{t_B}} \left( \frac{K_3}{k} \right)^2. \quad (5.11)$$

Відносну похибку ЛМПЗ визначаємо за формулами (3.12) як

$$\eta = \frac{|d_2 - d_1|}{d_2}.$$

## 5.2. Початкова стадія пластичного відшаровування волокна квадратного перерізу

Як відомо ЛМПЗ дає можливість дослідження пластичних зон (зокрема смуг) при малих навантаженнях на основі пружного розв'язку задачі. Крім пружного її застосування потребує двох відповідних допоміжних розв'язків задач, що не містять параметрів розмірності довжини, у пружній та пружно-пластичній постановках. Згідно з ЛМПЗ пластичну зону

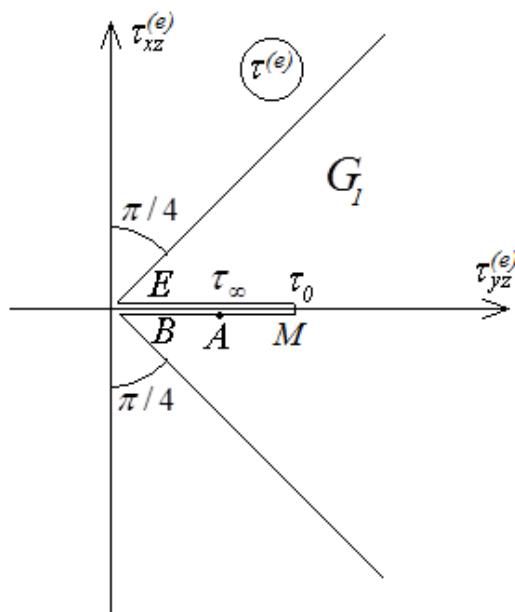


Рис. 5.2. Область  $G_1$ .

визначають за допоміжним пружно-пластичним розв'язком, узгодженим з допоміжним пружним розв'язком, котрий узгоджено з основним пружним розв'язком.

Пружний розв'язок. Позначимо тепер функцію  $\tau_{yz}(x, y) + i\tau_{xz}(x, y)$  як  $\tau^{(e)}(\zeta)$ . Крайова задача для  $\tau^{(e)}(\zeta)$  відрізняється від (3.14), тим що не містить умов пластичності та параметра  $d$  (у рівностях (3.14) слід покласти  $d = 0$ ). Четверта із умов (3.14) повинна виконуватися на всій грані включення. Тобто третю та четверту умови (3.14) слід замінити такою одною:  $\arg \tau^{(e)}(\zeta) = \pi/4$ , ( $\zeta = x + iy$ ,  $l/\sqrt{2} < x < a$ ). Крім того, на функцію  $\tau^{(e)}(\zeta)$  не накладається обмеження (3.15),  $\tau^{(e)}(\zeta) \rightarrow \infty$  при  $\zeta \rightarrow \pm ia$ .

Визначення функції  $\tau^{(e)}(\zeta)$  можна знову звести до задачі конформного відображення. Конформним образом області  $D$  у площині  $\tau$  буде тепер кут з розрізом (область  $G_1$ , рис. 5.2). Параметр  $\tau_0$ , що має зміст максимального напруження  $\tau_{yz}$  на межі області  $D$  поза гранню включення, уведений з метою існування конформного відображення області  $D$  на область  $G_1$ .

Функцію  $\tau^{(e)}(\zeta)$  шукаємо в параметричному вигляді (3.16). Скориставшись площиною допоміжного комплексного параметра, яка від наведеної на рис. 3.7 відрізняється тільки відсутністю точки  $D$  на дійсній осі, шляхом композиції елементарних відображень отримаємо:

$$\tau^{(e)}(t) = \tau_\infty \tau_0 \frac{\sqrt[4]{4t(t-1)}}{\sqrt{2\tau_0^2 t - \tau_0^2 - \sqrt{\tau_0^4 - \tau_\infty^4}}}, \quad (5.12)$$

$$\text{де } \tau_0 = \frac{\tau_\infty}{\sqrt{2}\sqrt[4]{t_C - t_C^2}}.$$

Очевидно, що пружний розв'язок існує для всіх довжин міжфазних тріщин  $0 < l < b$  і довільного рівня навантаження  $0 < \tau_\infty < k$ , як і слід було сподіватися. Функцію  $\tau^{(e)}(\zeta)$  для цього випадку дають формули (3.17), (5.12).

З'ясуємо асимптотику пружного розв'язку у вершині тріщини.

Із формули (3.17) випливає, що при  $\zeta \rightarrow \zeta_0 \left( \zeta_0 = \frac{l}{\sqrt{2}} + i \left( a - \frac{l}{\sqrt{2}} \right) \right)$ ,

$$\zeta = \zeta_0 + \frac{a(1-i)}{B(3/4, 3/4)} \frac{(t-t_c)}{\sqrt[4]{t_c(1-t_c)}} + o(t-t_c), \quad (5.13)$$

В околі точки  $t = t_c$  функція (5.12) набуває такого вигляду:

$$\tau^{(e)}(t) = \tau_\infty \frac{\sqrt[4]{t_c(t_c-1)}}{\sqrt{t-t_c}} e^{i\frac{\pi}{4}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{t-t_c}}\right). \quad (5.14)$$

Виключивши із рівностей (5.13), (5.14) змінну  $t$ , отримуємо асимптотику  $\tau^{(e)}(\zeta)$  в околі вершини тріщини:

$$\tau^{(e)}(\zeta) = \tau_\infty \sqrt[4]{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[8]{t_c(1-t_c)}}{\sqrt{B(3/4, 3/4)}} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\zeta_0 - \zeta}} + o((\zeta_0 - \zeta)^{-1/2}). \quad (5.15)$$

Поле пружних напружень сингулярне в околі вершини міжфазної тріщини з показником  $1/2$ , як і у випадку, коли обидва її береги є вільними від напружень поверхнями середовища. Коефіцієнт сингулярного члена напружень прямує до нуля для безмежно малої тріщини, бо  $t_c \rightarrow 0$  коли  $l \rightarrow 0$ . Для гранично допустимої

довжини тріщини (для  $l \rightarrow b$ ), вершини міжфазних тріщин досягають горизонтальних вершин включення, а напруження весь час залишаються

нульовими, сингулярний член пружного розв'язку стає безмежно малим оскільки в цьому випадку  $t_c \rightarrow 1$ .

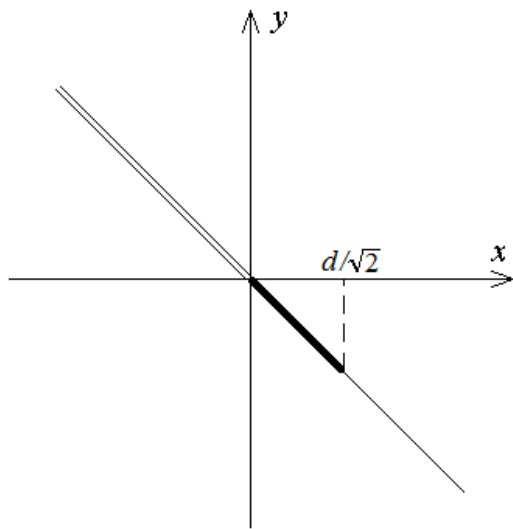


Рис. 5.3. Поперечний переріз тіла для допоміжної пружно-пластичної задачі.

Допоміжними для ЛМПЗ є пружна та пружно-пластична задачі для деформівного середовища  $x + y > 0$  і жорсткого включення  $x + y < 0$ , з'єднаних вздовж променя  $x + y = 0, x > 0$  за наявності півбезмежної тріщини  $x + y = 0, x < 0$  на їх спільній межі (рис. 5.3) в стані антиплоскої деформації, спричиненої наскіченно малими напруженнями, прикладеними на безмежності.

Поставимо допоміжну крайову пружно-пластичну задачу для функції напружень, яку тепер позначатимемо  $\tau_1(\zeta)$ . Аналогічно як для  $\tau(\zeta)$  отримуємо:

$$\arg \tau_1(\zeta) = -\pi/4, \quad (\arg \zeta = 3\pi/4, 0 < |\zeta| < +\infty);$$

$$|\tau_1(\zeta)| = k, \quad (\arg \zeta = -\pi/4, 0 < |\zeta| < d);$$

$$\arg \tau_1(\zeta) = \pi/4, \quad (\arg \zeta = -\pi/4, d < |\zeta| < +\infty);.$$

$$\tau_1(\zeta) = \frac{K}{\sqrt{\zeta}} e^{i\frac{\pi}{8}} + o(\zeta^{-1/2}), \quad \zeta \rightarrow \infty, \quad (5.16)$$

де  $M$  – дійсна додатна константа, через яку задано величину прикладеного навантаження.

Розв'язком останньої задачі є аналітична функція, що здійснює конформне відображення області  $D_1 = \{\zeta | \operatorname{Re}((1+i)\zeta) > 0\}$  на круговий сектор  $G_2 = \{\tau | |\tau| < k, -\pi/4 < \arg \tau < \pi/4\}$  (на рис. 5.4, вказано відповідність трьох точок на межах областей  $D_1$  і  $G_2$ ).

Шляхом композиції елементарних відображень отримуємо:

$$\tau_1(\zeta) = k \frac{1-i}{2^{3/4} \sqrt{d}} \left( \sqrt{(1+i)\zeta} - \sqrt{(1+i)\zeta - d\sqrt{2}} \right),$$

$$d = 2\sqrt{2} \left( \frac{K}{k} \right)^2. \quad (5.17)$$

Для знаходження допоміжного пружного розв'язку  $\tau_1^{(e)}(\zeta)$

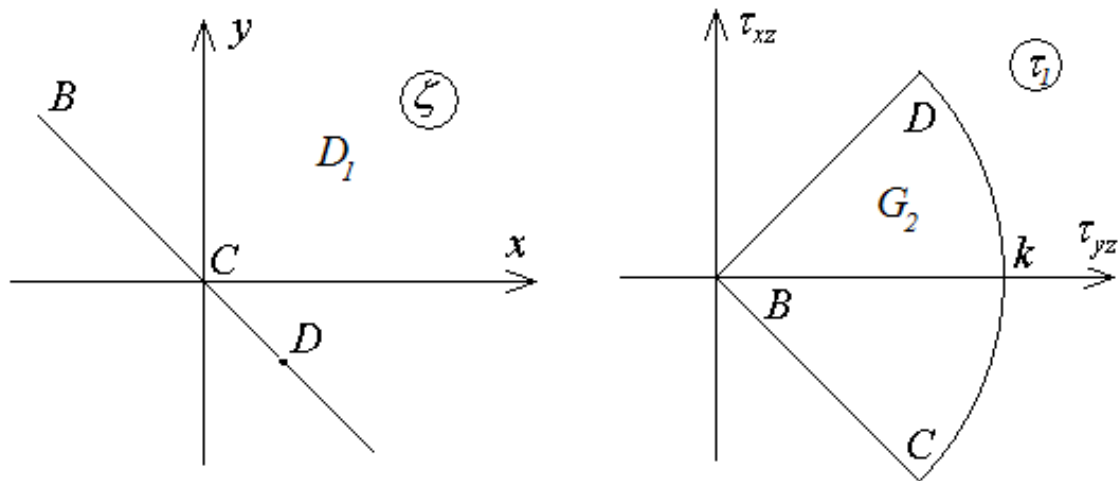


Рис. 5.4. – Области конформного відображення допоміжної пружно-пластичної задачі.

необов'язково ставити і розв'язувати відповідну крайову задачу. Його можна

отримати із допоміжного пружно-пластичного розв'язку спрямувавши до нескінченності границю текучості:

$$\tau_1^{(e)}(\zeta) = Ke^{\frac{i\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\zeta}}. \quad (5.18)$$

Основний та допоміжний пружні розв'язки повинні бути узгодженими (асимптотично еквівалентними у вершині тріщини), що, як випливає з формул (5.15), (5.18), забезпечується рівністю:

$$K = \tau_\infty \sqrt[4]{2} \frac{\sqrt[8]{t_c(1-t_c)}}{\sqrt{B(3/4, 3/4)}} \sqrt{a}. \quad (5.19)$$

Із формул (5.17), (5.19) отримуємо залежність довжини смуги пластичного відшарування від величини навантаження за ЛМПЗ:

$$d = \frac{2\sqrt{2}\tau_\infty^2}{k^2} \frac{\sqrt[4]{t_c(1-t_c)}}{B^2(3/4, 3/4)}. \quad (5.20)$$

На початковій стадії розвитку міжфазна пластична смуга розвивається за квадратичним законом, аналогічно смузі на продовженні тріщини. На противагу цьому, за умови ідеального контакту включення з середовищем, на розвиток міжфазної смуги суттєво впливає величина кута  $\alpha$  при вершині включення: для малих навантажень  $d$  пропорційне  $\tau_\infty^{(\pi-\alpha)/(2\pi)}$ .

Порівняння результатів точного розв'язку та ЛМПЗ

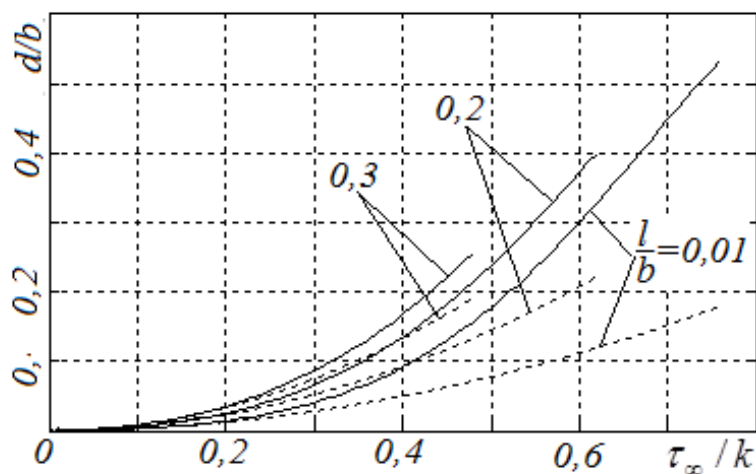


Рис. 5.5. Довжини смуг пластичного відшаровування, визначених за точним розв'язком (суцільні лінії) і ЛМПЗ (штрихові лінії).

наведено на рис. 5.5.

### 5.3. Початкова стадія розвитку пластичних смуг від вершин двох близьких V-подібних вирізів

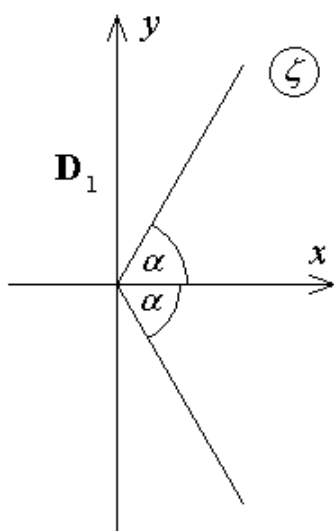


Рис. 5.6. – Область  $D_1$

Застосуємо ЛМПЗ до дослідження початкової стадії розвитку пластичних смуг від вершин двох близьких V-подібних вирізів. Ця модель потребує розв'язків двох відповідних допоміжних задач у пружній та пружно-пластичній постановках в області, що не містить параметра з розмірністю довжини. Для задачі (4.16) таким параметром є відстань між вершинами. Вважаючи її нескінченно великою і

помістивши початок системи координат у вершину правого вирізу дістаємо, що для допоміжних задач області, у якій слід розв'язати задачі є: для пружної задачі  $D_1$  – частина площини поза кутом утвореним променями  $(-\infty < x \leq 0, y = x \operatorname{tg} \alpha)$  і  $(0 \leq x < +\infty, y = -x \operatorname{tg} \alpha)$ , (рис. 5.6); для пружно-пластичної –  $D_2$  (область  $D_1$  розрізана вздовж відрізка дійсної осі  $[-l; 0]$ , рис. 5.7). Тут  $l$  – довжина пластичного шару, яку знаходять із умови узгодженості допоміжних розв'язків та пружного розв'язку основної задачі.

Утворена компонентами тензора напружень функція  $\tau_1(\zeta) = \tau_{yz}(x, y) + i \tau_{xz}(x, y)$  повинна задовольняти в області  $D_2$  таким крайовим умовам:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \tau_1(\zeta) &= 0, \zeta = x, -\infty < x < -l; \\ |\tau_1(\zeta)| &= k, \zeta = x, -l \leq x \leq 0; \\ \arg \tau_1(\zeta) &= \pi/2 - \alpha, \zeta = x + iy, 0 < x < +\infty, y = x \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned} \quad (5.21)$$

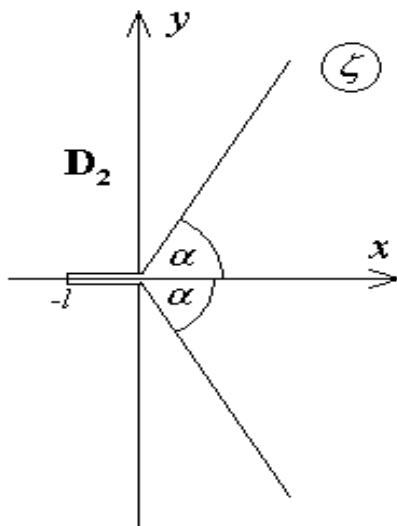


Рис. 5.7. Область  $D_2$

Внаслідок умов (5.21) функція  $\tau_1(\zeta)$  конформно відображає область  $D_2 \cap \{\operatorname{Im} \zeta > 0\}$  на сектор  $G$  і може бути знайденою безпосередньою побудовою відповідного конформного відображення:

$$\tau_1(\zeta) = k \left( \frac{e^{-i\alpha q} \zeta^q - \sqrt{e^{-2i\alpha q} \zeta^{2q} - l^{2q}}}{e^{-i\alpha q} \zeta^q + \sqrt{e^{-2i\alpha q} \zeta^{2q} - l^{2q}}} \right)^{1/p} \quad (5.22)$$

$$\text{де } q = \frac{\pi}{2(\pi - \alpha)}.$$

Допоміжний пружний розв'язок  $\tau_1^{(e)}(\zeta)$  можна отримати як частковий випадок співвідношення (5.22) при  $k \rightarrow \infty$  і  $l \rightarrow 0$ .

Таким способом отримуємо:

$$\tau_1^{(e)}(\zeta) = M\zeta^{-\frac{\pi-2\alpha}{2(\pi-\alpha)}}, \quad (5.23)$$

де  $M = \text{const}$ , яку слід знайти із умови асимптотичної еквівалентності на нескінченності функцій  $\tau_1(\zeta)$  і  $\tau_1^{(e)}(\zeta)$ .

Оскільки при  $\zeta \rightarrow \infty$

$$\tau_1(\zeta) = R \left( \frac{\zeta}{l} \right)^{-\frac{\pi-2\alpha}{2(\pi-\alpha)}} + o \left( \frac{\zeta}{l} \right)^{-\frac{\pi-2\alpha}{2(\pi-\alpha)}}, \quad R = k(-1)^{\frac{\pi-2\alpha}{2(\pi-\alpha)}} 2^{-\frac{\pi-2\alpha}{\pi}},$$

то пружний розв'язок допоміжної задачі стане узгодженим допоміжним пружно-пластичним розв'язком коли  $M = Rl^{\frac{\pi-2\alpha}{2(\pi-\alpha)}}$  і тоді:

$$\tau_1^{(e)}(\zeta) = k(-1)^{\frac{\pi-2\alpha}{2(\pi-\alpha)}} 2^{-\frac{\pi-2\alpha}{\pi}} \left( \frac{\zeta}{l} \right)^{-\frac{\pi-2\alpha}{2(\pi-\alpha)}}. \quad (5.24)$$

Узгодимо тепер основний та допоміжний пружні розв'язки. Для цього слід забезпечити їх асимптотичну еквівалентність у вершині вирізів. Із формул (4.27) і (5.24) отримуємо:

$$\tau_0 \left( \frac{C(\pi-\alpha)}{\pi a} \right)^{-\frac{\pi-2\alpha}{2(\pi-\alpha)}} = 2^{-\frac{\pi-2\alpha}{\pi}} k l^{\frac{\pi-2\alpha}{2(\pi-\alpha)}}.$$

На початковій стадії розвитку довжина пластичних шарів збільшується пропорційно  $\frac{2(\pi-\alpha)}{\pi-2\alpha}$  степеню навантаження і визначається у замкнутій формі:

$$l = 4^{\frac{\pi-\alpha}{\pi}} \frac{\pi a}{(\pi-\alpha)C} \left( \frac{QC}{2a\pi k} \right)^{\frac{2(\pi-\alpha)}{\pi-2\alpha}}. \quad (5.25)$$

Порівняння точних залежностей довжин пластичних шарів від навантаження (формули (4.22), (4.23)) і наближених (формули (5.11), (5.25)) наведено на рис. 5.8. У таблиці 1 для декількох кутів вирізу і декількох рівнів навантаження наведено точність визначення довжин пластичних шарів за ЛМПЗ в одиницях  $\eta = \frac{d-l}{d}100\%$  та самі ці довжини в одиницях  $d/a$ .

Таблиця 1.  
Точність визначення довжини міжфазних смуг за ЛМПЗ.

| $\alpha$  | 0    |       | 30    |       | 60    |       |
|-----------|------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\eta$    | 5    | 20    | 5     | 20    | 5     | 20    |
| $Q/(2ak)$ | 0,11 | 0,625 | 0,525 | 0,775 | 0,755 | 0,915 |
| $d/a$     | 0,01 | 0,40  | 0,15  | 0,49  | 0,23  | 0,59  |

Зауважимо тільки, що проведені дослідження стосуються випадку максимально можливої взаємодії концентраторів напружень – відстань між

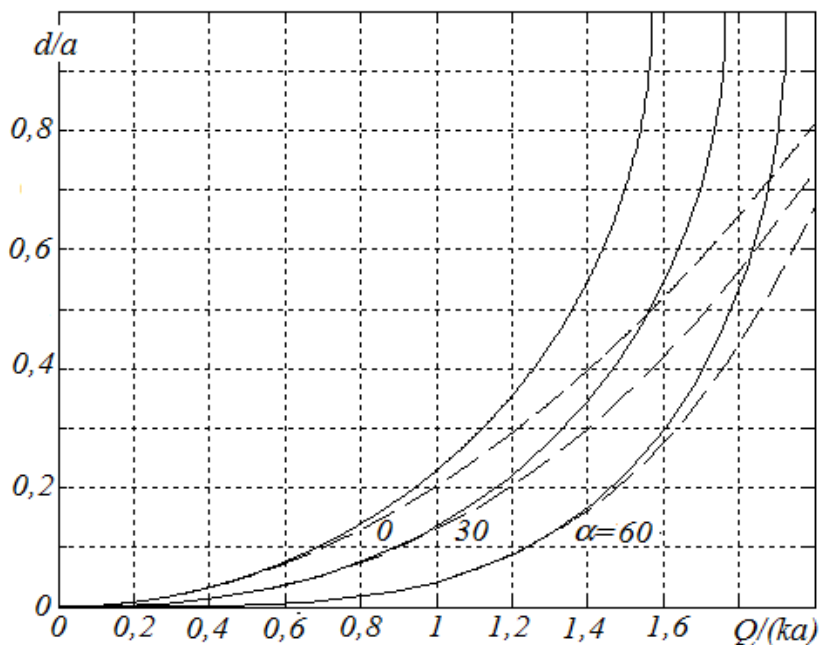


Рис. 5.8. Залежності довжин пластичних шарів від навантаження, визначених за точним розв'язком (суцільні лінії) та за ЛМПЗ (штрихові лінії),  $\alpha$  - кут у градусах.

концентраторами нескінченно мала проти їх розмірів. І, оскільки взаємодія концентраторів знижує точність ЛМПЗ [44], є підстави вважати, що отримані тут оцінки точності є верхніми оцінками і не будуть знижуватися для слабших взаємодій.

Точність ЛМПЗ підвищується зі збільшенням кута вирізу, що може бути пов'язане зі звуженням форми континуальної пластичної зони при збільшенні кута вирізу і вартує детальнішого дослідження.

#### 5.4. Висновки до розділу 5.

1. Отримано прості формули для залежностей довжин міжфазних пластичних смуг від навантаження, що використовують параметри пружного розв'язку задачі.

2. З'ясовано межі застосовності характеристик пластичних деформацій, визначених на основі ЛМПЗ і отримано такі практично важливі результати:

а) для V-подібного вирізу точність ЛМПЗ тим краща, що більший кут вирізу і достатньо висока для широкого діапазону навантажень. При великих кутах вирізу результати ЛМПЗ забезпечують високу точність навіть для досить великих навантажень;

б) для прикладу ЛМПЗ забезпечує визначення довжин пластичних шарів біля близьких V-подібних вирізів з точністю не нижчою 5% поки навантаження  $Q \leq 0,67ak$  ( $2a$  - відстань між вершинами вирізів). Зокрема для сталі 0,3X14H7B з зсувною границею текучості 688 МПа це означає, що така точність забезпечуватиметься поки середнє зсувне навантаження у попереку смуги не перевищуватиме 75,5 МПа.

## ВИСНОВКИ

1. Дослідження НДС пружно-пластичних тіл з концентраторами напружень: розвиток пластичних шарів зведені до нелінійних крайових задач теорії аналітичних функцій, методом конформних відображень або задачі Келдиша-Седова. Отримано аналітичні розв'язки, які гарантують виконання умови пластичності тільки в точках пластичних шарів. Умова пластичності не досягається і не перевищується ніде поза пластичними шарами.
2. Отримано аналітичні розв'язки задач про пружно-пластичний напружено-деформований стан та пластичне відшаровування жорських включень за наявності міжфазних тріщин.
3. Досліджено закономірності та особливості пластичного відшаровування довгого включення з прямокутним торцем за наявності міжфазних тріщин на його довгих гранях, розміщених на певній віддалі від торця включення і з'ясовано, що:
  - а) Якщо віддаль від вершини включення до вершини тріщини набагато більша ширини включення, смуга на продовженні тріщини розвивається приблизно за квадратичним законом, аналогічно до смуги на продовженні окремої тріщини за відсутності включення;
  - б) Зближення вершин включення і тріщини пришвидшує пластичне відшаровування, але до їх злиття певна центральна частина торця включення залишається невідшарованою;
  - в) Зі зменшенням товщини включення до нуля НДС на відстанях, більших за відстань між вершинами включення і міжфазної тріщини рівномірно наближається до НДС окремої тріщини, однак в околі торця включення поле

напружень залишається суттєво відмінним від поля напружень для включення нульової товщини;

2) З огляду на можливе руйнування при вершинах включення навіть досить тонке включення не можна наближено замінювати включенням нульової товщини.

4. За наявності міжфазних тріщин на поверхні волокна квадратного перерізу виявлено обмеженість діапазону навантажень, за якого пластичні деформації можуть локалізуватися лише на межі включення-середовище. Цей діапазон тим вужчий, що більші довжини тріщин. Для прикладу, коли довжина тріщин складає 0,001 довжини грані максимально допустиме навантаження не може перевищувати 98% границі текучості матеріалу; коли 0,2 – 62%; і коли 0,5 – довжина діапазону навантажень близька до нуля.

Факт, що пластичні смуги не можуть продовжувати розвиватися по поверхні, покривши лише її частину, свідчить про вперше виявлену обмежену спроможність односмугової моделі пластичного відшаровування включення.

5. Досліджено розвиток пластичних смуг від вершин двох близьких кутових вирізів і визначено величину критичного навантаження, за якого обидві пластичні смуги зливаються, а тіло втрачає опір навантаженню. Встановлено, що критичне навантаження тим менше, що менший кут при вершинах вирізу. При наближенні величини кута при вершинах вирізу до максимально допустимого значення  $90^\circ$ , за якого кутові точки щезають, а грані тіла стають гладкими, пластичні шари теж поступово зникають, а напружено-деформований стан поступово стає однорідним.

6. Отримано прості формули для залежностей довжин міжфазних пластичних шарів від навантаження за пружним розв'язком задачі на основі ЛМПЗ.

Наприклад, ЛМПЗ забезпечує визначення довжин пластичних шарів біля близьких V-подібних вирізів з точністю не нижчою 5% поки середнє зсувне навантаження  $Q \leq 0,67ak$  ( $2a$  - відстань між вершинами вирізів). Зокрема для сталі 0,3Х14Н7В з зсувною границею текучості 688 МПа така точність забезпечуватиметься поки середнє зсувне навантаження у попереку смуги не перевищуватиме 75,5 МПа.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. *Александров В.М.* К задаче о трещине на границе раздела упругих полосы и полуплоскости [Текст] / В.М. Александров., Д.А. Пожарский // Механика твердого тела. - 2001. - № 1. - С. 86-93.
2. *Аннин Б.Д.* Упругопластическая задача [Текст] / Б.Д. Аннин, Г.П. Черепанов. – Новосибирск : Наука, 1983. – 238 с.
3. *Антипов Ю.А.* Трещина на линии раздела сред при наличии сухого трения [Текст] / Ю.А. Антипов // Прикладная математика и механика. - 1995.- Т. 59, № 2. - С. 290-306.
4. *Антипов Ю.А.* Отслоившееся включение в случае сцепления и проскальзывания [Текст] / Ю.А. Антипов // Прикладная математика и механика. - 1996. - Т. 60, № 4. - С. 669-680.
5. *Атлури С.* Квазистатическое разрушение упругопластических тел [Текст] /С. Атлури, А. Кобаяси // Вычислительные методы механики разрушения. – 1990 - М. : Мир. - С. 49-82.
6. *Бакач Г.П.* Локализация пластических деформаций на макромасштабном уровне в субмикрористаллических металлах [Текст] / Г.П. Бакач, Е.Ф. Дударев, Ю.Р. Колобок // Физическая мезомеханика. – 2004. – Т. 7, Спецвыпуск, Ч.1. – С. 135-137.
7. *Бакиров В.Ф.* Модель Леонова-Панасюка-Дагдейла для трещины на границе соединения двух материалов [Текст] / В.Ф. Бакиров, Р.В. Гольдштейн // Препринт. Институт проблем механики РАН. - 1998.- № 620.- С. 1-18.
8. *Блащак Н.І.* Аналітичний розв’язок пружної антиплоскої задачі для смуги з кутовими точками [Текст] / Н.І. Блащак, А.Р. Бойко, Г.В. Козбур, В.А. Кривень // збірник тез XVI науково-технічної конференції ТНТУ / Природничі науки та інформаційні технології. - 2012. – Тернопіль : ТНТУ, т.1. - С. 5.

9. *Божидарник В.В.* Елементи теорії пластичності та міцності [Текст] / В.В. Божидарник, Г.Т. Сулим. – Львів : Світ, 1999. - Т.1. – 945 с.
10. *Бойко А.Р.* Міжфазне відшарування прямокутного включення під впливом зосередженої сили [Текст] / А.Р. Бойко, Р.С. Гром'як, А.В. Каплун, В.А. Кривень, Л.І. Цимбалюк // Прикладные задачи математики и механики : матеріали XX міжнародної науково-технічної конференції. – Севастополь : СевНТУ. - 2012. - С. 13-16.
11. *Бойко А.Р.* Аналітичний розв'язок задачі про відшаровування тонкого жорсткого прямокутного включення [Текст] / А.Р. Бойко, Р.А. Бойко // крайові задачі, теорія функцій і їх застосування : матеріали міжнародній математичній конференції присвячена 60-річчю В.І. Рукасова (21–24 травня 2014 р., Слов'янськ). – 2014. - С. 14-15
12. *Бойко А.Р.* Розвиток пластичних зон в смузі з кутовими точками під дією зосередженої сили [Текст] / А.Р. Бойко, В.Б. Валяшек, В.А. Кривень, А.В. Каплун. // Вісник ТНТУ. – 2014. – №4 (76). – С. 34-43.
13. *Большаков В.И.* Асимптотические методы расчета композитных материалов с учетом внутренней структуры [Текст] / В.И. Большаков, И.В. Андрианов, В.В. Данишевский. - Днепропетровск : Пороги, 2008. – 196 с
14. *Бушманова О.П.* О пластическом деформировании в условиях локализации сдвигов на дискретной системе линий [Текст] / О.П. Бушманова, О.Ф. Ревуженко // Физ. мезомеханика. – 2001. – Т.5, №3. – С. 9-16.
15. *Ванин Г.А.* Локальные разрушения в волокнистых средах [Текст] / Г.А. Ванин // Механика композитных материалов. - 1982. - № 4. - С. 618-625.
16. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. [Текст] / К. Васидзу, пер. с англ. В.В. Кобелева, А.П. Сейраняна. - М. : Мир, 1987. – 542 с.

17. *Галин Л.А.* Упругопластические задачи [Текст] / Лев Александрович Галин. - М. : Наука, 1984. – 232 с.
18. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи [Текст] / Федор Дмитриевич Гахов. - М. : Физматгиз, 1958. – 544 с.
19. *Гловински Р.* Численное исследование вариационных неравенств [Текст] / Р. Гловински, Ж.-Л Лионс, Р. Тремольер - М. : Мир, 1979. - 574 с.
20. *Гольдштейн Р.В.* Трещина на границе соединения материалов со связями между берегами [Текст] / Р.В Гольдштейн, М.Н. Перельмутер // Механика твердого тела. - 2001. - № 1. - С. 94-112.
21. *Данилов В.И.* Особенности локализации макро-деформации субмикрористаллического титана ВТ1-0 [Текст] / В.И. Данилов, Л.Б. Зуев, И.О. Болотин, А.А. Загуменный // Физическая мезомеханика. – 2006. – Т.9, спец-выпуск. – С. 91-94.
22. *Данилов В.И.* Типы локализации пластических деформаций и стадии нагружения металлических материалов с различной кристаллической структурой [Текст] / В.И. Данилов, Л.Б. Зуев, И.О. Болотин, А.А. Загуменный // ПМТФ. – 2006. – Т. 47, №2. - С. 176-184.
23. *Джонсон У.* Теория пластичности для инженеров [Текст] / У. Джонсон, П. Меллор - М. : Машиностроение, 1979. - 567 с.
24. *Дундурс Дж.* Обзор и перспектива исследования межфазной трещины [Текст] / Дж. Дундурс, М. Комниноу // Механика композиционных материалов. - 1979. - № 3. - С. 387-396.
25. *Иванов В.И.* Конформные отображения и их приложения [Текст] / В.И. Иванов, В.Ю. Попов - М. : Едиториал УРСС, 2002. - 324 с.
26. *Ивлев Д.Д.* Механика пластических сред. Т.1. Теория идеальной пластичности [Текст] / Дюис Данилович Ивлев - М. : Физматлит, 2001. – 448 с.
27. *Ильюшин А.А.* Пластичность [Текст] / Алексей Антонович Ильюшин - М. : Гостехиздат, 1948. – 376 с.

28. *Каминский А.А.* Линии скольжения в конце разреза на границе раздела различных сред [Текст] / А.А. Каминский, Л.А. Кипнис, В.А. Колмакова // Прикладная механика. - 1995. - Т. 31, №6. - С. 86-91.
29. *Каминский А.А.* Расчет пластической зоны в конце трещины в рамках модели «трезубец» [Текст] / А.А. Каминский, Л.А. Кипнис, В.А. Колмакова // Прикл. механика. - 1997. - Т. 33, №5. - С. 70-76.
30. *Каминский А.А.* О модели Дагдейла для трещины на границе раздела различных сред [Текст] / А.А. Каминский, Л.А. Кипнис, В.А. Колмакова // Прикладная механика. - 1999. - Т. 35, № 1. - С. 63-68.
31. *Камінський А.О.* Напруження біля кінців тріщини на межі розділу двох середовищ за наявності пластичних смуг [Текст] / А.О. Камінський, М.В. Дудик, Л.А. Кіпніс // Фіз.-хім. механіка матеріалів. - 2001. - №3. - С.23-26.
32. *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности [Текст] / Л.М. Качанов – М : Наука, 1969. - 420 с.
33. *Клюшников В.Д.* Математическая теория пластичности [Текст] / Владимир Дмитриевич Клюшников - М. : МГУ, 1979. - 208 с.
34. *Койтер В.Т.* Общие теоремы теории упруго-пластических сред [Текст] / Варнер Тьярдус Койтер - М. : ИЛ, 1961. – 79 с.
35. *Костров Б.В.* Трещина продольного сдвига с бесконечно узкой пластической зоной / Костров Б.В., Никитин Л.В. // Прикл. матем. и механика. – 1967. – Т. 31, №2. - С. 334-336.
36. *Коппенфельс В.* Практика конформных отображений [Текст] / В. Коппенфельс, Ц. Штальман - М. : ИЛ, 1963. - 426 с.
37. *Крива Н.Р.* Пластичне відшарування півбезмежного включення скінченної ширини за умов неідеального контакту [Текст] / Н.Р. Крива, А.Р. Бойко // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур : інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. - 2014. – С. 268-271.

38. *Кривень В.А.* Узагальнене представлення зони пластичності при антипоскій деформації пружно-пластичного тіла із гострокінцевим концентратором напружень [Текст] / В.А. Кривень // Доп. АН УРСР. Сер.А. - 1983. - №2. - С. 31-34.
39. *Кривень В.А.* Непрерывное и разрывное решения упругопластической задачи об антипоской деформации тела с трещиной [Текст] / В.А. Кривень, // Физ.-хим. механика материалов. - 1985. - №6. - С. 10-16.
40. *Кривень В.А.* Пластичне відшаровування при зсуві жорсткого циліндричного включення [Текст] / В.А. Кривень // Диференціальні рівняння і їх застосування. - 1990. - Львів : Світ. - №242 - С. 56-57.
41. *Кривень В.А.* Двоперіодична пружнопластична задача поздовжнього зсуву тіла з жорсткими ромбічними включеннями. / В.А. Кривень // Математичні методи і фіз.- мех. поля. – 2001. – Т. 44, №1. – С. 109-113.
42. *Кривень В.А.* Зони пластичності в околі вершини тріщини поздовжнього зсуву в середовищі із анізотропією текучості [Текст] / В.А. Кривень // Доп. НАН України. - 2001. - №8. – С. 40-44.
43. *Кривень В.А.* Антипоска деформація ідеально пружно-пластичного тіла, що містить жорстке еліптичне включення [Текст] / В.А. Кривень // Машинознавство. - 2001. - №12. - С. 28-30.
44. *Кривень В.А.* Лінійна модель пластичної зони біля гострокінцевого концентратора напружень за поздовжнього зсуву [Текст] / В.А. Кривень // Фіз.-хім. механіка матеріалів. - 2004. - №4. - С. 41-46.
45. *Кривень В.А.* Пластичне відшарування жорсткого півбезмежного включення скінченної ширини під зсувним навантаженням за наявності міжфазних тріщин [Текст] / В.А. Кривень, А.Р. Бойко // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2014. – Вип. 19. - С. 84–92.

46. *Кривень В.А.* Антиплоская упруго-пластическая деформация тела с жестким тонким включением / Кривень В.А., Витвицкий П.М. // Докл. АН УССР. Сер.А. – 1979. - №2. - С. 104-108.
47. *Кривень В.А.* Пружно-пластична задача антиплоскої деформації тіла, що містить жорстке ромбічне призматичне включення [Текст] / В.А. Кривень, Є.М. Ланьош// Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1986. – №6. – С. 30-34.
48. *Кривень В.А.* Розвиток зон пластичності біля односторонньо відшарованого тонкого включення при зсуві, паралельному включенню [Текст] / В.А. Кривень, Г.Т. Сулим // Машинознавство. - 2002. - №1. - С. 26-30.
49. *Кривень В.А.* Влияние пластического отслоения жестких включений на эффективный модуль сдвига [Текст] / В.А. Кривень, Г.Т. Сулим // Теоретическая и прикладная механика. - 2002. - № 35. - С. 87-93.
50. *Кривень В.А.* Пластичні зони при зсуві біля прямокутного і закругленого вирізів сталої ширини [Текст] / В.А. Кривень, М.І. Яворська // Математичні методи і фіз.- мех. поля. - 2001. - Т. 47, № 2. - С. 138-144.
51. *Кривень В.А.* Пластичне відшаровування жорсткого включення, обмеженого циліндричними поверхнями, під зсувним навантаженням [Текст] / В.А. Кривень, А.Р. Бойко, О.Б. Гнатюк // Міжвузівський збірник «Наукові нотатки». Луцьк. - 2013. - Вип. 41., Ч. 1. – С. 142–147.
52. *Кривень В.А.* Пластичне відшарування квадратного волокна під зсувними навантаженням за наявності міжфазних тріщин [Текст] / В.А. Кривень, А.Р. Бойко, А.В. Каплун // Математичні методи і фіз.-мех. поля. – 2014. – Т. 57, № 3. – С. 101-108.
53. *Кривень В.А.* Розвиток пластичних смуг під час зсувного деформування тіла з вузькою прямокутною щілиною [Текст] / В.А. Кривень, А.Р. Бойко, А.В. Каплун // Фіз.-хім. мех. матеріалів. – 2014. – Т. 50, №4. – С. 49-54.

54. *Кривень В.А.* Міжфазне пластичне відшарування півбезмежного прямокутного включення [Текст] / В.А. Кривень, В.Б. Валяшек, А.Р. Бойко // Прикладные задачи математики и механики : матеріали ХІХ міжнародної науково-технічної конференції. – Севастополь, 2011. - С. 13-16.
55. *Кривень В.А.* Антиплоска деформація ідеально пружно-пластичного тіла з жорстким прямокутним включенням [Текст] / В.А. Кривень, О.Б. Гнатюк, Р.С. Гром'як // Фіз.-хім. механіка матеріалів. - 2000. - №6. – С. 19-23.
56. *Кундрат Н.М.* Предельное равновесие композиции с жестким включением при растяжении сосредоточенными силами [Текст] / Н.М. Кундрат // Механика композиционных материалов и конструкций. - 2000. - Т. 6, № 1. - С. 103-112.
57. *Кундрат Н.М.* Исследование механизмов разрушения в композиции с жестким включением при растяжении сосредоточенными силами [Текст] / Н.М. Кундрат // Механика композиционных материалов и конструкций. - 2000.-Т. 6. № 3. - С. 333-342.
58. *Кундрат Н.М.* Отслоение жесткого включения в упругопластической матрице при растяжении сосредоточенными силами [Текст] / Н.М. Кундрат // Механика композиционных материалов и конструкций. - 2001. - Т. 7. № 1. - С. 107-113.
59. *Кундрат Н.М.* Отслоение жесткого линейного включения при статическом нагружении [Текст] / Н.М. Кундрат // Фіз.-хім. механіка матеріалів. - 2001. - Т. 37. № 1. - С. 37-40.
60. *Лаврентьев М.А.* Методы теории функций комплексного переменного [Текст] / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат - М. : Наука, 1987. - 688 с.
61. *Лаврик В.И.* Справочник по конформным отображениям [Текст] / В.И. Лаврик, В.Н. Савенков - К. : Наукова думка, 1970. – 252 с.

62. *Ларкина В.В.* К задаче о межфазной трещине на границе раздела двух полуплоскостей [Текст] / В.В. Ларкина, В.В. Твардовский // Прикладная механика. - 1987. - Т. 23. № 8. - С. 71-77.
63. *Леонов М.Я.* Полосы пластичности пластин с трещиновидными концентраторами [Текст] / М.Я. Леонов, П.М. Витвицкий, С.Я. Ярема // Докл. АН СССР. - 1963. - Т. 148, № 3. - С. 541-544.
64. *Максимович В.М.* Пружно-пластична задача для обмеженої пластинки з м'яким еліптичним включенням [Текст] / В.М. Максимович, Я.М. Пастернак, О.С. Приходько // Вісник ТНТУ. – 2012. – Т. 66. №2. – С. 44-50.
65. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости [Текст] / Николай Иванович Мусхелишвили - М. : Наука, 1966. - 707 с.
66. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения [Текст] / Николай Иванович Мусхелишвили - М. : Физ-мат гиз., 1968. – 512 с.
67. *Надаи А.* Пластичность и разрушение твердых тел. – М.: Изд-во ИЛ. – 1954. – 647 с.
68. *Нахмейн Е.Л.* Контакт упругой плоскости с частично отслоившимся штампом [Текст] / Е.Л. Нахмейн, Б.М. Нуллер // Прикладная математика и механика. - 1986. - Т. 50, № 4. - С. 663-673.
69. *Нахмейн Е.Л.* Давление системы штампов на упругую полуплоскость при общих условиях контактного сцепления и скольжения [Текст] / Е.Л. Нахмейн, Б.М. Нуллер // Прикладная математика и механика. - 1988. - Т. 52, № 2. - С. 284-293.
70. *Панасюк В.В.* Модель смуг пластичності в пружно-пластичних задачах механіки руйнування [Текст] / В.В. Панасюк, М.П. Саврук // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1992. - №1. - С. 49-68.

71. *Панасюк В.В.* Розвиток вторинних смуг пластичності біля тріщини відриву у пластині [Текст] / В.В. Панасюк, М.П. Саврук // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1995. - №2. – С. 5-11.
72. *Панасюк В.В.* Концентрация напряжений в трехмерных телах с тонкими включениями [Текст] / В.В. Панасюк, М.М. Стадник, В.П. Силованюк. - К. : Наукова думка, 1986. – 216 с.
73. *Победря Б.Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности [Текст] : учеб. пособие / Победря Борис Ефимович. - 2-е изд. - М. : Изд-во МГУ, 1995. – 366 с.
74. *Полетика Т.М.* Локализация пластического течения в технических сплавах циркония [Текст] / Т.М. Полетика, Г.М. Нариманова, С.В. Колосов, Л.Б. Зуев // ПМТФ. – 2003. - Т.44, №2. - С. 132-142.
75. *Поль Б.* Макроскопические критерии пластического течения и хрупкого разрушения // Разрушение. Т.2 / ред. Г.Либовиц. – 1975. С.336-520.
76. *Попов Г.Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений [Текст] / Попов Геннадий Яковлевич - М. : Наука, 1982. - 342 с.
77. *Прагер В.* Теория идеально пластических тел [Текст] / В. Прагер, Ф.Г. Ходж - М. : Издательство иностранной литературы, 1956. - 400 с.
78. *Пресняков А.А.* Локализация пластической деформации [Текст] / А.А. Пресняков - М. : Машиностр., 1983. – 56 с.
79. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела [Текст] / Юрий Николаевич Работнов- М. : Наука, 1979. - 744 с.
80. *Райс Дж.Р.* Математические методы в механике разрушения [Текст] / Дж.Р. Райс // Разрушение. – 1975 - М. : Мир. - Т.2. – С. 204-335.
81. *Райс Дж.Р.* Локализация пластических деформаций [Текст] / Дж.Р. Райс // Теоретическая и прикладная механика : труды XIV междунар. конгр. ЮТАМ. - М. : Мир, 1979. - С. 438-471.

82. *Саврук М. П.* Механіка руйнування та міцність матеріалів [Текст] : довідн. посіб. / М.П. Саврук, А. Казберук ; за заг. ред. В. В. Панасюка ; Концентрація напружень у твердих тілах з вирізами. – Львів : СПОЛОМ, 2012. - 384 с.
83. *Силованюк В. П.* Деформація та руйнування матеріалів біля включень під статичним навантаженням тіла / В. П. Силованюк, Р. Я. Юхим // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2007. – № 6. – С. 31–35.
84. *Сильвестров В.В.* Межфазная трещина и отслоившееся тонкое жесткое гладкое межфазное включение при сложном нагружении [Текст] / В.В. Сильвестров, А.К. Ярдухин // Проблемы механики неупругих деформаций - 2001. - М. : Физматлит, - С. 301-313.
85. *Симонов И.В.* Трещина на границе раздела двух упругих сред при расклинивании [Текст] / И.В. Симонов // Механика твердого тела. - 1985. - №3. - С. 105-112.
86. *Симонов И.В.* Трещина на границе раздела в однородном поле напряжений [Текст] / И.В. Симонов // Механика композитных материалов. - 1985. - № 6. - С. 969-976.
87. *Сиратори М.* Вычислительная механика разрушения [Текст] / М. Сиратори, Т. Миеси, Х. Мацусита. - М. : Мир, 1986. – 334 с.
88. *Смит Е.* Локализация пластического течения и трещиностойкость высокопрочных материалов [Текст] / Е. Смит, Т. Кук, К. Рау // Механика : новое в зарубежной науке. - 1980. - №2. – С. 121-147.
89. *Соколовский В.В.* Теория пластичности [Текст] / Вадим Васильевич Соколовский - М. : Высшая школа, 1969. - 608 с.
90. *Стефанов Ю.П.* Локализация деформации и разрушение в геоматериалах. Численное моделирование [Текст] / Юрий Павлович Стефанов // Физ. мезомеханика. – 2002. – Т.5, №5. – С. 107–118.

91. *Сулим Г.Т.* Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями : монографія [Текст] / Г.Т. Сулим. – Львів : Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. - 716 с.
92. *Ходж Ф.* Краевые задачи пластичности. Пластичность и термопластичность [Текст] / Ф. Ходж - М. : Машиностроение, 1983. - 598 с.
93. *Хоникомб Р.* Пластическая деформация металлов [Текст] / Р. Хоникомб – М.: Мир, 1972. – 408с.
94. *Хромов А.И.* Локализация пластических деформаций и разрушение идеальных жесткопластических тел [Текст] / А.И. Хромов // Докл. РАН. - 1998. - Т. 362, № 2. - С. 202-205.
95. *Хромов А. И.* Растяжение полосы с симметричными угловыми вырезами [Текст] / А.И. Хромов, А.А. Буханько, О.В. Патлина, Е.П. Кочеров // Вест. СамГТУ. Сер. физ.-мат. науки. - 2008. - №1 (16). - С. 53-58.
96. *Черепанов Г.П.* О проблеме неединственности в теории пластичности [Текст] / Г.П. Черепанов// Доклады АН СССР. – 1974. – Т. 218, №4. – С. 779-782.
97. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения [Текст] / Геннадий Петрович Черепанов - М. : Наука, 1974. - 640 с.
98. *Черепанов Г.П.* Механика разрушения композиционных материалов [Текст] / Геннадий Петрович Черепанов - М. : Наука, 1983. - 296 с.
99. *Audoly B.* Asymptotic study of the interfacial crack with friction / B. Audoly // Journal of Mechanics and Physics of Solids. - 2000.- V. 48. - P. 1851-1864.
100. *Berger J.R.* Boundary integral equations formulations for interface crack in anisotropic materials / J.R. Berger, V.K. Tewary Comput // Mech. - 1997. - V. 20, № 3. - P. 261-266.
101. *Berto F.* A review of the volume-based strain energy density approach applied to V-notches and welded structures / F. Berto, P. Lazzarin // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2009. - Vol. 52. - P. 183-194.

102. *Berto F.* Induced out-of-plane mode at the tip of blunt lateral notches and holes under in-plane shear loading, *Fatigue and Fracture of Engineering.* / F. Berto, P. Lazzarin, A. Kotousov, L.P Pook // *Materials and Structures.* – 2012. - Vol.35. - P. 538–555.
103. *Boniface V.* Re-examination of crack opening model on interface fracture / V. Boniface, K.R.Y. Simha // *Engineering Fracture Mechanics.* - 1999. - V. 64. - P. 677-691.
104. *Comninou M.* An overview of interface cracks / M. Comninou // *Engineering Fracture Mechanics.* - 1990. - V. 37, № 1. - P. 197-208.
105. *Crowdy D.G.* Schwarz-Christoffel mappings to unbounded multiply connected polygonal regions / D.G. Crowdy // *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.* – 2007. – P. 319-339.
106. *Crowdy D.G.* Conformal mappings from annuli to canonical doubly connected Bell representations / D.G. Crowdy // *Journal of Mathematical Analysis and Applications.* – 2007. –V. 340(1). - P. 669-674.
107. *Deng X.* Plane strain near-tip fields for elastic-plastic interface cracks / X. Deng // *International Journal of Solids and Structures.* - 1995.- V. 32, № 12. - P. 1727-1741.
108. *Dundurs J.* An opportunistic analysis of the interface crack / J. Dundurs, A.K. Gautesen // *International Journal of Fracture.* - 1988. - V. 36. - P. 151-159.
109. *Dygdale D.S.* Yielding of steel sheets containing slits // *J.Mech. and Phys. Solids.* – 1960. - Vol. 8, №4. - P. 100-104.
110. *Ewing D.J.F.* The plastic constraint of V-notched tension bars / D.J.F. Ewing, R. Hill // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids.* - 1967. - V. 15. - P. 115-124.
111. *Griffith A.A.* The phenomena of rupture and flow in solid /*Griffith A. A.* // *Phil. Trans. Roy. Soc. London.* – 1920. – A221. – P. 163 – 198.

112. *Guz A.N.* Analytical solution of stability problem for two composite half-planes compressed along interfacial cracks / A.N. Guz, I.A. Guz // *Composites. Part B.* - 2000. - V.31. - P. 405-418.
113. *Kryven' V.A.* Antiplane problem for an elastic perfectly plastic body with biperiodic system of rhombic notches / V.A Kryven' // *Materials Science.* – 2001. - Vol. 37, №6. – P. 866-872.
114. *Kryven' V.A.* Initial stage of plastic exfoliation of a rectangular inclusion under conditions of one-sided contact with a medium / V.A Kryven', V. B. Valyashek // *Journal of Mathematical Sciences.* – 2010. - Vol. 171, No. 4. – P. 107–116.
115. *Kryven' V.A.* Plastic interfacial slip of periodic systems of rigid thin inclusions undergoing longitudinal shear / V.A. Kryven, G.T. Sulym, M.I. Yavorska // *JTAM.* - 2006.– V.44, No. 4. – P. 837–848.
116. *Kryven' V.A.* Plastic exfoliation of a rigid rectangular inclusion under the action concentrated forces / V.A. Kryven', M.I. Yavorska, A.V. Kaplun, V.B. Valiashek, // *Journal of Mathematical Sciences.* – 2014. - Vol. 198, No. 2. – P. 119-131.
117. *Lazzarin P.* A finite-volume-energy based approach to predict the static and fatigue behavior of components with sharp V-shaped notches / P Lazzarin, R. Zambardi // *International Journal of Fracture.* – 2001. - Vol. 112 – P. 275–298.
118. *Lazzarin P.* Plastic notch stress intensity factors for pointed V-notches under antiplane shear loading / P. Lazzarin, M. Zappalorto // *International Journal of Fracture.*– 2008. – Vol. 152, No 1. - P. 1–25.
119. *Loboda V.V.* Analytical derivation and investigation of the interface crack models / V.V. Loboda // *International Journal of Solids and Structures.* - 1998. - V. 35, № 33. - P. 4477-4489.

120. *Markenscoff X.* The interface anticrack and green's functions for interacting anticrack and cracks/anticracks / X. Markenscoff, L. Ni, J. Dundurs // Journal of Applied Mechanics. - 1994. - V.61 - P. 797-802.
121. *Mishuris G.* Interface crack and nonideal interface concept / G. Mishuris // International Journal of Fracture. - 2001. - V. 107. - P. 279-296.
122. *Rice J.R.* Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks / J.R. Rice // Transactions of ASME / Journal of Applied Mechanics. - 1988. - V. 55, № 1. - P. 98-103.
123. *Wayne Chen W.* Modeling elasto-plastic indentation on layered materials using the equivalent inclusion method / Wayne Chen W., Kun Zhou, Leon M. Keer and Jane Wang Q. // International Journal of Solids and Structures. – 2010. - Vol. 47, Issue 20 – P. 2841-2854.
124. *Walch J.B.* Elastic-plastic torsion of a circumferentially notched bar / Walch J.B., Mackenzie A.C. // J. Mech. and Phys. Solids. – 1959. – Vol. 7, №4. - P. 247-257.
125. *Zappalorto M.* Analytical study of the elastic–plastic stress fields ahead of parabolic notches under antiplane shear loading. / M. Zappalorto, P. Lazzarin // International Journal of Fracture. – 2007. - Vol. 48. - P. 139–154.

# ДОДАТКИ

## Додаток 1

Тернопільський завод  
залізобетонних виробів  
і будівельних конструкцій

м. Тернопіль, вул. Бродівська, 48.

## АКТ

впровадження методики розрахунку напружено-деформівного стану  
композитних матеріалів, розробленої у кандидатській дисертації Бойка А.Р.

м. Тернопіль

« 11 » червня 2015

Методика розрахунку напружено-деформівного стану композитних матеріалів під великими навантаженнями, розроблена в кандидатській дисертації асистента кафедри математичних методів в інженерії Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя, використана на нашому підприємстві для розрахунків напружено-деформівного стану несучих елементів будівельних конструкцій. Її застосування дозволяє підвищити точність результатів у випадку появи пластичних деформацій та відшаровування арматури.

Директор



В.П. Сень