

Применение оптимальных аппроксимирующих сплайнов для решения уравнения теплопроводности

Родионов В.И., Родионова Н.В., Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В.

*Удмуртский государственный университет, Россия
Донецкий национальный технический университет, Украина
rodionov@uni.udm.ru, ealekseev@gmail.com*

Optimal approximating splines for the solution of the heat equation are considered. Applications been developed for the task.

1. В основе исследований лежат статьи [1,2], где получены точные формулы для коэффициентов и невязок оптимальных аппроксимирующих сплайнов простейшего уравнения теплопроводности. (Аналогичные результаты получены для простейших задач математической физики: для волнового уравнения и для уравнения переноса.)

2. При $\gamma > 0$ и $(t, \xi) \in [0, 1]^2$ в качестве приближенного решения задачи

$$u_t = \gamma u_{\xi\xi}, \quad u(0, \xi) = \phi(\xi), \quad u(t, 0) = \rho_0(t), \quad u(t, 1) = \rho_1(t) \quad (1)$$

(где ϕ, ρ_0, ρ_1 – гладкие функции такие, что $\phi(0) = \rho_0(t)$, $\phi(1) = \rho_1(t)$), предлагается использовать оптимальный аппроксимирующий сплайн задачи

$$J = \|u_t - \gamma u_{\xi\xi}\|_{L_2(\omega)}^2 \rightarrow \min, \quad u \in \sigma_{\omega, N}(\Pi). \quad (2)$$

При фиксированном значении параметра $\omega \in [-1, 1]$ через $\sigma_{\omega, N}(\Pi)$ обозначено пространство размерности $4N - 2$, состоящее из квадратичных сплайнов лагранжевого типа, определенных в прямоугольнике $\Pi = [0, 1]^2$ и построенных в соответствии с работами [1,2]. Через N обозначен параметр, отвечающий за количество узлов сплайна (см. рисунок 1) и узлов итоговой разностной схемы, состоящей из $4N - 2$ уравнений.

На рис. 1-2 узлы, в которых требуется вычислить значения сплайна, выделены черным цветом, а узлы на границе, где значения сплайна заданы, – полые.

Разностная схема имеет единственное решение, и для него получено явное представление через граничные элементы. Данное обстоятельство позволяет получить точные формулы для коэффициентов оптимального сплайна и для его невязки. Формула для коэффициентов сплайна представляет собой линейную форму от исходных конечных разностей. Формула для невязки J представляет собой сумму двух положительно определенных квадратичных форм от граничных элементов. Матрица первой формы имеет второй порядок и очевидный спектр. Элементы второй матрицы порядка $N + 1$ выражаются через многочлены Чебышева, матрица обратима и такова, что обратная матрица имеет трехдиагональный вид. Эта особенность позволяет получить для спектра матрицы верхние и нижние оценки, не зависящие от размерности N . Данное обстоятельство позволяет провести исследование на качество аппроксимации для разных весовых коэффициентов $\omega \in [-1, 1]$ и

размерностей N . Показано, что наилучшее приближение дает параметр $\omega=0$, а невязка J стремится к нулю с ростом N .

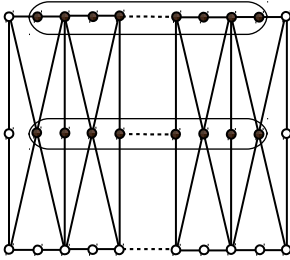


Рис. 1. Первая схема

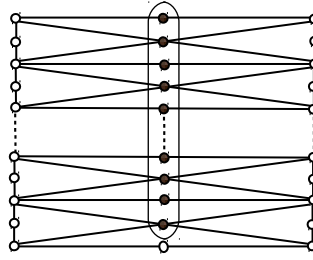


Рис. 2. Вторая схема

3. Аналогичным образом для построения приближенного решения задачи (1) определен функционал вида (2), заданный в пространстве $\sigma_{\omega, M}(\Pi)$ размерности $2M$, соответствующем схеме из рисунка 2. (Здесь узлы, в которых ищем значения, также выделены черным цветом, а узлы на границе – полые.) Получены аналогичные результаты, такие же, как в [1,2]. Выделен класс граничных условий, когда невязка J стремится к нулю с ростом M .

4. Таким образом, задача (1) распадается на сумму двух:

$$u_t^{(1)} = y_{\xi\xi}^{(1)}, \quad u^{(1)}(0, \xi) = \phi_{(\xi)}^{(1)}, \quad u^{(1)}(t, 0) = \rho_0^{(1)}(t), \quad u^{(1)}(t, 1) = \rho_1^{(1)}(t), \quad (3)$$

(где $\phi^{(1)}(\xi) \equiv \phi(\xi)$, а $\rho_0^{(1)}(t) \equiv \rho_0(0)$ и $\rho_1^{(1)}(t) \equiv \rho_1(0)$ – функции-константы), и

$$u_t^{(2)} = y_{\xi\xi}^{(2)}, \quad u^{(2)}(0, \xi) = \phi_{(\xi)}^{(2)}, \quad u^{(2)}(t, 0) = \rho_0^{(2)}(t), \quad (4)$$

$$u^{(2)}(t, 1) = \rho_1^{(2)}(t),$$

(где $\phi^{(2)}(\xi) \equiv 0$, $\rho_0^{(2)}(t) \equiv \rho_0(t) - \rho_0(0)$, $\rho_1^{(2)}(t) \equiv \rho_1(t) - \rho_1(0)$).

Задачу (3) решаем, используя первую схему (рис. 1). За счет специфики функций $\rho_0^{(1)}$ и $\rho_1^{(1)}$ квадратичный сплайн (то есть приближенное решение задачи (3)) на границе $\xi=0$ и $\xi=1$ целиком совпадает с этими функциями. Таким образом, чем больше (N чем больше точек на границе $t=0$), тем точнее приближенное решение $u^{(1)}$ задачи (3).

Задачу (4) решаем, используя вторую схему (рис. 2). За счет специфики функции $\phi^{(2)}$ квадратичный сплайн (то есть приближенное решение задачи (4)) на границе $t=0$ целиком совпадает с этой функцией. Таким образом, чем больше M (чем больше точек на границе и $\xi=0$, $\xi=1$), тем точнее приближенное решение $u^{(2)}$ задачи (4).

Замечание. При таком подходе нет надобности в послойных вычислениях. Мы решаем всего две задачи и получаем решение с любой наперед заданной точностью аппроксимации. Как следствие, не требуется проводить исследование разностных схем на устойчивость (в нашем случае имеет место непрерывная зависимость от входных данных). Таким образом, предложенный алгоритм имеет безусловный приоритет перед

сеточными методами, в которых требуется осуществлять послойные вычисления (требующие существенного временного ресурса) и следить за устойчивостью.

5. Рассмотренные выше алгоритмы реализованы в виде кроссплатформенного приложения, которое позволяет по заданному значению в $\xi > 0$ вычислять значения N и M , гарантирующие необходимую точность аппроксимации ($J < \xi^2$). Для создания программы авторами был выбран язык программирования *Pascal*. Авторы использовали компилятор *Free Pascal Compiler (fpc)*. Компилятор *fpc* - мощный программный продукт, в котором реализованы все возможности языка программирования *Pascal*, включая концепцию ООП, работу с графикой и распараллеливание. Кроме того, компилятор оснащен большим количеством библиотек и компонент. На базе *fpc* разработана свободная среда визуального программирования *Lazarus* [3]. *Lazarus* и *fpc* входят в состав репозиториях всех современных дистрибутивов Linux, существуют версии для Windows и MacOS.

Сложность алгоритмов – квадратичная по обоим параметрам, как по N в задаче (3), так и по M в задаче (4). В обоих случаях на втором этапе методом прогонки вычисляются значения в узлах квадратичных сплайнов (выделенных черным цветом на рисунках 1 и 2). Полученные значения позволяют вычислять значение итоговой поверхности $(t, \xi) \rightarrow u(t, \xi)$ в любой точке $(t, \xi) \in \Pi$. Предусмотрена система хранения исходных и полученных значений (значения ξ и y , функции ϕ , ρ_0 , ρ_1 и три массива значений сплайнов в узлах).

С использованием компилятора *fpc* среды визуального программирования *Lazarus* были написаны аналогичные кроссплатформенные приложения для решения простейших задач математической физики: для волнового уравнения и для уравнения переноса.

Разработанные свободные кроссплатформенные программы используются в Удмуртском государственном и Донецком национальном техническом университетах в учебном процессе и исследовательской деятельности.

Источники:

- 1) Родионов В. И., Родионова Н. В. Точные формулы для коэффициентов и невязки оптимального аппроксимирующего сплайна простейшего уравнения теплопроводности // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. Науки. 2010. № 4. С. 154–171.
- 2) Родионов В. И., Родионова Н. В. Точное решение одной задачи оптимизации, порожденной простейшим уравнением теплопроводности // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. Науки. 2012. № 3. С. 141–156.
- 3) Алексеев Е. Р., Чеснокова О. В., Кучер Т. В. Free Pascal и Lazarus: Учебник по программированию. Библиотека ALT Linux. - М. ALT Linux, 2010. -438с.