

Р. Я. Мацюк

Інститут прикладних проблем механіки і математики НАН України, Львів

ВАРІАЦІЙНЕ УЗАГАЛЬНЕННЯ ВІЛЬНОЇ РЕЛЯТИВІСЬКОЇ ДЗИГИ

Поведінку крутької буцім-клясичної частки, наділеної скісним тензором вертуна (внутрішнього моменту) $S^{ij} = S^{[ij]}$, можна описати відомою системою рівнянь

$$\dot{P}^i = -\frac{1}{2} R^i{}_{jkl} u^j S^{kl} \quad (1)$$

$$\dot{S}^{ij} = P^i u^j - P^j u^i \quad (2)$$

Цих рівнянь недосить для знаходження світової лінії частки. Тому їх доповнюють різними додатковими умовами. Ми вдаємося до умови Матісона-Пірані

$$u_j S^{ij} = 0 \quad (3)$$

Умова (3) дозволяє встановити залежність між змінними P та u . Перехід від швидкості до імпульсу можна оцінювати як впровадження фазового простору. У варіаційному численні такий перехід називають (узагальненим) перетворенням Лежандра. Ми виконуємо цю програму в пласкому просторі-часі і переходимо до варіаційної форми рівняння світової лінії частки з третіми похідними. Факт підвищення порядку похідних у рівнянні, яке описує динаміку просторових координат релятивістської дзиги, наголошувався ще у 1945^{му} році Вайсенгофом у його поклику на одну статтю Матісона. Матісон, додатково послуговуючись в'яззю (3), отримав для світової лінії дзиги в гравітаційному полі таке рівняння:

$$m\dot{u}^i = \dot{u}_j S^{ij} - \frac{1}{2} R^i{}_{jkl} u^j S^{kl} \quad (4)$$

Побутує думка, що рівняння (4) не є рівнозначне до рівнянь (1, 2). Ми покажемо, що рівнозначність зберігається усюди на поверхні (3). Повертаючись до вільної дзиги, ми пропонуємо варіаційне узагальнення рівняння третього порядку (4) в пласкому просторі-часі ($R^i{}_{jkl} = 0$),

$$\frac{\dot{u} \wedge u \wedge \sigma}{\|\sigma \wedge u\|^3} - 3 \frac{(\sigma \wedge u) \cdot (\sigma \wedge \dot{u})}{\|\sigma \wedge u\|^5} * \dot{u} \wedge u \wedge \sigma + \frac{\mu}{\|\sigma\|^3 \|u\|^3} (u^2 \dot{u} - (u \cdot \dot{u}) u) = 0, \quad (5)$$

яке дозволяє „розморозити“ значення „0“ інтеграла руху

$$\frac{\sigma \cdot u}{\|u\|}, \quad (6)$$

де значком σ позначений деякий чотири-вектор „спіну“ (вертуна). Тільки в цьому „розмороженні“ і полягає нерівнозначність між узагальненим рівнянням руху вільної дзиги (5) і системою (1, 2, 3) при відсутності гравітації. Наша тактика полягає в тім, щоб, отримавши *варіаційне* рівняння третього порядку, яке містить усі розв'язки системи рівнянь (4, 2, 3), і яке ми називаємо *узагальненим*, відважитись розглядати і всю решту розв'язків такого *узагальненого* рівняння. Виявляється, що ця решта розв'язків *не виходить за межі інтеграла руху* (6). Цієї властивості не добитись, просто відкидаючи умову (3) і залишаючись при рівнянні (6). Можна сказати, що „розмороження“ інтегралу (6) є рівнозначним до варіаційної модифікації рівняння (4). При цьому виявляється, що *уся множина розв'язків узагальненого рівняння складається з таких і тільки з таких світових ліній, які можна інтерпретувати як*

рухи крутьких часток з деякою позірною масою $m = \mu \left(1 - \frac{(\sigma \cdot u)^2}{\sigma^2 u^2} \right)^{3/2}$.