А.В. Свідзинський
Волинський державний університет імені Лесі Українки,
кафедра теоретичної і математичної фізики,
проспект Волі, 13, Луцьк, 43000

МЕТОД ФУНКЦІОНАЛЬНОГО ІНТЕГРУВАННЯ В КВАНТОВІЙ МЕХАНІЦІ І КВАЗІКЛАСИЧНЕ НАБЛИЖЕННЯ

Представлення квантово-механічного пропагатора в квантовій механіці у вигляді функціонального інтеграла (інтеграла по траєкторіях), згідно з Фейнманом, визначає амплітуду переходу електрона з точки $(x',0)$ в точку (x,t). Інтегруванню підлягає експонента вигляду $\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S[x(\tau,x,x',t)]\right\}$, де всі можливі шляхи $x(\tau,x,x',t)$ починаються і закінчуються у зазначених часо-просторових точках, а дія S дається звичайним класичним виразом. Серед цих шляхів класичний шлях $X(\tau,x,x',t)$ виділяється умовою екстремуму дії при вказаних вище умовах. Доцільно виділити класичний шлях, переходячи у функціональному інтегралі до інтегрування по відхиленням (флуктуаціям) від нього через зсув заміни змінної інтегрування

$$x(\tau,x,x',t)=X(\tau,x,x',t)+y(\tau,t)$$

внаслідок чого інтегрування відбувається по $y(\tau,t)$, що задовольняють однорідні умови $y(0,t)=y(t,t)=0$.

Після цього легко сформулювати квазікласичне наближення як таке, при якому в показнику експоненти обмежуємося наближенням другої варіації, тобто покладаємо $S[x(\tau,x,x',t)]\cong S_{кл}+\delta^2 S$, де останній член є квадратичним по $y(\tau,t)$ функціоналом

$$\int_0^t\left(\frac{m\dot{y}^2(\tau)}{2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V(X(\tau))}{\partial X^2(\tau)}y^2(\tau)\right)d\tau$$

Тоді функціональне інтегрування виконується (оскільки форма в показнику експоненти є квадратичною); результат має вигляд:

$$U(x,x',t)\cong\left(\frac{m}{2\pi i\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S_{кл}(x,x',t)\right\}(D_0/D)^{\frac{1}{2}}$$

де D_0 є детермінант оператора $-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}$, а D – детермінант оператора $-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}-\frac{1}{m}V''(X(\tau))$

Обчислення завершується доказом того, що

$$D_0/D=-\frac{t}{m}\frac{\partial\, S_{кл}(x,x',t)}{\partial x\partial x'}$$

Цей етап доведення потребує найбільш прискіпливого аналізу і пов'язаний з використанням основних фактів теорії полей Якобі.

Перехід від пропагатора до резольвенти (функції Гріна) виконується звичайним чином.