

# ВИЗНАЧЕННЯ ВІБРОДІАГНОСТИЧНИХ ПАРАМЕТРІВ НАЯВНОСТІ «ДИХАЮЧОЇ» ТРІЩИНИ В СТРИЖНЕВИХ КОНСТРУКТИВНИХ ЕЛЕМЕНТАХ РІЗНОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ

Є. Синенко

Інститут проблем міцності імені Г.С. Писаренка НАН України,  
Київ, Україна

**Abstract.** A procedure for calculation of the vibrodiagnostic parameters of the presence of a breathing crack in beam structural elements with rectangular and circular cross sections using their finite element models has been proposed. The results of the performed numerical calculations aimed at determining the influence of the driving force application point along the length of beams on the correlation between the amplitudes of dominant harmonics at super- and subharmonic resonances are presented.

**Постановка проблеми та аналіз існуючих досліджень.** У більшості випадків деталі машин, зокрема і стрижневі конструктивні елементи, експлуатуються в широкому спектрі динамічних навантажень у складних умовах навколишнього середовища, які часто призводять до виникнення тріщин втоми. Своєчасна діагностика дозволяє виявити такі пошкодження і оцінити їх розміри, та тим самим забезпечити надійну експлуатацію машин.

Огляд існуючих робіт показує, що проблема розробки ефективних та в той же час недорогих вібраційних методів діагностики пошкоджень є актуальною і викликає інтерес у дослідників. При цьому слід зазначити, що якщо перші роботи [1-2] були присвячені впливу дефектів типу забоїни чи відкритої тріщини на модальні характеристики конструктивного елемента, зміна яких проявляється лише при пошкодженнях, що складають більш ніж 20% висоти його поперечного перерізу, то в останнє десятиліття основна увага приділяється розробці методів діагностики на основі виникнення нелінійних режимів коливальних, які є більш чутливими і потребують розрахункових моделей з повноцінною «дихаючою» тріщиною [3-4].

Як свідчать результати проведеного аналізу публікацій в напрямку вивчення закономірностей впливу «дихаючої» тріщини на характеристики коливальних конструктивних елементів, недостатньо вивченими є питання впливу форми їх поперечного перерізу, що і є метою даної роботи.

**Об'єкти дослідження та їх моделювання.** Об'єктами дослідження було обрано консольні стрижні круглого та прямокутного поперечного перерізу довжиною  $L$ , яка дорівнює 230 мм, з місцем знаходження «дихаючої» тріщини нормального відриву глибиною  $a$  на відстані  $x_T = 0,1L$  від защемлення (рис.1). Змущувальна гармонічна сила  $P(t) = P_0 \sin \nu t$  прикладалась на відстані  $x_P$  від защемлення, де  $P_0$  і  $\nu$  - амплітуда та частота сили відповідно. Механічні характеристики матеріалу зразків такі: модуль пружності  $E = 200$  ГПа, густина  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>, а логарифмічний декремент коливальних  $\delta = 0,01$ . Вибір таких об'єктів дослідження пояснюється, по перше, тим, що стрижні є спрощеною моделлю багатьох конструктивних елементів, в тому числі лопаток, і дозволяють дослідити чисті згинні коливання. По друге, модель стрижня прямокутного поперечного перерізу була апробована у роботі [5], що обумовлює можливість визначити достовірність методології проведення обчислювальних експериментів і провести співставлення отриманих та відомих результатів розрахунків.

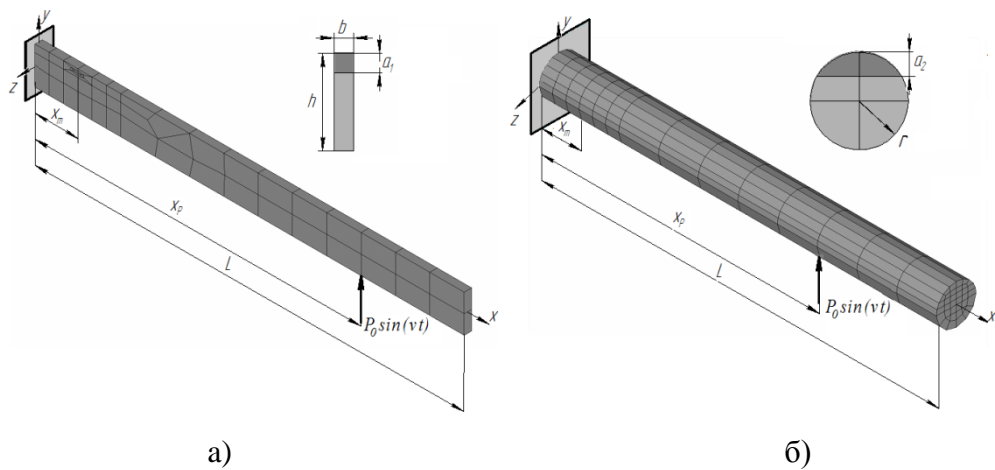


Рис. 1. Загальний вигляд консольних стрижнів прямокутного (а) та круглого поперечного перерізів (б) з нанесеною скінченноелементною сіткою

Будемо позначати характеристики вибраних стрижнів нижніми індексами  $i = 1, 2$ , де 1 відповідає стрижню прямокутного, а 2 – круглого поперечного перерізу.

Для досягнення мети роботи геометричні параметри досліджуваних стрижнів обиралися таким чином, щоб виконувалась рівність

$$f_{01} = f_{02}, \quad (1)$$

де  $f_0$  - частота основної згинної форми коливань, яка визначається формулою [6]

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{EI}{\rho F}} \cdot \left(\frac{1.875}{L}\right)^2. \quad (2)$$

Тут  $I$  - момент інерції згину,  $F$  - площа поперечного перерізу.

Рівність (1) виконується при умові, що  $\frac{I_1}{F_1} = \frac{I_2}{F_2}$ . Для цього були вибрані такі розміри поперечних перерізів:  $b \times h = 4 \times 20 \text{ мм}$ ;  $r = 11,5 \text{ мм}$ .

Скінченноелементні моделі стрижнів з «дихаючою» тріщиною створювались з використанням лінійного 8-вузлового елемента Solid45 та його модифікацій. Область навколо тріщини характеризується згущенням скінченноелементної сітки. Тріщина моделювалась, як математичний розріз, а взаємне непроникнення берегів при її відкритті-закритті забезпечується розв'язанням контактної задачі, для чого використовувались контактні елементи Conta174 [5].

**Алгоритм розв'язання задачі.** Вимушені коливання стрижня з тріщиною під дією сили  $P(t)$  описуються нелінійним диференціальним рівнянням:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [D]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{P(t)\}, \quad (3)$$

де  $[M]$  і  $[D]$  - інерційна та диссипативна матриці системи відповідно;  $[K]$  - матриця жорсткості, що змінюється в часі в залежності від контактної взаємодії берегів тріщини та визначає нелінійність системи, що розглядається;  $\{u\}$ ,  $\{\dot{u}\}$ ,  $\{\ddot{u}\}$  - вектор-стовпчики переміщення, швидкості і прискорення відповідно;  $\{P(t)\}$  - вектор-стовпчик зовнішнього гармонічного навантаження.

Розв'язання рівняння (3) здійснювалось за допомогою методу Ньюмарка

$$\begin{cases} \{\dot{u}\}_{t+\Delta t} = \{\dot{u}\}_t + [(1-\gamma)\{\ddot{u}\}_t + \gamma\{\ddot{u}\}_{t+\Delta t}]\Delta t; \\ \{u\}_{t+\Delta t} = \{u\}_t + \{\dot{u}\}_t\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\{\ddot{u}\}_t + \beta\{\ddot{u}\}_{t+\Delta t}\right]\Delta t^2, \end{cases} \quad (4)$$

де  $\beta$  і  $\gamma$  - параметри інтегрування Ньюмарка, які визначають точність і стійкість інтегрування.

Суть методу полягає в тому, що загальний час  $T$  вимушених коливань стрижня від початку їх збудження до виходу на уставлений режим, при початкових умовах  $\{u\}_0 = 0$ ,  $\{\dot{u}\}_0 = 0$ ,  $\{\ddot{u}\}_0 = 0$ , розбивається на  $N$  кроків з кроком по часу  $\Delta t = T/N$ . При цьому, за результатами проведених розрахунків було встановлено, що величина  $\Delta t$  впливає на їх точність, а задовільна точність досягається при кількості знайдених розв'язків  $u$  для одного періоду коливань більше 180. Далі, з врахуванням на кожному кроці рішення для попереднього значення часу, знаходилися наближені значення  $u$  для кожного моменту часу  $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, T$ , що дозволяло отримати залежність переміщення від часу  $u(t)$ .

Суттєвою особливістю нелінійної системи стрижня з «дихаючою» тріщиною є можливість виникнення нелінійних резонансів та наявність у переміщенні при гармонічному збудженні вищих гармонік. Для визначення амплітуд переміщень  $A_k$ , де  $k$  - номер гармоніки, використовувалась процедура швидкого перетворення Фур'є (FFT) отриманих залежностей переміщення вільного кінця консольного стрижня  $u(t)$ . Проведення FFT аналізу можливе при виконанні умови, що масив оброблювальних даних кратний  $2^n$ , де  $n$  - ціле число, для трьох і більше періодів функції, що досліджується. В роботі це досягалось шляхом інтерполяції трьох періодів залежності  $u(t)$ , що відповідають встановленому режиму вимушених коливань стрижня, та їх представленні у вигляді 8192 точок.

**Результати досліджень.** У відповідності з метою роботи було проведено комплекс чисельних розрахунків з визначення впливу форми поперечного перерізу стрижня на вібродіагностичні параметри наявності «дихаючої» тріщини. В якості вібродіагностичного параметру наявності тріщини, як і в роботі [5], було обрано відношення амплітуд домінуючих гармонік, а саме другої (резонуючої) і першої ( $\bar{A}_{2/1} = A_2/A_1$ ) при супергармонічному ( $\nu = 0,5f_0$ ) та першої (резонуючої) і другої гармонік ( $\bar{A}_{1/2} = A_1/A_2$ ) при субгармонічному ( $\nu = 2f_0$ ) резонансах. Розрахунки проводились при варіюванні точки прикладання  $x_p$  по довжині стрижнів гармонічної змушувальної сили.

Для забезпечення співставлення результатів досліджень передбачалось, що площі поперечних перерізів, обумовлених тріщиною, співпадають. Це можливо при  $a_1 = 4\text{мм}$ , а  $a_2 = 5,84\text{мм}$ .

На основі даних виконаних чисельних розрахунків були визначені залежності амплітуд  $\bar{A}_{2/1}$  та  $\bar{A}_{1/2}$  домінуючих гармонік від місця прикладання змушувальної сили  $x_p$ , які приведені на рис. 2. Аналіз представлених даних свідчить про наступне.

По-перше, ступінь нелінійності коливного процесу суттєво залежить від точки прикладання змушувальної сили. По-друге, форма поперечного перерізу практично не впливає на закономірності зміни відношення амплітуд домінуючих гармонік амплітуд переміщень від точки прикладання змушувальної сили. По-третє, характер залежності відношення амплітуд домінуючих гармонік переміщень від точки прикладання змушувальної сили суттєво залежить від виду резонансу. Так, якщо при супергармонічному резонансі при  $x_p \cong 0,1L$  спостерігається локальний мінімум  $\bar{A}_{2/1}$ , а при  $x_p \approx 0,2L$  - його локальний максимум, то у випадку субгармонічного резонансу має місце зворотнє явище. Подальше зміщення точки прикладання змушувальної сили від вільного кінця стрижня обумовлює при супергармонічному резонансі монотонне спадання величини  $\bar{A}_{2/1}$ , а при субгармонічному резонансі, навпаки, в цілому має місце зростання  $\bar{A}_{1/2}$ . Однак, існують точки прикладання сили, коли нелінійність коливального процесу не проявляється, а стрижень поводить себе як суцільний. Наочно такий випадок зображений на рис. 2,б, коли при прикладанні сили в точці  $x_p/L = 0,4$  резонуюча гармоніка  $A_1$  не проявляється, а відношення  $\bar{A}_{1/2} = 0$ .

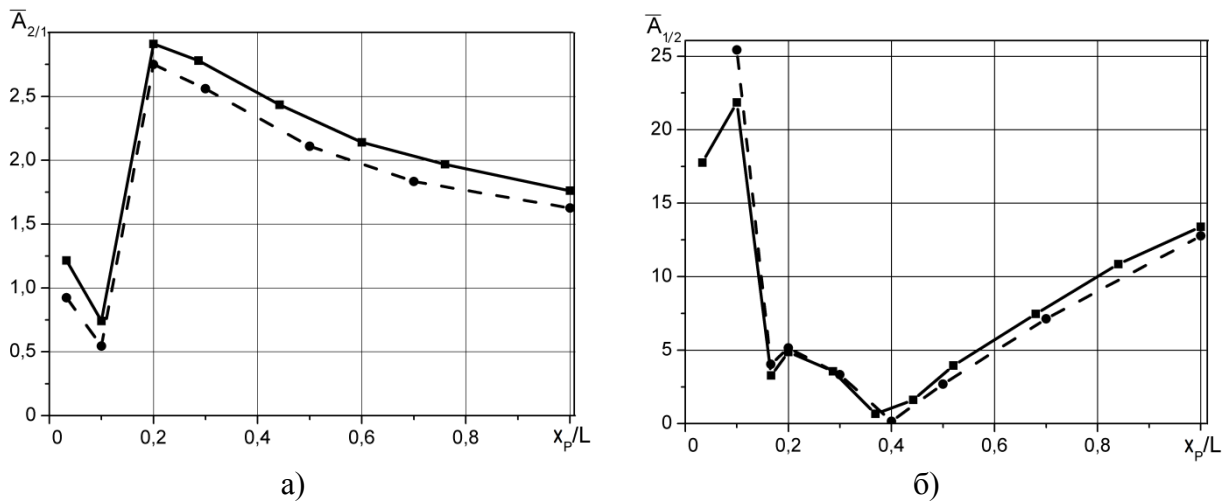


Рис. 2. Залежність максимальних амплітуд гармонік переміщень при супер- (а) і субгармонічному (б) резонансах від місця прикладання змушувальної сили для стрижнів прямокутного (суцільні лінії) та круглого (штрихові лінії) поперечних перерізів

### Висновки.

В результаті проведеного чисельного дослідження з використанням розроблених скінченноелементних моделей стрижнів різного поперечного перерізу з «дыхаючими» тріщинами були отримані закономірності впливу місця прикладання змушувальної гармонічної сили по довжині стрижня на відношення амплітуд домінуючих гармонік переміщення при супер- та субгармонічному резонансі.

Встановлено, що закономірності зміни відношення амплітуд домінуючих гармонік переміщення від точки прикладання змушувальної гармонічної сили, не залежать від форми поперечного перерізу стрижня і визначається лише типом резонансу.

Таким чином, запропонована методика визначення вібродіагностичного параметру наявності «дыхаючої» тріщини може бути використана для стрижневих конструктивних елементів різної форми поперечного перерізу.

### Список використаної літератури.

1. [Krawczuk M.](#) Transverse Natural Vibrations of a Cracked Beam Loaded with a Constant Axial Force / [M. Krawczuk](#), [W. M. Ostachowicz](#) // J. of Vibration and Acoustics. – 1993. – **115**, No. 4. – P. 524-528.
2. Chondros T. G. A continuous cracked beam vibration theory / T. G. Chondros, A. D. Diamarogonas, J. Yao // [J. Sound and Vibr.](#) – 1998. – **215**, No. 1. – P. 17-34.
3. Andreaus U. Non-linear dynamics of a cracked cantilever beam under harmonic excitation // U. Andreaus, P. Casini, F. Vestroni / Int. J. of Non-Linear Mechanics. – 2007. – **42**, No. 3. – P. 566-575.
4. Giannopoulos G.I. Coupled vibration response of a shaft with a breathing crack / G.I. Giannopoulos, S.K. Georgantzinis, N.K. Anifantis // [J. Sound and Vibr.](#) – 2015. – **336**, No. 3. – P. 191–206.
5. Зиньковский А. П. Конечноеэлементное моделирование изгибных колебаний стержня с «дыхающей» трещиной усталости / А. П. Зиньковский, В. А. Круц, Е. А. Синенко // Вібрації в техніці та технологіях. – 2014. - № 2 (74). – С. 23-28.
6. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле / Тимошенко С. П., Янг Д. Х., У. Уивер; пер. с англ. Л. Г. Корнейчука. – Москва : Машиностроение, 1985. – 472 с.