

УДК 539.3

Й. Лучко¹, докт. техн. наук; І. Добрянський², канд. техн. наук

¹Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту
ім. академіка В. Лазаряна

²Львівський національний аграрний університет

РОЗРАХУНОК НАПРУЖЕНЬ У БАЛЦІ НА ОСНОВІ РІВНЯНЬ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

Резюме. Побудовано схему розрахунку напруженого стану балки при згині, яка ґрунтується на розв'язку відповідної задачі теорії пружності про рівновагу смуги, до бокових граней якої прикладене дотичне зусилля, яке зрівноважує зовнішнє навантаження. Враховано наявність опорних ділянок скінченної довжини в околі торців балки, які сприймають тимчасове навантаження, що змінюється за лінійним законом, де можуть виникати і розповсюджуватися похилі тріщини. Розв'язок сформульованої задачі теорії пружності побудовано без застосування принципу Сен-Венана. Виконано дослідження зміни нормальних і дотичних напружень уздовж довжини і висоти балки.

Ключові слова: теорія пружності, балка, навантаження, похилі тріщини, лінійний закон зміни навантаження, опорна ділянка, принцип Сен-Венана.

J. Lutchko, I. Dobryanskyu

CALCULATION OF THE STRESSES ON THE BASIS OF THE EQUATION OF THE THEORY ELASTICITY

The summary. In the paper the scheme of calculation of stresses state of the beam at bend, which based on the solution to corresponding problem of theory elasticity about the balance of the strip to side border to add touch load, which equilibrium external load, is construction. By account available finite base areas, which perceive temporary load, which change to linear law, in the district of edge beam, who it is possible origination and extended the cracks. The solution formulated problem of theory elasticity building without applied of the Saint-Venan principle. It's made the investigation character change of normal and touch stresses across length and high of the beam.

Key words: theory of elasticity, beam, load, slide cracks, linear law change of the load, support area, Saint-Venan principle.

Постановка проблеми. Залізобетон на сьогодні є основним складником конструктивних елементів будівельної індустрії. Враховуючи стрімке зростання масштабів будівництва зрозумілою є актуальність проблеми раціонального проектування залізобетонних конструкцій з використанням сучасних модифікованих розрахункових методик, бо навіть незначна економія матеріалу на виробках масового виробництва дає значну економію відповідних матеріальних ресурсів.

Аналіз досліджень і публікацій з даної проблематики. Раціональність та економічність проекрованої конструкції залежить від багатьох чинників. Один із найважливіших серед них – це методика розрахунку. Хоча на даний час методи розрахунку будівельних конструкцій добре розвинені, але їх удосконалення триває постійно [1-5].

Особливу увагу слід звернути на те, що при проектуванні будівлі для її надійності велике значення має варіант розрахунку при знаходженні силових факторів в околі опорних ділянок, який проєктант бере за основу тому, що вони можуть суттєво відрізнитися [6,7].

Метою даної роботи є побудова уточненої методики розрахунку балки при згині на основі методів теорії пружності.

Постановка завдання. Зрозуміло, що похилі тріщини утворюються безпосередньо в околі опор, де, як впливає з принципу Сен-Венана, розв'язок опору матеріалів неприйнятний. Будемо враховувати наявність ділянок скінченої довжини в околі торців балки, які сприймають тимчасове навантаження. В такій постановці граничні умови на кінцях балки можна задовольнити точно без притягнення принципу Сен-Венана. Розрахункову схему приймемо у вигляді балки прямокутного поперечного січення одиничної ширини, висотою H і довжиною $2L$, на двох шарнірних опорах, яка перебуває в умовах дії розподіленого навантаження $p(x)$. Вважаємо, що балка є ізотропним лінійно-пружним матеріальним континуумом. Нижня і верхня кромки балки вільні від дотичних зусиль, на торцях напруження відсутні (рис. 1а).

Результати досліджень. У літературі [8, 9] відомі ефективні методи розв'язування задачі про згин балки при сталому зовнішньому навантаженні. Однак у вказаних роботах задача про згин балки замінена задачею про рівновагу смуги, до бокових граней якої прикладено дотичні зусилля $\tau_{xy}(L, y)$, які зрівноважують зовнішнє навантаження p , тобто

$$\int_0^H \tau_{xy}(L, y) dy = pL. \quad (1)$$

Враховуючи принцип Сен-Венана, наявні в літературі розв'язки є досить адекватними при описі згину балок. Але подальший аналіз задачі про визначення напружено-деформованого стану залізобетонної балки з тріщиною вимагає точнішого підходу, особливо в околі точок $x = \pm L$, тобто в околі торців балки, де можливе зародження і розповсюдження похилих тріщин.

У даній роботі поставимо задачу про отримання розрахункових формул для компонент тензора напружень у балці в довільному перерізі, в тому числі й там, де можливе зародження тріщини.

Запишемо граничні умови задачі:

$$\begin{aligned} \sigma_y = -p(x) \text{ при } y = H, \tau_{xy} = 0 \text{ при } y = 0, y = H, \\ \sigma_x = 0, \tau_{xy} = 0 \text{ при } x = \pm L. \end{aligned} \quad (2)$$

Опорні реакції замінимо розподіленим навантаженням, яке діє на деякій скінченій по ширині опорі.

Розглянемо випадок розподілу навантаження в околі опор за лінійним законом (рис. 1а). Доповнимо граничні умови (2) вважаючи, що при $y = 0$ має місце додаткова умова

$$\sigma_y = -q(x) = \begin{cases} 0, 0 \leq |x| \leq L - a, \\ q \frac{L}{a} \left(1 - \frac{x}{L}\right), L - a < |x| \leq L, \end{cases} \quad (3)$$

причому в умові (3) a – ширина опори. З умови рівноваги балки впливає умова $qa = 2pL$.

У результаті маємо задачу теорії пружності про визначення напружено-деформованого стану в розглядуваній системі за граничних умов (2), (3).

Розкладемо діючі зовнішні навантаження, які описуються функціями $p(x)$ та $q(x)$, у ряд Фур'є, розширивши інтервал зміни їх аргументу x від $-L \leq x \leq L$ до $-2L \leq x \leq 2L$. Тоді для навантаження $p(x)$ на інтервал довжиною $4L$ ($-2L \leq x \leq 2L$), причому $p(2L - x) = -p(x)$, $0 \leq x \leq L$, $p(-x) = p(x)$, $-2L \leq x \leq 2L$, отримаємо

$$p(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \cos \alpha_k x, \quad p_{2k} = 0, \quad p_k = \frac{4p}{(2n-1)\pi} (-1)^{n+1}, \quad \alpha_k = \frac{\pi k}{2L}, \quad k = 2n - 1. \quad (4)$$

Функція $q(x)$ на розширеному інтервалі зміни (рис. 1, б) буде

$$q(x) = \begin{cases} 0, 0 \leq |x| \leq L-a, \\ q \frac{L}{a} \left(1 - \frac{x}{L}\right), L-a < |x| \leq L+a, \\ 0, L+a < |x| \leq 2L. \end{cases}$$

Тоді для розкладу $q(x)$ отримаємо

$$q(x) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \cos \alpha_k x, \quad q_k = \frac{q}{a} \int_{L-a}^{L+a} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \cos \frac{k\pi x}{2L} dx, \\ q_k = \begin{cases} 0, k = 2n, \\ \frac{4q(-1)^k}{k\pi} \left[\frac{2L}{k\pi a} \sin \frac{k\pi a}{2L} - \cos \frac{k\pi a}{2L} \right], k = 2n-1. \end{cases} \quad (5)$$

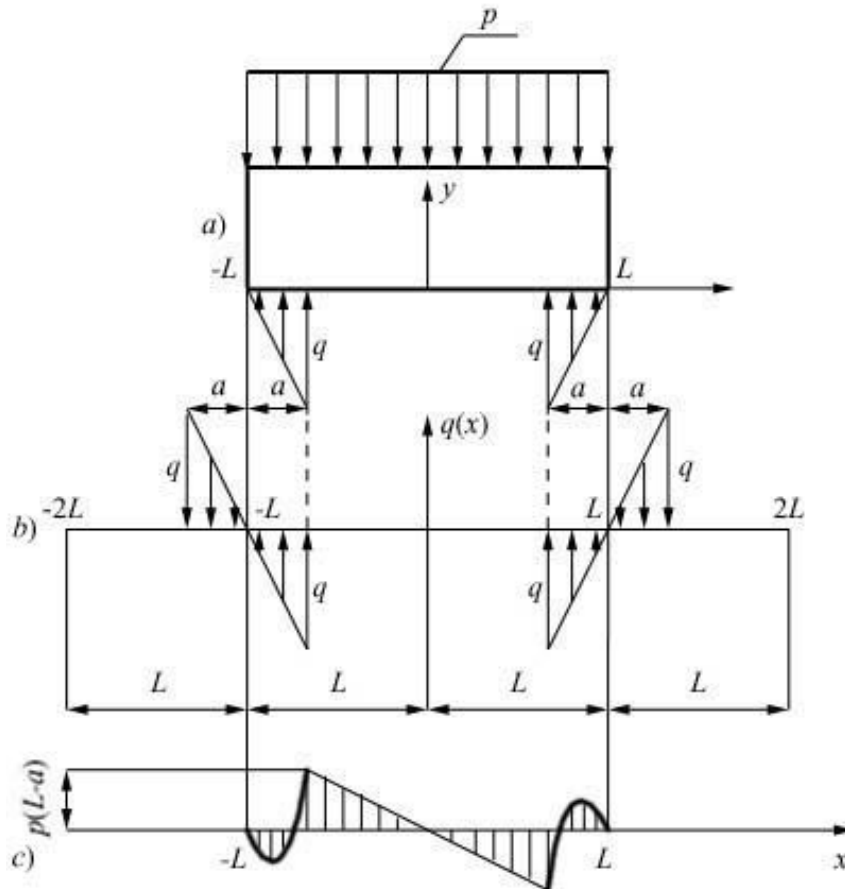


Рисунок 1 – Розподілене навантаження на балку $p(x)$ (a); графік функції $q(x)$ (b) на розширеному інтервалі $(-2L \leq x \leq 2L)$; епюра перерізуючої сили (c)

Шукані компоненти тензора напружень виразимо через бігармонійну функцію Ері U [10]

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}.$$

Розв'язок бігармонійного рівняння для визначення функції Ері з урахуванням умови обмеженості в нескінченно віддаленій точці по змінній x можна записати у вигляді

$$U = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\beta_k x} \left[(A'_k + A''_k x) \cos \beta_k y + (B'_k + B''_k x) e^{-\beta_k x} \sin \beta_k y \right],$$

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\beta_k x} \left[\beta_k^2 (A'_k + A''_k x) \cos \beta_k y + \beta_k^2 (B'_k + B''_k x) e^{-\beta_k x} \sin \beta_k y \right], \\ \sigma_y &= \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k e^{-\beta_k x} \left\{ [A'_k \beta_k + (\beta_k x - 2) A''_k] \cos \beta_k y + [B'_k \beta_k + (\beta_k x - 2) B''_k] \right\} \sin \beta_k y, \\ \tau_{xy} &= \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k e^{-\beta_k x} \left\{ [-A'_k \beta_k + (1 - \beta_k x) A''_k] \sin \beta_k y - [-B'_k \beta_k + (1 - \beta_k x) B''_k] \right\} \cos \beta_k y. \end{aligned} \quad (6)$$

Беручи до уваги, що при $x = 0$,

$$\sigma_x = -\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 (A'_k \cos \beta_k y + B'_k \sin \beta_k y),$$

а також граничні умови

$$\sigma_y = 0, \tau_{xy} = 0 \text{ при } y = H/2, \sigma_x = 0 \text{ при } x = 0, \tau_{xy} = \tau_{xy}^0 \text{ при } x = \pm L, \quad (7)$$

отримаємо $A'_k = B'_k = 0$.

У результаті замість формул (6) отримаємо такі залежності:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 e^{-\beta_k x} (A''_k \cos \beta_k y + B''_k \sin \beta_k y), \\ \sigma_y &= \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k e^{-\beta_k x} (\beta_k x - 2) (A''_k \cos \beta_k y + B''_k \sin \beta_k y), \\ \tau_{xy} &= \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k e^{-\beta_k x} (1 - \beta_k x) (A''_k \sin \beta_k y - B''_k \cos \beta_k y). \end{aligned} \quad (8)$$

Формули (8) визначають розв'язок розглядуваної задачі з точністю до принципу Сен-Венана. При цьому в граничній умові (2) замість $\tau_{xy} = 0$ при $x = \pm L$ виконується лише співвідношення (1), тобто $R = 0$. Отже, необхідно зняти дотичне напруження при $x = \pm L$. З цією метою розглянемо допоміжну задачу для півбезмежної полоси (рис. 2): грані $y = \pm H/2$ вільні від напружень, на торці $x = 0$ відсутні нормальні напруження σ_x , але прикладено дотичні напруження τ_{xy} , протилежні за знаком відповідному напруженню τ_{xy}^0 згідно з умовами (7).

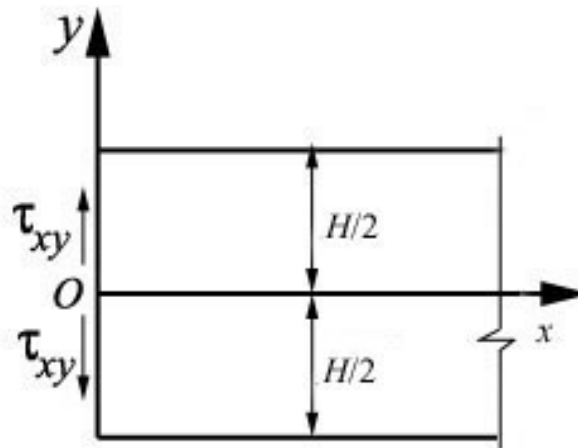


Рисунок 2 – Необмежена полоса, до торця якої прикладені дотичні напруження

В умовах (7) напруження τ_{xy}^0 визначаємо виразом

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^0 &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left\{ (q_{2k-1} + C_{2k-1} \alpha_{2k-1}) \operatorname{sh} \alpha_{2k-1} (y + H/2) + \right. \\ &\left. + (y + H/2) \alpha_{2k-1}^2 [-\alpha_{2k-1} B_{2k-1} \operatorname{sh} \alpha_{2k-1} (y + H/2) + C_{2k-1} \operatorname{ch} \alpha_{2k-1} (y + H/2)] \right\}. \end{aligned}$$

Запишемо вираз для τ_{xy}^0 у вигляді ряду Фур'є

$$\tau_{xy}^0 = \sum_{k=1}^{\infty} (\tau'_k \sin \beta_k y + \tau''_k \cos \beta_k y),$$

в якому коефіцієнти розкладу визначимо за формулами

$$\tau'_k = \frac{2}{H} \int_{-H/2}^{H/2} \tau_{xy}^0 \sin \beta_k y dy, \quad \tau''_k = \frac{2}{H} \int_{-H/2}^{H/2} \tau_{xy}^0 \cos \beta_k y dy, \quad \beta_k = \frac{2k\pi}{H}.$$

Обчислюючи відповідні інтеграли, отримаємо

$$\begin{aligned} \tau'_k &= \frac{2}{H} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+k} \left\{ - (q_{2n-1} + C_{2n-1} \alpha_{2n-1}) \frac{\beta_k \operatorname{sh} \alpha_{2n-1} H}{\alpha_{2n-1}^2 + \beta_k^2} - \right. \\ &- \alpha_{2n-1}^3 B_{2n-1} \left[- \frac{\beta_k H \operatorname{sh} \alpha_{2n-1} H}{\alpha_{2n-1}^2 + \beta_k^2} + \frac{2 \alpha_{2n-1} \beta_k (\operatorname{ch} \alpha_{2n-1} H - 1)}{\alpha_{2n-1}^2 + \beta_k^2} \right] + \\ &+ \alpha_{2n-1}^2 C_{2n-1} \left[- \frac{\beta_k H \operatorname{ch} \alpha_{2n-1} H}{\alpha_{2n-1}^2 + \beta_k^2} + \frac{2 \alpha_{2n-1} \beta_k \operatorname{sh} \alpha_{2n-1} H}{(\alpha_{2n-1}^2 + \beta_k^2)^2} \right] \left. \right\}, \quad (9) \\ \tau''_k &= \frac{2}{H} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+k} \left\{ (q_{2n-1} + C_{2n-1} \alpha_{2n-1}) \frac{\alpha_{2n-1} (\operatorname{ch} \alpha_{2n-1} H - 1)}{\alpha_{2n-1}^2 + \beta_k^2} - \right. \\ &- \alpha_{2n-1}^3 B_{2n-1} \left[- \frac{\alpha_{2n-1} H \operatorname{ch} \alpha_{2n-1} H}{\alpha_{2n-1}^2 + \beta_k^2} + \frac{(\beta_k^2 - \alpha_{2n-1}^2) \operatorname{sh} \alpha_{2n-1} H}{(\alpha_{2n-1}^2 + \beta_k^2)^2} \right] + \\ &+ \alpha_{2n-1}^2 C_{2n-1} \left[- \frac{\alpha_{2n-1} H \operatorname{sh} \alpha_{2n-1} H}{\alpha_{2n-1}^2 + \beta_k^2} + \frac{(\beta_k^2 - \alpha_{2n-1}^2) (\operatorname{ch} \alpha_{2n-1} H - 1)}{(\alpha_{2n-1}^2 + \beta_k^2)^2} \right] \left. \right\}. \end{aligned}$$

В отриманих залежностях при великих значеннях індексу сумування n гіперболічні функції $\operatorname{sh} \alpha_{2n-1} H$ та $\operatorname{ch} \alpha_{2n-1} H$ прямують до безмежності, тому можна покласти $\operatorname{sh} \alpha_{2n-1} H \cong \operatorname{ch} \alpha_{2n-1} H$. Тому, перетворюючи вирази (9) і беручи до уваги також співвідношення для коефіцієнтів B_{2n-1} , C_{2n-1} , отримаємо

$$\begin{aligned} \tau'_k &= \frac{2}{H} \sum_{n=1}^{n_1^*} (-1)^{n+k} \left\{ - (q_{2n-1} + C_{2n-1} \alpha_{2n-1}) \frac{\beta_k \operatorname{sh} \alpha_{2n-1} H}{\alpha_{2n-1}^2 + \beta_k^2} - \right. \\ &- \alpha_{2n-1}^3 B_{2n-1} \left[- \frac{\beta_k H \operatorname{sh} \alpha_{2n-1} H}{\alpha_{2n-1}^2 + \beta_k^2} + \frac{2 \alpha_{2n-1} \beta_k (\operatorname{ch} \alpha_{2n-1} H - 1)}{\alpha_{2n-1}^2 + \beta_k^2} \right] + \\ &+ \alpha_{2n-1}^2 C_{2n-1} \left[- \frac{\beta_k H \operatorname{ch} \alpha_{2n-1} H}{\alpha_{2n-1}^2 + \beta_k^2} + \frac{2 \alpha_{2n-1} \beta_k \operatorname{sh} \alpha_{2n-1} H}{(\alpha_{2n-1}^2 + \beta_k^2)^2} \right] \left. \right\} - \\ &- \frac{4}{H} \sum_{n=n_1^*+1}^{\infty} (-1)^{n+k} (p_{2n-1} + q_{2n-1}) \frac{\alpha_{2n-1}^2 \beta_k}{\alpha_{2n-1}^2 + \beta_k^2}, \\ \tau''_k &= \frac{2}{H} \sum_{n=1}^{n_2^*} (-1)^{n+k} \left\{ (q_{2n-1} + C_{2n-1} \alpha_{2n-1}) \frac{\alpha_{2n-1} (\operatorname{ch} \alpha_{2n-1} H - 1)}{\alpha_{2n-1}^2 + \beta_k^2} - \right. \\ &- \alpha_{2n-1}^3 B_{2n-1} \left[- \frac{\alpha_{2n-1} H \operatorname{ch} \alpha_{2n-1} H}{\alpha_{2n-1}^2 + \beta_k^2} + \frac{(\beta_k^2 - \alpha_{2n-1}^2) \operatorname{sh} \alpha_{2n-1} H}{(\alpha_{2n-1}^2 + \beta_k^2)^2} \right] + \\ &+ \alpha_{2n-1}^2 C_{2n-1} \left[- \frac{\alpha_{2n-1} H \operatorname{sh} \alpha_{2n-1} H}{\alpha_{2n-1}^2 + \beta_k^2} + \frac{(\beta_k^2 - \alpha_{2n-1}^2) (\operatorname{ch} \alpha_{2n-1} H - 1)}{(\alpha_{2n-1}^2 + \beta_k^2)^2} \right] \left. \right\} + \end{aligned} \quad (10)$$

$$+ \frac{2}{H} \sum_{n=n_2^*+1}^{\infty} (-1)^{n+k} (q_{2n-1} - p_{2n-1}) \frac{\alpha_{2n-1} (\beta_k^2 - \alpha_{2n-1}^2)}{(\alpha_{2n-1}^2 + \beta_k^2)^2}.$$

У формулах (10) величини n_1^* і n_2^* – мінімальні з можливих значень індексу сумування, за яких прямий розрахунок за формулами (8) дає переповнення порядку.

При $x = 0$ зі співвідношень (8) отримуємо

$$\tau_{xy} = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k e^{-\beta_k x} (A_k'' \sin \beta_k y - B_k'' \cos \beta_k y). \quad (11)$$

Співставлення формул для дотичних напружень (10) і співвідношення (11) приводить до рівностей

$$A_k'' = \frac{\tau_k'}{\beta_k}, \quad B_k'' = -\frac{\tau_k''}{\beta_k}.$$

Числовий аналіз за розрахунковими формулами (9) та з урахуванням залежностей (10) проведено при таких параметрах: $H/L = 0,3$; $a/L = 0,1$. Результати досліджень безрозмірних величин напружень σ_x , σ_y і τ_{xy} зображено у вигляді графіків на рис. 3-6.

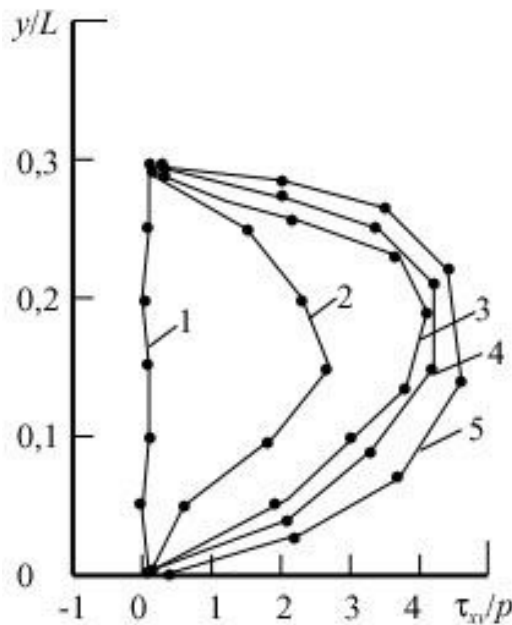


Рисунок 3 – Зміна безрозмірного дотичного τ_{xy} / p напруження залежно від висоти: крива 1 – $x/L = -1$; 2 – $x/L = -0,95$; 3 – $x/L = -0,9$; 4 – $x/L = -0,85$; 5 – $x/L = -0,8$

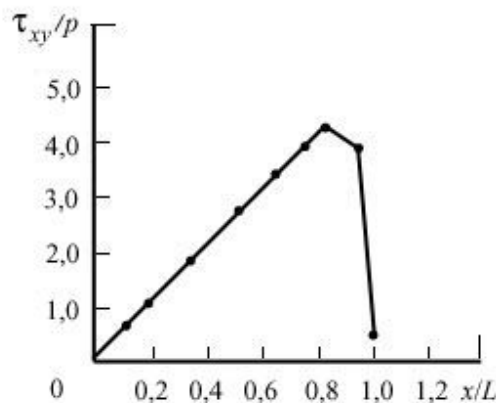


Рисунок 4 – Зміна безрозмірного дотичного τ_{xy} / p напруження вздовж довжини балки при $y = 0,5H = 0,15$ м

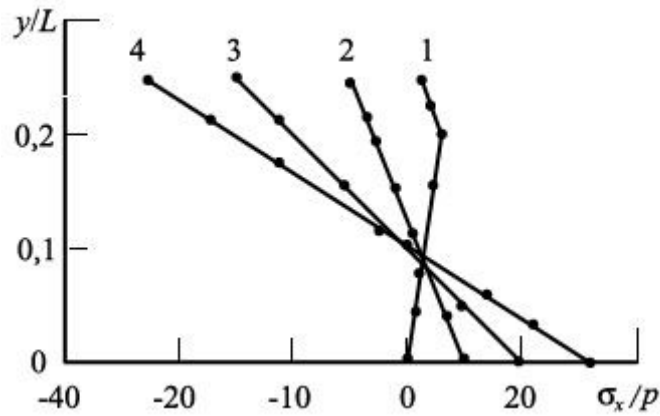


Рисунок 5 – Зміна безрозмірного нормального σ_x/p напруження залежно від висоти:
крива 1 – $x/L = -1$; 2 – $x/L = -0,75$; 3 – $x/L = -0,5$; 4 – $x/L = 0$

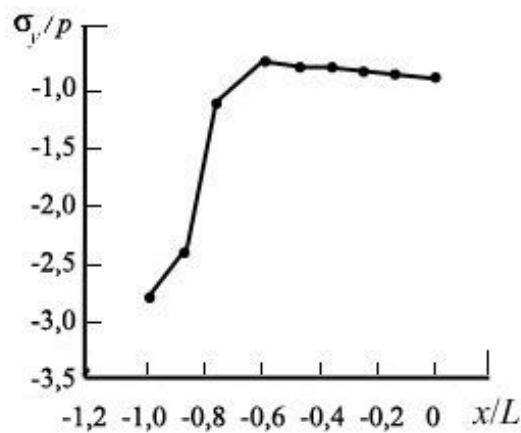


Рисунок 6 – Графік зміни безрозмірного σ_y/p напруження вздовж довжини балки при $y = 0,5H = 0,15$ м

Таблиця 1 – Розрахункові значення нормальних напружень σ_y на нижній і верхній основах балки

x/L	y/H	σ_y/p
-1,0	0,0	4,6570413
-0,8	0,0	-0,39953663
-0,6	0,0	-0,14639635
-0,4	0,0	-0,10096459
-0,2	0,0	-0,084929583
0,0	0,0	-0,080559795
-1,0	0,3	4,6570413
-0,95	0,3	-0,37442341
-0,90	0,3	-1,0121970
-0,85	0,3	-1,0739440
-0,80	0,3	-1,0458622
-0,60	0,3	-0,99521735
-0,40	0,3	-0,99442287
-0,20	0,3	-0,99506529
0,0	0,3	-0,99528950

Розв'язок вихідної задачі з граничними умовами (2) отримаємо суперпозицією напружених станів, які відповідають сталому розподіленню навантаження в околі опор ($\sigma_{x_1}, \sigma_{y_1}, \tau_{xy_1}$) і лінійному ($\sigma_{x_2}, \sigma_{y_2}, \tau_{xy_2}$) згідно з залежностями (9), тобто

$$\sigma_x = \sigma_{x_1} - \sigma_{x_2}, \quad \sigma_y = \sigma_{y_1} - \sigma_{y_2}, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy_1} - \tau_{xy_2}.$$

Розв'язування допоміжної задачі теорії пружності показує, що на верхній і нижній основах балки ($y = 0, y = H$) виникають дотичні τ_{xy} і нормальні σ_y напруження, але відповідний числовий аналіз свідчить, що їх величина досить низька; їх порядок не перевищує $p/10$. Вказані значення напружень наведено в табл. 1 і табл. 2. Верхня частина кожної таблиці відповідає сталому розподілу навантаження в околі опор, нижня – випадку змінної опорної реакції.

Таблиця 2 – Розрахункові значення дотичних напружень τ_{xy} на нижній і верхній основах балки

x/L	y/H	τ_{xy}/p
-1,0	0,0	-0,002782614
-0,8	0,0	0,033547817
-0,6	0,0	0,00051608080
-0,4	0,0	-0,0004152510
-0,2	0,0	-0,00017618619
0,0	0,0	-0,00000001168211
-1,0	0,3	-0,026841641
-0,80	0,3	-0,034471121
-0,60	0,3	-0,00002912822
-0,40	0,3	-0,00000060236574
-0,20	0,3	0,000000011568211

Висновки. Запропоновано аналітичний метод визначення напружень балки, яка працює на згин, що ґрунтується на рівняннях і співвідношеннях теорії пружності. На відміну від методів опору матеріалів розв'язок будується без застосування принципу Сен-Венана. Це досягається шляхом заміни опорних реакцій дією сталого розподіленого навантаження на деякій скінченій ділянці в околі опор. Виконано співставлення числових результатів характеру зміни нормальних і дотичних напружень із відповідними значеннями, підрахованими за формулами опору матеріалів. Встановлено, що вони практично співпадають на ділянці 0,8 довжини прольоту балки.

Література

1. Гвоздев А. А. К вопросу о теории железобетонных конструкций / А. А. Гвоздев // Бетон и железобетон. – 1980. – № 4. – С.29–31.
2. Зайцев Ю. В. Моделирование деформаций и прочности бетона методами механики разрушения / Ю. В. Зайцев. – М.: Стройиздат, 1982. – 196 с.
3. Лучко Й. Й. Механика разрушения бетона (обзор) / Й. Й. Лучко // Физ.-хим. механика материалов. – 1991. – № 3. – С.3–13.
4. Холмянский М. М. К использованию расширенной информации при расчете железобетонных элементов на чистый изгиб / М. М. Холмянский // Строительная механика и расчет сооружений. – 1978. – № 2. – С.38–42.
5. Панасюк В. В. О важнейших исследованиях по физико-химической механике материалов / В. В. Панасюк // Физ.-хим. механика материалов. – 1974. – № 4. – С.3–13.
6. Лучко Й. Й. Уточнений розрахунок і дослідження напружено-деформованого стану балок при згині / Й. Й. Лучко, І. М. Добрянський // Вісник Дніпропетр. нац. ун-ту заліз. трансп. ім акад. В. Лазаряна. – 2010. – № 33. – С.82–92.
7. Лучко Й. Й. Уточнений розрахунок і дослідження напружено-деформованого стану балок при згині / Й. Й. Лучко, М. І. Ігнатишин // Зб. наук. праць «Діагностика, довговічність та реконструкція мостів і будівельних конструкцій». – 2010. – Вип. 11. – С.109–115.
8. Тимошенко С. П. Статические и динамические проблемы теории упругости / С. П. Тимошенко. – К.: Наук. думка, 1975. – 506 с.
9. Безухов Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести / Н. И. Безухов. – М.: Высш. школа, 1961. – 583 с.
10. Новацкий В. Теория упругости / В. Новацкий. – М.: Мир, 1975. – 872 с.

Одержано 14.05.2010 р.