Каплун А. Підсумовування поліпараметричних функціональних рядів за власними елементами гібридного диференціального оператора Фур'є – лежандра – ейлера на сегменті [R0, R3] полярної осі / А. Каплун // Вісник ТНТУ — Тернопіль : ТНТУ, 2015. — Том 77. — № 1. — С. 299-310. — (Математичне моделювання. Математика. Фізика).

УДК 517.52/524:517.58/589

А. Каплун, докт. пед. наук

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

ПІДСУМОВУВАННЯ ПОЛІПАРАМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РЯДІВ ЗА ВЛАСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ ГІБРИДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ФУР'Є – ЛЕЖАНДРА – ЕЙЛЕРА НА СЕГМЕНТІ [R_0, R_3] ПОЛЯРНОЇ ОСІ

Резюме. *Методом порівняння розв'язків, побудованих на трискладовому сегменті полярної осі для сепаратної системи із диференціальних рівнянь Фур'є, Лежандра та Ейлера другого порядку для модифікованих функцій методом функцій Коші та методом відповідного скінченного гібридного інтегрального перетворення підсумовано поліпараметричну сім'ю функціональних рядів.*

Ключові слова: *функціональні ряди, сума ряду, скінченні гібридні інтегральні перетворення, диференціальний оператор.*

A. Kaplun

SUMMARISING OF THE POLYPARAMETRIC FUNCTIONAL SETS ACCORDING TO OWN ELEMENTS OF THE HYBRID FOURIER – LEGENDRE – EULERIAN OPERATOR IN THE POLAR AXIS SEGMENT [R_0, R_3]

Summary. *Efficient introduction of composites in modern technological processes requires to be aware of their physical-technological parameters, foremost in stationary operating regimes, in which they operate after sharp temperature or power load. It results in thermomechanic problems of the lump – homogenous media. In practice even in the simplest model problems the values, which characterise the stationary state, are expressed as polyparametric functional set, which can be adjacent conventionally in the condition, when it represents the analytical function. It follows, that the functional set is reasonable to be replaced by its adjacent result, which is of special importance for the engineering calculations. Solution of the separate system of the Fourier, Legendre and Eulerian differential equations is based on the three-component segment of the polar axis with the boundary conditions and conjugation conditions taking advantage of the Cauchy functions method. With this purpose at first the fundamental system of these equations solutions was obtained, and the boundary conditions the conjugation conditions result in heterogonous algebraic system, which consists of six equations, to find the values Aj, Bj, the determinant of which does not equal zero. The main solutions of the boundary problem, which are caused by the boundary conditions for the Green function and heterogeneity of the conjugation conditions, were found. The solution of this boundary problem is built by the method of the relative finite hybrid integral transformation. Polyparametric family of the functional sets has been summarised while comparing these solutions.*

Key words: *functional sets, set sum, finite hybrid integral transformations, differential operator.*

Вступ. Інтенсивне впровадження композиційних матеріалів у сучасних технологічних процесах вимагає вивчення їх фізико-технічних параметрів, у першу чергу, при стаціонарних режимах, на які вони виходять після стрибкоподібного температурного або силового навантаження. Це призводить до задач термомеханіки кусково-однорідних середовищ.

Практика показує, що навіть у найпростіших модельних задачах величини, що характеризують стаціонарний стан, виражаються у вигляді поліпараметричного функціонального ряду, який може бути умовно збіжним і тоді, коли зображає аналітичну функцію. Звідси природне бажання замінити функціональний ряд його результатом збіжності (функцією), що особливо важливо при інженерних розрахунках. Підсумовування функціональних рядів методами гібридних інтегральних перетворень розглядалося в роботах [1–4].

Метою роботи є обчислення однієї сім’ї поліпараметричних функціональних рядів за власними елементами гібридного диференціального оператора.

Основна частина. Побудуємо обмежений на множині $I_2 = \{r: \ r \in (R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, R_3); R_0 \ge 0, R_3 < \infty\}$ розв'язок сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь Фур'є, Лежандра та Ейлера для модифікованих функцій

$$\left(d^2\!\big/ dr^2 - q_1^2\right) u_1(r) = -g_1(r), \quad r \in (R_0, R_1),$$

$$\left(\Lambda_{(\mu)} - q_2^2\right) u_2(r) = -g_2(r), \quad r \in (R_1, R_2), \tag{1}$$

$$\left(B_\alpha^* - q_3^2\right) u_3(r) = -g_3(r), \quad r \in (R_2, R_3)$$

за крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{d}{dr} + \beta_{11}^0\right) u_1(r)\Big|_{r=R_0} = g_0, \qquad \left(\alpha_{22}^3 \frac{d}{dr} + \beta_{22}^3\right) u_3(r)\Big|_{r=R_3} = g_R \tag{2}$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^k\right) u_k(r) - \left(\alpha_{j2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^k\right) u_{k+1}(r)\right]\Big|_{r=R_k} = \omega_{jk}, \quad j,k = 1,2. \tag{3}$$

У рівностях (1) беруть участь диференціальні оператори Фур'є $d^2\!\big/ dr^2$, Лежандра $\Lambda_{(\mu)}$ та Ейлера B_α^* [5,6]:

$$\Lambda_{(\mu)} = \frac{d^2}{dr^2} + cthr\frac{d}{dr} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1^2}{1 - chr} + \frac{\mu_2^2}{1 + chr}\right), \quad B_\alpha^* = r^2\frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha + 1) r\frac{d}{dr} + \alpha^2,$$

$$\mu_1 \ge \mu_2 \ge 0, \quad (\mu) = (\mu_1, \mu_2), \quad 2\alpha + 1 > 0.$$

Вважаємо, що виконані умови на коефіцієнти $\alpha_{11}^0 \le 0$, $\beta_{11}^0 \ge 0$, $|\alpha_{11}^0| + \beta_{11}^0 \ne 0$; $\alpha_{22}^3 \ge 0$, $\beta_{22}^3 \ge 0$, $\alpha_{22}^3 + \beta_{22}^3 \ne 0$; $\alpha_{jm}^k \ge 0$, $\beta_{jm}^k \ge 0$, $c_{1k} \cdot c_{2k} > 0$, $c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k$; $j, m, k = 1,2$.

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $(d^2\!\big/ dr^2 - q_1^2) v = 0$ утворюють функції chq_1r та shq_1r [5]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Лежандра $(\Lambda_{(\mu)} - q_2^2) v = 0$ утворюють функції $P_{\upsilon_2}^{(\mu)}(chr)$ та $L_{\upsilon_2}^{(\mu)}(chr)$, $\upsilon_2 = -1\!\big/ 2 + q_2$ [6]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $(B_\alpha^* - q_3^2) v = 0$ утворюють модифіковані функції Бесселя $r^{-\alpha - q_3}$ та $r^{-\alpha + q_3}$ [5].

Наявність фундаментальної системи розв'язків дає можливість побудувати розв'язок крайової задачі (1)–(3) методом функцій Коші [5,7]:

$$u_1(r) = A_1 chq_1 r + B_1 shq_1 r + \int_{R_0}^{R_1} E_1(r,\rho) g_1(\rho) d\rho,$$

$$u_2(r) = A_2 P_{\upsilon_2}^{(\mu)}(chr) + B_2 L_{\upsilon_2}^{(\mu)}(chr) + \int_{R_1}^{R_2} E_2(r,\rho) g_2(\rho) sh\rho d\rho, \tag{4}$$

$$u_3(r) = A_3 r^{-\alpha-q_3} + B_3 r^{-\alpha+q_3} + \int_{R_2}^{R_3} E_3(r,\rho) g_3(\rho) \rho^{2\alpha-1} d\rho.$$

У рівностях (4) беруть участь функції Коші [5,7]:

$$E_1(r,\rho) = -\frac{1}{q_1 \Delta_{11}(q_1R_0, q_1R_1)} \begin{cases} \Phi_{11}^0(q_1R_0, q_1r)\Phi_{11}^1(q_1R_1, q_1\rho), & R_0 < r < \rho < R_1 \\ \Phi_{11}^0(q_1R_0, q_1\rho)\Phi_{11}^1(q_1R_1, q_1r), & R_0 < \rho < r < R_1 \end{cases} \tag{5}$$

$$E_2(r,\rho) = \frac{B_{(\mu)}(q_2)}{\Delta_{\upsilon_2;11}^{(\mu)}(chR_1, chR_2)} \begin{cases} F_{\upsilon_2;12}^{(\mu),1}(chR_1, chr) F_{\upsilon_2;11}^{(\mu),2}(chR_2, ch\rho), & R_1 < r < \rho < R_2 \\ F_{\upsilon_2;12}^{(\mu),1}(chR_1, ch\rho) F_{\upsilon_2;11}^{(\mu),2}(chR_2, chr), & R_1 < \rho < r < R_2 \end{cases} \tag{6}$$

$$E_3(r,\rho) = -\frac{1}{2q_3 \Delta_{\alpha;12}(q_3; R_2; R_3)} \begin{cases} \Psi_{\alpha;12}^{2*}(q_3, r)\Psi_{\alpha;22}^{3*}(q_3, \rho), & R_2 < r < \rho < R_3 \\ \Psi_{\alpha;12}^{2*}(q_3, \rho)\Psi_{\alpha;22}^{3*}(q_3, r), & R_2 < \rho < r < R_3 \end{cases} \tag{7}$$

Тут беруть участь функції:

$$\Delta_{j1}(q_1R_0, q_1R_1) = V_{11}^{01}(q_1R_0)V_{j1}^{12}(q_1R_1) - V_{11}^{02}(q_1R_0)V_{j1}^{11}(q_1R_1), \quad j,k = 1,2;$$

$$\Delta_{\upsilon_2;jk}^{(\mu)}(chR_1, chR_2) = Z_{\upsilon_2;j2}^{(\mu);11}(chR_1) Z_{\upsilon_2;k1}^{(\mu);22}(chR_2) - Z_{\upsilon_2;j2}^{(\mu);12}(chR_1) Z_{\upsilon_2;k1}^{(\mu);21}(chR_2);$$

$$\Delta_{\alpha;j2}(q_3; R_2, R_3) = Z_{\alpha;j2}^{21}(q_3, R_2) Z_{\alpha;22}^{32}(q_3, R_3) - Z_{\alpha;j2}^{22}(q_3, R_2) Z_{\alpha;22}^{31}(q_3, R_3).$$

Усі інші функції загальновідомі [4].

Крайові умови (2) та умови спряження (3) для визначення величин A_j, $B_j (j = \overline{1,3})$ дають неоднорідну алгебраїчну систему із шести рівнянь:

$$V_{11}^{01}(q_1R_0)A_1 + V_{11}^{02}(q_1R_0)B_1 = g_0$$

$$V_{j1}^{11}(q_1R_1)A_1 + V_{j1}^{12}(q_1R_1)B_1 - Z_{\upsilon_2;j2}^{(\mu),11}(chR_1)A_2 - Z_{\upsilon_2;j2}^{(\mu),12}(chR_1)B_2 = \omega_{j1} + \delta_{j2}G_{12},$$

$$Z_{\upsilon_2;j1}^{(\mu),21}(chR_2)A_2 + Z_{\upsilon_2;j1}^{(\mu),22}(chR_2)B_2 - Z_{\alpha;j2}^{21}(q_3, R_2)A_3 - Z_{\alpha;j2}^{22}(q_3, R_2)B_3 = \omega_{j2} +$$

$$+ \delta_{j2}G_{23}, \quad Z_{\alpha;22}^{31}(q_3, R_3)A_3 + Z_{\alpha;22}^{32}(q_3, R_3)B_3 = g_R, \quad j = 1,2. \tag{8}$$

У системі (8) беруть участь функції

$$G_{12} = -c_{11}\int\limits_{R_0}^{R_1} \frac{\Phi_{11}^0(q_1R_0, q_1\rho)}{\Delta_{11}(q_1R_0, q_1R_1)} g_1(\rho)d\rho - \frac{c_{21}}{shR_1}\int\limits_{R_1}^{R_2} \frac{F_{\upsilon_2;11}^{(\mu),2}(chR_2, ch\rho)}{\Delta_{\upsilon_2;11}^{(\mu)}(chR_1, chR_2)} g_2(\rho)sh\rho d\rho,$$

$$G_{23} = \frac{c_{12}}{shR_2}\int\limits_{R_1}^{R_2} \frac{F_{\upsilon_2;12}^{(\mu),1}(chR_1, ch\rho)}{\Delta_{\upsilon_2;11}^{(\mu)}(chR_1, chR_2)} g_2(\rho)sh\rho d\rho + \frac{c_{22}}{R_2^{2\alpha+1}}\int\limits_{R_2}^{R_3} \frac{\Psi_{\alpha;22}^{3*}(q_3, \rho)}{\Delta_{\alpha;12}(q_3; R_2, R_3)} \times$$
$$\times g_3(\rho)\rho^{2\alpha-1}d\rho$$

та символ Кронекера δ_{j2} [8].

Введемо до розгляду функції

$$A_{(\mu);j}(q) = \Delta_{11}(q_1R_0, q_1R_1)\Delta_{\upsilon_2;2j}^{(\mu)}(chR_1, chR_2) - \Delta_{21}(q_1R_0, q_1R_1)\Delta_{\upsilon_2;1j}^{(\mu)}(chR_1, chR_2)$$

$$B_{\alpha;j}^{(\mu)}(q) = \Delta_{\alpha;22}(q_3; R_2, R_3)\Delta_{\upsilon_2;j1}^{(\mu)}(chR_1, chR_2) - \Delta_{\alpha;12}(q_3; R_2, R_3)\Delta_{\upsilon_2;j2}^{(\mu)}(chR_1, chR_2)$$

$$\Theta_{(\mu);1}(r,q) = \Delta_{21}(q_1R_0, q_1R_1)F_{\upsilon_2;12}^{(\mu),1}(chR_1, chr) - \Delta_{11}(q_1R_0, q_1R_1)F_{\upsilon_2;22}^{(\mu),1}(chR_1, chr),$$

$$\Theta_{\alpha;2}^{(\mu)}(r,q) = \Delta_{\alpha;12}(q_3; R_2, R_3)F_{\upsilon_2;21}^{(\mu),2}(chR_2, chr) - \Delta_{\alpha;22}(q_3; R_2, R_3)F_{\upsilon_2;11}^{(\mu),2}(chR_2, chr)$$

Припустимо, що виконана умова однозначного розв'язку крайової задачі (1)–(3): для будь-якого ненульового вектора $\vec{q} = \{q_1; q_2; q_3\}$ визначник алгебраїчної системи (8) відмінний від нуля

$$\Delta_{\alpha}^{(\mu)}(q) \equiv A_{(\mu);1}(q)\Delta_{\alpha;22}(q_3; R_2, R_3) - A_{(\mu);2}(q)\Delta_{\alpha;12}(q_3; R_2, R_3) =$$

$$= \Delta_{11}(q_1R_0, q_1R_1)B_{\alpha;2}^{(\mu)}(q) - \Delta_{21}(q_1R_0, q_1R_1)B_{\alpha;1}^{(\mu)}(q) \neq 0; \quad q = (q_1, q_2, q_3). \tag{9}$$

Визначимо головні розв'язки крайової задачі (1)–(3):

1) породжені крайовою умовою в точці $r = R_0$ функції Гріна

$$W_{\alpha;11}^{(\mu)}(r,q) = \frac{1}{\Delta_{\alpha}^{(\mu)}(q)}[B_{\alpha;2}^{(\mu)}(q)\Phi_{11}^1(q_1R_1, q_1r) - B_{\alpha;1}^{(\mu)}(q)\Phi_{21}^1(q_1R_1, q_1r)], \tag{10}$$

$$W_{\alpha;12}^{(\mu)}(r,q) = -\frac{c_{11}q_1}{\Delta_{\alpha}^{(\mu)}(q)}\Theta_{\alpha;2}^{(\mu)}(r,q), \; W_{\alpha;13}^{(\mu)}(r,q) = -\frac{c_{11}q_1c_{12}}{B_{(\mu)}(q_2)shR_2}\frac{\Psi_{\alpha;22}^{3*}(q_3, r)}{\Delta_{\alpha}^{(\mu)}(q)};$$

2) породжені крайовою умовою в точці $r = R_3$ функції Гріна

$$W_{\alpha;31}^{(\mu)}(r,q) = \frac{c_{21}2q_3c_{22}}{B_{(\mu)}shR_1}\frac{\Phi_{11}^0(q_1R_0, q_1r)}{R_2^{2\alpha+1}\Delta_{\alpha}^{(\mu)}(q)},$$

$$W_{\alpha;32}^{(\mu)}(r,q) = \frac{2q_3c_{22}}{R_2^{2\alpha+1}\Delta_\alpha^{(\mu)}(q)}\Theta_{(\mu);1}(r,q),$$

$$W_{\alpha;33}^{(\mu)}(r,q) = \frac{1}{\Delta_\alpha^{(\mu)}(q)}[A_{(\mu);2}(q)\Psi_{\alpha;12}^{2*}(q_3,r) - A_{(\mu);1}(q)\Psi_{\alpha;22}^{2*}(q_3,r)]; \tag{11}$$

3) породжені неоднорідністю умов спряження функції Гріна

$$R_{\alpha;11}^{(\mu);1}(r,q) = -\frac{B_{\alpha;2}^{(\mu)}(q)}{\Delta_\alpha^{(\mu)}(q)}\Phi_{11}^0(q_1R_0,q_1r), \quad R_{\alpha;21}^{(\mu);1}(r,q) = \frac{B_{\alpha;1}^{(\mu)}(q)}{\Delta_\alpha^{(\mu)}(q)}\Phi_{11}^0(q_1R_0,q_1r),$$

$$R_{\alpha;12}^{(\mu);1}(r,q) = -\frac{c_{21}}{B_{(\mu)}(q_2)shR_1}\frac{\Delta_{\alpha;22}}{\Delta_\alpha^{(\mu)}(q)}\Phi_{11}^0(q_1R_0,q_1r),$$

$$R_{\alpha;22}^{(\mu);1}(r,q) = \frac{c_{21}}{B_{(\mu)}(q_2)shR_1}\times$$

$$\times\frac{\Delta_{\alpha;12}(q_3;R_2,R_3)}{\Delta_\alpha^{(\mu)}(q)}\Phi_{11}^0(q_1R_0,q_1r), \; R_{\alpha;11}^{(\mu);2}(r,q) = \frac{\Delta_{21}(q_1R_0,q_1R_1)}{\Delta_\alpha^{(\mu)}(q)}\Theta_{\alpha;2}^{(\mu)}(r,q), \tag{12}$$

$$R_{\alpha;21}^{(\mu);2}(r,q) = -\frac{\Delta_{11}(q_1R_0,q_1R_1)}{\Delta_\alpha^{(\mu)}(q)}\Theta_{\alpha;2}^{(\mu)}(r,q),$$

$$R_{\alpha;12}^{(\mu);2}(r,q) = -\frac{\Delta_{\alpha;22}(q_3;R_2,R_3)}{\Delta_\alpha^{(\mu)}(q)}\times$$

$$\times\Theta_{(\mu);1}(r,q), \quad R_{\alpha;22}^{(\mu);2}(r,q) = \frac{\Delta_{\alpha;12}(q_3;R_2,R_3)}{\Delta_\alpha^{(\mu)}(q)}\Theta_{(\mu);1}(r,q),$$

$$R_{\alpha;11}^{(\mu);3}(r,q) = \frac{c_{12}}{B_{(\mu)}shR_2}\times$$

$$\times\frac{\Delta_{21}}{\Delta_\alpha^{(\mu)}(q)}\Psi_{\alpha;22}^{3*}(q_3,r), \quad R_{\alpha;21}^{(\mu);3}(r,q) = -\frac{c_{12}}{B_{(\mu)}(q_2)shR_2}\frac{\Delta_{11}(q_1R_0,q_1R_1)}{\Delta_\alpha^{(\mu)}(q)}\Psi_{\alpha;22}^{3*}(q_3,r),$$

$$R_{\alpha;12}^{(\mu);3}(r,q) = \frac{A_{(\mu);2}(q)}{\Delta_\alpha^{(\mu)}(q)}\Psi_{\alpha;22}^{3*}(q_3,r), \quad R_{\alpha;22}^{(\mu);3}(r,q) = -\frac{A_{(\mu);1}(q)}{\Delta_\alpha^{(\mu)}(q)}\Psi_{\alpha;22}^{3*}(q_3,r);$$

4) породжені неоднорідністю системи функції впливу

$$H_{\alpha;11}^{(\mu)}(r,\rho,q) = -\frac{1}{q_1}\begin{cases}\Phi_{11}^0(q_1R_0,q_1r)W_{\alpha;11}^{(\mu)}(\rho,q), & R_0 < r < \rho < R_1\\ \Phi_{11}^0(q_1R_0,q_1\rho)W_{\alpha;11}^{(\mu)}(r,q), & R_0 < \rho < r < R_1\end{cases},$$

$$H_{\alpha;12}^{(\mu)}(r,\rho,q)=\frac{c_{21}}{shR_1}\frac{1}{\Delta_\alpha^{(\mu)}(q)}\Phi_{11}^0(q_1R_0,q_1r)\Theta_{\alpha;2}^{(\mu)}(\rho,q),$$

$$H_{\alpha;13}^{(\mu)}(r,\rho,q)=\frac{c_{21}}{B_{(\mu)}(q_2)shR_1}\frac{c_{22}}{R_2^{2\alpha+1}}\frac{1}{\Delta_\alpha^{(\mu)}(q)}\Phi_{11}^0(q_1R_0,q_1r)\Psi_{\alpha;22}^{3*}(q_3,\rho),$$

$$H_{\alpha;21}^{(\mu)}(r,\rho,q)=\frac{c_{11}}{\Delta_\alpha^{(\mu)}(q)}\Phi_{11}^0(q_1R_0,q_1\rho)\Theta_{\alpha;2}^{(\mu)}(r,q),$$

$$H_{\alpha;22}^{(\mu)}(r,\rho,q)=\frac{B_{(\mu)}(q_2)}{\Delta_\alpha^{(\mu)}(q)}\begin{cases}\Theta_{(\mu);1}(r,q)\Theta_{\alpha;2}^{(\mu)}(\rho,q), & R_1<r<\rho<R_2\\ \Theta_{(\mu);1}(\rho,q)\Theta_{\alpha;2}^{(\mu)}(r,q), & R_1<\rho<r<R_2\end{cases}, \tag{13}$$

$$H_{\alpha;23}^{(\mu)}(r,\rho,q)=\frac{c_{22}}{R_2^{2\alpha+1}}\frac{\Theta_{(\mu);1}(r,q)}{\Delta_\alpha^{(\mu)}(q)}\Psi_{\alpha;22}^{3*}(q_3,\rho),$$

$$H_{\alpha;31}^{(\mu)}(r,\rho,q)=\frac{c_{11}c_{12}}{B_{(\mu)}(q_2)shR_2}\times$$

$$\times\frac{\Phi_{11}^0(q_1R_0,q_1\rho)}{\Delta_\alpha^{(\mu)}(q)}\Psi_{\alpha;22}^{3*}(q_3,r),\ H_{\alpha;32}^{(\mu)}(r,\rho,q)=\frac{c_{12}}{shR_2}\frac{\Theta_{(\mu);1}(\rho,q)}{\Delta_\alpha^{(\mu)}(q)}\Psi_{\alpha;22}^{3*}(q_3,r),$$

$$H_{\alpha;33}^{(\mu)}(r,\rho,q)=\frac{1}{2q_3}\begin{cases}W_{\alpha;33}^{(\mu)}(r,q)\Psi_{\alpha;22}^{3*}(q_3,\rho), & R_2<r<\rho<R_3\\ W_{\alpha;33}^{(\mu)}(\rho,q)\Psi_{\alpha;22}^{3*}(q_3,r), & R_2<\rho<r<R_3\end{cases}.$$

У результаті однозначного розв'язку алгебраїчної системи (8), підстановки отриманих за правилами Крамера [8] значень $A_j,\ B_j(j=\overline{1,3})$ у формули (4) маємо єдиний розв'язок крайової задачі (1)–(3)

$$u_j(r)=W_{\alpha;1j}^{(\mu)}(r,q)g_0+\sum_{m,k=1}^{2}R_{\alpha;mk}^{(\mu);j}(r,q)\omega_{mk}+W_{\alpha;3j}^{(\mu)}(r,q)g_R+$$

$$+\sum_{i=1}^{3}\int_{R_{i-1}}^{R_i}H_{\alpha;ji}^{(\mu)}(r,\rho,q)g_i(\rho)\varphi_i(\rho)d\rho,\quad j=\overline{1,3} \tag{14}$$

$$(\varphi_1=1,\ \ \varphi_2(r)=shr,\ \ \varphi_3(r)=r^{2\alpha-1}).$$

Побудуємо розв'язок крайової задачі (1)–(3) методом гібридного інтегрального перетворення, породженого на множині I_2 гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$M_{\alpha}^{(\mu)} = \theta(r-R_0)\theta(R_1-r)\frac{d^2}{dr^2} + \theta(r-R_1)\theta(R_2-r)\Lambda_{(\mu)} + \theta(r-R_2)\theta(R_3-r)B_{\alpha}^{*} \quad (15)$$

де $\theta(x)$ – одинична функція Гевісайда [7].

Диференціальний оператор $M_{\alpha}^{(\mu)}$ самоспряжений і на множині I_2 не має особливої точки. Значить, спектр ГДО $M_{\alpha}^{(\mu)}$ неперервний та дискретний [9]. Власні елементи (власні числа й відповідні їм власні функції) ГДО $M_{\alpha}^{(\mu)}$ знайдемо як ненульовий розв'язок спектральної задачі Штурма – Ліувілля, породженої ГДО $M_{\alpha}^{(\mu)}$.

Нехай β – спектральний параметр (власне число), а функції $V_{\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta)$ – компоненти спектральної вектор-функції

$$V_{\alpha}^{(\mu)}(r,\beta) = \sum_{k=1}^{3}\theta(r-R_{k-1})\theta(R_k-r)V_{\alpha;k}^{(\mu)}(r,\beta), \quad (16)$$

яка відповідає власному числу β.

При цьому функції $V_{\alpha;k}^{(\mu)}(r,\beta)$ повинні задовольняти відповідно диференціальні рівняння

$$\begin{gathered}\left(\frac{d^2}{dr^2}+b_1^2\right)V_{\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta)=0,\ \ r\in(R_0,R_1),\ \ b_1^2=\beta^2+k_1^2,\ \ k_1^2\ge 0,\\ \left(\Lambda_{(\mu)}+b_2^2\right)V_{\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta)=0,\ \ r\in(R_1,R_2),\ \ b_2^2=\beta^2+k_2^2,\ \ k_2^2\ge 0,\\ \left(B_{\alpha}^{*}+b_3^2\right)V_{\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta)=0,\ \ r\in(R_2,R_3),\ \ b_3=(\beta^2+k_3^2)^{1/2},\ \ k_3^2\ge 0\end{gathered} \quad (17)$$

крайові умови

$$\left(\alpha_{11}^{0}\frac{d}{dr}+\beta_{11}^{0}\right)V_{\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta)\Big|_{r=R_0}=0,\qquad \left(\alpha_{22}^{3}\frac{d}{dr}+\beta_{22}^{3}\right)V_{\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta)\Big|_{r=R_3}=0 \quad (18)$$

та однорідні умови спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^{k}\frac{d}{dr}+\beta_{j1}^{k}\right)V_{\alpha;k}^{(\mu)}(r,\beta)-\left(\alpha_{j2}^{k}\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^{k}\right)V_{\alpha;k+1}^{(\mu)}(r,\beta)\right]\Big|_{r=R_k}=0,\ \ j,k=1,2 \quad (19)$$

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $(d^2/dr^2+b_1^2)v=0$ утворюють функції $\cos b_1 r$ та $\sin b_1 r$ [5]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Лежандра $(\Lambda_{(\mu)}+b_2^2)v=0$ утворюють функції $A_{\upsilon_2^*}^{(\mu)}(chr)$ та $B_{\upsilon_2^*}^{(\mu)}(chr)$, $\upsilon_2^*=-1/2+ib_2$ [6]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $(B_{\alpha}^{*}+b_3^2)v=0$ утворюють функції $r^{-\alpha}\cos(b_3\ln r)$ та $r^{-\alpha}\sin(b_3\ln r)$ [5].

Наявність фундаментальної системи розв'язків дозволяє в міру лінійності спектральної задачі покласти

$$V_{\alpha;1}^{(\mu)}(r,\beta) = A_1 \cos b_1 r + B_1 \sin b_1 r, \quad r \in (R_0, R_1),$$

$$V_{\alpha;2}^{(\mu)}(r,\beta) = A_2 A_{\upsilon_2^*}^{(\mu)}(chr) + B_2 B_{\upsilon_2^*}^{(\mu)}(chr), \quad r \in (R_1, R_2), \tag{20}$$

$$V_{\alpha;3}^{(\mu)}(r,\beta) = A_3 r^{-\alpha} \cos(b_3 \ln r) + B_3 r^{-\alpha} \sin(b_3 \ln r), \quad r \in (R_2, R_3).$$

Крайові умови (18) та умови спряження (19) для визначення шести величин $A_j, B_j (j = \overline{1,3})$ дають однорідну алгебраїчну систему із шести рівнянь:

$$v_{11}^{01}(b_1 R_0) A_1 + v_{11}^{02}(b_1 R_0) B_1 = 0$$

$$v_{j1}^{11}(b_1 R_1) A_1 + v_{j1}^{12}(b_1 R_1) B_1 - Y_{\upsilon_2^*;j2}^{(\mu),11}(chR_1) A_2 - Y_{\upsilon_2^*;j2}^{(\mu),12}(chR_1) B_2 = 0, \; j = 1,2;$$

$$Y_{\upsilon_2^*;j1}^{(\mu),21}(chR_2) A_2 + Y_{\upsilon_2^*;j1}^{(\mu),22}(chR_2) B_2 - Y_{\alpha;j2}^{21}(b_3, R_2) A_3 - Y_{\alpha;j2}^{22}(b_3, R_2) B_3 = 0 \tag{21}$$

$$Y_{\alpha;22}^{31}(b_3, R_3) A_3 + Y_{\alpha;22}^{32}(b_3, R_3) B_3 = 0.$$

Введемо до розгляду функції

$$\delta_{j1}(b_1 R_0, b_1 R_1) = v_{11}^{01}(b_1 R_0) v_{j1}^{12}(b_1 R_1) - v_{11}^{02}(b_1 R_0) v_{j1}^{11}(b_1 R_1);$$

$$\delta_{\upsilon_2^*;jk}^{(\mu)}(chR_1, chR_2) = Y_{\upsilon_2^*;j2}^{(\mu),11}(chR_1) Y_{\upsilon_2^*;k1}^{(\mu),22}(chR_2) - Y_{\upsilon_2^*;j2}^{(\mu),12}(chR_1) Y_{\upsilon_2^*;k1}^{(\mu),21}(chR_2);$$

$$\delta_{\alpha;j2}(b_3; R_2, R_3) = Y_{\alpha;j2}^{21}(b_3, R_2) Y_{\alpha;22}^{32}(b_3, R_3) - Y_{\alpha;j2}^{22}(b_3, R_2) Y_{\alpha;22}^{31}(b_3, R_3); \; j = 1,2;$$

$$a_{(\mu);j}(\beta) = \delta_{11}(b_1 R_0, b_1 R_1) \delta_{\upsilon_2^*;2j}^{(\mu)}(chR_1, chR_2) - \delta_{21}(b_1 R_0, b_1 R_1) \delta_{\upsilon_2^*;1j}^{(\mu)}(chR_1, chR_2).$$

Алгебраїчна система (21) має ненульові розв'язки тоді й тільки тоді, коли визначник системи дорівнює нулю [8]

$$\delta_\alpha^{(\mu)}(\beta) \equiv a_{(\mu);1}(\beta) \delta_{\alpha;22}(b_3; R_2, R_3) - a_{(\mu);2}(\beta) \delta_{\alpha;12}(b_3; R_2, R_3) = 0 \tag{22}$$

Алгебраїчне рівняння (22) – це трансцендентне рівняння для обчислення власних чисел β_n ГДО $M_\alpha^{(\mu)}$, визначеного рівністю (15).

Підставимо в систему (21) $\beta = \beta_n$ $(b_j(\beta_n) \equiv b_{jn})$ й відкинемо останнє рівняння внаслідок лінійної залежності. Алгебраїчна система з п'яти рівнянь, що залишилися, сумісна [8]. Її розв'язок будується стандартним способом.

Нехай $A_1 = A_0 v_{11}^{02}(b_{1n} R_0)$, $B_1 = -A_0 v_{11}^{01}(b_{1n} R_0)$, де $A_0 \neq 0$ підлягає визначенню. Перше рівняння системи стає тотожністю. Наступні два рівняння дають алгебраїчну систему для знаходження A_2, B_2:

$$Y_{\upsilon_{2n}^*;j2}^{(\mu),11}(chR_1) A_2 + Y_{\upsilon_{2n}^*;j2}^{(\mu),12}(chR_1) B_2 = -A_0 \delta_{j1}(b_{1n} R_0, b_{1n} R_1), \quad j = 1,2 \tag{23}$$

Визначник алгебраїчної системи (23) обчислюється безпосередньо

$$Y_{\upsilon_{2n}^*;12}^{(\mu),11}(chR_1) Y_{\upsilon_{2n}^*;22}^{(\mu),12}(chR_1) - Y_{\upsilon_{2n}^*;22}^{(\mu),11}(chR_1) Y_{\upsilon_{2n}^*;12}^{(\mu),12}(chR_1) =$$

$$= \frac{c_{21}}{s_{(\mu)}(b_{2n}) shR_1} \equiv q_{(\mu)}(\beta_n) \neq 0.$$

Алгебраїчна система (23) має єдиний розв'язок

$$A_2 = \frac{A_0}{q_{(\mu)}}\left[\delta_{21}(b_{1n}R_0, b_{1n}R_1) Y^{(\mu),12}_{\upsilon^*_{2n};12}(chR_1) - \delta_{11}(b_{1n}R_0, b_{1n}R_1) Y^{(\mu),12}_{\upsilon^*_{2n};22}(chR_1)\right],$$

$$B_2 = \frac{A_0}{q_{(\mu)}}\left[\delta_{11}(b_{1n}R_0, b_{1n}R_1) Y^{(\mu),11}_{\upsilon^*_{2n};22}(chR_1) - \delta_{21}(b_{1n}R_0, b_{1n}R_1) Y^{(\mu),11}_{\upsilon^*_{2n};12}(chR_1)\right] \quad .(24)$$

Для визначення A_3, B_3 маємо алгебраїчну систему:

$$Y^{21}_{\alpha;j2}(b_{3n}, R_2) A_3 + Y^{22}_{\alpha;j2}(b_{3n}, R_2) B_3 = A_0 [q_{(\mu)}(\beta_n)]^{-1} a_{(\mu);j}(\beta_n); \quad j = 1, 2. \quad (25)$$

Визначник алгебраїчної системи (25) обчислюється безпосередньо:

$$Y^{21}_{\alpha;12}(b_{3n}, R_2) Y^{22}_{\alpha;22}(b_{3n}, R_2) - Y^{21}_{\alpha;22}(b_{3n}, R_2) Y^{22}_{\alpha;12}(b_{3n}, R_2) = \frac{c_{22} b_{3n}}{R_2^{2\alpha+1}} \equiv q_\alpha(\beta_n) \neq 0 .$$

Алгебраїчна система (25) має єдиний розв'язок [8]:

$$A_0 = q_{(\mu)}(\beta_n) q_\alpha(\beta_n), \quad A_3 = \omega^{(\mu)}_{\alpha;2}(\beta_n), \quad B_3 = -\omega^{(\mu)}_{\alpha;1}(\beta_n); \quad (26)$$

$$\omega^{(\mu)}_{\alpha;j}(\beta_n) = a_{(\mu);1}(\beta_n) Y^{2j}_{\alpha;22}(b_{3n}, R_2) - a_{(\mu);2}(\beta_n) Y^{2j}_{\alpha;12}(b_{3n}, R_2), \quad j = 1, 2 .$$

Підставивши визначені формулами (24) й (26) величини $A_j, B_j (j = \overline{1,3})$ у рівності (20), отримуємо функції

$$V^{(\mu)}_{\alpha;1}(r, \beta_n) = q_{(\mu)}(\beta_n) q_\alpha(\beta_n)[v^{02}_{11}(b_{1n}R_0)\cos(b_{1n}r) - v^{01}_{11}(b_{1n}R_0)\sin(b_{1n}r)],$$

$$V^{(\mu)}_{\alpha;2}(r, \beta_n) = q_\alpha(\beta_n)[\delta_{11}(b_{1n}R_0, b_{1n}R_1) F^{(\mu),1}_{\upsilon^*_{2n};22}(chR_1, chr) -$$
$$-\delta_{21}(b_{1n}R_0, b_{1n}R_1) F^{(\mu),1}_{\upsilon^*_{2n};12}(chR_1, chr)], \quad (27)$$

$$V^{(\mu)}_{\alpha;3}(r, \beta_n) = \omega^{(\mu)}_{\alpha;2}(\beta_n) r^{-\alpha}\cos(b_{3n}\ln r) - \omega^{(\mu)}_{\alpha;1}(\beta_n) r^{-\alpha}\sin(b_{3n}\ln r);$$

$$F^{(\mu),1}_{\upsilon^*_{2n};j2}(chR_1, chr) = Y^{(\mu),11}_{\upsilon^*_{2n};j2}(chR_1) B^{(\mu)}_{\upsilon^*_{2n}}(chr) - Y^{(\mu),12}_{\upsilon^*_{2n};j2}(chR_1) A^{(\mu)}_{\upsilon^*_{2n}}(chr) .$$

Згідно з рівністю (16) спектральна вектор-функція $V^{(\mu)}_\alpha(r, \beta_n)$ визначена.

Визначимо числа

$$\sigma_1 = \frac{c_{11}c_{12}}{c_{21}c_{22}} \frac{shR_1}{shR_2} R_2^{2\alpha+1}, \; \sigma_2 = \frac{c_{12}}{c_{22}} \frac{R_2^{2\alpha+1}}{shR_2}, \; \sigma_3 = 1,$$

вагову функцію

$$\sigma(r) = \theta(r - R_0)\theta(R_1 - r)\sigma_1 + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r)\sigma_2 shr + \theta(r - R_2)\theta(R_3 - r)\sigma_3 r^{2\alpha-1} \quad (28)$$

та квадрат норми спектральної вектор-функції

$$\| V_\alpha^{(\mu)}(r,\beta_n)\|^2 = \int_{R_0}^{R_3} [V_\alpha^{(\mu)}(r,\beta_n)]^2 \sigma(r)dr \equiv \sum_{m=1}^{3} \int_{R_{m-1}}^{R_m} [V_{\alpha;m}^{(\mu)}(r,\beta_n)]^2 \sigma_m \phi_m(r)dr \tag{29}$$

Наявність власної вектор-функції $V_\alpha^{(\mu)}(r,\beta_n)$, вагової функції $\sigma(r)$ та квадрата норми власної функції $\| V_\alpha^{(\mu)}(r,\beta_n)\|^2$ дозволяє визначити пряме $H_\alpha^{(\mu)}$ та обернене $H_\alpha^{-(\mu)}$ скінченне гібридне інтегральне перетворення (СГІП), породжене на множині I_2 ГДО $M_\alpha^{(\mu)}$ [9]:

$$H_\alpha^{(\mu)}[g(r)] = \int_{R_0}^{R_3} g(r) V_\alpha^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma(r)dr \equiv \tilde{g}_n \tag{30}$$

$$H_\alpha^{-(\mu)}[\tilde{g}_n] = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{g}_n V_\alpha^{(\mu)}(r,\beta_n)\left(\| V_\alpha^{(\mu)}(r,\beta_n)\|^2\right)^{-1} \equiv g(r) \tag{31}$$

$$H_\alpha^{(\mu)}[M_\alpha^{(\mu)}[g(r)]] = -\beta_n^2 \tilde{g}_n - \sum_{i=1}^{3} k_i^2 \tilde{g}_{in} + (-\alpha_{11}^0)^{-1} V_{\alpha;1}^{(\mu)}(R_0,\beta_n)\sigma_1 g_0 + +$$

$$+(\alpha_{22}^3)^{-1} V_{\alpha;3}^{(\mu)}(R_3,\beta_n) R_3^{2\alpha+1} g_R + \sum_{k=1}^{2} d_k [Z_{\alpha;12}^{(\mu),k}(\beta_n)\omega_{2k} - Z_{\alpha;22}^{(\mu),k}(\beta_n)\omega_{1k}] \tag{32}$$

Тут прийняті позначення

$$d_1 = \sigma_1 : c_{11},\quad d_2 = \sigma_2 shR_2 : c_{12};\ \tilde{g}_{in} = \int_{R_{i-1}}^{R_i} g_i(r) V_{\alpha;i}^{(\mu)}(r,\beta_n)\sigma_i \phi_i(r)dr,$$

$$Z_{\alpha;j2}^{(\mu),k}(\beta_n) = \left(\alpha_{j2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^k\right) V_{\alpha;k+1}^{(\mu)}(r,\beta_n)\Big|_{r=R_k},\ j,k = 1,2.$$

Правила (30), (31) й (32) складають математичний апарат для розв'язання крайової задачі (1)–(3).

За відомою логічною схемою [4] отримуємо єдиний розв'язок крайової задачі (1)–(3):

$$u_j(r) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_{\alpha;1}^{(\mu)}(R_0,\beta_n)}{(-\alpha_{11}^0)(\beta_n^2+q^2)} v_{\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta_n)\right)\sigma_1 g_0 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_{\alpha;3}^{(\mu)}(R_3,\beta_n)}{\alpha_{22}^3(\beta_n^2+q^2)} v_{\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta_n)\right)\sigma_3 \times$$

$$\times R_3^{2\alpha+1} g_R + \sum_{k=1}^{2} d_k \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_{\alpha;12}^{(\mu),k}(\beta_n)}{\beta_n^2+q^2} v_{\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta_n)\right)\omega_{2k} - \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Z_{\alpha;22}^{(\mu),k}(\beta_n)}{\beta_n^2+q^2} v_{\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta_n)\right)\omega_{1k}\right] +$$

$$+\sum_{k=1}^{3} \int_{R_{k-1}}^{R_k} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_{\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta_n)}{\beta_n^2+q^2} v_{\alpha;k}^{(\mu)}(\rho,\beta_n)\right) g_k(\rho)\sigma_k \phi_k(\rho)d\rho;\quad j=\overline{1,3} \tag{33}$$

Всюди $v_{\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta_n) = V_{\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta_n)(\| V_\alpha^{(\mu)}(r,\beta_n)\|)^{-1}$, $q^2 = \max\{q_1^2; q_2^2; q_3^2\}$.

Порівнюючи розв'язки (14) й (33) в силу теореми єдиності, маємо такі формули підсумовування поліпараметричних функціональних рядів:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_{\alpha;1}^{(\mu)}(R_0,\beta_n)}{(-\alpha_{11}^0)(\beta_n^2+q^2)} v_{\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta_n) = \sigma_1^{-1} W_{\alpha;1j}^{(\mu)}(r,q) \quad j=\overline{1,3}, \tag{34}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_{\alpha;3}^{(\mu)}(R_3,\beta_n)}{\alpha_{22}^3(\beta_n^2+q^2)} v_{\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta_n) = R_3^{-(2\alpha+1)} W_{\alpha;3j}^{(\mu)}(r,q) \quad j=\overline{1,3}, \tag{35}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_{\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta_n)}{\beta_n^2+q^2} Z_{\alpha;12}^{(\mu),k}(\beta_n) = d_k^{-1} R_{\alpha;2k}^{(\mu),j}(r,q); \quad k=1,2; \quad j=\overline{1,3} \tag{36}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_{\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta_n)}{\beta_n^2+q^2} Z_{\alpha;22}^{(\mu),k}(\beta_n) = -d_k^{-1} R_{\alpha;1k}^{(\mu),j}(r,q); \quad k=1,2; \quad j=\overline{1,3} \tag{37}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_{\alpha;j}^{(\mu)}(r,\beta_n)}{\beta_n^2+q^2} v_{\alpha;k}^{(\mu)}(\rho,\beta_n) = \sigma_k^{-1} H_{\alpha;jk}^{(\mu)}(r,\rho,q); \quad j,k=\overline{1,3} \tag{38}$$

Підсумком виконаного в роботі дослідження є твердження.

Теорема. Якщо вектор-функція $f(r)=\{g_1''(r);\Lambda_{(\mu)}[g_2(r)];B_\alpha^*[g_3(r)]\}$ неперервна на множині I_2, функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови (2) та умови спряження (3) і виконується умова (9) однозначного розв'язку крайової задачі (1)–(3), то справджуються формули (34)–(38) підсумовування поліпараметричних функціональних рядів за власними елементами ГДО $M_\alpha^{(\mu)}$, визначеного рівністю (15).

Зауваження 1. Якщо $q^2=q_1^2$, то $k_1^2=0$, $k_2^2=q_1^2-q_2^2\ge 0$, $k_3^2=q_1^2-q_3^2\ge 0$; якщо $q^2=q_2^2>0$, то $k_1^2=q_2^2-q_1^2\ge 0$, $k_2^2=0$, $k_3^2=q_2^2-q_3^2\ge 0$; якщо $q^2=q_3^2>0$, то $k_1^2=q_3^2-q_1^2\ge 0$, $k_2^2=q_3^2-q_2^2\ge 0$, $k_3^2=0$.

Зауваження 2. Оскільки праві частини в рівностях (34)–(38) не залежать від нерівностей $(q_j^2-q_m^2)\ge 0$, то за необхідності можна покласти $q_1^2=q_2^2=q_3^2\equiv q_0^2$.

Зауваження 3. Використані в даній роботі функції загальноприйняті [4,7].

Висновок. Отримані формули (34)–(38) підсумовування функціональних рядів поповнюють математичний довідник у розділі «Підсумовування функціональних рядів». Вони можуть бути використані при визначенні стаціонарного стану композитів у випадку теплового або механічного удару, при доведенні існування розв'язку мішаних задач математичної фізики неоднорідних середовищ тощо.

Conclusion. Formulas for summarising of the functional sets enrich the mathe-Matic reference-book in the chapter «Summarising of the functi-onal sets», have been obtained. They can be used while finding the stationary state of composites in the case of heat or mechanic load, when the solutions are proved to be available for the mixed problems of the heterogenous media mathematic physics, etc.

Список використаної літератури

1. Ленюк, М.П. Підсумовування функціональних рядів методом скінченого гібридного інтегрального перетворення типу Лежандра 2-го роду Фур'є – (Конторовича–Лєбєдєва) [Текст] / М.П. Ленюк, М.Я. Шелестовська // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2007. – Т.12, №1. – С.151–163.

2. Ленюк, М.П. Підсумовування функціональних рядів за власними елементами гібридного диференціального оператора Фур'є – (Контуровича– Лєбєдєва) Лежандра на сегменті полярної осі

[Текст] / М.П. Ленюк, Б.Г. Шелестовський // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2007. – Т.12, №2. – С.136–146.

3. Ленюк, М.П. Підсумовування функціональних рядів за власними елементами гібридного диференціального оператора Бесселя – Ейлера на сегменті [R0, R2] полярної вісі [Текст] / М.П. Ленюк, М.Я. Шелестовська // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2008. – Т.13, №3. – С.188–195.

4. Ленюк М.П. Підсумовування поліпараметричних функціональних рядів за власними елементами гібридних диференціальних операторів [Текст] / М.П. Ленюк. – Чернівці: Прут, 2011. – Том 7. – 332 с.

5. Степанов, В.В. Курс дифференциальных уравнений [Текст] / В.В. Степанов. – М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.

6. Конет, І.М. Інтегральні перетворення типу Мелера-Фока [Текст] / І.М. Конет, М.П. Ленюк. – Чернівці: Прут, 2002. – 246 с.

7. Шилов, Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс [Текст] / Г.Е. Шилов. – М.: Наука, 1965. – 328 с.

8. Курош, А.Г. Курс высшей алгебры [Текст] / А.Г. Курош. – М.: Наука, 1971. – 432 с.

9. Комаров, Г.М. Скінченні гібридні інтегральні перетворення, породжені диференціальними рівняннями другого порядку [Текст] / Г.М. Комаров, М.П Ленюк, В.В. Мороз. – Чернівці: Прут, 2001. – 228 с.

Отримано 25.02.2015