

УДК 539.3

О. Трохимчук

Рівненський державний гуманітарний університет

МІШАНА КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМИ ДВОХ ШТАМПІВ З КУТОВИМИ ТОЧКАМИ І ПЛАСТИНКИ З ЧАСТКОВО ПІДСИЛЕНИМ ТРИКУТНИМ ОТВОРОМ

Резюме. Побудовано систему сингулярних інтегрально-диференціальних рівнянь з ядрами Гільберта і логарифмічними ядрами для задачі про тиск системи двох жорстких штампів з кутовими точками на частково підсиленій трикутній контур нескінченної ізотропної пластинки. Методом механічних квадратур і колокації проведено дослідження впливу на напружений стан пластинки форми отвору, величини зон контакту і жорсткості підсилювальних ребер.

Ключові слова: нескінченна ізотропна пластинка, трикутний отвір, штамп з кутовими точками, зона контакту, частково підсиленій контур, напружений стан, інтегрально-диференціальні рівняння.

O. Trokhymchuk

A MIXED CONSTANT PROBLEM FOR A SYSTEM OF TWO PUNCHES WITH ANGULAR POINTS AND A PLATE WITH PARTLY STRONGER TRIANGULAR HOLE

The summary. The system of singular integral differential equations with Gilbert kernels and logarithmic kernels in problems of pressure of a system of two stiff punches with angular points on partly stronger contour of triangular hole in an infinite isotropic plate is built. It is explored an influence of the booster rib's stiffness on the plate's strained state by the method of mechanical quadrature and collocation.

Key words: an infinite isotropic plate, a curvilinear hole, a punch with angular points, an interface's size, a partly stronger contour, strained state, integral differential equations.

З точки зору застосувань фундаментальних досліджень механіки контактної взаємодії твердих тіл у різних галузях сучасної техніки виникає необхідність розв'язування якісно нових контактних задач для масивних і тонкостінних пружних циліндричних тіл з гладкими й ребристими поверхнями. Зокрема, це задачі про взаємодію штампів, що мають кутові точки, з частково підсиленням криволінійним контуром нескінченної ізотропної пластинки.

Загальна постановка і розв'язки конкретних задач про контактну взаємодію штампа або системи штампів з кутовими точками та контуру криволінійного отвору нескінченної ізотропної пластинки наведені в роботах [1-3], а задачі про часткове підсилення контуру криволінійного отвору в нескінченних пластинках при передаванні до них зовнішнього навантаження досліджені – в [4].

Запропоновано розв'язок мішаної контактної задачі про тиск системи двох однакових симетричних відносно своїх осей штампів з кутовими точками на частково підсиленій (за межами зон контакту) контур трикутного отвору нескінченної ізотропної пластинки. Контактні задачі для пластинки з криволінійним отвором і штампа або системи штампів з кутовими точками, які симетричні відносно осі отвору, розглянуто в [5,6].

1. Постановка задачі. Система інтегрально-диференціальних рівнянь. Розглянемо нескінченну ізотропну пластинку товщиною $2h$ з отвором, контур якого Γ має вигляд правильного трикутника із закругленими кутами. Систему прямокутних (x, y) і полярних (r, δ) координат у середній площині пластинки оберемо таким чином,

щоб початок відліку співпадав з центром отвору, а полярна вісь співпадала з віссю абсцис.

В отвір пластинки симетрично відносно осі Ox вставлено два абсолютно жорсткі штампи з кутовими точками (рис.1). Вважаємо, що кривини контурів кожного штампа і контуру Γ в зонах контакту однакові. Гладкий без тертя контакт між контуром пластинки і штампами на ділянках $\Gamma_1 \equiv [\beta_{01}^*; \beta_{02}^*] \cup [-\beta_{02}^*; -\beta_{01}^*]$, де $\beta_{01}^* = \pi/3 - \beta_0^*$, $\beta_{02}^* = \pi/3 + \beta_0^*$ – полярні кути крайніх точок зон контакту, забезпечується двома силами P_0 , які діють уздовж осей симетрії штампів ($\delta = \pi/3$ та $\delta = -\pi/3$). Зовнішнє навантаження на пластинку відсутнє.

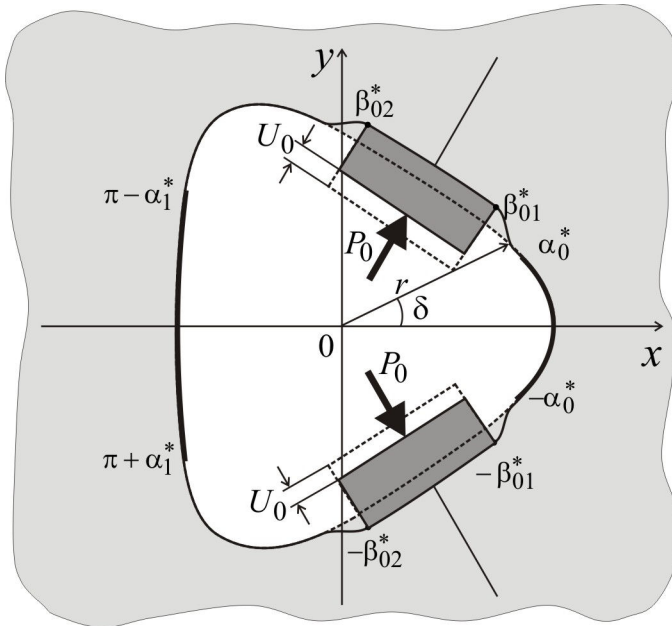


Рисунок 1 – Розрахункова схема пластинки

За межами зон контакту дві симетричні відносно осі отвору ділянки

$$\Gamma_2 \equiv [-\alpha_0^*; \alpha_0^*] \cup [\pi - \alpha_1^*; \pi + \alpha_1^*]$$

контур Γ підсилені тонкими пружними ребрами змінної жорсткості на розтяг (стиск). Тут α_0^*, α_1^* – полярні кути крайніх точок зон підсилення. При цьому $(\alpha_0^* + \beta_0^*) \leq \pi/3$, $(\alpha_1^* + \beta_0^*) \leq 2\pi/3$.

Таким чином, контур $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ поділено на три частини: зони контакту Γ_1 , зони підсилення Γ_2 і вільні від напружень ділянки Γ_3 .

Розв'язання задачі полягає у визначенні контактних зусиль

$T_p, S_{p\lambda}$ під штампами і на ділянках підсилення, кільцевих зусиль T_λ на контурі Γ , а також у дослідженні впливу фізико-геометричних параметрів підсилень на напружений стан пластинки.

Нехай функція [7]
$$z = \omega(\xi) = R_0 \left(\xi + \frac{\varepsilon}{\xi^2} \right) \quad (1)$$

здійснює конформне відображення зовнішності S^- одиничного кола γ в площині $\xi = \rho e^{i\lambda}$ на область $z = x + iy$, яку займає середня площа пластинки. Тут R_0 – характерний розмір отвору (не порушуючи загальності, вважаємо, що $R_0 = 1$); ε – параметр, який характеризує відхилення контуру Γ отвору від кола ($|\varepsilon| < 1/2$); $i = \sqrt{-1}$.

Враховуючи відсутність сил тертя в зонах контакту та моделюючи підсилювальні ребра пружними лініями, позбавленими жорсткості на згин у площині їх осі, граничні умови задачі на підставі [3,4] можна записати так:

$$U + \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} V = \frac{U_0}{2} \left(1 + \sqrt{3} \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} \right); \quad S_{p\lambda}(\lambda) = 0, \quad \lambda \in \gamma_1, \quad (2)$$

$$T_p(\lambda) = \frac{\Omega(\lambda)}{K^{\frac{3}{2}}(\lambda)} E_0 F(s) \varepsilon_\lambda(\lambda); \quad S_{p\lambda}(\lambda) = -\frac{K(\lambda) \partial T_p(\lambda)}{\Omega(\lambda) \partial \lambda} - \frac{3\beta(\lambda) T_p(\lambda) [-5K(\lambda) + 9\alpha(\lambda)]}{\Omega^2(\lambda)}, \quad \lambda \in \gamma_2.$$

Тут
$$a(\lambda) = \cos \lambda - 2\varepsilon \cos 2\lambda; \quad b(\lambda) = \sin \lambda + 2\varepsilon \sin \lambda; \quad \Omega(\lambda) = -2K(\lambda) + 3\alpha(\lambda);$$

$K(\lambda) = |\omega'(\sigma)|^2 = \alpha^2(\lambda) + \beta^2(\lambda)$; $\sigma = e^{i\lambda}$; $\alpha(\lambda) = 1 - 2\varepsilon \cos 3\lambda$; $\beta(\lambda) = 2\varepsilon \sin 3\lambda$; (3)
 U , V – компоненти вектора зміщення контурних точок; U_0 – поступальні зміщення штампів уздовж осей їх симетрії; $E_0 F(s)$ – змінна жорсткість підсилення на розтяг (стиск); $F(s) = 2h_0 b_0(s)$; $b_0(s)$ – змінна ширина ребра, $2h_0$ – його товщина; s – дуга на контурі Γ ; $\gamma_1 \equiv [\beta_{01}; \beta_{02}] \cup [-\beta_{02}; -\beta_{01}]$, $\gamma_2 \equiv [-\alpha_0; \alpha_0] \cup [\pi - \alpha_1; \pi + \alpha_1]$ – образи ділянок Γ_1 , Γ_2 при відображенні (1).

Відносне видовження контуру Γ при заданому навантаженні, на підставі [4,5], визначаємо за формулою

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_\lambda(\lambda) = & \frac{1}{2EhK(\lambda)} \left[(1-\nu)K(\lambda)T_\rho(\lambda) + \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \left(-R(\lambda, t) + Q(\lambda, t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} \right) T_\rho^0(t) dt + \right. \\
 & + \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \left(Q(\lambda, t) + R(\lambda, t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} \right) S_{\rho\lambda}^0(t) dt - \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} \left(R(\lambda, \bar{t} + \pi) + Q(\lambda, \bar{t} + \pi) \operatorname{tg} \frac{\lambda-\bar{t}}{2} \right) \bar{T}_\rho(\bar{t}) d\bar{t} + \\
 & + \frac{1}{\pi} \int_{\beta_{01}}^{\beta_{02}} \left[-\left(R(\lambda, \tilde{t}) + R(\lambda, -\tilde{t}) \right) + \left(Q(\lambda, \tilde{t}) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-\tilde{t}}{2} + Q(\lambda, -\tilde{t}) \operatorname{ctg} \frac{\lambda+\tilde{t}}{2} \right) \right] \tilde{T}_\rho(\tilde{t}) d\tilde{t} + \\
 & \left. + \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} \left(Q(\lambda, \bar{t} + \pi) - R(\lambda, \bar{t} + \pi) \operatorname{tg} \frac{\lambda-\bar{t}}{2} \right) \bar{S}_{\rho\lambda}(\bar{t}) d\bar{t} + \alpha(\lambda) \tilde{\varepsilon}^0 + \beta(\lambda) \tilde{\nu}^0 \right], \lambda \in \gamma,
 \end{aligned} \quad (4)$$

де введено позначення

$$T_\rho(\lambda) = \begin{cases} T_\rho^0(\lambda), & \lambda \in [-\alpha_0; \alpha_0]; \\ \tilde{T}_\rho(\lambda), & \lambda \in \gamma_1; \\ \bar{T}_\rho(\lambda), & \lambda \in [\pi - \alpha_1; \pi + \alpha_1]; \\ 0, & \lambda \notin \gamma_1 \cup \gamma_2; \end{cases} \quad S_{\rho\lambda}(\lambda) = \begin{cases} S_{\rho\lambda}^0(\lambda), & \lambda \in [-\alpha_0; \alpha_0]; \\ 0, & \lambda \in \gamma_1; \\ \bar{S}_{\rho\lambda}(\lambda), & \lambda \in [\pi - \alpha_1; \pi + \alpha_1]; \\ 0, & \lambda \notin \gamma_1 \cup \gamma_2; \end{cases} \quad (5)$$

$$t = t; \lambda = \lambda, \quad t, \lambda \in [-\alpha_0; \alpha_0]; \quad t = \tilde{t}; \lambda = \tilde{\lambda}, \quad t, \lambda, \tilde{t}, \tilde{\lambda} \in [\beta_{01}; \beta_{02}];$$

$$t = \bar{t} + \pi; \lambda = \bar{\lambda} + \pi, \quad t, \lambda \in [\pi - \alpha_1; \pi + \alpha_1]; \quad \bar{t}, \bar{\lambda} \in [-\alpha_1; \alpha_1];$$

$$R(\lambda, t) = \alpha(\lambda)\alpha(t) + \beta(\lambda)\beta(t); \quad Q(\lambda, t) = \alpha(\lambda)\beta(t) - \beta(\lambda)\alpha(t);$$

E , ν – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу пластинки; e^{it} – точка на γ .

Компоненти вектора зміщення контурних точок отвору при заданому навантаженні, відповідно до [3], запишемо у вигляді

$$\begin{aligned}
 U|_\Gamma = & \frac{1}{2Eh} \left[(1-\nu) \int_{\beta_{01}}^{\lambda} f_1'(\vartheta) d\vartheta + \frac{2}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f_2'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt + \frac{2}{\pi} \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} \bar{f}_2'(\bar{t}) \ln \left| \cos \frac{\lambda-\bar{t}}{2} \right| d\bar{t} + \right. \\
 & \left. + \frac{2}{\pi} \int_{\beta_{01}}^{\beta_{02}} f_2''(\vartheta) \ln \left| \sin \frac{\lambda-\vartheta}{2} \right| d\vartheta + \frac{2}{\pi} \int_{\beta_{01}}^{\beta_{02}} f_2''(\vartheta) \ln \left| \sin \frac{\lambda+\vartheta}{2} \right| d\vartheta - \frac{P_0}{2\pi} \varepsilon(1+\nu) \cos \lambda + C_1 \right]; \\
 V|_\Gamma = & \frac{1}{2Eh} \left[(1-\nu) \int_{\beta_{01}}^{\lambda} f_2''(\vartheta) d\vartheta + \frac{2}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f_1'(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt - \frac{2}{\pi} \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} \bar{f}_1'(\bar{t}) \ln \left| \cos \frac{\lambda-\bar{t}}{2} \right| d\bar{t} - \right. \\
 & \left. - \frac{2}{\pi} \int_{\beta_{01}}^{\beta_{02}} f_1''(\vartheta) \ln \left| \sin \frac{\lambda-\vartheta}{2} \right| d\vartheta + \frac{2}{\pi} \int_{\beta_{01}}^{\beta_{02}} f_1''(\vartheta) \ln \left| \sin \frac{\lambda+\vartheta}{2} \right| d\vartheta - \frac{P_0 \lambda (1+\nu)}{2\pi} - \frac{P_0}{2\pi} \varepsilon(1+\nu) \sin \lambda \right], \lambda \in \gamma.
 \end{aligned} \quad (6)$$

Тут позначено

$$f_1 + if_2 = i \int_0^\lambda (T_\rho + iS_{\rho\lambda}) \omega'(\tau) e^{it} dt; \quad \tau = e^{it};$$

$$f'_j(\lambda) = \begin{cases} f'_j(\lambda), & \lambda \in [-\alpha_0; \alpha_0]; \\ \bar{f}'_j(\lambda), & \lambda \in [\pi - \alpha_1; \pi + \alpha_1]; \\ \tilde{f}'_j(\lambda), & \lambda \in [\beta_{01}; \beta_{02}]; \\ 0, & \lambda \notin \gamma_1 \cup \gamma_2; \quad j = 1, 2; \end{cases} \quad (7)$$

C_1 – стала, яка визначає зміщення контуру Γ як жорсткого цілого.

Підстановка співвідношень (4) – (7) у граничні умови (2) призводить до системи сингулярних інтегрально-диференціальних рівнянь з ядрами Гільберта та логарифмічними ядрами для визначення контактних зусиль $T_\rho^0, S_{\rho\lambda}^0, \tilde{T}_\rho, \bar{T}_\rho, \bar{S}_{\rho\lambda}$:

$$T_\rho^0(\lambda) = \frac{\Omega(\lambda)}{K^{\frac{5}{2}}(\lambda)} \frac{E_0 F(s)}{2Eh} \left[(1-\nu)K(\lambda)T_\rho^0(\lambda) + \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \left(-R(\lambda, t) + Q(\lambda, t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} \right) T_\rho^0(t) dt + \right.$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \left(Q(\lambda, t) + R(\lambda, t) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-t}{2} \right) S_{\rho\lambda}^0(t) dt - \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} \left(R(\lambda, \bar{t} + \pi) + Q(\lambda, \bar{t} + \pi) \operatorname{tg} \frac{\lambda-\bar{t}}{2} \right) \bar{T}_\rho(\bar{t}) d\bar{t} +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{\beta_{01}}^{\beta_{02}} \left[-\left(R(\lambda, \tilde{t}) + R(\lambda, -\tilde{t}) \right) + \left(Q(\lambda, \tilde{t}) \operatorname{ctg} \frac{\lambda-\tilde{t}}{2} + Q(\lambda, -\tilde{t}) \operatorname{ctg} \frac{\lambda+\tilde{t}}{2} \right) \right] \tilde{T}_\rho(\tilde{t}) d\tilde{t} +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} \left(Q(\lambda, \bar{t} + \pi) - R(\lambda, \bar{t} + \pi) \operatorname{tg} \frac{\lambda-\bar{t}}{2} \right) \bar{S}_{\rho\lambda}(\bar{t}) d\bar{t} + \alpha(\lambda) \tilde{\varepsilon}^0 + \beta(\lambda) \tilde{\nu}^0 \left. \right];$$

$$S_{\rho\lambda}^0(\lambda) = -\frac{K(\lambda)}{\Omega(\lambda)} \cdot \frac{\partial T_\rho^0(\lambda)}{\partial \lambda} - \frac{3\beta(\lambda)T_\rho^0(\lambda)[-5K(\lambda) + 9\alpha(\lambda)]}{\Omega^2(\lambda)}; \quad \lambda \in [-\alpha_0; \alpha_0]; \quad (8)$$

$$\left[(1-\nu) \int_{\beta_{01}}^\lambda \tilde{f}'_1(\tilde{t}) d\tilde{t} + \frac{2}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f'_2(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt + \frac{2}{\pi} \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} \bar{f}'_2(\bar{t}) \ln \left| \cos \frac{\lambda-\bar{t}}{2} \right| d\bar{t} + \right.$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int_{\beta_{01}}^{\beta_{02}} \tilde{f}'_2(\tilde{t}) \ln \left| \sin \frac{\lambda-\tilde{t}}{2} \right| d\tilde{t} + \frac{2}{\pi} \int_{\beta_{01}}^{\beta_{02}} \tilde{f}'_2(\tilde{t}) \ln \left| \sin \frac{\lambda+\tilde{t}}{2} \right| d\tilde{t} + \frac{P_0}{2\pi} \varepsilon(1+\nu) \cos \lambda + C_1 \left. \right] +$$

$$+ \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} \left[(1-\nu) \int_{\beta_{01}}^\lambda \tilde{f}'_2(\tilde{t}) d\tilde{t} - \frac{2}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} f'_1(t) \ln \left| \sin \frac{\lambda-t}{2} \right| dt - \frac{2}{\pi} \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} \bar{f}'_1(\bar{t}) \ln \left| \cos \frac{\lambda-\bar{t}}{2} \right| d\bar{t} - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{\pi} \int_{\beta_{01}}^{\beta_{02}} \tilde{f}'_1(\tilde{t}) \ln \left| \sin \frac{\lambda-\tilde{t}}{2} \right| d\tilde{t} + \frac{2}{\pi} \int_{\beta_{01}}^{\beta_{02}} \tilde{f}'_1(\tilde{t}) \ln \left| \sin \frac{\lambda+\tilde{t}}{2} \right| d\tilde{t} + \frac{P_0 \lambda (1+\nu)}{2\pi} - \frac{P_0}{2\pi} \varepsilon(1+\nu) \sin \lambda \right] =$$

$$= EhU_0 \left(1 + \sqrt{3} \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} \right); \quad \tilde{f}'_1(\lambda) + \frac{b(\lambda)}{a(\lambda)} \tilde{f}'_2(\lambda) = 0, \quad \lambda \in [\beta_{01}; \beta_{02}];$$

$$\bar{T}_\rho(\lambda) = \frac{\Omega(\lambda)}{K^{\frac{5}{2}}(\lambda)} \frac{E_0 F(s)}{2Eh} \left[(1-\nu)K(\lambda)\bar{T}_\rho(\lambda) + \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \left(-R(\lambda, t) - Q(\lambda, t) \operatorname{tg} \frac{\lambda-t}{2} \right) T_\rho^0(t) dt + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} \left(-R(\lambda, \bar{t} + \pi) + Q(\lambda, \bar{t} + \pi) \operatorname{ctg} \frac{\bar{\lambda} - \bar{t}}{2} \right) \bar{T}_\rho(\bar{t}) d\bar{t} + \\
 & + \frac{1}{\pi} \int_{\beta_{01}}^{\beta_{02}} \left[- (R(\lambda, \tilde{t}) + R(\lambda, -\tilde{t})) - \left(Q(\lambda, \tilde{t}) \operatorname{tg} \frac{\bar{\lambda} - \tilde{t}}{2} + Q(\lambda, -\tilde{t}) \operatorname{tg} \frac{\bar{\lambda} + \tilde{t}}{2} \right) \right] \tilde{T}_\rho(\tilde{t}) d\tilde{t} + \\
 & + \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \left(Q(\lambda, t) - R(\lambda, t) \operatorname{tg} \frac{\bar{\lambda} - t}{2} \right) S_{\rho\lambda}^0(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_1}^{\alpha_1} \left(Q(\lambda, \bar{t} + \pi) + R(\lambda, \bar{t} + \pi) \operatorname{ctg} \frac{\bar{\lambda} - \bar{t}}{2} \right) \bar{S}_{\rho\lambda}(\bar{t}) d\bar{t} + \\
 & + \alpha(\lambda) \tilde{\varepsilon}^0 + \beta(\lambda) \tilde{V}^0 \left. \right]; \quad \bar{S}_{\rho\lambda}(\lambda) = -\frac{K(\lambda)}{\Omega(\lambda)} \cdot \frac{\partial \bar{T}_\rho(\lambda)}{\partial \lambda} - \frac{3\beta(\lambda) \bar{T}_\rho(\lambda) [-5K(\lambda) + 9\alpha(\lambda)]}{\Omega^2(\lambda)}, \\
 & \lambda = \bar{\lambda} + \pi, \lambda \in [\pi - \alpha_1; \pi + \alpha_1], \bar{\lambda} \in [-\alpha_1; \alpha_1].
 \end{aligned}$$

При цьому величини $f'_j, \tilde{f}'_j, \bar{f}'_j$ з контактними зусиллями $T_\rho^0, S_{\rho\lambda}^0, \tilde{T}_\rho, \bar{T}_\rho, \bar{S}_{\rho\lambda}$ на підставі (2), (7) зв'язані залежностями

$$\begin{aligned}
 f'_1(\lambda) &= -b(\lambda) T_\rho^0(\lambda) - a(\lambda) S_{\rho\lambda}^0(\lambda); & f'_2(\lambda) &= a(\lambda) T_\rho^0(\lambda) - b(\lambda) S_{\rho\lambda}^0(\lambda); & \lambda &\in [-\alpha_0; \alpha_0]; \\
 \tilde{f}'_1(\lambda) &= -b(\lambda) \tilde{T}_\rho(\lambda); & \tilde{f}'_2(\lambda) &= a(\lambda) \tilde{T}_\rho(\lambda), & \lambda &\in [\beta_{01}; \beta_{02}]; \\
 \bar{f}'_1(\lambda) &= -b(\lambda) \bar{T}_\rho(\lambda) - a(\lambda) \bar{S}_{\rho\lambda}(\lambda); & \bar{f}'_2(\lambda) &= a(\lambda) \bar{T}_\rho(\lambda) - b(\lambda) \bar{S}_{\rho\lambda}(\lambda); & \lambda &\in [\pi - \alpha_1; \pi + \alpha_1].
 \end{aligned} \tag{9}$$

Крім системи (8), (9) повинні виконуватися умови рівноваги кожного штампа і ребра підсилення [4,5], які можна перетворити до вигляду

$$\begin{aligned}
 T_\rho^0(-\alpha_0) &= T_\rho^0(\alpha_0) = 0; & \bar{T}_\rho(\pi - \alpha_1) &= \bar{T}_\rho(\pi + \alpha_1) = 0; \\
 \int_{\beta_{01}}^{\beta_{02}} f'_1(t) dt &= \frac{\sqrt{3} P_0}{2}; & \int_{\beta_{01}}^{\beta_{02}} f'_2(t) dt &= -\frac{P_0}{2}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Перші два співвідношення в (10) визначають структуру нормальних зусиль на кінцях зон підсилення, а решта служать для визначення сталих C_1, U_0 .

Якщо величини $T_\rho^0, S_{\rho\lambda}^0, \tilde{T}_\rho, \bar{T}_\rho, \bar{S}_{\rho\lambda}$ стануть відомі, то кільцеві зусилля T_λ на контурі отвору визначимо за формулою [4]

$$T_\lambda(\lambda) = \nu T_\rho(\lambda) + 2Eh\varepsilon_\lambda(\lambda), \quad \lambda \in [-\pi; \pi]. \tag{11}$$

Співвідношення (8)-(11) визначають математичну модель задачі про тиск системи двох однакових симетричних відносно своїх осей жорстких штампів з кутовими точками на частково підсиленій трикутній контур нескінченної ізотропної пластинки.

Розглянемо окремі часткові випадки задачі (8)-(11):

- якщо в (8)-(10) прийняти $E_0 = 0$, то отримаємо розв'язок контактної задачі про тиск системи двох однозв'язних штампів з кутовими точками на контур трикутного отвору в нескінченній пластинці [3];
- при $\beta_0 \rightarrow 0$ штамп з кутовими точками вироджується в клиноподібний і система (8)-(10) визначає розв'язок задачі про тиск двох зосереджених сил в напрямках осей $\delta = \pi/3$ та $\delta = -\pi/3$ на контур частково підсиленого трикутного отвору в ізотропній пластинці. За відсутності підсилення таку задачу розглянуто в [3,7];
- покладаючи в (8)-(10) $\varepsilon = 0$, знаходимо розв'язок контактної задачі для кругового отвору.

2. Наближений розв'язок задачі. Результати числових розрахунків.
 Відшукування точного розв'язку системи (8)-(10) пов'язане зі значними математичними труднощами. Для наближеного її розв'язання доцільно використовувати числові методи, зокрема мішаний метод механічних квадратур і колокації, ефективність якого проілюстровано в роботах [1,3,4].

Для пластинки з трикутним отвором ($N = 3$; $\varepsilon = \pm 0.2$; $\nu = 0.3$) і підсилень з параметрами: $\alpha_0 = 20^\circ$; $\alpha_1 = 60^\circ$; $E_0/E = 5$; $b_0/\rho_0 = 0.05$; $h_0/h = 1$ досліджено вплив на величину контактних і кільцевих зусиль величини зони контакту. Результати числових розрахунків зображено на рис. 2 ($\varepsilon = 0.2$) і рис. 3 ($\varepsilon = -0.2$). Суцільні лінії відповідають випадку клиноподібних штампів і визначають розв'язок задачі про тиск двох зосереджених сил на контур частково підсиленого трикутного отвору нескінченної ізотропної пластинки.

На рис. 4 ($\varepsilon = 0.2$) і рис. 5 ($\varepsilon = -0.2$) проілюстровано залежності величин T_ρ , T_λ на контурі трикутного отвору при $N = 3$; $\varepsilon = \pm 0.2$; $\nu = 0.3$; $\beta_0 = 20^\circ$ від відносної жорсткості підсилень з параметрами: $\alpha_0 = 20^\circ$; $\alpha_1 = 60^\circ$; $b_0/\rho_0 = 0.05$; $h_0/h = 1$. Суцільні лінії на цих рисунках відповідають випадку відсутності підсилювальних ребер і визначають розв'язок задачі про тиск двох однакових симетричних відносно своїх осей штампів з кутовими точками на контур трикутного отвору нескінченної ізотропної пластинки [3].

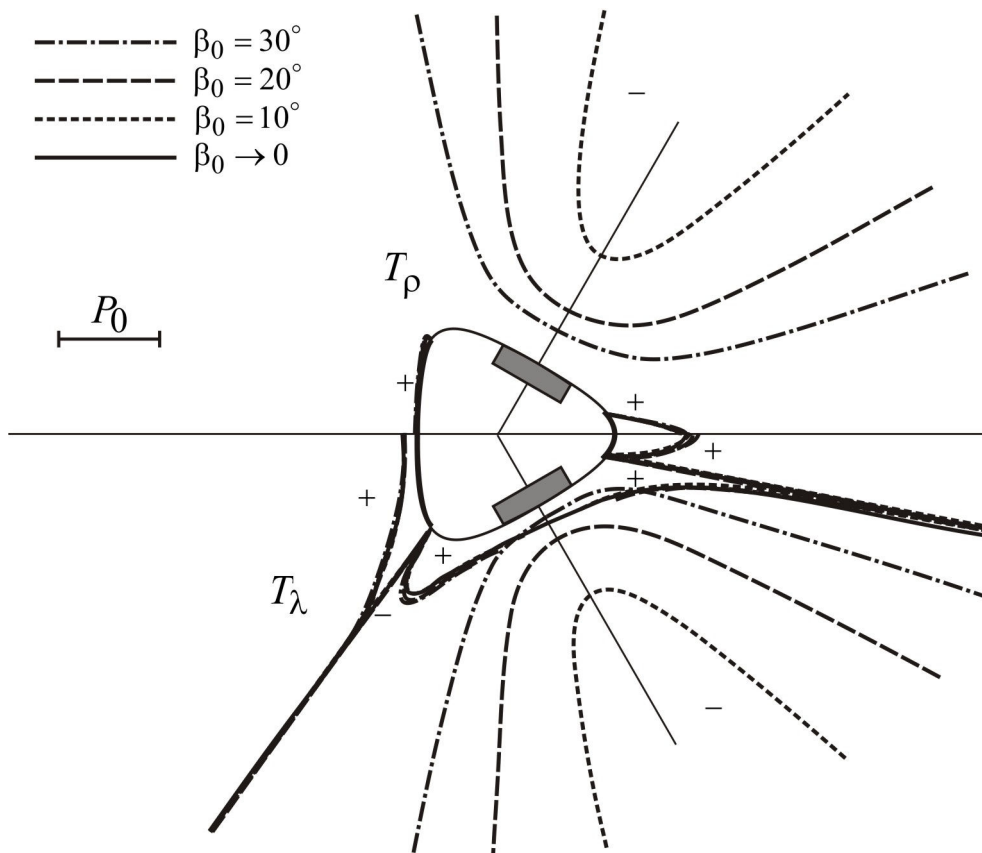


Рисунок 2 – Розподіл зусиль T_ρ і T_λ на контурі отвору

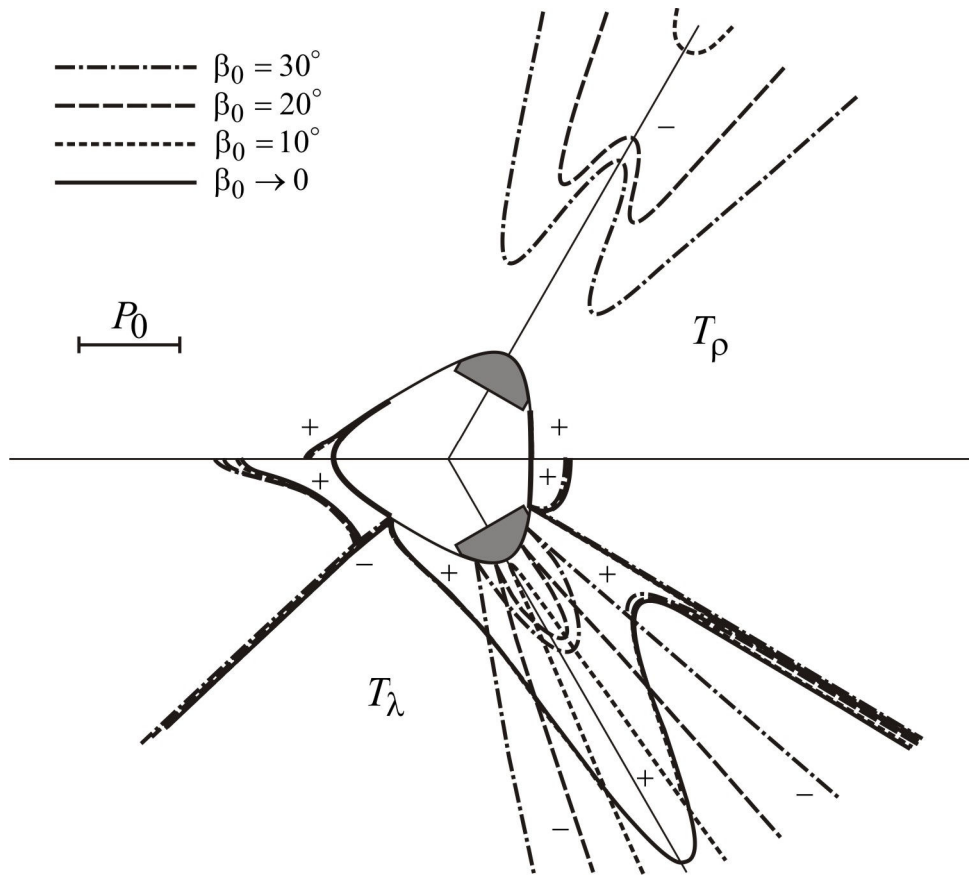


Рисунок 3 – Розподіл зусиль T_ρ і T_λ на контурі отвору

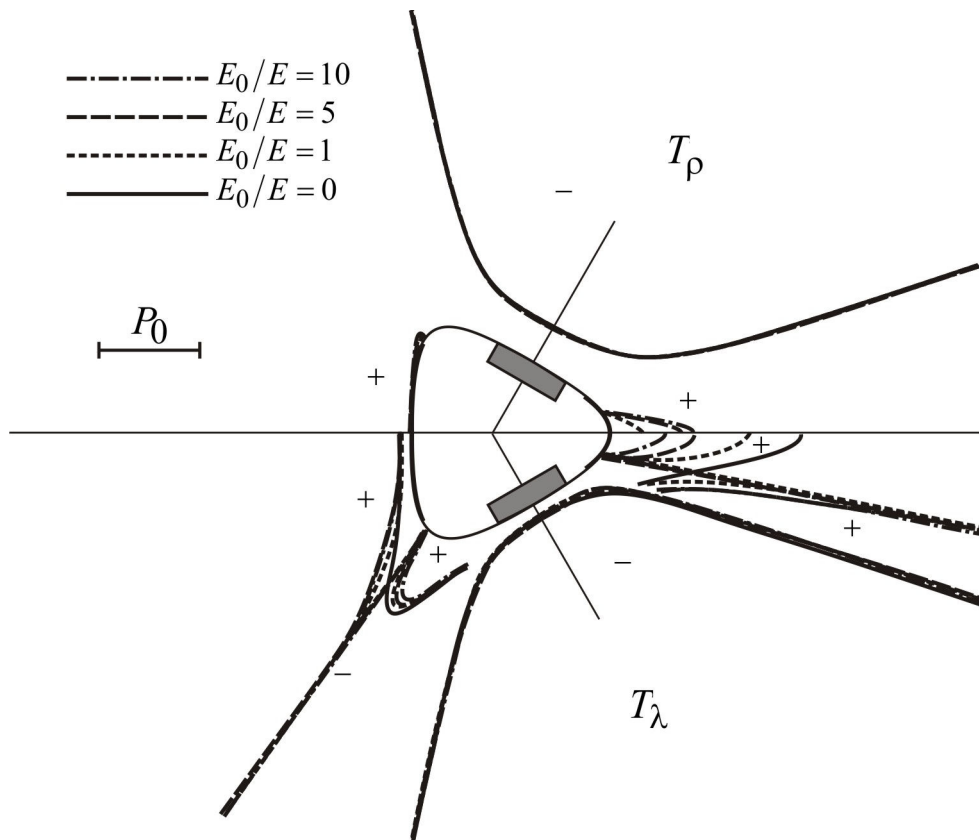


Рисунок 4 – Розподіл зусиль T_ρ і T_λ на контурі отвору

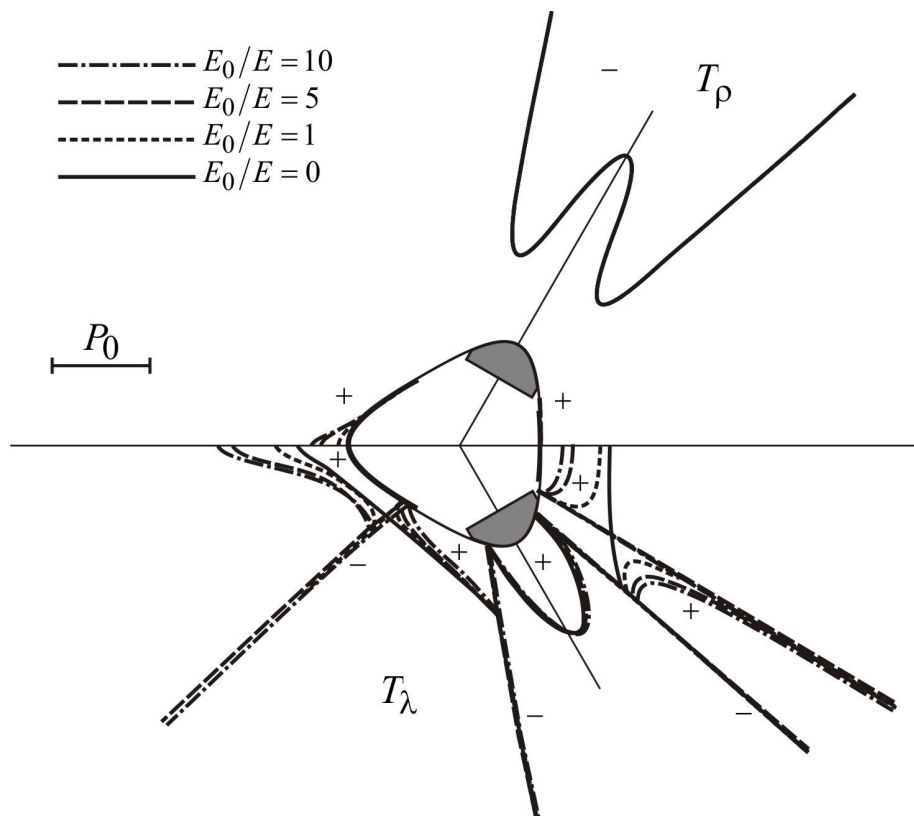


Рисунок 5 – Розподіл зусиль T_ρ і T_λ на контурі отвору

Аналізуючи одержані результати, можна зробити такі **висновки**:

- збільшення кривини контуру в центрі зони контакту призводить до суттєвого збільшення в цій точці нормальних T_ρ і кільцевих T_λ зусиль;
- відносна жорсткість підсилювальних ребер практично не впливає на величину нормальних і кільцевих зусиль під штампами. Збільшення відносної жорсткості підсилень при $\varepsilon > 0$ призводить до значного зменшення кільцевих зусиль у зоні підсилення з максимальною кривиною;
- зменшення величини зон контакту супроводжується збільшенням контактних зусиль.

Література

1. Сяський А.О. Тиск жорсткого штампа з кутовими точками на еліптичний отвір в ортотропній пластинці / А.О. Сяський // Волинський математичний вісник. – Рівне, 1997. – Вип.4. – С.153–156.
2. Шваб'юк В.І. Контактна взаємодія двозв'язних штампів з кутовими точками і криволінійного отвору в нескінченних пластинках / Шваб'юк В.І., Сяський В.А. // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди: Збірник наукових праць. – Рівне, 2009. – Вип.19. – С.26–9275.
3. Шваб'юк В.І. Контактна задача для пластинки з трикутним отвором і системи двох жорстких штампів з кутовими точками / В. Шваб'юк, В. Сяський // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – Тернопіль, 2009. – Т.14, №3. – С.65–71.
4. Сяський А. Часткове симетричне підсилення криволінійного отвору в нескінченній пластинці / А. Сяський, Ю. Батишкіна // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – Тернопіль, 2004. – Т.9, №2. – С.5–12.
5. Трохимчук О. Тиск жорсткого штампа з кутовими точками на частково підсиленій контур криволінійного отвору в нескінченній ізотропній пластинці / О. Трохимчук, А. Сяський // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – Тернопіль, 2009. – Т.14, №2. – С.30–36.
6. Трохимчук О. Мішана контактна задача для системи двох жорстких штампів з кутовими точками і ортотропної пластинки з частково підсиленім еліптичним отвором / Олена Трохимчук, Андрій Сяський // Обчислювальна математика і математичні проблеми механіки. – Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. – 2009. – С.213–214.
7. Савин Г.Н. Концентрація напружень около отверстий / Г.Н. Савин. – К.: Наук. думка, 1968. – 888 с.

Одержано 01.04.2010 р.