

УДК 539.313

Т. Штефан

Запорізький національний технічний університет

ВПЛИВ ФОРМИ ШТАМПА НА ПОЛОЖЕННЯ ЗОН МОЖЛИВОЇ ПЛАСТИЧНОЇ ДЕФОРМАЦІЇ ПЛИТИ

Резюме. Розглянуто пружну плоску деформацію плити у вигляді прямокутного паралелепіпеда під дією гладкого штамп, який контактує з паралелепіпедом по всій поверхні його верхньої основи. Нижня основа вільна від навантажень, а вертикальні переміщення точок бокової грані дорівнюють нулю. Отримано аналітичний вигляд для компонентів тензора напружень і вектора переміщень точок паралелепіпеда. Під час дослідження використано напівобернений метод Сен-Венана. Межові умови, яких не вистачає при постановці задачі, беремо із припущення, що нормальні переміщення можуть бути представлені у вигляді рядів Фур'є за синусами. Обчислені коефіцієнти тригонометричних рядів для напружень та переміщень визначають точний розв'язок сформульованої задачі для довільної форми штамп. Досліджено вплив форми штамп на положення можливих зон пластичної деформації за допомогою функції потенціальної енергії, яка застосовується в енергетичній гіпотезі міцності Мізеса. Поставлено і розв'язано задачу про розподіл енергії формозміни по верхній межі плити у випадку, коли штамп має узагальнену параболічну форму. На основі чисельного аналізу зроблено прогноз про найнебезпечніші, в сенсі міцності конструкції, ділянки плити. Методом спряжених градієнтів встановлено місцезнаходження глобального максимуму функції потенціальної енергії формозміни за заданими граничними умовами при незмінному значенні коефіцієнта Пуассона й варіювання геометричних параметрів штамп.

Ключові слова: плита, штамп, плоска деформація, четверта гіпотеза міцності, енергія, зона пластичності.

T. Shtefan

EFFECT OF THE STAMP SHAPE ON AREAS OF POSSIBLE PLATE PLASTIC DEFORMATION

Summary. An elastic deformation of the parallelepiped shaped plate subject to the smooth stamp, which contacts with the plate on its entire upper base, has been considered. The lower base is free of load. The vertical displacements of the points of the lateral face are equal to zero. We got the analytical form for the components of the stress tensor and vector displacements of the points of the parallelepiped. The Saint-Venant semi-inverse method has been used. The missing boundary conditions have been obtained considering that the normal displacements can be represented in the form of the sine Fourier's series. The obtained coefficients of the trigonometric series for the stresses and displacements determine the exact solution of the problem for arbitrarily form of the stamp. The problem connected with the distortion energy distribution over volume in the case of the general parabolic shaped stamp has been stated and solved. The expression of the closed form for the distortion energy which is used in the fourth (energy) failure hypothesis of Mises was obtained. The prediction of the safest, in the sense of the stability, zones of the plate with the square horizontal section has been made with the help of the numerical analysis. The location of the global maximum of the distortion energy function under given boundary conditions, constant value of the Poisson coefficient and the geometric parameters of the stamp has been determined with the help of the conjugate gradient method. Numerical research of a parallelepiped, that takes area $(x, y) \in [0, 1] \times [0, \pi]$, was done. The stamp surface is described by the equation

$f_m(x) = \alpha \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2m} \cdot (x(\pi - x))^m$. In the numerical solution the first nine harmonics were kept. The Poisson coefficient is considered to equal 0.25. Since the function of potential energy is proportional to the coefficient α and shear modulus μ , we considered them to equal 1. The graphs, presented in the article, testify that the stamp shape effects significantly the distribution of potential energy in the plate. With varying parameter m global maximum changes its position, in addition, the appearance of local maximum at the top of the plate is observed.

Key words: plate, stamp, plane strain, strength fourth hypothesis, energy, zone of plasticity.

Постановка проблеми. При аналізі міцності інженерних конструкцій та житлових споруд, при проектуванні та будівництві авто та залізничних шляхів як один із основних інструментів для теоретичних розрахунків застосовується теорія пружності [1]. Сутністю енергетичної гіпотези міцності є твердження про те, що руйнування структури відбувається в тих місцях споруди, де потенціальна енергія формозміни перевищує деяке критичне значення [2].

Представлене дослідження проведено в напрямку пошуку найнебезпечніших у сенсі міцності областей плити, що деформуються штампом. В роботах [3,4] наведено дослідження міцності плит при дещо інших межових умовах, ніж розглянутих у цій статті.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Авторам не вдалося знайти в літературі точного аналітичного дослідження сформульованої проблеми. При дослідженнях зазвичай обмежувалися аналітичним або чисельним способами визначення напружень та переміщень. У роботі [3] для визначення елементів тензора напружень у плиті застосовано метод початкових функцій. Для суттєво багат шарових плит-метод тригонометричних розкладів та метод матриць податливості застосовувався в статті [5]. В роботі застосовано розв'язання компонент вектора переміщень та тензора напружень у тригонометричні ряди, який базується на роботі [6].

Метою дослідження є пошук найнебезпечніших ділянок плити, що деформується штампом, отримання аналітичних виразів для функції, яка визначає міцність конструкції за енергетичним критерієм міцності Мізеса. Виділити найнебезпечніші з точки зору міцності ділянки плити. Провести систематичний аналіз впливу форми штампа, розмірів плити й коефіцієнта Пуассона матеріалу плити на поведінку функції, яка описує потенціальну енергію формозміни.

Постановка задачі. Розглянемо стаціонарну задачу про деформування жорстким штампом прямокутного паралелепіпеда, котрий закріплено таким чином, що відстань між нижньою та верхньою гранями паралелепіпеда постійна. Якщо штамп у кожному горизонтальному перерізі обмежений однаковою кривою, то під його тиском паралелепіпед деформується так, що вертикальні переміщення (вздовж осі Oz) точок паралелепіпеда дорівнюють нулю і мають місце умови плоскої деформації. Перейдемо до безрозмірних величин таким чином, щоб смуга займала область $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq h$. Початок координат знаходиться на верхній межі області, а вісь Oy направлено вниз (рис.1). Бокові сторони смуги жорстко зчеплені з тонкими листами – діафрагмами.

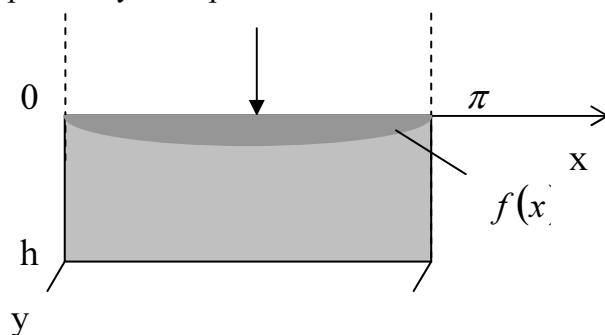


Рисунок 1. Поперечний переріз плити, на яку тисне штамп

Figure 1. Cross-section of the plate, which presses stamp

На верхню межу смуги тисне гладкий абсолютно жорсткий штамп, який переміщується вертикально і контактує з поверхнею смуги на всьому відрізку $x \in [0, \pi]$.

Відповідні граничні умови мають вигляд

$$u(x, 0) = 0, \quad v(x, 0) = f(x). \quad (1)$$

Тут $y = f(x)$ – рівняння лінії, яку описує нижня межа штампу в кінцевому положенні. Нижня межа вільна від навантажень, тобто

$$\tau_{xy}(x, h) = 0, \quad \sigma_y(x, h) = 0. \quad (2)$$

За аналогією з [3] будемо вважати, що на бокових межах виконуються умови

$$v(0, y) = v(h, y) = 0. \quad (3)$$

Таким чином, нам потрібно знайти розв'язок задачі теорії пружності в області $(x, y) \in [0, \pi] \times [0, h]$ з межовими умовам (1)–(3).

Аналітичний розв'язок задачі. Представимо функцію $v(x, y)$ у вигляді тригонометричного ряду за синусами, оскільки в цьому випадку вона задовольняє умови (1)–(3)

$$v(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k(y) \sin(kx).$$

Тоді відповідні розвинення функції $u(x, y)$, $\sigma_x(x, y)$, $\sigma_y(x, y)$, $\tau_{xy}(x, y)$ мають вигляд

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(y) \cos(kx), \quad \sigma_x = \sum_{k=1}^{\infty} S_k(y) \sin(kx), \quad \sigma_y = \sum_{k=1}^{\infty} R_k(y) \sin(kx),$$

$$\tau_{xy} = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(y) \cos(kx). \quad (4)$$

Зв'язок між функціями V_k, U_k, S_k, M_k та T_k встановимо, розв'язавши систему рівнянь Ламе

$$\begin{cases} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0, \end{cases}$$

методом розділення гармонік

$$V_k = (A_k + yB_k) \operatorname{ch}(ky) + (C_k + yD_k) \operatorname{sh}(ky),$$

$$U_k = \frac{1}{k} ((kA_k + (3 - 4\nu)D_k + kB_k y) \operatorname{sh}(ky) + (kC_k + (3 - 4\nu)B_k + kD_k y) \operatorname{ch}(ky)),$$

$$T_k(y) = 2\mu (kA_k + kyB_k + 2(1 - \nu)D_k) \operatorname{ch}(ky) + (kC_k + kyD_k + 2(1 - \nu)B_k) \operatorname{sh}(ky);$$

$$S_k(y) = -2\mu((3-2\nu)B_k + kC_k + kyD_k)ch(ky) + ((3-2\nu)D_k + kA_k + kyB_k)sh(ky);$$

$$R_k(y) = 2(kA_k + kyB_k + (1-2\nu)D_k)sh(ky) + (kC_k + kyD_k + (1-2\nu)B_k)ch(ky).$$

Тут A_k, B_k, C_k, D_k – довільні константи та враховано співвідношення $\frac{\lambda}{\lambda + \mu} = 2\nu$,

де ν – коефіцієнт Пуассона.

Враховуючи граничні умови (1)–(3), отримаємо значення довільних констант

$$\begin{cases} A_k = f_k, \\ B_k = -kf_k \frac{sh(kh)ch(kh) - kh}{(4\nu - 3)ch^2(kh) - k^2h^2 - 4\nu^2 + 4\nu - 1}, \\ C_k = -f_k \frac{(4\nu - 3)(sh(kh)ch(kh) - kh)}{(4\nu - 3)ch^2(kh) - k^2h^2 - 4\nu^2 + 4\nu - 1}, \\ D_k = kf_k \frac{ch^2(kh) + 1 - 2\nu}{(4\nu - 3)ch^2(kh) - k^2h^2 - 4\nu^2 + 4\nu - 1}. \end{cases}$$

Підставивши знайдені коефіцієнти в ряди (4) для нормальних напружень $\sigma_x(x, y)$, $\sigma_y(x, y)$ та дотичних напружень $\tau_{xy}(x, y)$, матимемо шукані розвинення вказаних функцій у тригонометричні ряди. Отримані результати застосуємо для знаходження критичних (в сенсі міцності) ділянок розглянутої конструкції.

Результати чисельного дослідження функції потенціальної енергії формозміни. Сутністю енергетичної теорії міцності є припущення, що кількість потенціальної енергії формозміни, яка накопичена до моменту настання небезпечного стану, однакова як при складному напруженні, так і при простому розтягуванні. Умова міцності згідно з четвертою гіпотезою міцності запишемо

$$\sigma^{IV} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} \leq \sigma^*.$$

Якщо перейти від головних напружень до тензора деформації в довільній прямокутній системі координат, матимемо вираз

$$\sigma^{IV} = \sqrt{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 - 3(\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2)}.$$

Оскільки у випадку плоскої деформації $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$, то отримаємо функцію енергії формозміни у вигляді

$$F(x, y) = \sigma^{IV} = \sqrt{[(1 + \nu)(\sigma_x + \sigma_y)]^2 - 3(\sigma_x\sigma_y + \nu(\sigma_x + \sigma_y)^2 - \tau_{xy}^2)}. \quad (5)$$

Функція $F(x, y)$ пропорційна квадратному кореню з питомої потенціальної енергії формозміни тіла W_ϕ , а саме, пов'язана з нею формулою

$$F(x, y) = \sigma^{IV} = \sqrt{\frac{3E \cdot W_\phi}{1 + \nu}}.$$

Надалі функцією потенціальної енергії формозміни будемо називати $F(x, y)$.

Дослідимо функцію (5) на екстремум, оскільки отримали явні вирази для всіх компонент тензора напружень.

Розглянемо числову задачу. Будемо вважати, що рівняння підшви штамп в кінцевому положенні описується функцією $f_m(x) = \alpha \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2m} \cdot (x(\pi - x))^m$. Оскільки функція $F(x, y)$ буде пропорційна коефіцієнту α та модулю зсуву μ . Тому при розрахунках ми брали $\alpha=1$ та $\mu=1$. Коефіцієнт Пуассона приймемо рівним 0.25, а ширину плити – рівною одиниці. При чисельному розв'язку утримувалися дев'ять перших гармонік.

На рис.2–5 зображені графіки функції енергії формозміни (5) при варіюванні параметра m (в правому верхньому куті зображено відповідну форму штамп).

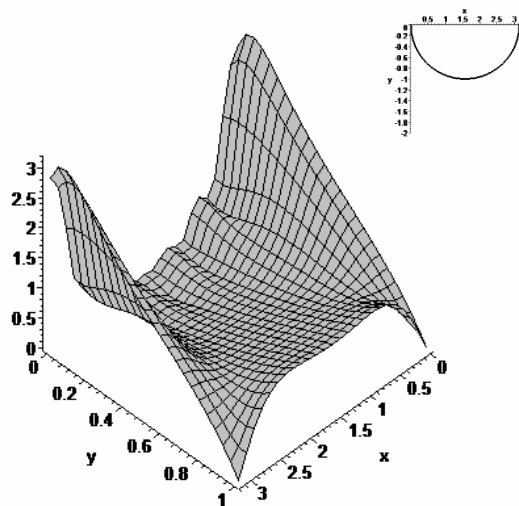


Рисунок 2. $F(x, y)$ при $m = 0.5$

Figure 2. $F(x, y)$ for $m = 0.5$

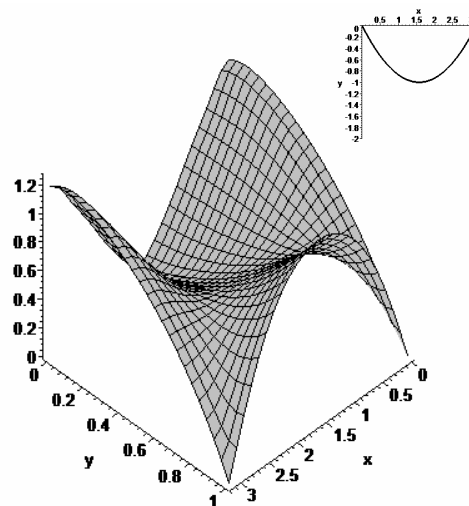


Рисунок 3. $F(x, y)$ при $m = 1$

Figure 3. $F(x, y)$ for $m = 1$

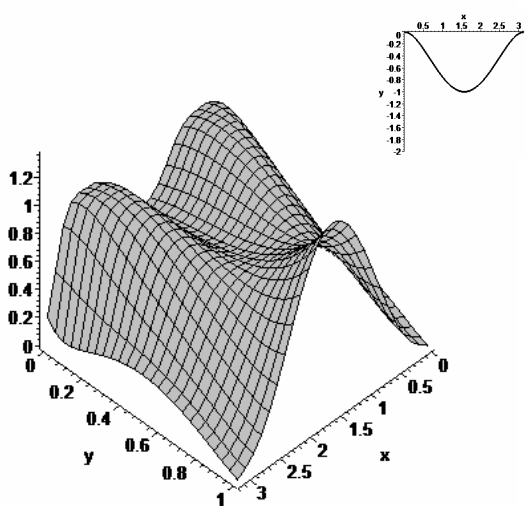


Рисунок 4. $F(x, y)$ при $m = 2$

Figure 4. $F(x, y)$ for $m = 2$

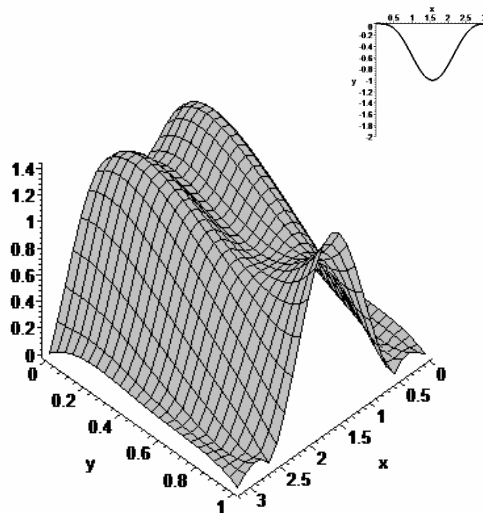


Рисунок 5 $F(x, y)$ при $m = 4$

Figure 5. $F(x, y)$ for $m = 4$

На рис.6 наведено контактні напруження $\sigma_y(x,0)$ для тих самих значень механічних та геометричних параметрів при варіюванні параметра m .

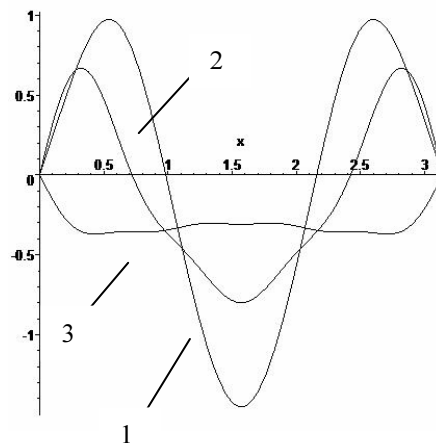


Рисунок 6. Напруження $\sigma_y(x,0)$ на верхній межі при 1) $m = 1$, 2) $m = 2$, 3) $m = 4$

Figure 6. Stress $\sigma_y(x,0)$ on the lower boundary for 1) $m = 1$, 2) $m = 2$, 3) $m = 4$

При значенні $m = 0,5$ коефіцієнти розкладу функції в ряд $f_{0,5}(x)$ повільно прагнуть до нуля зі збільшенням кількості доданків тому графік функції нормальних напружень $\sigma_y(x,0)$ є осцилюючим. На рис.6 зображено відповідні контактні напруження при кількості гармонік $k_1 = 10, k_2 = 20$ та $k_3 = 40$.

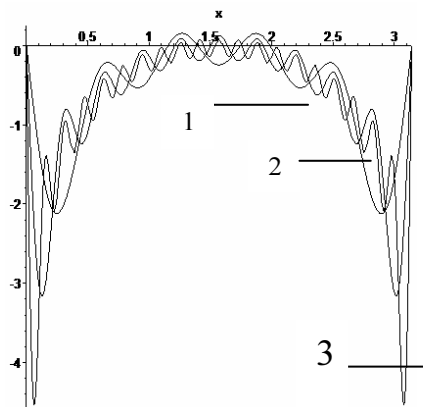


Рисунок 7. Напруження $\sigma_y(x,0)$ на верхній межі при $m = 0,5$, якщо 1) $k_1 = 10$,
2) $k_2 = 20$, 3) $k_3 = 40$

Figure 7. Stress $\sigma_y(x,0)$ on the upper boundary if $m = 0,5$ for 1) $k_1 = 10$, 2) $k_2 = 20$,
3) $k_3 = 40$

Було знайдено (з точністю до 0,01) глобальний максимум функції $F(x, y)$ при заданих параметрах:

- 1) при $m = 0,5$ максимум $F_{\max} = 3,142$ знаходиться в точці $x = 0, y = 0,08$;
- 2) при $m = 1$ максимум $F_{\max} = 1,214$ знаходиться в точці $x = 0, y = 0,1$;

3) при $m = 2$ максимум $F_{\max} = 0,992$ знаходиться в точці $x = 0,23\pi$, $y = 0,16$;

4) при $m = 4$ максимум $F_{\max} = 1,309$ знаходиться в точці $x = 0,3\pi$, $y = 0,16$.

З аналізу наведених графіків випливає, що форма штампа істотно впливає на розподіл потенціальної енергії плити. При варіюванні параметра m глобальний максимум змінює своє положення, крім того спостерігається поява локальних максимумів біля верхньої границі плити.

Висновки. Розглянуто плиту, яка знаходиться в умовах плоскої деформації під дією штампа. Досліджено вплив форми штампа на положення можливих зон пластичної деформації за допомогою функції потенціальної енергії, яка визначає міцність конструкції за четвертим критерієм міцності. Виділені найнебезпечніші з точки зору міцності ділянки плити. В подальшому планується провести детальний аналіз положень локальних і глобальних максимумів енергії формозміни при зміні геометричних та механічних властивостей плити. Оскільки метод тригонометричних рядів можна застосовувати для випадку багат шарових плит [5], то отримані результати також планується узагальнити на цей випадок.

Conclusions. In the article the plate, which is in terms of planar deformation under the stamp is considered. The influence of the stamp shape on the position of possible plastic deformation zones using the potential energy that determines the structural strength of the fourth criterion of strength has been investigated. The most dangerous areas in terms of plate strength have been determined. Detailed analysis of the provisions of local and global maxima forming energy by changing the geometrical and mechanical properties of the plate is to be carried out in future. Since the method of trigonometric series can be applied in the case of multilayer plates [5], the results are also planned to be summarize in this case.

Список використаної літератури

1. Гузь, А.Н. О построении нелинейной теории малых деформаций в механике деформируемых тел [Текст] / А.Н. Гузь // Вестник ЧГПУ, серия: Механика предельного состояния. – 2010. – №8. – С.79–86.
2. Малыгин, Г.А. Анализ параметров субмикронной дислокационной структуры в металлах при больших пластических деформациях [Текст] / Г.А. Малыгин // Физика твердого тела. – 2004. – Т.46. – №11. – 274 с.
3. Плотников, В.П. Теоретическое исследование упруго-пластического состояния бетонных блоков при нагружении внутренним давлением воды [Текст] / В.П. Плотников // Горный информационно-аналитический бюллетень. – 2006. – №.9. – С.24–31.
4. Дильман, В.Л. Исследование математических моделей напряженного состояния неоднородного поперечного слоя в круглом стержне [Текст] / В.Л. Дильман // Bulletin of SUSU. – 2009. – С.56–72.
5. Величко, О.В. Плоска періодична контактна задача для багат шарової основи [Текст] / О.В. Величко // Вісник Дніпропетровського університету. Серія механіка. – Дніпропетровськ: видавництво ДНУ. – 2005. – №10(1). – Вип.9. – Т.1. – С.118–124.
6. Власов, В.З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании [Текст] / В.З. Власов, Н.Н. Леонтьев. – Москва: ГИФМЛ, 1960. – 490 с

Отримано 01.12.2014