

УДК 539.3

І. Ракоча¹; В. Валяшек², канд. фіз.-мат. наук

¹Національний університет «Львівська політехніка», Інститут
прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України

²Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ВИЗНАЧЕННЯ ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ ДВОСКЛАДОВОГО ТЕРМОЧУТЛИВОГО ЦИЛІНДРА ЗА КОНВЕКТИВНО- ПРОМЕНЕВОГО НАГРІВАННЯ

Резюме. Визначено та досліджено розподіли температури й спричинених нею напружень у двоскладовому термочутливому циліндрі, на одній з обмежуючих поверхонь якого підтримується стала температура, а через іншу відбувається конвективно-променевий теплообмін із навколишнім середовищем.

Ключові слова: двоскладовий циліндр, термочутливий матеріал, температурні напруження.

I. Rakocha, V. Valiashek

DEFINITION AND MATHEMATICAL MODELING OF THE THERMOSTRESSED STATE OF A TWO-COMPONENT THERMOSENSITIVE CYLINDER UNDER CONVECTIVE-RADIAL HEATING

Summary. The thermosensitive body model is used in order to implement the requirements of modern engineering practice for the calculation of temperature fields and tensions in multilayer structures operating under high-temperature heating. The thermosensitive body model takes into account the dependence of the thermal and mechanical characteristics of the material components on the temperature. Such models describe their thermal and thermostressed state more accurately.

However, these problems usually do not have exact analytical solutions, and therefore require the development of new methods for their solution. It is also important to take into account their actual heating conditions and interaction with the environment.

In this article the nonlinear mathematical model of temperature distribution in a two-component thermosensitive cylinder based on the thermosensitive body model is defined. It occurs under conditions of complex heat transfer on flat limiting surfaces, in particular the constant temperature from one side cylinder and the convective-radial heat transfer with the environment of constant temperature from another. There are also evenly distributed heat sources on the adjacent surface of the cylinder components that produce thermal flow. The temperature tensions which were caused by defined temperature distribution have been found.

In order to estimate the influence of the thermosensitivity of the material of cylinder components the same nonlinear mathematical model of temperature distribution was created, but for nonthermosensitive cylinder.

The influence of the thermosensitivity of thermal and mechanical characteristics of the material components on the nature and extent of temperature and stresses distribution depending on the input parameters have been investigated.

It was established, that it is of great importance to take into account the thermosensitivity of materials, as the maximal differences between the thermosensitive and non-thermosensitive cylinders with basic and average integral values can reach the large values. However, in order to make a rapid assessment of the temperature and stresses distribution under conditions of the above complex heating and composition of the materials, it is necessary to use the basic values of thermomechanical characteristics.

Key words: two-component cylinder, heat-sensitive material, temperature, thermal stresses.

Постановка проблеми. При розрахунку температурних полів і викликаних ними напружень у багатошарових елементах конструкцій, які працюють в умовах високотемпературного нагрівання, важливо враховувати високі вимоги сучасної інженерної практики, що можливо реалізувати, використовуючи модель термочутливого тіла, а також реальні умови їх взаємодії з навколишнім середовищем.

Такі математичні моделі точніше описують їх тепловий і термопружний стани. Моделі для визначення температури є нелінійними крайовими задачами математичної фізики, а для знаходження компонент термопружного стану – крайовими задачами для систем звичайних диференціальних рівнянь чи рівнянь із частинними похідними зі змінними коефіцієнтами. Зазвичай, ці задачі потребують розроблення нових методів їх розв’язування, оскільки не мають точних аналітичних розв’язків.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Детальний огляд досліджень, які стосуються визначення термопружного стану термочутливих тіл від початку виникнення проблеми до її сучасного стану, наведено в роботі [1]. Як математичні моделі термопружного стану багатошарових тіл, в яких враховано залежність термомеханічних характеристик матеріалів шарів від температури, так і нові методи їх розв’язування представлені в працях [1–4]. Про важливість врахування термочутливості матеріалів складових при визначенні розподілів температури і напружень свідчать публікації у вітчизняних та міжнародних виданнях, а саме [1,3,5–8].

Мета роботи – побудова математичної моделі для визначення розподілу температури в двоскладовому термочутливому циліндрі, а також дослідження спричиненого ним термопружного стану.

Постановка та розв’язок задачі.

1. Формулювання задачі. Розглянуто термочутливий циліндр (рис.1), який складається з двох різної довжини циліндрів, виготовлених із різних матеріалів. На одній з плоских обмежуючих поверхонь $\hat{z}=\hat{z}_1$ задана стала температура t_c , а через іншу плоску поверхню $\hat{z}=\hat{z}_3$ відбувається конвективно-променевиий теплообмін із зовнішнім середовищем сталої температури t_c . Коефіцієнт теплообміну через цю поверхню та ступінь чорноти сталі й дорівнюють α та ε ($0 < \varepsilon \leq 1$) відповідно.

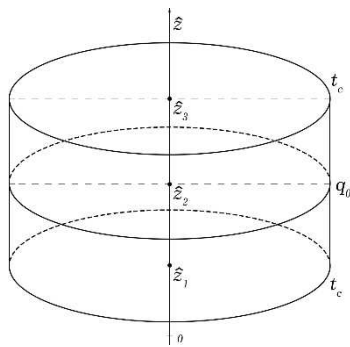


Рисунок 1. Двоскладовий термочутливий циліндр

Figure 1. The two-component thermosensitive cylinder

У площині контакту циліндрів $\hat{z}=\hat{z}_2$ наявні рівномірно розподілені джерела тепла, які створюють потік тепла q_0 .

Через теплоізоляцію циліндричної поверхні потік тепла проходить лише в одному напрямі – вздовж осі циліндра, вісь абсцис вибрана так, що її початок знаходиться під першою складовою.

2. Математична модель. Для визначення розподілу температури вона містить:

- рівняння теплопровідності для складових циліндрів

$$\frac{d}{d\hat{z}} \left(\lambda_i^{(i)}(t_i) \frac{dt_i}{d\hat{z}} \right) = 0, \quad \hat{z}_i < \hat{z} < \hat{z}_{i+1}, \quad i = 1, 2; \quad (1)$$

- крайові умови на обмежувальних плоских поверхнях

$$t_1|_{\hat{z}=\hat{z}_1} = t_{\text{вн}}, \left[\lambda_t^{(2)}(t_2) \frac{dt_2}{d\hat{z}} + \alpha(t_2 - t_c) + \varepsilon\sigma(t_2^4 - t_c^4) \right]_{\hat{z}=\hat{z}_3} = 0; \quad (2)$$

- умови контакту на поверхні дотику складових циліндрів

$$t_1|_{\hat{z}=\hat{z}_2} = t_2|_{\hat{z}=\hat{z}_2}, \lambda_t^{(1)}(t_1) \frac{dt_1}{d\hat{z}} \Big|_{\hat{z}=\hat{z}_2} = \lambda_t^{(2)}(t_2) \frac{dt_2}{d\hat{z}} \Big|_{\hat{z}=\hat{z}_2} + q_0, \quad (3)$$

де σ – стала Стефана-Больцмана.

Модель (1)–(3) є нелінійною за рахунок залежності коефіцієнтів теплопровідності $\lambda_t^{(i)}(t_i)$ ($i=1,2$) від температур t_i ($i=1,2$). Ці залежності у довідковій літературі переважно задано у вигляді таблиць.

Для проведення теоретичних досліджень зручно мати температурні залежності коефіцієнтів теплопровідності у вигляді явних функціональних залежностей $\lambda_t^{(i)} = \lambda_t^{(i)}(t_i)$. Для отримання таких залежностей таблично задану функцію апроксимують деякою функціональною залежністю. При такій апроксимації для визначення невідомих параметрів використовують, наприклад, метод найменших квадратів.

Нехай коефіцієнти теплопровідності кожної складової циліндра задані в діапазоні температури $[t_p, t_k]$. При проведенні теоретичних досліджень їх будемо описувати доволі поширеними лінійними залежностями $\lambda_t^{(i)} = a_i t_i + b_i$. Параметри a_i та b_i є невідомими. За методом найменших квадратів їх підбираємо так, щоб сума квадратів різниць їх експериментальних і теоретичних значень була найменшою.

Коефіцієнти теплопровідності складових циліндра подаємо у вигляді $\lambda_t^{(i)}(t_i) = \lambda_{t_0}^{(i)} \lambda_t^{(i)*}(T_i)$, де величини $\lambda_{t_0}^{(i)}$ мають розмірність коефіцієнта теплопровідності, а $\lambda_t^{(i)*}$ – безрозмірна функція безрозмірної температури $T_i = t_i/t_k$, $i=1,2$ (тут за відлікову вибрана температура t_k). При лінійній залежності коефіцієнтів теплопровідності від температури такі подання матимуть вигляд

$$\lambda_t^{(i)}(t_i) = \lambda_{t_0}^{(i)} (1 + k_i (T_i - T_p)), \quad (4)$$

де $T_p = t_p/t_k$, $k_i = a_i t_k / (a_i t_p + b_i)$, а $\lambda_{t_0}^{(i)} = a_i t_p + b_i$.

Для записування задачі (1)–(3) у безрозмірному вигляді виберемо за характерний розмір деяке значення l_0 і введемо безрозмірну координату $z = \hat{z}/l_0$.

У результаті обезрозмірення математична модель (1)–(3) набуде вигляду

$$\frac{d}{dz} \left(\lambda_t^{(i)*}(T_i) \frac{dT_i}{dz} \right) = 0, \quad z_i < z < z_{i+1}, \quad i=1,2, \quad (5)$$

$$T_1|_{z=z_1} = T_{\text{вн}}, \left[\lambda_t^{(2)*}(T_2) \frac{dT_2}{dz} + Bi(T_2 - T_c) + Sk(T_2^4 - T_c^4) \right]_{z=z_3} = 0, \quad (6)$$

$$T_1|_{z=z_2} = T_2|_{z=z_2}, \lambda_t^{(1)*}(T_1) \frac{dT_1}{dz} \Big|_{z=z_2} = K_\lambda \lambda_t^{(2)*}(T_2) \frac{dT_2}{dz} \Big|_{z=z_2} + Ki_0, \quad (7)$$

де

$Ki_0 = \frac{q_0 l_0}{t_k \lambda_{t_0}^{(1)}}$, – критерій Кірпічова; $Bi = \frac{\alpha l_0}{\lambda_{t_0}^{(2)}}$ – критерій Біо; $Sk = \frac{\varepsilon \sigma t_k^3 l_0}{\lambda_{t_0}^{(2)}}$ – критерій

Старка; $T_c = t_c / t_k$; $K_\lambda = \lambda_{t_0}^{(2)} / \lambda_{t_0}^{(1)}$.

3. Побудова розв'язку математичної моделі. З метою побудови розв'язку задачі (5)–(7) введемо змінні Кірхгофа

$$\theta_i = \int_{T_p}^{T_i} \lambda_i^{(i)*}(T_i) dT_i, \quad i = 1, 2, \quad (8)$$

Як наслідок, з задачі (5)–(7) отримаємо задачу на змінні θ_i

$$\frac{d^2 \theta_i}{dz^2} = 0, \quad z_i < z < z_{i+1}, \quad i = 1, 2, \quad (9)$$

$$\theta_1|_{z=z_1} = \theta_{\text{вн}}, \quad \left[\frac{d\theta_2}{dz} + Bi(T_2(\theta_2) - T_c) + Sk(T_2^4(\theta_2) - T_2^4) \right]_{z=z_3} = 0, \quad (10)$$

$$T_1(\theta_1)|_{z=z_2} = T_2(\theta_2)|_{z=z_2}, \quad \left. \frac{d\theta_1}{dz} \right|_{z=z_2} = K_\lambda \left. \frac{d\theta_2}{dz} \right|_{z=z_2} + Ki_0, \quad (11)$$

де $\theta_{\text{вн}} = \int_{T_p}^{T_{\text{вн}}} \lambda_i^{(i)*}(T_i) dT_i = (T_{\text{вн}} - T_p) + \frac{k_1}{2}(T_{\text{вн}} - T_p)^2$.

Бачимо, що в результаті застосування перетворення Кірхгофа з нелінійної задачі теплопровідності (5)–(7) отримали простішу задачу на змінні Кірхгофа, в якій нелінійності зосередилися у виразах температури $T_i(\theta_i)$ на межі контакту складових циліндра та поверхні $z=z_3$. За лінійної залежності коефіцієнтів теплопровідності складових від температури (4), як наслідок з формул (8), для знаходження виразів залежності температур складових від змінних Кірхгофа отримаємо рівняння

$$\theta_i = \int_{T_p}^{T_i} \lambda_i^{(i)*}(T_i) dT_i = (T_i - T_p) + \frac{k_i}{2}(T_i - T_p)^2, \quad (12)$$

з яких

$$T_i(\theta_i) = \frac{\sqrt{1 + 2k_i \theta_i} - 1}{k_i} + T_p. \quad (13)$$

Зауважимо, що вибраний перед коренем квадратним у виразах $T_i(\theta_i)$ знак забезпечує їх фізичну коректність.

Проінтегрувавши рівняння (9), знаходимо, що

$$\frac{d\theta_i}{dz} = C_{i1}; \quad \theta_i = C_{i1}(z - z_i) + C_{i2}, \quad i = 1, 2, \quad (14)$$

Використовуючи умови (10), (11), знаходимо сталі інтегрування C_{ij} , ($i, j = 1, 2$).

При цьому, замість умови рівності температур (перша з умов (11)) використовуємо рівносильну їй умову, яка наведена в роботі [3]

$$(\theta_2 - \theta_1)|_{z=z_2} = \frac{k_2 - k_1}{2}(T_1(\theta_1) - T_p)^2 \Big|_{z=z_2}, \quad (15)$$

де $T_1(\theta_1)$ має вигляд (13).

З першої умови (10) та другої умови (11) знаходимо, що

$$C_{11} = K_\lambda C_{21} + Ki_0, \quad C_{12} = (T_{\text{вн}} - T_p) + \frac{k_1}{2} (T_{\text{вн}} - T_p)^2.$$

З другої умови (10) та умови (15) отримуємо рівняння для визначення сталої C_{21}

$$C_{21} + Bi \left(\frac{\sqrt{1 + 2k_2 (C_{21} (z_3 - z_2)) + C_{22} - 1}}{k_2} + T_p - T_c \right) + Sk \left(\left(\frac{\sqrt{1 + 2k_2 (C_{21} (z_3 - z_2)) + C_{22} - 1}}{k_2} + T_p \right)^4 - T_c^4 \right) = 0, \quad (16)$$

де

$$C_{22} = (K_\lambda C_{21} + Ki_0)(z_2 - z_1) + (T_{\text{вн}} - T_p) + \frac{k_1}{2} (T_{\text{вн}} - T_p)^2 + \frac{k_2 - k_1}{2} \left(\frac{\sqrt{2k_1 (K_\lambda C_{21} + Ki_0)(z_2 - z_1) + (k_1 (T_c - T_p) + 1)^2 - 1}}{k_1} \right)^2. \quad (17)$$

Аналітичного розв'язку рівняння (16) не має. Для його розв'язання при конкретних значеннях вхідних параметрів використовуємо пакет програм аналітичних перетворень. Зауважимо, що в результаті розв'язування рівняння (16) отримано чотири значення сталої інтегрування C_{21} , два з яких комплексні. З двох дійсних вибрано той, який забезпечує фізично коректний розподіл температури.

4. Визначення розподілу температури в складовому нетермочутливому циліндрі. Обезрозмірена математична модель для визначення температури в аналогічному нетермочутливому циліндрі має вигляд

$$\frac{d^2 T_{in}}{dz^2} = 0, \quad z_i < z < z_{i+1}, \quad i = 1, 2, \quad (18)$$

$$T_{1n}|_{z=z_1} = T_{\text{вн}}, \quad \left[\frac{dT_{2n}}{dz} + Bi_n (T_{2n} - T_c) + Sk_n (T_{2n}^4 - T_c^4) \right]_{z=z_3} = 0, \quad (19)$$

$$T_{1n}|_{z=z_2} = T_{2n}|_{z=z_2}, \quad \left. \frac{dT_{1n}}{dz} \right|_{z=z_2} = K_{\lambda n} \left. \frac{dT_{2n}}{dz} \right|_{z=z_2} + Ki_{0n}. \quad (20)$$

Тут

$$Ki_{0n} = \frac{q_0 l_0}{\lambda_m^{(1)} t_k} - \text{критерій Кірпічова}; \quad Bi_n = \frac{\alpha l_0}{\lambda_m^{(2)}} - \text{критерій Біо}; \quad Sk_n = \frac{\varepsilon \sigma t_k^3 l_0}{\lambda_m^{(2)}} - \text{критерій}$$

Старка; $T_{in} = t_{in}/t_k$; $K_{\lambda n} = \lambda_m^{(2)}/\lambda_m^{(1)}$.

З задачі (18)–(20) знаходимо, що

$$T_{1n} = \bar{C}_{11} (z - z_1) + \bar{C}_{12}, \quad T_{2n} = \bar{C}_{21} (z - z_2) + \bar{C}_{22}, \quad (21)$$

де

$$\bar{C}_{11} = K_{\lambda n} \bar{C}_{21} + Ki_{0n}, \quad \bar{C}_{12} = T_{\theta n}, \quad \bar{C}_{22} = (K_{\lambda n} \bar{C}_{21} + Ki_{0n})(z_2 - z_1) + T_{\theta n},$$

а рівняння 4-го степеня для знаходження сталої \bar{C}_{21} має вигляд

$$\begin{aligned} & \bar{C}_{21} + Bi_n (\bar{C}_{21} (z_3 - z_2) + \bar{C}_{22} - T_c) + \\ & + Sk_n \left((\bar{C}_{21} (z_3 - z_2 + K_{\lambda n} (z_2 - z_1)) + Ki_{0n} (z_2 - z_1) + T_c)^4 - T_c^4 \right) = 0. \end{aligned}$$

5. Визначення температурних напружень. Ненульові компоненти тензора напружень $\hat{\sigma}_{yy} = \hat{\sigma}_{zz} = \hat{\sigma}(\hat{z})$, що визначають термопружний стан двоскладового циліндра, обчислюються за формулою [1]

$$\hat{\sigma}(\hat{z}) = \frac{E(\hat{z}, t)}{1 - \nu(\hat{z}, t)} \left(\frac{(\hat{A}\hat{N}_t - \hat{B}\hat{M}_t) \cdot \hat{z} + \hat{A}\hat{M}_t - \hat{C}\hat{N}_t}{\hat{A}^2 - \hat{B}\hat{C}} - \Phi(\hat{z}, t) \right), \quad (22)$$

де $\{E(\hat{z}, t), \nu(\hat{z}, t), \alpha_i(\hat{z}, t), \Phi(\hat{z}, t)\} = \begin{cases} \{E_1(t_1), \nu_1(t_1), \alpha_i^{(1)}(t_1), \Phi_1(\hat{z}, t_1)\}, & \hat{z}_1 \leq \hat{z} < \hat{z}_2, \\ \{E_2(t_2), \nu_2(t_2), \alpha_i^{(2)}(t_2), \Phi_2(\hat{z}, t_2)\}, & \hat{z}_2 \leq \hat{z} \leq \hat{z}_3, \end{cases}$

$$\hat{A} = \sum_{i=1}^2 \int_{\hat{z}_i}^{\hat{z}_{i+1}} \frac{\hat{z} \cdot E_i(t_i)}{1 - \nu_i(t_i)} d\hat{z}; \quad \hat{B} = \sum_{i=1}^2 \int_{\hat{z}_i}^{\hat{z}_{i+1}} \frac{E_i(t_i)}{1 - \nu_i(t_i)} d\hat{z}; \quad \hat{C} = \sum_{i=1}^2 \int_{\hat{z}_i}^{\hat{z}_{i+1}} \frac{\hat{z}^2 \cdot E_i(t_i)}{1 - \nu_i(t_i)} d\hat{z};$$

$$\hat{N}_t = \sum_{i=1}^2 \int_{\hat{z}_i}^{\hat{z}_{i+1}} \frac{E_i(t_i) \cdot \Phi(t_i)}{1 - \nu_i(t_i)} d\hat{z}; \quad \hat{M}_t = \sum_{i=1}^2 \int_{\hat{z}_i}^{\hat{z}_{i+1}} \frac{E_i(t_i) \cdot \Phi(t_i)}{1 - \nu_i(t_i)} \hat{z} d\hat{z},$$

а $E_i(t_i), \nu_i(t_i), \alpha_i(t_i)$ – залежні від температури модулі пружності, коефіцієнти Пуассона та температурні коефіцієнти лінійного розширення складових циліндра.

При цьому ці напруження задовольняють умови

$$\int_{\hat{z}_1}^{\hat{z}_3} \hat{\sigma}(\hat{z}) d\hat{z} = 0; \quad \int_{\hat{z}_1}^{\hat{z}_3} \hat{z} \cdot \hat{\sigma}(\hat{z}) d\hat{z} = 0.$$

Якщо термомеханічні характеристики складових навести у вигляді $\chi_i(t) = \chi_0^{(i)} \chi_i^*(T)$, де $\chi_0^{(i)}$ – розмірні величини, що дорівнюють значенню відповідної характеристики при температурі t_p (опорні значення), а величини $\chi_i^*(T_i)$ – безрозмірні величини від безрозмірних температур T_i , то

$$\nu_i(t_i) = \nu_0^{(i)} \nu_i^*(T_i), \quad \alpha_{ii}(t_i) = \alpha_{i0}^{(i)} \alpha_{ii}^*(T_i), \quad E_i(t_i) = E_0^{(i)} E_i^*(T_i).$$

Формулу для визначення напружень (22) у безрозмірних величинах запишемо

$$\sigma(z) = \frac{E(z, t)}{1 - \nu(z, t)} \left(\frac{(AN_t - BM_t)z + AM_t - CN_t}{A^2 - BC} - \Phi(z, T) \right), \quad (23)$$

де

$$\sigma(z) = \frac{\hat{\sigma}(\hat{z})}{E_0^{(1)} \alpha_{i0}^{(1)} t_k}; \quad \Phi_i^*(T_i) = (T_i - T_p) + \frac{k_\alpha^{(i)}}{2} (T_i - T_p)^2;$$

$$\Phi(z, T) = \Phi_1^*(T_1) + \left(\frac{\alpha_{i0}^{(2)}}{\alpha_{i0}^{(1)}} \Phi_2^*(T_2) - \Phi_1^*(T_1) \right) S_+(z - z_2); \quad S_+(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi > 0, \\ 0, & \xi \leq 0; \end{cases}$$

$$A = \sum_{i=1}^2 \frac{E_0^{(i)}}{E_0^{(1)}} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{z E_i^*(T_i)}{1 - \nu_i(T_i)} dz; \quad B = \sum_{i=1}^2 \frac{E_0^{(i)}}{E_0^{(1)}} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{E_i^*(T_i)}{1 - \nu_i(T_i)} dz; \quad C = \sum_{i=1}^2 \frac{E_0^{(i)}}{E_0^{(1)}} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{z^2 E_i^*(T_i)}{1 - \nu_i(T_i)} dz;$$

$$N_t = \sum_{i=1}^2 \frac{E_0^{(i)}}{E_0^{(1)}} \frac{\alpha_{i0}^{(i)}}{\alpha_{i0}^{(1)}} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{E_i^*(T_i) \Phi_i^*(T_i)}{1 - \nu_i(T_i)} dz; \quad M_t = \sum_{i=1}^2 \frac{E_0^{(i)}}{E_0^{(1)}} \frac{\alpha_{i0}^{(i)}}{\alpha_{i0}^{(1)}} \int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{E_i^*(T_i) \Phi_i^*(T_i)}{1 - \nu_i(T_i)} z dz.$$

6. Часткові випадки. Розглянемо випадок, коли коефіцієнти теплопровідності та механічні характеристики складових нетермочутливого циліндра дорівнюють опорним значенням відповідних складових термочутливого. Тоді розподіл температури матиме вигляд (21), де $\lambda_{in}^{(i)} = \lambda_{i0}^{(i)}$, $i = 1, 2$.

Коефіцієнти Пуассона, теплового розширення та модулі Юнга складових такого циліндра

$$\nu_i = \nu_0^{(i)}, \quad \alpha_{ii} = \alpha_{i0}^{(i)}, \quad E_i = E_0^{(i)}, \quad i = 1, 2,$$

а формула для обчислення напружень набуде вигляду

$$\sigma(z) = \frac{E(z)}{1 - \nu(z)} \left(\frac{(AN_t - BM_t)z + AM_t - CN_t}{A^2 - BC} - \Phi(z) \right), \quad (24)$$

$$\text{де } \{E(z), \nu(z), \Phi(z)\} = \begin{cases} \{1, \nu_0^{(1)}, T_{1n} - T_p\}, & z_1 \leq z < z_2, \\ \left\{ \frac{E_0^{(2)}}{E_0^{(1)}}, \nu_0^{(2)}, \frac{\alpha_{i0}^{(2)}}{\alpha_{i0}^{(1)}} (T_{2n} - T_p) \right\}, & z_2 \leq z \leq z_3, \end{cases}$$

$$A = \sum_{i=1}^2 \frac{E_0^{(i)}}{E_0^{(1)}} \frac{z_{i+1}^2 - z_i^2}{2(1 - \nu_0^{(i)})}; \quad B = \sum_{i=1}^2 \frac{E_0^{(i)}}{E_0^{(1)}} \frac{z_{i+1} - z_i}{1 - \nu_0^{(i)}}; \quad C = \sum_{i=1}^2 \frac{E_0^{(i)}}{E_0^{(1)}} \frac{z_{i+1}^3 - z_i^3}{3(1 - \nu_0^{(i)})};$$

$$N_t = \sum_{i=1}^2 \frac{E_0^{(i)}}{E_0^{(1)}} \frac{\alpha_{i0}^{(i)}}{\alpha_{i0}^{(1)}} \frac{\bar{C}_{i1} (z_{i+1} - z_i)^2 + (\bar{C}_{i2} - T_p)(z_{i+1} - z_i)}{1 - \nu_0^{(i)}};$$

$$M_t = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \frac{E_0^{(i)}}{E_0^{(1)}} \frac{\alpha_{i0}^{(i)}}{\alpha_{i0}^{(1)}} \frac{1}{1 - \nu_0^{(i)}} \left((z_{i+1} - z_i)^3 \bar{C}_{i1} / 3 + (z_{i+1} - z_i)^2 (\bar{C}_{i1} z_i + \bar{C}_{i2} - T_p) / 2 + \right. \\ \left. + z_i (z_{i+1} - z_i) (\bar{C}_{i2} - T_p) \right).$$

У випадку середньоінтегральних значень коефіцієнтів теплопровідності, тобто коли

$$\lambda_{in}^{(i)} = \lambda_{ic}^{(i)} = \frac{1}{T_k - T_p} \int_{T_p}^{T_k} (\lambda_{i0}^{(i)} (1 + k_i (T_i - T_p))) dT = \lambda_{i0}^{(i)} \left(1 + \frac{k_i}{2} (T_i - T_p) \right), \quad i = 1, 2,$$

матимемо розподіл температури (21), де

$$Ki_{0n} = Ki_0 \cdot \lambda_0^{(1)} / \lambda_c^{(1)}, \quad K_\lambda^n = \lambda_{ic}^{(2)} / \lambda_{ic}^{(1)}, \quad Bi_n = Bi \cdot \lambda_{i0}^{(2)} / \lambda_{ic}^2, \quad Sk_n = Sk \cdot \lambda_{i0}^{(2)} / \lambda_{ic}^2.$$

Термопружні характеристики набудуть вигляду

$$v_i = v_c^{(i)} = \frac{1}{T_k - T_p} \int_{T_p}^{T_k} v_i(T_i) dT_i; \quad \alpha_{ii} = \alpha_{ic}^{(i)} = \frac{1}{T_k - T_p} \int_{T_p}^{T_k} \alpha_{ii}(T_i) dT_i;$$

$$E_i = E_c^{(i)} = \frac{1}{T_k - T_p} \int_{T_p}^{T_k} E_i(T_i) dT_i; \quad i = 1, 2.$$

Формула для обчислення напружень матиме вигляд (24), у якій опорні значення механічних характеристик слід замінити на середньоінтегральні.

7. Числові дослідження. Досліджували вплив товщини складових циліндра та променевої складової в крайовій умові конвективно-променевого теплообміну на величину та характер розподілу температури і напружень залежно від вхідних параметрів.

Експериментально задані коефіцієнти теплопровідності та термомеханічні характеристики проапроксимували з використанням методу найменших квадратів лінійними залежностями (4). При цьому отримали, що для вольфраму

$$\lambda_{i1} = 161.72(1 - 0.407(T_1 - T_p)), \quad v_1 = 0.29(1 + 0.05172(T_1 - T_p)),$$

$$\alpha_{i1} = 4.43 \cdot 10^{-6}(1 + 0.10457(T_1 - T_p)), \quad E_1 = 4.04 \cdot 10^{11}(1 - 0.2277(T_1 - T_p)),$$

для сталі

$$\lambda_{i2} = 32.757(1 - 0.337(T_2 - T_p)), \quad v_2 = 0.24(1 + 0.291(T_2 - T_p)),$$

$$\alpha_{i2} = 12.47 \cdot 10^{-6}(1 + 0.294(T_2 - T_p)), \quad E_2 = 2.197 \cdot 10^{11}(1 - 0.278(T_2 - T_p)).$$

Координати меж складових циліндра прийняли $z_1 = 0$, $z_2 = \{0.2, 0.5, 0.8\}$, $z_3 = 1$, причому за характерний розмір взяли значення $l_0 = z_3$. Значення безрозмірних температур – $T_p = 1/3$, $T_k = 1$, $T_{вн} = T_c = 1/3$, а критерій Кірпічова – $Ki_0 = 0.3$.

Для дослідження впливу наявності/відсутності конвективного чи променевого теплообміну у другій складовій циліндра на розподіл температури та напружень критерії Біо та Старка – $Bi = 5$, $Sk = 0$ (рис.2а, рис.2в), $Bi = 5$, $Sk = 5$ (рис.2б, рис.2г).

Характеристики матеріалів взято в діапазоні температур 300 ÷ 900 К.

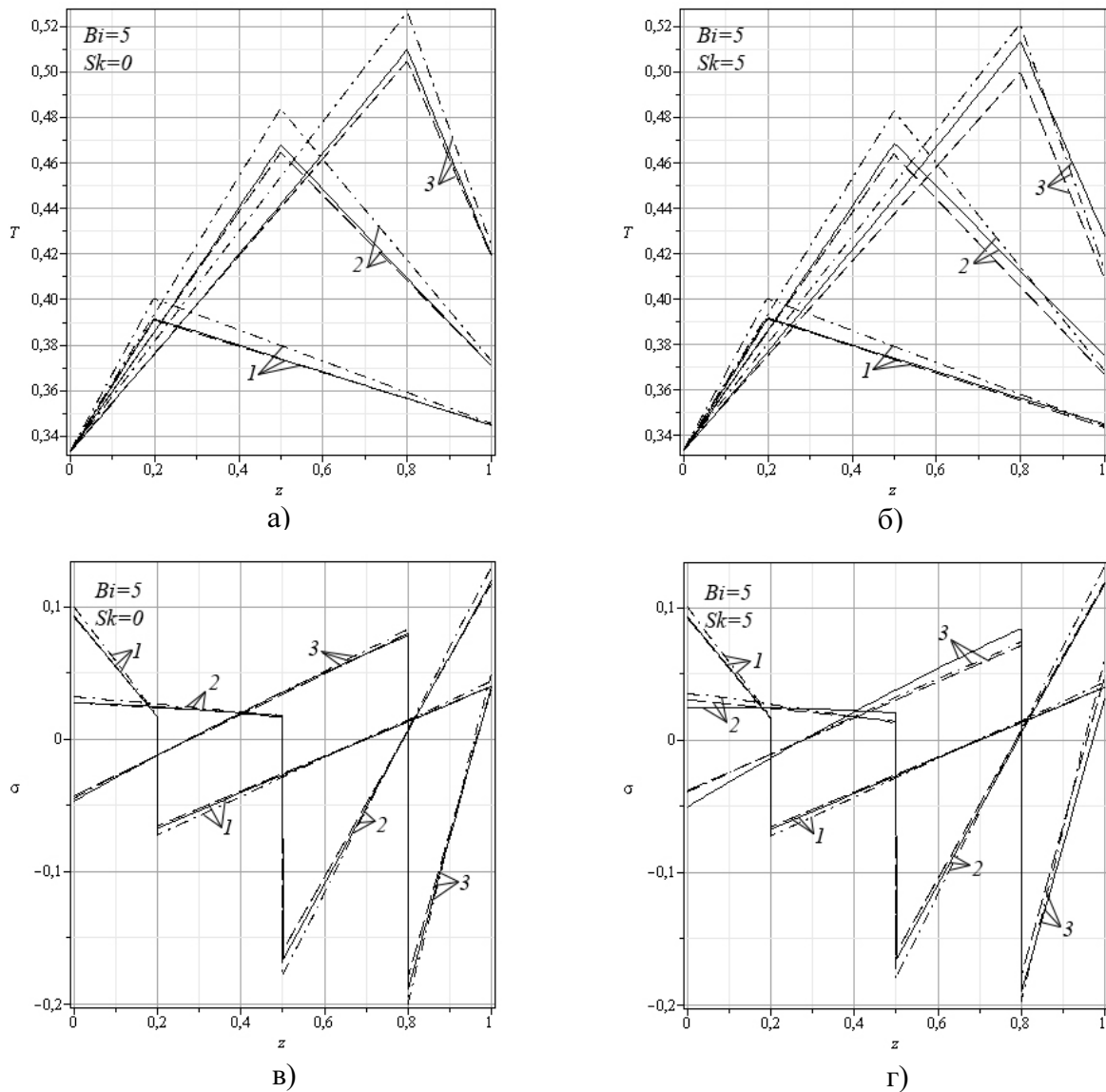


Рисунок 2. Розподіли температури (а, б) та напружень (в, г) у двоскладовому термочутливому циліндрі

Figure 2. The temperature (а, б) and stresses (в, г) distribution in a two-component thermosensitive cylinder

На рис.2 суцільна лінія – термочутливий циліндр, штрихова – нетермочутливий циліндр за опорних значень термомеханічних характеристик, штрих-пунктирна – нетермочутливий циліндр за середньоінтегральних значень термомеханічних характеристик.

Максимальні розбіжності між температурами та напруженнями у термочутливому та нетермочутливому циліндрах наведено в табл.1.

Таблиця 1

Максимальні розбіжності температур та напружень

<i>Bi</i>	<i>Sk</i>	ТЕМПЕРАТУРИ											
		Максимальні розбіжності, % (опорні характеристики)						Максимальні розбіжності, % (середньоінтегральні характеристики)					
		$z_2 = 0.2$		$z_2 = 0.5$		$z_2 = 0.8$		$z_2 = 0.2$		$z_2 = 0.5$		$z_2 = 0.8$	
		скл.1	скл.2	скл.1	скл.2	скл.1	скл.2	скл.1	скл.2	скл.1	скл.2	скл.1	скл.2
5	0	0.16	0.18	0.74	0.76	1.08	1.11	2.02	2.10	3.35	3.38	3.18	3.18
5	5	0.17	0.38	1.05	2.35	2.66	4.40	2.00	2.08	3.01	3.04	1.45	3.47
НАПРУЖЕННЯ													

5	0	1.48	1.42	5.09	3.22	7.65	4.12	5.09	7.92	15.6	7.9	4.67	6.27
5	5	0.84	1.23	32.8	1.91	15.5	48.1	8.24	8.12	46.2	9.28	12.9	86.1

Коефіцієнт теплопровідності сталі є майже у 5 разів меншим, ніж вольфраму, а тому температура другої складової по товщині змінюється не так інтенсивно, як по товщині першої, незважаючи на те, що на плоскій поверхні відбувається колективно-променевий теплообмін із зовнішнім середовищем.

З іншого боку, наявність променевої складової викликає збільшення значення безрозмірної температури на поверхні $z=z_3$, а також збільшує максимальні розбіжності температур між термочутливим та нетермочутливим за опорних значень коефіцієнта теплопровідності циліндрами та напружень за середньоінтегральних значень коефіцієнта теплопровідності.

Зазначимо, що максимальні розбіжності в напруженнях можуть бути досить істотними за певних вхідних даних і навіть перевищувати 30%. Ці розбіжності спостерігаються або на межі контакту складових, де наявні джерела тепла, або на поверхні $z=z_3$.

Висновки. Побудовано нелінійну математичну модель розподілу температури в двоскладовому термочутливому циліндрі з нагрівальним елементом між складовими, коли на обмежуючій поверхні першої складової підтримується стала температура, а через другу плоску обмежуючу поверхню відбувається конвективно-променевий теплообмін із зовнішнім середовищем та знайдено її розв'язок.

Визначено температурні напруження, спричинені знайденим нерівномірним розподілом температури.

Досліджено вплив термочутливості матеріалів складових, товщини, а також наявності/відсутності променевої складової в умові конвективно-променевого теплообміну на величину й характер розподілу температури та напружень.

Встановлено, що врахування термочутливості матеріалів складових є вкрай важливим, оскільки максимальні розбіжності напружень можуть набувати досить великих значень. Однак, якщо потрібно зробити експрес-оцінювання розподілів температур та напружень за умов розглянутого нагріву та композиції матеріалів, то варто використовувати опорні значення термомеханічних характеристик.

Conclusions. The nonlinear mathematical model of temperature distribution in a two-component thermosensitive cylinder based on the thermo sensitive body model is defined. It occurs under conditions of complex heat transfer on flat limiting surfaces, in particular the constant temperature from one side cylinder and the convective-radial heat transfer with the environment of constant temperature from another. There are also evenly distributed heat sources on the adjacent surface of the cylinder' components that produce thermal flow.

The temperature tensions which were caused by defined temperature distribution have been found.

The influence of the thermosensitivity of the material components, the thickness and the radial part in convective-radial condition on the nature and extent of temperature and stresses distribution have been investigated.

It was established, that it is of great importance to take into account the thermosensitivity of materials, as the maximal differences between the thermosensitive and non-thermosensitive cylinders with basic and average integral values can reach the large values. However, in order to make a rapid assessment of the temperature and stresses distribution under conditions of the above complex heating and composition of the materials, it is necessary to use the basic values of thermomechanical characteristics.

Список використаної літератури

1. Бурак, Я.Й. Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл; під заг.ред. Я.Й. Бурака, Р.М. Кушніра. Том 3. Термопружність термочутливих тіл [Текст] / Р.М. Кушнір, В.С. Попович. – Львів: СПОЛЮМ, 2009. – 412 с.
2. Карслоу, Г. Теплопроводность твердых тел [Текст] / Г. Карслоу, Д. Егер. – М.: Наука, 1964. – 487 с.
3. Кушнір, Р.М. Про визначення усталеного термопружного стану багатошарових структур за високотемпературного нагрівання [Текст] / Р.М. Кушнір, В.С. Попович // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2013, №3. – С.42–47.
4. Лыков, А.В. Теория теплопроводности [Текст] / А.В. Лыков. – М.: Высш. шк., 1967. – 599 с.
5. Kushnir, R.M., Heat Conduction Problems of Thermosensitive Solids under Complex Heat Exchange [Text] / R.M. Kushnir, V.S. Popovych. – Basic Research , V.S. Vikhrenko (ed.). In Tech, 2011. – P.131–154.
6. Kushnir, R.M. Thermoelastic State of Layered Thermosensitive Bodies of Revolution for the Quadratic Dependence of the Heat-Conduction Coefficients [Text] / R.M. Kushnir, Yu.B. Protsiuk. – Materials Science, 2010. – Vol.46. – No.1. – P.1–15.
7. Noda, N. Thermal Stresses in Materials with Temperature-Dependent Properties [Text] / N. Noda, Hetnarsk iR. B. (ed.). – Thermal Stresses I, 1986. – P.391–483.
8. Protsyuk, Yu.B. Static Thermoelasticity Problems for Layered Thermosensitive Plates with Cubic Dependence of the Coefficients of Heat Conductivity on Temperature [Text] / Yu. B. Protsyuk. – Journal of Mathematical Sciences, 2012. – Vol.181. – No.4. – P.481–496.

Отримано 15.12.2014