

УДК 539.3

К. Довбня, докт. фіз.-мат. наук; Н. Шевцова

Донецький національний університет

НАПРУЖЕНИЙ СТАН ОРТОТРОПНОЇ ОБОЛОНКИ З ДВОМА КОЛІНЕАРНИМИ ТРІЩИНАМИ РІЗНОЇ ДОВЖИНИ ЗА ДІЇ ЗГИНАЛЬНОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА РОЗРІЗАХ

Резюме. Розглянуто задачу про напружений стан пологої ортотропної оболонки двоякої кривини з двома колінеарними прямолінійними тріщинами різної довжини, коли до їх берегів прикладене самозрівноважене згинальне навантаження. Задачу сформульовано у двовимірній постановці на основі моделі контакту вздовж лінії на одній з лицьових поверхонь оболонки. Система сингулярних інтегральних рівнянь розв'язана чисельно за допомогою методу механічних квадратур. Досліджено вплив кривини оболонки, взаємного розміщення колінеарних тріщин, механічних властивостей матеріалу в околі вершин тріщин на коефіцієнти інтенсивності моментів. Отримані результати співпадають з відомими в літературі частинними розв'язками.

Ключові слова: коефіцієнти інтенсивності моментів, колінеарні тріщини, згин, контакт берегів, ортотропна оболонка двоякої кривини.

K. Dovbnya, N. Shevtsova

THE STRESS STATE OF ORTHOTROPIC SHELL WITH TWO COLLINEAR CRACKS OF DIFFERENT LENGTHS UNDER BENDING LOAD ON THE LINES

Summary. In this paper we present the analytically and numerically study of the problem of the stress state of the shallow orthotropic dual curvature shell with two collinear rectilinear through thickness cracks of different lengths, when applied to their shores self-balanced load. The thin shells are widely used in hydraulic engineering, aerospace engineering, shipbuilding and aircraft construction, engineering and others areas of modern construction. By using of advanced composite materials the strength of structure is increased and the weight is reduced. As an example, the use of carbon plastic in the construction of Boeing and Airbus aircrafts; the housing of water version «Formula 1» is reinforced with carbon fibers; details of the internal combustion engine (pistons, connecting rods), and others. Reliability and durability of constructions like shells depends on the availability of various types of defects that occur at the stage of the manufacture of parts yet and avoid this impossible. So analysis of stress state of orthotropic dual curvature shell with closure cracks is an important task of mechanics.

The problem presented in this paper was formulated in a two-dimensional statement by means of the contact model along a line in one of the facial surfaces of a shell (internal or external). The problem statement is reduced to the solution of system of two integral equations. The independent variables in the equations are leaps of rotation angles of cracks, while leaps of movements on the lines of cracks are functions which are dependent on them. The system of singular integral equations is solved numerically using the method of mechanical quadratures. Was investigated the influence of the shell curvature, mutual location of collinear cracks, crack length, the mechanical properties of the orthotropic material in the vicinity of the crack tip on the stress intensity factors and moment intensity factors. In particular cases of the problem was obtained results for cylindrical, spherical and pseudo spherical shells. In case when cracks have same length in spherical shell was obtained known in the literature results.

Key words: moment intensity factors, collinear cracks, bend, contact threshold contact, orthotropic dual curvature shell.

Постановка проблеми. Ортотропні оболонки та пластини, виготовлені з композитних матеріалів, як елементи сучасних конструкцій, знаходять широке застосування в різних галузях машинобудування завдяки їх великій міцності та відносно малій вазі. Величина несучої здатності споруд залежить від наявності різного

типу дефектів, більшість із яких – конструктивного походження, й уникнути цього практично неможливо.

Під час експлуатації конструкцій важливо знати, як взаємне розміщення тріщиноподібних дефектів впливає на міцність та механічні властивості деталей. У зв'язку з цим вивчення напруженого стану ортотропних оболонок з тріщинами є важливою задачею механіки руйнування.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У більшості робіт вітчизняних та зарубіжних авторів, присвячених подібним задачам для пластин та оболонок, вважалося, що береги тріщин не контактують під час згину [1–3]. Перші дослідження впливу закриття тріщин стосувалися здебільшого пластин, яким присвячені роботи В.І. Моссаковського, П.А. Загубиженка, В.В. Панасюка, Б.Л. Лозовського, В.К. Опанасовича [4–6] та ін.

Завдання про згин пластин та оболонок ускладнюється нерівномірним розподілом напружень по товщині і, як наслідок, неповною по товщині невідомою зоною взаємодії поверхонь тріщини, що досить ускладнює задачу в математичному плані.

Частина дослідників пішла іншим шляхом. Розв'язок задачі вони подають у вигляді суперпозиції двох розв'язків: плоскої задачі теорії пружності та задачі згину, де використали класичну теорію згину пластин. Причому вони вважали, що береги тріщини контактують по лінії (лінійчаста модель) з невідомим контактним зусиллям. У такій постановці D.P. Jones, J.L. Swedlow [7] дослідили задачу за допомогою числового методу скінченних елементів. Трохи пізніше Young and Sun [8] повторили ці результати. Пізніше іншими дослідниками було розв'язано багато задач для пластин за різної геометрії тріщин.

Дослідження оболонок, ослаблених розрізами, береги яких контактують при згині, почали розвиватися протягом останніх двох десятиріч. У роботі [9] отримано інтегральні рівняння згину пологої оболонки з тріщиною, що закривається, і обґрунтовано можливість використання моделі контакту вдовж лінії. Поряд з вітчизняними авторами вивченням закриття тріщин при згині займалися також іноземні автори – R. Liu, T. Zhang, X.J. Wu, C.H. Wang, R.G. Bathgate [10–12], де вивчається вплив закриття тріщин у сферичних і циліндричних оболонках, а також оболонках, що знаходяться під дією внутрішнього або зовнішнього тиску.

Зазначимо, що більшість відомих розв'язків стосується ізотропних пластин та оболонок, рідше – спеціально-ортотропних (вважається, що модуль зсуву не є незалежним параметром, а визначається через модулі Юнга та коефіцієнти Пуассона за допомогою співвідношення, характерного для ізотропного матеріалу). Це дозволяє звести задачу до розв'язання системи рівнянь, що відповідають ізотропній оболонці й використати відомий розв'язок.

У роботах Довбні К.М., Шевцової Н.А. [13–16] досліджено оболонки двоякої кривини з однією, двома паралельними та двома колінеарними тріщинами однакової довжини за умов згину.

Мета роботи. Дослідити вплив закриття колінеарних тріщин різної довжини, до берегів яких прикладене самозрівноважене згинальне навантаження, на напружений стан ортотропної оболонки двоякої кривини.

Постановка задачі. Розглянемо пологу ортотропну оболонку двоякої кривини сталої товщини h , яка містить систему двох наскрізних колінеарних тріщин, довжини $2l_p$, ($p=1,2$), розміщених уздовж осі Ox (рис.1). До країв тріщин прикладене рівномірно розподілене згинальне навантаження $M^* = const$. Решта поверхонь оболонки, включаючи безмежно віддалені точки, вільні від навантажень. Рівняння контурів тріщин мають вигляд

$$L_p : x = l_p (\tau \mp \gamma_p), y = 0, |\tau| \leq 1, \quad (1)$$

де $\gamma_p = \frac{d}{l_p}, (p=1,2)$.

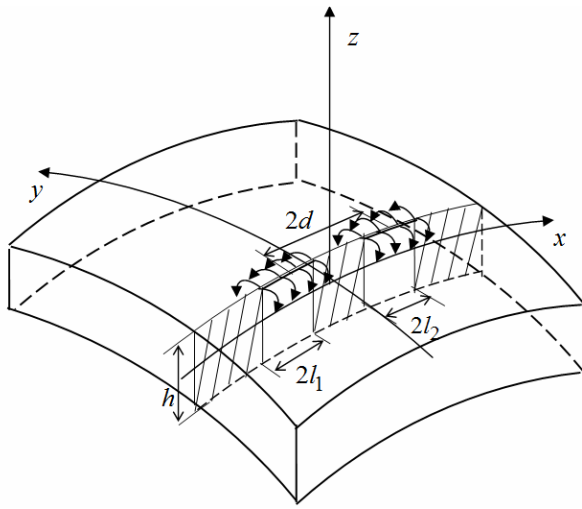


Рисунок 1. Згин пологої оболонки з двома колінеарними тріщинами

Figure 1. Bending of the shallow shell with two collinear cracked

Контакт берегів розрізу інтерпретуємо як змикання його кромки в одній із лицьових поверхонь оболонки $z = \frac{h}{2}$ чи $z = -\frac{h}{2}$. Внаслідок симетрії задачі граничні умови контакту на лінії розрізу мають вигляд [17]

$$\begin{aligned} [v]_{L_p} &= \frac{h}{2} [\theta_2]_{L_p} \Big| \geq 0, \\ M_2 \Big|_{L_p} &= -M^* - \frac{h}{2} T_2 \Big|_{L_p} \operatorname{sgn} [\theta_2]_{L_p}, \\ T_2(x) \Big|_{L_p} &\leq 0, y = 0, x \in [-l_p, l_p], p = 1, 2 \end{aligned} \quad (2)$$

Тут $[v]_{L_p}$ – стрибок переміщення на серединній поверхні оболонки; $[\theta_2]_{L_p}$ – стрибок кута повороту нормалі ($\theta_2 = -\frac{\partial w}{\partial y}$); T_1, T_2, S – мембранні зусилля; M_1, M_2 – згинальні моменти; H – крутячий момент.

Поставлену задачу розв'язуємо методом інтегральних сингулярних рівнянь [13]. Запишемо інтегральні подання зусилля T_2 та моменту M_2 через похідні від стрибків переміщення та кута повороту нормалі

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sum_{j=1,3} \left(K_{ij}^{(1)}(t-\tau) \psi_j^{(1)}(t) + K_{ij}^{(2)}(t-b\tau+2\gamma_2) \psi_j^{(2)}(t) \right) dt &= \pi \Phi_i(l_1(\tau-\gamma_1)), \\ \int_{-1}^1 \sum_{j=1,3} \left(K_{ij}^{(1)}(t-\tau/b-2\gamma_1) \psi_j^{(1)}(t) + K_{ij}^{(2)}(t-\tau) \psi_j^{(2)}(t) \right) dt &= \pi \Phi_i(l_2(\tau+\gamma_2)), \quad i=1,3, \end{aligned} \quad (3)$$

де

$$\Phi_1(\tau) = T_2(\tau), \quad \Phi_2(\tau) = c^2 R_2 M_2(\tau).$$

$$\psi_1^{(p)}(t) = \frac{Eh}{4\chi^2 l_p \sqrt{a}} \sqrt{1-\mu} \frac{d[v]_{L_p}}{dt}; \quad \psi_3^{(p)}(t) = \frac{D(1-\nu)(3+\nu-2\mu)}{4\chi^2 l_p \sqrt{a}} R_2 c^2 \frac{d[\theta_2]_{L_p}}{dt}; \quad p=1,2;$$

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$; $c = \frac{\sqrt[4]{12(1-\nu^2)}}{\sqrt{Rh}}$; $R = \min(|R_1|, |R_2|)$, де R_1, R_2 – радіуси головних кривин серединної поверхні оболонки вздовж осі Ox та Oy ; $E = \sqrt{E_1 E_2}$; E_1, E_2 – модулі Юнга; $\nu = \sqrt{\nu_1 \nu_2}$, ν_1, ν_2 – коефіцієнти Пуассона; $a = \frac{2-\mu+\mu\nu}{2}$; $\chi^4 = \frac{E_1}{E_2}$; $\mu = 1 - 2 \frac{G_{12}(1+\nu)}{E}$; G_{12} – модуль зсуву для площин, паралельних серединній поверхні оболонки; $b = \gamma_2/\gamma_1$, $\gamma_1 = d/l_1$, $\gamma_2 = d/l_2$; $2d$ – відстань між центрами тріщин; $|\tau| \leq 1$. Ядра $K_{ij}(x)$ наведені в роботі [13].

Для визначення стрибка повороту нормалі підставимо вирази (3) у крайові умови (2), враховуючи, що $\text{sgn}[\theta_2] = \text{sgn} M^*$. Отримаємо систему сингулярних інтегральних рівнянь

$$\begin{aligned}
 \pi M^* (l_1(\tau - \gamma_1)) &= \frac{D}{4\chi^2\sqrt{a}} \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{l_1} \left(k_1 K_{11}^{(1)}(t - \tau) + k_2 K_{31}^{(1)}(t - \tau) + k_3 K_{33}^{(1)}(t - \tau) \right) \frac{d[\theta_2]^{(1)}}{dt} + \right. \\
 &+ \left. \frac{1}{l_2} \left(k_1 K_{11}^{(2)}(t - b\tau + 2\gamma_2) + k_2 K_{31}^{(2)}(t - b\tau + 2\gamma_2) + k_3 K_{33}^{(2)}(t - b\tau + 2\gamma_2) \right) \frac{d[\theta_2]^{(2)}}{dt} \right] dt, \\
 \pi M^* (l_2(\tau + \gamma_2)) &= \frac{D}{4\chi^2\sqrt{a}} \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{l_1} \left(k_1 K_{11}^{(1)}(t - \tau/b - 2\gamma_1) + k_2 K_{31}^{(1)}(t - \tau/b - 2\gamma_1) + \right. \right. \\
 &+ \left. k_3 K_{33}^{(1)}(t - \tau/b - 2\gamma_1) \right) \frac{d[\theta_2]^{(1)}}{dt} + \frac{1}{l_2} \left(k_1 K_{11}^{(2)}(t - \tau) + k_2 K_{31}^{(2)}(t - \tau) + \right. \\
 &+ \left. k_3 K_{33}^{(2)}(t - \tau) \right) \frac{d[\theta_2]^{(2)}}{dt} \right] dt, \tag{4}
 \end{aligned}$$

де

$$k_1 = 3\sqrt{1-\mu}(1+\nu), \quad k_2 = 2 \text{sgn} M^* \sqrt{1-\mu} \sqrt{3(1-\nu^2)}, \quad k_3 = (1-\nu)(3+\nu-2\mu).$$

На кінцях розрізу розв'язок системи (4) має задовольняти додаткові умови:

$$[\theta_2]^{(p)}(\pm 1) = 0, \quad (p=1,2). \tag{5}$$

Систему інтегральних рівнянь (4) з заданими умовами (5) розв'язано методом механічних квадратур [18–19].

Результати дослідження. Коефіцієнти інтенсивності зусиль та моментів у вершинах тріщин обчислено за формулами

$$K_M^\pm = \pm(1-\nu)(3+\nu-2\mu) \frac{D}{4\chi^2 l_p \sqrt{a}} \lim_{t \rightarrow \pm l} \sqrt{l^2 - t^2} \frac{d[\theta_2]_{Lp}(t)}{dt};$$

$$K_T^\pm = \pm \frac{Eh}{4\chi^2 l_p} \sqrt{\frac{1-\mu}{a}} \lim_{t \rightarrow \pm l} \sqrt{l^2 - t^2} \frac{d[v]_{Lp}(t)}{dt}, \quad (p=1,2).$$

Розрахунки проведено для композитного матеріалу на епоксидній основі, армованого прямолінійними графітними волокнами, для якого

$$E_1 = 4,9 \times 10^4 \text{ МПА}; \quad E_2 = 0,6 \times 10^4 \text{ МПА}; \quad G_{12} = 0,4 \times 10^4 \text{ МПА}; \quad \nu_1 = 0,31.$$

Для ізотропної пластини та оболонки отримані результати в граничних випадках (тріщини однакової довжини) узгоджуються з наведеними в роботі [17], а для ортотропної – співпадають з наведеними в роботі [16].

Залежності відносних значень коефіцієнтів інтенсивності зусиль $\tilde{K}_T = hK_T / 2M^*$ та моментів $\tilde{K}_M = K_M / M^*$ від параметра взаємного розташування тріщин ρ будували для фіксованих значень параметра $\beta_p = cl_p, (p=1,2)$. Числові розрахунки проведено для випадку змикання берегів тріщин на внутрішній поверхні оболонки ($M^* > 0$).

На рис. 2 показано залежність коефіцієнтів інтенсивності зусиль \tilde{K}_T та моментів \tilde{K}_M для поздовжніх тріщин від відстані між ними. Тут і надалі суцільні лінії – результати для внутрішніх, а штрихові – для зовнішніх вершин розрізів. Вважаємо, що $2\beta_1 = \beta_2 = 2$ Криві 1[†]–3[†] побудовані для лівої тріщини, а 1–3 – для правої. Вони відповідають сферичній, псевдосферичній та циліндричній оболонкам. Для лівої тріщини суцільна та штрихова лінія співпадають.

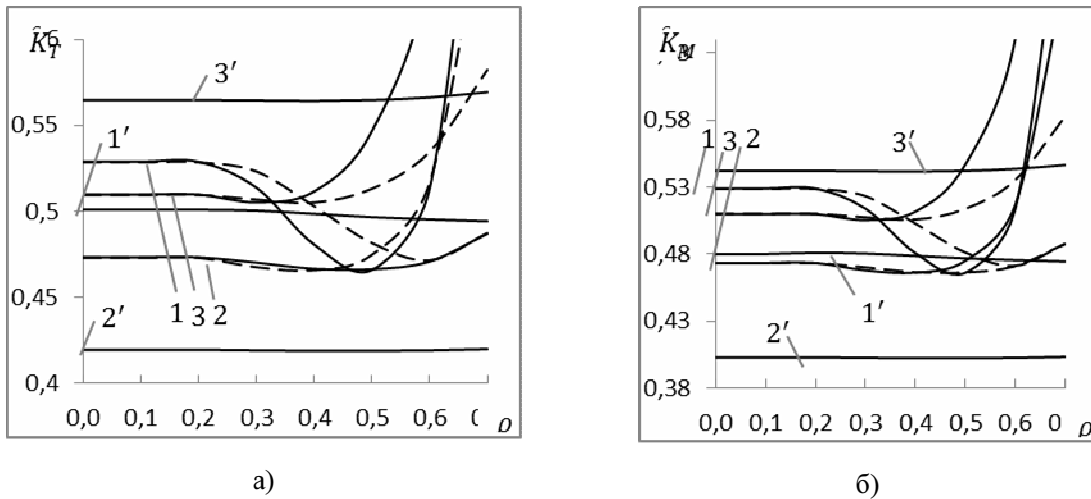


Рисунок 2. Залежність коефіцієнтів інтенсивності зусиль а) \tilde{K}_T і моментів б) \tilde{K}_M для тріщин різної довжини від відстані між ними

Figure 2. Dependence of the intensity factors of effort а) \tilde{K}_T and the moments б) \tilde{K}_M for different crack lengths on the distance between them

З рис.2 бачимо, що на певному проміжку коефіцієнти інтенсивності зусиль і моментів стають меншими за коефіцієнти інтенсивності зусиль і моментів для поодинокі тріщини ($\rho \rightarrow 0$), але при зближенні збільшуються, причому на внутрішніх кінцях сильніше, ніж на зовнішніх. Взаємовплив не відбувається, коли $\rho < 0,2$ ($\gamma_2 = 1/\rho, \gamma_1 = b\gamma_2$). Коефіцієнти інтенсивності зусиль і моментів на внутрішньому кінці тріщини меншої довжини на певному проміжку параметра росту менші за коефіцієнти інтенсивності зусиль і моментів для тріщини більшої довжини. Але при близькій відстані між тріщинами коефіцієнти інтенсивності зусиль і моментів для тріщини меншої довжини стрімко збільшуються і стають більше, ніж коефіцієнти інтенсивності зусиль і моментів для тріщини більшої довжини.

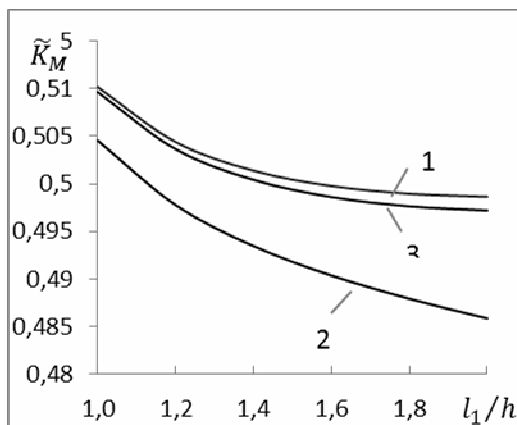


Рисунок 3. Залежність коефіцієнтів інтенсивності моментів для лівої тріщини від її довжини

Figure 3. Dependence of the intensity factors of moments for the left cracks on its length

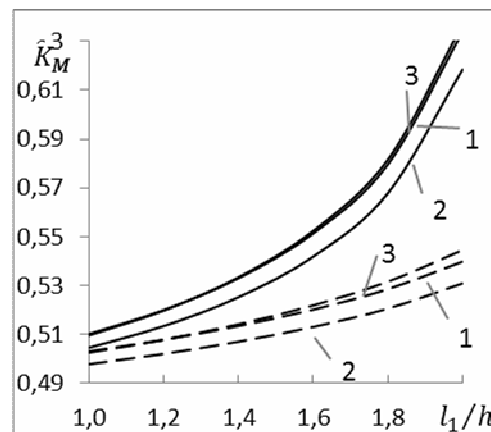


Рисунок 4. Залежність коефіцієнтів інтенсивності моментів для правої тріщини від довжини лівої

Figure 4. Dependence of the intensity factors of moments for the right cracks on the length of left one

На рис.3, 4 криві 1–3 відповідають сферичній, псевдосферичній та циліндричній оболонкам відповідно. Відстань між тріщинами обчислювали за формулою $d/h = 1,1(l_1/h + l_2/h)$, $h/R_2 = 0,01$, $l_2/h = 1$.

З рис.3–4 бачимо, що при $l_1/h = l_2/h$ коефіцієнти інтенсивності моментів для лівої тріщини мають найбільші значення, у той час як коефіцієнти інтенсивності моментів для правої тріщини мають найменші значення.

Рис. 5 відображає залежність коефіцієнтів інтенсивності моментів від кривини оболонки для випадку $\chi > 1$ на рис.5а) та $\chi < 1$ на рис.5б). Криві 1 та 2 побудовані для $\rho = 0,5$ та $\rho = 0,7$, ($\gamma_1 = 1/\rho$, $\gamma_2 = \gamma_1/b$). Суцільною лінією зображено коефіцієнти інтенсивності моментів для правої тріщини, штрихпунктирною – для внутрішнього кінця лівої, пунктирної – для зовнішнього кінця лівої тріщини.

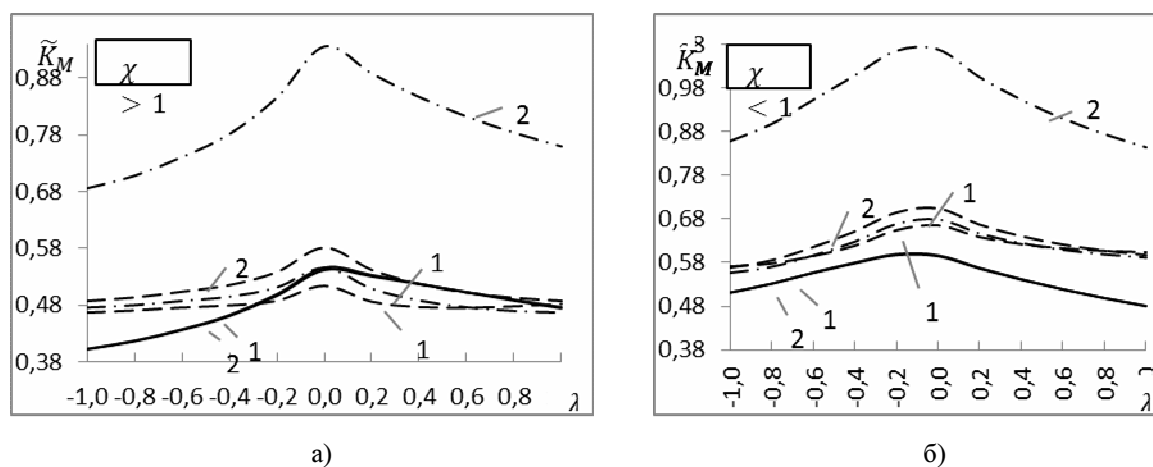


Рисунок 5. Залежність коефіцієнтів інтенсивності моментів для тріщин різної довжини від кривини оболонки $\beta_1 = 2\beta_2 = 2$: а) $\chi > 1$, б) $\chi < 1$

Figure 5. Dependence of the intensity factors of moments for different crack lengths on the curvature shell $\beta_1 = 2\beta_2 = 2$: а) $\chi > 1$, б) $\chi < 1$

З рис.5 бачимо, що зберігається характер поведінки коефіцієнтів інтенсивності, а саме: при зближенні тріщин коефіцієнтів інтенсивності моментів для лівої тріщини набагато більші, ніж коефіцієнтів інтенсивності моментів для правої. Зі зменшенням параметра $\chi = \sqrt[4]{E_1/E_2}$ при $\chi < 1$ коефіцієнти інтенсивності різко збільшуються.

Коефіцієнти інтенсивності моментів в оболонках двоякої кривини більші, якщо розрізи орієнтовані вздовж напрямку пружності з меншим модулем Юнга ($\chi < 1$). В оболонках додатної кривини коефіцієнти інтенсивності різко зменшуються зі збільшенням параметра $\lambda = R_2/R_1$. Найбільші коефіцієнти інтенсивності моментів досягаються в циліндричних оболонках з поздовжніми розрізами.

Висновки. Розглянуто задачу про напружений стан пологої ортотропної оболонки двоякої кривини з двома колінеарними нерівними по довжині наскрізними тріщинами, до берегів яких прикладене самозрівноважене згинальне навантаження. Задачу сформульовано у двовимірній постановці на основі моделі контакту вздовж лінії. Система сингулярних інтегральних рівнянь розв'язана числово за допомогою методу механічних квадратур. Досліджено вплив кривини оболонки, взаємного розміщення колінеарних тріщин, механічних властивостей матеріалу в околі вершин тріщин на коефіцієнти інтенсивності моментів. Отримані результати співпадають з відомими в літературі частинними розв'язками.

Conclusions. The problem of the stress state of the shallow orthotropic dual curvature shell with two collinear through thickness cracks of different lengths, when applied to their shores self-balanced load was considered. The problem was formulated in a two-dimensional statement by means of the contact model along a line. The system of singular integral equations is solved numerically using the method of mechanical quadratures. The influence of the shell curvature, mutual location of collinear cracks, the mechanical properties of the material in the threshold of the crack tip on the moments intensity factors have been investigated. The obtained results are similar to those available in the literature.

Список використаної літератури

1. Саврук, М.П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами [Текст] / М.П. Саврук. – К.: Наук. думка, 1981. – 324 с.
2. Бережницкий, Л.Т. Изгиб тонких пластин с дефектами типа трещин [Текст] / Л.Т. Бережницкий, М.В. Делявский, В.В. Панасюк. – К.: Наук. думка, 1979. – 339 с.
3. Довбня, Е.Н. О корректности постановки симметричных задач механики пологих оболочек с разрезами [Текст] / Е.Н. Довбня // Теоретическая и прикладная механика. – 1988. – Вып.19. – С.98–100.
4. Массакровский, В.И. Об одной смешанной задаче теории упругости для плоскости, ослабленной прямолинейной щелью [Текст] / В.И. Массакровский, П.А. Загубиженко // Док. АН СССР. – 1954. – Т.94, №3. – С.409–412.
5. Панасюк, В.В. Згин пластини з прямолінійною щілиною [Текст] / В.В. Панасюк, Б.Л. Лозовський // Прикл. механіка. – 1961. – Т.7, №6. – С.627–634.
6. Опанасович, В.К. Упругое равновесие пластины с разрезом, кромки которого частично соприкасаются [Текст] / В.К. Опанасович, Н.М. Кундрат // Физ.-хим. механика материала. – 1979. – Вып.9. – № 6. – С.67–71.
7. Jones, D.P The influence of crack closure and elasto-plastic flow on the bending of a cracked plate [Текст] / D.P Jones, J.L. Swedlow // International Journal of Fracture. – 1975. Vol.11, № 7. – P.897–914.
8. Young, M.J. Influence of crack closure on the stress intensity factor in bending plates – A classical plate solution [Текст] / M.J. Young, C.T. Sun // International Journal of Fracture. – 1992. – Vol.55, №1. – P.81–93.
9. Шацький, І.П. Інтегральні рівняння задачі згину пологої оболонки, ослабленої розрізами з контактуючими берегами [Текст] / І.П. Шацький // Доп. АН УРСР. – 1991. – №2. – С.26–29.
10. Liu, R. Crack closure in spherical shells [Text] / R. Liu, C.H. Wang, R.G. Bathgate // International Journal of Fracture. – 1999. – Vol.99, №4. – P.307–323.
11. Liu, R. Crack closure effect on stress intensity factors of an axially and a circumferentially cracked cylindrical shell [Text] / R. Liu, T/ Zhang, X.J. Wu, C.H. Wang // International Journal of Fracture. – 2004. – Vol.125, 3–4. – P.227–248.
12. Zhao, J. Crack Closure Effects in a Cracked Cylinder Under Pressure [Text] / J. Zhao, R. Liu, T. Zhang, X.J. Wu // Fracture of Nano and Engineering Materials and Structures. – 2006. – P.229–260.
13. Довбня, К.М. Дослідження напруженого стану ортотропної оболонки довільної кривини з наскрізною тріщиною при згинальному навантаженні [Текст] / К.М. Довбня, Н.А.Шевцова // Проблеми прочності. – 2014. – №3. – С.59–64.
14. Довбня, К.М. Гранична рівновага пологої ортотропної оболонки з двома колінеарними або двома паралельними тріщинами при згинальному навантаженні [Текст] / К.М. Довбня, Н.А. Шевцова // Современные проблемы техносферы и подготовки инженерных кадров: сборник трудов XII междунар. науч.-метод. конф. в г. Сусс, Тунис, 08–17 октября. 2013 г. – Донецк: ДонНТУ, 2013. – С.122–125.
15. Довбня, К.М. Згин пологої ортотропної оболонки довільної кривини з двома паралельними тріщинами з урахуванням контакту берегів [Текст] / К.М. Довбня, Н.А. Шевцова // Машинознавство. – 2013. – №7–8. – С.3–6.
16. Довбня, К.М. Дві колінеарні тріщини з контактуючими берегами в ортотропній оболонці довільної кривини за умов згину [Текст] / К.М. Довбня, Н.А.Шевцова // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2013. – Т.49, №6. – С.36–40.
17. Шацький, І.П. Рівновага сферичної пологої оболонки з урахуванням закриття колінеарних тріщин за згину [Текст] / І.П. Шацький, М.В. Маковійчук // Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології. – 2010. – Вып.12. – С.189–195.
18. Корнейчук, А.А. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов [Текст] / А.А. Корнейчук // Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы.– М.: Наука, 1964. – С.64–74.
19. Саврук, М.П. Численный анализ в плоских задачах теории трещин [Текст] / М.П. Саврук, П.Н. Осив, И.В. Прокопчук. – К.: Наук. думка, 1989. – 248 с.

Отримано 30.12.2014