

УДК 319.216

Я. Драган, докт. фіз.-мат. наук; Л. Дедів

Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

ОБҐРУНТУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ДОВОГО ЕЛЕКТРОКАРДІОСИГНАЛУ У ВИГЛЯДІ КУСКОВО- ПЕРІОДИЧНО КОРЕЛЬОВАНОГО ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ

Резюме. Обґрунтовано математичну модель добового електрокардіосигналу у вигляді кусково-періодично корельованого випадкового процесу із використанням енергетичної теорії стохастичних сигналів, яка дає змогу врахувати у його структурі поєднання властивостей періодичності з випадковістю як у структурі стадій (активність, засинання, поверхневий сон, глибокий сон, тонічний сон та фазичний сон) так і в структурі всього сигналу

Ключові слова: добовий електрокардіосигнал, математична модель, кусково-періодично корельований випадковий процес.

Y. Dragan, L. Deditiv

GROUND OF MATHEMATICAL MODEL DAY'S ELECTROCARDIOSIGNAL AS THE COBBED- PERIODICALLY CORRELATED CASUAL PROCESS

The summary. Grounded mathematical model of day's electrocardiosignal as the cobbed-periodically correlated casual process with the use of power theory of stochastic signals, which enables to take into account in its structure combination of properties of periodicity with stochastic as in the structure of the stages (activity, backfilling, superficial sleep, deep sleep, tonic sleep and phasical sleep) so in the structure of entire signal.

Key words: day's electrocardiosignal, mathematical model, cobbed-periodically correlated casual process.

Аналіз проблеми. За статистичними даними Всесвітньої організації охорони здоров'я станом на 2009 р. від серцево-судинних захворювань (ССЗ) померло 17,5 млн. людей. Прогнозовано, що до 2015 року близько 20 млн. людей помре від ССЗ, які стануть основними причинами смертності. Це в першу чергу пов'язано із впливом внутрішніх (стрес, розумове перенапруження) та зовнішніх (погана екологія, суцільна комп'ютеризація, фізичне навантаження) факторів на серце людини. Тому важливим завданням сучасної кардіології в Україні й в усьому світі є своєчасне виявлення та запобігання серцево-судинним захворюванням.

На важливість діагностики серцево-судинної системи за електрокардіосигналом (ЕКС) упродовж довготривалого інтервалу часу вказували дослідники медичного спрямування [1,2]: Макаров Л.М., Недоступ О.В., Дабровські А., Dickinson P., Scott O. та ін. Зокрема встановлено, що аналіз електрокардіосигналів на базі голтерівського моніторингу дає змогу оцінити роботу серця людини впродовж доби (активність і сон), виявити зміни й порушення у функціонуванні серцево-судинної системи і тим самим забезпечити глибший аналіз різних патологій, точність діагнозу і відповідно вибір ефективного методу лікування. Ефективність методу лікування захворювань серця людини залежить від наявності відповідної кардіологічної системи голтерівського моніторингу, ефективність якої має визначатися можливостями математичної моделі й давати змогу автоматизовано проводити процес діагностування.

На сьогодні відома низка математичних моделей електрокардіосигналів, які базовані на стохастичному підході щодо їх побудови у вигляді адитивної суміші лінійних випадкових процесів (Лупенко С.А., Щербак А.М.) [3], адитивної суміші

стаціонарних і нестаціонарних процесів (Литвиненко Я.В.) [4] та періодично корельованого випадкового процесу (Драган Я.П., Дунець В.Л.) [5].

Формулювання задачі. На підставі аналізу відомих математичних моделей ЕКС встановлено, що ці моделі дають змогу описати ЕКС на короткотривалому інтервалі часу, що є неадекватним для систем голтерівського моніторингу, оскільки серце людини функціонує на певних часових інтервалах доби по-різному (з різною інтенсивністю і ритмом). Оскільки добовий ЕКС є досить складним за своєю природою сигналом, що містить в випадковість і повторність, тому для його аналізу необхідно використати математичний апарат, який би враховував фізичну природу механізму породження цього сигналу, поєднуючи в собі ці властивості.

Тому актуальною науковою задачею є побудова математичної моделі добового ЕКС для підвищення інформативності систем голтерівського моніторингу, що дасть можливість достовірніше оцінити роботу серця на довготривалому інтервалі часу.

Структура добового електрокардіосигналу. Діяльність людей упродовж доби є неоднорідним динамічним і складно організованим процесом, якому властиві циклічність, значні групові та індивідуальні варіації. Оскільки під час дня кожна людина функціонує по-різному, при цьому не зберігаючи однорідність діяльності (велика варіація часових інтервалів фізичної, розумової, психологічної праці та ін.), що не скажеш про сон (збереження структури).

У структурі сну виділяють стадії [6,7]: поволіхвильовий (англ. NREM, non rapid eye movement – без швидких рухів очей) і швидкий сон (англ. REM, rapid eye movement – зі швидкими рухами очей). При цьому NREM сон складається з чотирьох стадій, які розрізняють по глибині: I – засинання, II – поверхнева, III і IV – глибока, а REM сон підрозділяють на тонічний і фазичний. Питома вага цих стадій у різних людей також неоднакова і схильна до впливу багатьох чинників. Для кожної стадії характерна певна частота, амплітуда і форма ЕКС, різний м'язовий тонус.

Враховуючи, що впродовж доби серце людини змінює режим роботи, переходячи з однієї стадії в іншу, ЕКС умовно поділено на часові інтервали (рис.1), які відповідають тривалості кожної стадії.

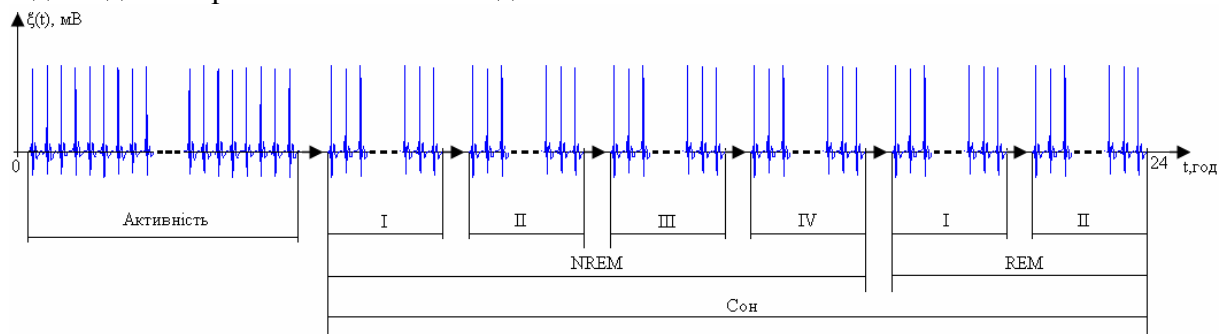


Рисунок 1 – Структура добового ЕКС з урахуванням його стадій:
NREM: I – стадія засинання, II – стадія поверхневого сну, III, IV – стадія глибокого сну,
REM: I – стадія тонічного сну, II – стадія фазичного сну

Інтерпретація добового електрокардіосигналу на базі періодично корельованого випадкового процесу. Періодично корельовано випадкові процеси (ПКВП) – це моделі стохастичних коливань з періодичною зміною ймовірнісних характеристик [8].

Періодично корельовано – це такі випадкові процеси, математичне сподівання і коваріація якого задовольняють умови [8]: існує таке певне $T > 0$, яке називають періодом корельованості, що

$$m_{\xi}(t+T) = m_{\xi}(t), r_{\xi}(t+T, s+T) = r_{\xi}(t, s), \forall t, s \in R, \quad (1)$$

де $m_{\xi}(t)$ – математичне сподівання, а $r_{\xi}(t, s)$ – кореляційна функція процесу або, якщо використати параметричну коваріацію (функцію кореляції $b_{\xi}(t, u) = r_{\xi}(t + u, t)$), то з цих формул виходить, що математичне сподівання і параметрична коваріація є періодичними з періодом T :

$$m_{\xi}(t + T) = m_{\xi}(t), \quad b_{\xi}(t + T, s + T) = b_{\xi}(t, s), \quad \forall t, s \in R.$$

Означення класу π (зі скінченною середньою потужністю) мало однією з причин вивчення ПКВП у спектральній області – їхньої гармонізованості, вигляду спектра (типу корельованості гармонічних складових), закону збереження (потужності в узагальненій теоремі Вінера-Хінчина) та зображення таких процесів через спектральні компоненти. При цьому очевидно, що умова (1) при обчисленні середніх характеристик призводить до того, що усереднення по всій осі переходить в усереднення по відрізьку довжини T , що (внаслідок інваріантності усереднення зсувів) можна вважати як усереднення на відрізьку $[0, T)$, тобто покласти, що середні величини характеристики процесу даються виразами

$$m = M_t \{m(t)\} = \frac{1}{T} \int_0^T m(t) dt,$$

$$B(u) = M_t \{r(t + u, t)\} = \frac{1}{T} \int_0^T r(t + u, t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T b(t, u) dt,$$

де M_t – символ усереднення по всій осі, T – період корельованості ПКВП.

Тому ці характеристики мають розклади у ряди Фур'є

$$m(t) = \sum_{k \in Z} m_k e^{ik\Lambda t},$$

$$b(t, u) = \sum_{t \in Z} B_k(u) e^{ik\Lambda t},$$

де $\Lambda = \frac{\Delta 2\pi}{T}$,

як слід розуміти у сенсі теорії узагальнених функцій Шварца [8], коли розглядати ПКВП скінченної середньої потужності. Справді, оскільки у випадку періодичної функції

$$\begin{aligned} M_t \{f(t)\} &= \lim_{\Theta \rightarrow \infty} \frac{1}{2\Theta} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = \\ &= \lim_{\Theta \rightarrow \infty} \frac{1}{2NT + 2\Delta} \left[N \int_0^T + N \int_{-\Theta}^{-NT} + N \int_{NT}^{\Theta} \right] f(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, \end{aligned}$$

де $N = E\left(\frac{\Theta}{T}\right)$, $E(\bullet)$ – ціла частина числа, $\Delta = \Theta - NT$, то середня потужність ПКВП визначається усередненням на періоді корельованості, тобто на відрізьку $[0, T]$, тоді

$$P_{\xi}^T = \frac{1}{T} \int_0^T E \left| \xi(t) \right|^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T r(t, t) dt,$$

а умова належності до класу π набуде вигляду

$$P_{\xi}^T = \frac{1}{T} \int_0^T r(t, t) dt < \infty.$$

Тому клас ПКВП, для якого виконується ця умова, коли його трактувати як підклас у класі π , був названий класом π^T . На цей клас поширюється з відповідними видозмінами теорія класу π [8]. Зокрема замість простору \mathcal{H}^T вводиться простір

$\hbar^T = L^2\left(\left[0, T\right]; \frac{1}{T}, K\right)$, тобто простір інтегровних на $[0, T)$ з квадратом за мірою dt/T функцій над колгоморівським гільбертовим простором K випадкових величин скінченної дисперсії, і норма у цьому просторі $\|\xi_{\bullet}\|_{\hbar^T} = \sqrt{P_{\xi}^T}$.

Кореляційні компоненти

$$B_k(u) \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{T} \int_0^T r(t+u, t) e^{-ik\Lambda t} dt$$

в силу їхньої обмеженості $B_k(u) \leq B_0(u) \leq B_0 = P_{\xi}^T$ належать до класу B^2 , тому мають зображення у вигляді Фур'є за мірами (загалом комплексно значними)

$$B_k(u) = \int_R e^{iu\lambda} F(d\lambda),$$

де R – множина дійсних чисел, F – спектральна біміра.

Коваріація ПКВП має вигляд

$$r(t, s) = \iint_{R^2} e^{i(d\lambda, d\mu)} F(d\lambda, d\mu).$$

Встановлені властивості коваріації ПКВП дають підставу вивести вираз самого процесу через його стаціонарні складові, тобто встановити структуру цього класу процесів [8].

ПКВП належить до класу π^T тоді і тільки тоді, коли він має зображення

$$\xi(t) = \sum_{k \in Z} \xi_k(t) e^{ik\Lambda t},$$

де $\xi_k(t)$ – стаціонарні компоненти ПКВП, Z – множина всіх і відповідно підмножина додатних чисел.

Математична модель добового електрокардіосигналу у вигляді кусково-періодично корельованого випадкового процесу. Враховуючи умовне розбиття ЕКС, яке зображено на рис.2, сигнал у межах однієї стадії трактовано як періодично корельований випадковий процес [8] (2) (процес, який описує випадкові коливання і ймовірнісні характеристики якого є періодичними), що дає змогу врахувати у своїй структурі поєднання властивостей періодичності з випадковістю, що є важливим для задач аналізу фазово-часової структури, з метою своєчасного виявлення «скритих» патологічних змін у функціонуванні серцево-судинної системи:

$$\xi(t) = \sum_{n \in Z} \chi_{D_n}(t) \cdot \xi_n(t), \quad (2)$$

де $\chi_{D_n}(t) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } t \in D_n \\ 0, & \text{якщо } t \notin D_n \end{cases}$ – індикаторна функція, $D_n = [\tau_n, \tau_{n+1})$ – тривалість n -ої стадії;

$\xi_n(t)$ – ЕКС як періодично корельований випадковий процес у межах n -ої стадії:

$$\xi_n(t) = \sum_{k \in \square} \xi_{nk}(t) e^{-ik \frac{2\pi}{T}(t+\tau_n)}, t \in \mathbf{R}.$$

Оскільки на кожній стадії ЕКС є ПКВП (рис.1), тому добовий ЕКС подано у вигляді кусково-ПКВП через стаціонарні компоненти на n -ій стадії:

$$\xi(t) = \sum_{n \in Z} \sum_{k \in \square} \chi_{D_n}(t) \cdot \xi_{nk}(t) e^{-in \frac{2\pi}{T}(t+\tau_n)}, t \in \mathbf{R}, \quad (3)$$

де $\xi_{nk}(t)$ – стаціонарні компоненти ЕКС n -ої стадії, T – період корельованості.

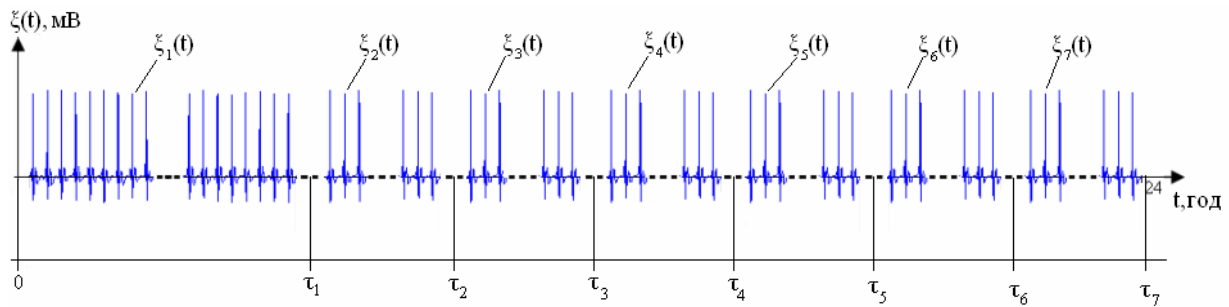


Рисунок 2 – Розбиття ЕКС на часові інтервали

Зображення (3) у вигляді кусково-ПКВП дає змогу адекватно описати добовий ЕКС, а саме врахувати у структурі добового електрокардіосигналу поєднання властивостей періодичності з випадковістю як у структурі стадії, так і в структурі всього сигналу, і застосувати до нього відомі методи статистичного опрацювання (синфазний та компонентний) з метою отримання нових статистичних оцінок, які є показниками стану серцево-судинної системи людини.

Висновки. В результаті аналізу добового електрокардіосигналу та описаних властивостей періодично корельованих випадкових процесів встановлено, що математична модель процесу такого класу дає змогу адекватно описати сигнал, а саме, врахувати поєднання властивостей періодичності зі стохастичністю як у структурі стадії, так і в структурі всього сигналу, а тому і розробити методи визначення інваріантних інформаційних ознак добового електрокардіосигналу, виходячи зі статистики таких сигналів для задач своєчасної діагностики стану серцево-судинної системи.

Література

1. Макаров Л.М. Холтеровское мониторирование / Л.М.Макаров – М.: Медпрактика, 2000. – 216 с.
2. Дабровски А. Суточное мониторирование ЭКГ / А.Дабровски, Б.Дабровски, Р.Пиотрович; [пер. с польск. Корнеев Н.В., Грабко Н.Н., Банникова С.Д.]. – М.: Медпрактика, 1998. – 208 с.
3. Лупенко С.А. Конструктивна математична модель сигналів серця на основі лінійних періодичних випадкових процесів та полів / С.А.Лупенко, Л.М.Щербак // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – Тернопіль: ТДТУ ім. І.Пулюя. – 2000. – №4. – С. 101–110.
4. Литвиненко Я.В. Математична модель електрокардіосигналу для задач визначення його діагностично важливих зон / Я.В.Литвиненко // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – Хмельницький: Навчальна книга. – 2004. – №2. – С. 86–93.
5. Драган Я.П., Осухівська Г.М., Дунець В.Л. Обґрунтування адекватності математичної моделі електрокардіосигналу для задачі виявлення патології // Вісник Хмельницького національного технологічного університету. – Хмельницький: ХНУ. – 2007. – № 2. – С. 99–102.
6. Berlad I., Shlitner A., Ben-Haim S., Lavie P. Power spectrum analysis and heart rate variability in stage 4 and REM sleep: evidence for state-specific changes in autonomic dominance / I.Berlad, A.Shlitner, S.Ben-Haim, P.Lavie // J. Sleep. Res. 1993; 2, 88.
7. Umali M.U., Hilton M.F., Kres S.P. Circadian and sleep stage influences on cardiac autonomic tone / M.U.Umali, M.F.Hilton, S.P.Kres // Sleep. 2000; 23: A26.
8. Драган Я.П. Енергетична теорія лінійних моделей стохастичних сигналів / Я.П.Драган. – Львів: Центр стратегічних досліджень еко-біотехнічних систем. – 1997. – XVI+333с.

Одержано 15.04.2010 р.