

УДК 539.3

Б. Процюк, докт.фіз.-мат. наук; О. Горун

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України*

ТЕРМОПРУЖНА ПОВЕДІНКА БЕЗМЕЖНОГО ТЕРМОЧУТЛИВОГО ТРИСКЛАДОВОГО ТІЛА ЗА ДІЇ ОБ'ЄМНОГО ДЖЕРЕЛА ТЕПЛА

***Резюме.** Запропоновано чисельно-аналітичний підхід до визначення термопружного стану безмежного трискладового тіла за дії об'ємного джерела тепла з урахуванням залежності термомеханічних характеристик від температури. Він базується на використанні перетворення Кірхгофа, узагальнених функцій, функції Гріна нестационарної задачі теплопровідності для трискладового простору зі сталими характеристиками та лінійних сплайнів. Наведено результати числових досліджень температури, напружень та переміщень.*

***Ключові слова:** термочутливість, термопружність, теплопровідність, кусково-однорідні тіла, об'ємні джерела тепла.*

B.Protsyuk, O.Gorun

THE THERMOELASTIC BEHAVIOR OF THE INFINITE THERMOSENSITIVE THREELAYER BODY UNDER THE ACTION OF A VOLUMETRIC HEAT SOURCE

***Summary.** The numerical-analytical approach of determining a thermoelastic state of infinite thermosensitive (thermomechanical properties depend on temperature) threelayer body with thermal insulated and smoothly fixed cylindrical surface under the action of the dependent on axial coordinate and time heat source is presented. To find the temperature field to the initial system of three nonlinear one-dimensional thermal conductivity equations and contact conditions, Kirchhoff transformation was applied. Having assumed that coefficients of thermal conductivity are in linear dependence on temperature and coefficients of thermal diffusivity are constant within each component, the obtained problem was reduced to a single equation with generalized on the coordinate derivatives relative to the function, that within each region coincides with the corresponding Kirchhoff variable. By using Green's function of the linear non-stationary thermal conductivity problem for a threelayer space, integral representation, in which the subintegral functions include the time-dependent unknown Kirchhoff variable values at the surfaces of division on the right was obtained. The approach of finding them for a case where the heat source is uniformly distributed over the volume of intermediate layer and has pulsing character change of intensity over time is illustrated. Approximating the subintegral functions with these unknown values by linear splines from the integral representation, the recurrent system of two non-linear algebraic equations for the nodal values of the Kirchhoff variable was obtained. Having solved it, expressions for the entered variables and, correspondingly, the searched temperature field were found. Since it changes only in thickness, in the considered body only radial and circular stress and axial displacement will arise. The numerical investigations were carried out for the case, where the number of pulses of heat source equals two and the materials of the half infinite components and intermediate layer are niobium and platinum, for which thermal diffusivity within the range of the studied temperatures almost does not change. The influence of thermosensitivity on distribution of temperature, stresses and displacements was illustrated and analyzed.*

***Key words:** thermosensitivity, thermoelasticity, thermal conductivity, piecewise homogeneous bodies, volumetric heat sources.*

Вступ. Трискладові тіла є широко поширеними елементами конструкцій у сучасних галузях промисловості. Задачі теплопровідності та термопружності для таких тіл зі сталими термомеханічними характеристиками розглянуті в роботах [1–5 та ін.]. У випадку тонких прошарків у [6–8] використано певні спрощувальні припущення.

Чисельні та чисельно-аналітичні підходи до розв'язування задач теплопровідності й термомпружності із залежними від температури характеристиками для одно-та багат шарових термочутливих тіл відображені у роботах [9–15 та ін.]. Зокрема, у [15] до розв'язування одновимірної нестационарної задачі теплопровідності для багат шарової плити під впливом теплового потоку використано підхід, який базується на використанні перетворення Кірхгофа, узагальнених функцій, лінійних сплайнів та функцій Гріна у вигляді рядів за власними функціями.

У даній роботі запропоновано підхід до розв'язування квазістатичних задач термомпружності для безмежних трискладових термочутливих тіл за дії об'ємних джерел тепла без додаткових припущень щодо проміжного шару. При цьому, на відміну від [15] використано матриці Гріна для трискладового простору у вигляді функціональних рядів, що значно спрощує числову реалізацію, зокрема для малих часів.

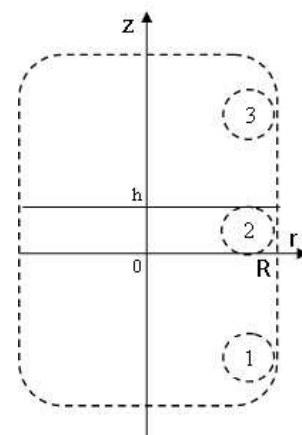


Рисунок 1
Figure 1

Постановка задачі термомпружності. Розглянемо віднесене до циліндричної системи координат r, φ, z необмежене трискладове тіло, яке перебуває під дією джерела тепла $w_t(z, \tau)$. На поверхнях поділу $z = z_1 = 0$ та $z = z_2 = h$ виконуються умови ідеального термомеханічного контакту, а поверхня $r = R$ є гладко закріпленою (відсутні радіальні переміщення й дотичні напруження). Початкові температури складових є нульовими. Визначимо в такому тілі нестационарне температурне поле та зумовлені ним напруження й переміщення з урахуванням залежності фізико-механічних характеристик від температури.

Розв'язування задачі теплопровідності. Для визначення температурного поля маємо рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda_t^{(i)}(t_i) \frac{\partial t_i}{\partial z} \right] = c_V^{(i)}(t_i) \frac{\partial t_i}{\partial \tau} - w_t(z, \tau), \quad (i = \overline{1, 3}), \quad (1)$$

умови контакту

$$t_i(z, \tau) = t_{i+1}(z, \tau), \quad \lambda_t^{(i)} \frac{\partial t_i(z, \tau)}{\partial z} = \lambda_t^{(i+1)} \frac{\partial t_{i+1}(z, \tau)}{\partial z} \quad \text{при } z = z_i \quad (i = 1, 2), \quad (2)$$

граничні та початкові умови

$$t_1(z, \tau)|_{z \rightarrow -\infty} = 0, \quad t_3(z, \tau)|_{z \rightarrow +\infty} = 0, \quad t_i|_{\tau=0} = 0, \quad (3)$$

де індексу $i = 1$ відповідають величини, які належать першій складовій $-\infty \leq z \leq 0$, $i = 2$ – другій (проміжковому шарі) $0 \leq z \leq h$, $i = 3$ – третій $h \leq z \leq +\infty$.

Вважаючи, що коефіцієнти температуропровідності $a_i = \frac{\lambda_t^{(i)}(t_i)}{c_V^{(i)}(t_i)}$ у межах

кожної складової можна прийняти сталими, що має місце для ряду металів [16], систему рівнянь (5) із умовами контакту (6) зведено до одного рівняння з узагальненими по z похідними [15]

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\lambda_0(z) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] = c_0(z) \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \sum_{j=1}^2 \lambda_{0,j+1} F_{j+1}(\tau) \delta'(z - z_j) - w_t(z, \tau), \quad (8)$$

за крайових умов

$$\theta(z, \tau)|_{z \rightarrow \pm\infty} = 0, \quad \theta(z, \tau)|_{\tau=0} = 0, \quad (9)$$

де $\theta(z, \tau) = \theta_1(z, \tau) + \sum_{k=1}^2 [\theta_{k+1}(z, \tau) - \theta_k(z, \tau)] S(z - z_k)$, $S(z)$ – функція Гевісайда;

$\delta'(z)$ – похідна від дельта-функції Дірака, $\lambda_0(z)$ та $c_0(z)$ мають вигляд

$$p_0(z) = p_{0,1} + \sum_{i=1}^2 (p_{0,i+1} - p_{0,i}) S(z - z_i). \quad (10)$$

За допомогою функцій Гріна $G(z, \zeta, \tau)$ нестационарної задачі теплопровідності для трискладового простору [17] розв'язок задачі (8), (9) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \theta(z, \tau) = & \sum_{j=1}^2 \lambda_{0,j+1} \int_0^{\tau} \frac{\partial G(z, \zeta, \tau - \tau')}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=z_j+0} F_{j+1}(\tau') d\tau' + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\tau} q_0 G(z, \zeta, \tau - \tau') w_t(\zeta, \tau') d\zeta d\tau'. \end{aligned} \quad (11)$$

Спосіб визначення $\theta_{j+1}(z_j, \tau)$, які входять у функції $F_{j+1}(\tau)$ в інтегральному поданні (11), проілюструємо для випадку, коли джерело тепла $w_t(z, \tau)$ розподілене по об'єму проміжкового шару і має імпульсний характер зміни інтенсивності

$$w_t(z, \tau) = q_0 \sum_{p=0}^{m-1} \left[S(\tau - b_p) - S(\tau - b_p - \tau_1^*) \right] \left[S(z - h) - S(z) \right], \quad (12)$$

де q_0 – потужність джерела тепла, $b_p = p(\tau_1^* + \tau_2^*)$; τ_1^* – тривалість імпульсу; τ_2^* – тривалість паузи; m – кількість імпульсів. Апроксимуємо [15] функції $F_{j+1}(\tau)$ лінійним сплайном

$$F_{j+1}(\tau) = s_{j1}^{(1)} \tau + s_{j1}^{(0)} + \sum_{k=1}^{K_\tau-1} \left(s_{j,k+1}^{(1)} \tau + s_{j,k+1}^{(0)} - s_{j,k}^{(1)} \tau - s_{j,k}^{(0)} \right) S(\tau - \tau_k),$$

$$s_{j1}^{(1)} = [F_{j+1}(\tau_i) - F_{j+1}(\tau_{i-1})] / \Delta\tau_i, \quad s_{j1}^{(0)} = [-F_{j+1}(\tau_i) \tau_{i-1} + F_{j+1}(\tau_{i-1}) \tau_i] / \Delta\tau_i,$$

$$\Delta\tau_i = \tau_i - \tau_{i-1} \quad (i = \overline{1, K_\tau}), \quad 0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 \dots < \tau_{K_\tau}.$$

Підставивши вирази для функцій Гріна, знайшовши відповідні інтеграли та перейшовши до безрозмірних змінних, отримаємо такі співвідношення для змінної Кірхгофа:

$$\theta_i(\bar{z}, Fo) = f_i(\bar{z}, Fo) + \eta_{i,1}\gamma_{i,1}(\bar{z}, Fo) + \eta_{i,2}\gamma_{i,2}(\bar{z}, Fo), \quad (13)$$

де

$$\gamma_{i,j}(\bar{z}, Fo) = s_{11}^{(0)}\psi_1^{i,j}(\bar{z}, Fo) + s_{11}^{(1)}\psi_2^{i,j}(\bar{z}, Fo) + \sum_{k=1}^{K_z-1} \left[\left(s_{1,k+1}^{(0)} - s_{1,k}^{(0)} \right) \times \right. \\ \left. \times \psi_3^{i,j}(\bar{z}, Fo - \overline{Fo}_k) + \left(s_{1,k+1}^{(1)} - s_{1,k}^{(1)} \right) \psi_4^{i,j}(\bar{z}, Fo - \overline{Fo}_k) \right],$$

$$\eta_{1,1} = \frac{\lambda_{0,2}a_{02}^*}{2(\lambda_{0,1} + \lambda_{0,2}a_{12}^*)}, \quad \eta_{1,2} = -\frac{\lambda_{0,2}\lambda_{0,3}a_{03}^*}{(\lambda_{0,1} + \lambda_{0,2}a_{12}^*)(\lambda_{0,2} + \lambda_{0,3}a_{23}^*)},$$

$$\eta_{2,1} = \frac{a_{02}^*}{4}, \quad \eta_{2,2} = \frac{\lambda_{0,3}a_{03}^*}{\lambda_{0,2} + \lambda_{0,3}a_{23}^*}, \quad \eta_{3,1} = \frac{\lambda_{0,2}a_{02}^*}{2(\lambda_{0,2} + \lambda_{0,3}a_{23}^*)}, \quad \eta_{3,2} = \frac{a_{03}^*}{4},$$

$$\psi_\rho^{i,j}(\bar{z}, Fo) = l_\rho^{i,j}(\bar{z}, Fo) \quad \text{при } \rho = 1, 2;$$

$$\psi_\rho^{i,j}(\bar{z}, Fo - \overline{Fo}_k) = l_\rho^{i,j}(\bar{z}, Fo - \overline{Fo}_k) \quad \text{при } \rho = 3, 4;$$

$$l_\rho^{1,1}(\bar{z}, \xi) = \varphi_{\rho,1}^0(\bar{z}, \xi) - \sum_{n=1}^{\infty} (v_1 v_2)^n \varphi_{\rho,1}^1(a_{12}^* 2n\bar{h} - \bar{z}, \xi) - v_2 \sum_{n=0}^{\infty} (v_1 v_2)^n \times$$

$$\times \varphi_{\rho,1}^1(2a_{12}^*(1+n)\bar{h} - \bar{z}, \xi),$$

$$l_\rho^{1,2}(\bar{z}, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} (v_1 v_2)^n \varphi_{\rho,1}^1(a_{12}^*(1+2n)\bar{h} - \bar{z}, \xi),$$

$$l_\rho^{2,1}(\bar{z}, \xi) = (v_1 + 1)\varphi_{\rho,2}^1(\bar{z}, \xi) - v_2\varphi_{\rho,2}^1(2\bar{h} - \bar{z}, \xi) + v_1 \sum_{n=1}^{\infty} (v_1 v_2)^n \varphi_{\rho,2}^1(\bar{z} + 2n\bar{h}, \xi) -$$

$$-v_2 \sum_{n=1}^{\infty} (v_1 v_2)^n \varphi_{\rho,2}^1(2\bar{h} - \bar{z} + 2n\bar{h}, \xi) + v_1 v_2 \sum_{n=0}^{\infty} (v_1 v_2)^n \left(\varphi_{\rho,2}^1(\bar{z} + 2(1+n)\bar{h}, \xi) - \right.$$

$$-\varphi_{\rho,2}^1(2(1+n)\bar{h}-\bar{z},\xi),$$

$$l_{\rho}^{2,2}(\bar{z},\xi) = \varphi_{\rho,2}^1(\bar{z}-\bar{h},\xi) - \sum_{n=1}^{\infty} (v_1 v_2)^n \varphi_{\rho,2}^1(2n\bar{h}-\bar{z}+\bar{h},\xi) + v_1 \sum_{n=0}^{\infty} (v_1 v_2)^n \times \\ \times \varphi_{\rho,2}^1(2n\bar{h}+\bar{z}+\bar{h},\xi),$$

$$l_{\rho}^{3,1}(\bar{z},\xi) = \varphi_{\rho,2}^1(a_{23}^*(\bar{z}-\bar{h})+\bar{h},\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} (v_1 v_2)^n \varphi_{\rho,2}^1(a_{23}^*(\bar{z}-\bar{h})+2n\bar{h}+\bar{h},\xi) + \\ + v_1 \sum_{n=1}^{\infty} (v_1 v_2)^n \varphi_{\rho,2}^1(a_{23}^*(\bar{z}-\bar{h})+(1+2n)\bar{h},\xi),$$

$$l_{\rho}^{3,2}(\bar{z},\xi) = (1-v_2) \varphi_{\rho,3}^1(\bar{z}-\bar{h},\xi) - v_2 \sum_{n=1}^{\infty} (v_1 v_2)^n \varphi_{\rho,3}^1(2n\bar{h}a_{32}^*+\bar{z}-\bar{h},\xi) + \\ + v_1 \sum_{n=0}^{\infty} (v_1 v_2)^n \varphi_{\rho,3}^1(2(1+n)\bar{h}a_{32}^*+\bar{z}-\bar{h},\xi),$$

$$\varphi_{\rho,i}^{\rho'}(\zeta,\xi) = 2(S(\xi))^{\delta_{\rho 3}} a_{i0}^* \left((-1)^{\rho'+1} - \operatorname{erf} \left(\frac{\zeta}{2a_{i0}^* \sqrt{\xi}} \right) \right), \text{ при } \rho=1,3$$

$$\varphi_{2,i}^{\rho'}(\zeta, Fo) = -2 \frac{\zeta}{\sqrt{\pi}} \sqrt{Fo} \exp \left(-\frac{\zeta^2}{4a_{i0}^{*2} Fo} \right) + \left((-1)^{\rho'+1} - \operatorname{erf} \left(\frac{\zeta}{2a_{i0}^* \sqrt{Fo}} \right) \right) \times \\ \times \left(\zeta^2 a_{0i}^* + 2a_{i0}^* Fo \right),$$

$$\varphi_{4,i}^{\rho'}(\zeta, Fo - \overline{Fok}) = S(Fo - \overline{Fok}) \left(-2 \frac{\zeta}{\sqrt{\pi}} \sqrt{Fo - \overline{Fok}} \exp \left(-\frac{\zeta^2}{4a_{i0}^{*2} (Fo - \overline{Fok})} \right) + \right. \\ \left. + \left((-1)^{\rho'+1} - \operatorname{erf} \left(\frac{\zeta}{2a_{i0}^* \sqrt{(Fo - \overline{Fok})}} \right) \right) \left(\zeta^2 a_{0i}^* + 2a_{i0}^* Fo \right) \right),$$

$$f_1(\bar{z}, Fo) = \frac{-a_{20}^* \bar{q}_0}{(\delta_1 + \delta_2)} \sum_{p=0}^{m-1} \left[\phi_{1,p}^+ \left(a_{12}^* \bar{h} - \bar{z}, -\bar{z}, Fo \right) + \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \times \right. \\ \left. \times \phi_{1,p}^+ \left(a_{12}^* (\bar{h} + 2n\bar{h}) - \bar{z}, 2n\bar{h} a_{12}^* - \bar{z}, Fo \right) + \nu_2 \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \times \right. \\ \left. \times \phi_{1,p}^+ \left(a_{12}^* (\bar{h} + 2n\bar{h}) - \bar{z}, a_{12}^* (2\bar{h} + 2n\bar{h}) - \bar{z}, Fo \right) \right],$$

$$f_2(\bar{z}, Fo) = \frac{-a_{20}^* \bar{q}_0}{2\delta_2} \sum_{p=0}^{m-1} \left[\bar{\phi}_{2,p}^+ (\bar{h} - \bar{z}, Fo) - \bar{\phi}_{2,p}^- (-\bar{z}, Fo) - \nu_1 \phi_{2,p}^+ (\bar{h} + \bar{z}, \bar{z}, Fo) + \right. \\ \left. + \nu_2 \phi_{2,p}^+ (\bar{h} - \bar{z}, 2\bar{h} - \bar{z}, Fo) - \nu_1 \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \phi_{2,p}^+ (\bar{h} + \bar{z} + 2n\bar{h}, \bar{z} + 2n\bar{h}, Fo) + \right. \\ \left. + \nu_2 \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \phi_{2,p}^+ (\bar{h} - \bar{z} + 2n\bar{h}, 2\bar{h} - \bar{z} + 2n\bar{h}, Fo) + \nu_1 \nu_2 \sum_{n=0}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \times \right. \\ \left. \times \left(-\phi_{2,p}^+ (\bar{z} + (1+2n)\bar{h}, \bar{z} + 2(1+n)\bar{h}, Fo) + \phi_{2,p}^+ (\bar{h} - \bar{z} + (1+2n)\bar{h}, -\bar{z} + (1+2n)\bar{h}, Fo) \right) \right],$$

$$f_3(\bar{z}, Fo) = \frac{-a_{20}^* \bar{q}_0}{2(\delta_2 + \delta_3)} \sum_{p=0}^{m-1} \left[-\phi_{2,p}^+ \left(a_{23}^* (\bar{z} - \bar{h}), a_{23}^* (\bar{z} - \bar{h}) + \bar{h}, Fo \right) - \bar{\phi}_{2,p}^- (-\bar{z}, Fo) - \right. \\ \left. - \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \phi_{2,p}^+ \left(a_{23}^* (\bar{z} - \bar{h}) + 2n\bar{h}, a_{23}^* (\bar{z} - \bar{h}) + 2n\bar{h} + \bar{h}, Fo \right) - \nu_1 \sum_{n=1}^{\infty} (\nu_1 \nu_2)^n \times \right. \\ \left. \times \phi_{2,p}^+ \left(a_{23}^* (\bar{z} - \bar{h}) + (2+2n)\bar{h}, a_{23}^* (\bar{z} - \bar{h}) + (1+2n)\bar{h}, Fo \right) \right]$$

$$\phi_{i,p}^{\pm}(x, y, Fo) = \bar{\phi}_{i,p}^{\pm}(x, Fo) - \bar{\phi}_{i,p}^{\pm}(y, Fo),$$

$$\bar{\phi}_{i,p}^{\pm}(x, Fo) = S(Fo - \bar{b}_p) \left(\pm \frac{x^2}{2a_{i0}} - \operatorname{erf} \left(\frac{z}{2a_{i0}^* \sqrt{Fo - \bar{b}_p}} \right) \left(Fo - \bar{b}_p + \frac{x^2}{2a_{i0}} \right) - \right. \\ \left. - \frac{x}{2a_{i0}} \sqrt{Fo - \bar{b}_p} \exp \left(-\frac{x^2}{4a_{i0}^{*2} (Fo - \bar{b}_i)} \right) \right) - S(Fo - \bar{b}_p - \bar{\tau}_1^*) \left(\pm \frac{x^2}{2a_{i0}} - \right.$$

$$-erf\left(\frac{z}{2a_{i0}^*\sqrt{Fo-\bar{b}_p-\bar{\tau}_1^*}}\right)\left(Fo-\bar{b}_p-\bar{\tau}_1^*+\frac{x^2}{2a_{i0}}\right)-\frac{x}{2a_{i0}}\sqrt{Fo-\bar{b}_p-\bar{\tau}_1^*}\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{x^2}{4a_{i0}^{*2}(Fo-\bar{b}_i-\bar{\tau}_1^*)}\right),$$

де $Fo = \frac{a_0\tau}{l_0^2}$, $Fo_k = \frac{a_0\tau_k}{l_0^2}$, l_0 – деякий лінійний розмір; a_0 – величина, розмірності

коефіцієнта теплопровідності; $a_{ij}^* = \sqrt{\frac{a_i}{a_j}}$, $\delta_i = \frac{\lambda_i}{\sqrt{a_i}}$, $\nu_1 = \frac{\delta_1 - \delta_2}{\delta_1 + \delta_2}$, $\nu_2 = \frac{\delta_3 - \delta_2}{\delta_3 + \delta_2}$,

$$\bar{z} = \frac{z}{l_0}, \quad \bar{h} = \frac{h}{l_0}, \quad \bar{q}_0 = \frac{q_0}{l_0^2}, \quad a_{ij} = \frac{a_i}{a_j}, \quad \bar{\tau}_i^* = \frac{\tau_i^* a_0}{l_0^2}, \quad \bar{b}_i = \frac{b_i a_0}{l_0^2}.$$

Підставивши у співвідношеннях (13) в $\theta_i(\bar{z}, Fo)$ ($i = 2, 3$) відповідно $\bar{z} = \bar{z}_i$

($\bar{z}_i = \frac{z_i}{l_0}$) та $Fo = \bar{Fo}_k$ ($k = \overline{1, K_\tau}$), отримаємо рекурентну систему двох нелінійних

алгебраїчних рівнянь, після розв'язання якої знаходимо шукані значення $\theta_{j+1}(\bar{z}_j, \bar{Fo}_k)$.

За відомими виразами для змінної Кірхгофа, температурне поле $t_i(\bar{z}, Fo)$ на основі (4) визначаємо зі співвідношення

$$t_i(\bar{z}, Fo) = \beta_i^{-1} \left(\sqrt{1 + 2\beta_i \theta_i(\bar{z}, Fo)} - 1 \right).$$

Розв'язування задачі термопружності. Оскільки температурне поле у тілі змінюється по товщині, то в ньому виникатимуть лише радіальні та кільцеві напруження [18]

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\phi\phi} = \sigma_0(\bar{z}, Fo) = -\frac{\bar{E}(\bar{z}, Fo)}{1-\bar{\nu}(\bar{z}, Fo)} \bar{\Phi}(\bar{z}, Fo). \quad (14)$$

При цьому радіальні переміщення відсутні, а осьові (без урахування переміщень тіла як твердого цілого) визначаються зі співвідношення

$$w(\bar{z}, Fo) = \int_{h/2}^{\bar{z}} \frac{1+\bar{\nu}(z, Fo)}{1-\bar{\nu}(z, Fo)} \bar{\alpha}_t(z, Fo) t(z, Fo) dz. \quad (15)$$

Тут функції $\bar{\nu}(\bar{z}, Fo)$, $\bar{E}(\bar{z}, Fo)$, $\bar{\Phi}(\bar{z}, Fo)$, $\bar{\alpha}_t(z, Fo)$, які мають вигляд (10), в межах i -ої складової співпадають відповідно з коефіцієнтами Пуассона $\nu_i(t_i)$, модулями

пружності $E_i(t_i)$, деформаціями $\Phi_i(t_i) = \int_0^{t_i(\bar{z}, Fo)} \alpha_{ii}(\eta) d\eta$ та коефіцієнтами лінійного розширення $\alpha_{ii}(t_i)$.

Результати числових досліджень. На основі отриманих співвідношень (13)-(15) досліджували поведінку температурного поля, напружень та переміщень, коли термомеханічні характеристики першої та третьої складової відповідали ніобію ($E_1(t_1) = (100 - 918 \cdot 10^{-5} t_1 - 411 \cdot 10^{-8} t_1^2) 10^9 \text{ Н/м}^2$, $\alpha_{t1}(t_1) = (5,541 + 0,00236 t_1) 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, $\lambda_t^{(1)} = 49,89(1 + 0,226 \cdot 10^{-3} t_1) \text{ Вт/(м} \cdot \text{ }^\circ\text{C)}$, $a_1 = 23,9 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{сек}$, $\nu_1 = 0,105$), а проміжкового шару – платині ($E_2(t_2) = (168 - 338 \cdot 10^{-4} t_2) 10^9 \text{ Н/м}^2$, $\alpha_{t2}(t_2) = (7,916 + 0,00278 t_2) 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$, $\lambda_t^{(2)} = 67,271(1 + 0,207 \cdot 10^{-3} t_2) \text{ Вт/(м} \cdot \text{ }^\circ\text{C)}$, $a_2 = 24,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{сек}$, $\nu_2 = 0,35$) при $q_0 = 48 \cdot 10^7 \text{ Вт/м}^3$, $m = 2$, $\tau_1^* = 40 \text{ сек}$, $\tau_2^* = 10 \text{ сек}$.

З метою вибору кроку сітки сплайна для фіксованих z та τ , взятих з діапазону значень, при яких проводились дослідження, порівняно температуру при різних K_τ . Встановлено, що досить обмежитися $K_\tau = 5$, оскільки його збільшення (зменшення кроку сітки) практично не впливає на точність обчислень.

Результати досліджень у вигляді графіків представлені на рис.2 ($h = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ та $h = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$) та рис.3-6 ($h = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$): суцільні лінії відповідають залежним від температури, а пунктирні – сталим термомеханічним характеристикам.

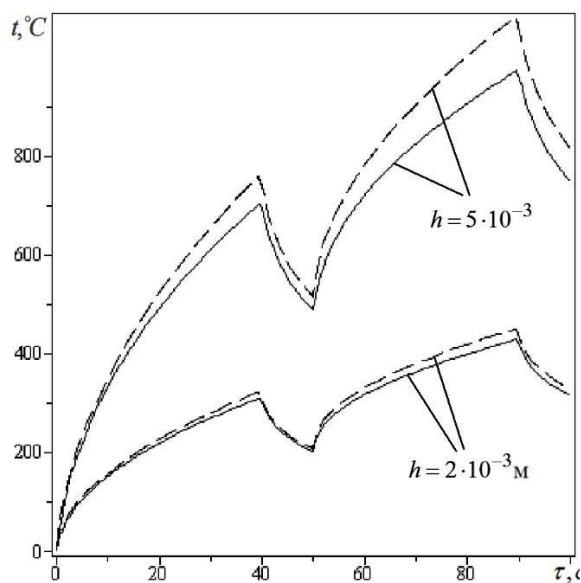


Рисунок 2

Figure 2

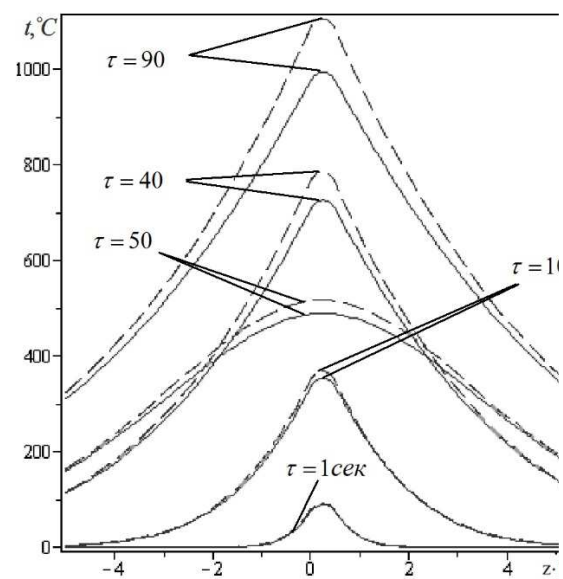


Рисунок 3

Figure 3

Залежність температури від часу на поверхнях поділу та від координати для різних моментів часу зображено відповідно на рис.2,3. Бачимо, що при більшому h нехтування температурною залежністю характеристик призводить до суттєвішого завищення температури. Найбільш помітний вплив термочутливості на серединній поверхні проміжкового шару, де в кінці дії першого імпульсу температура за врахування температурної залежності характеристик приблизно на 6%, а в кінці другого на 12% нижча, ніж за сталих. Розподіл температури, як і слід було очікувати, є симетричним відносно серединній поверхні проміжкового шару.

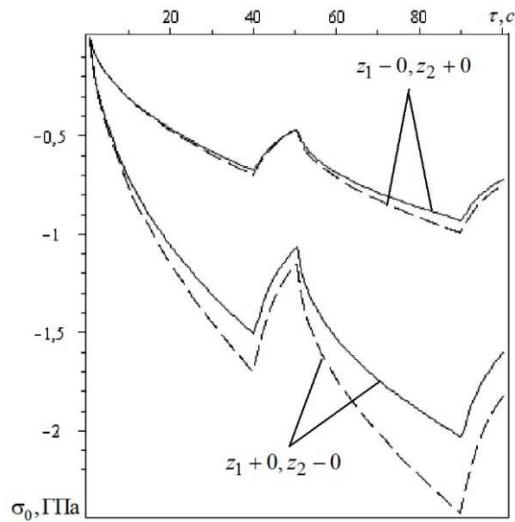


Рисунок 4

Figure 4

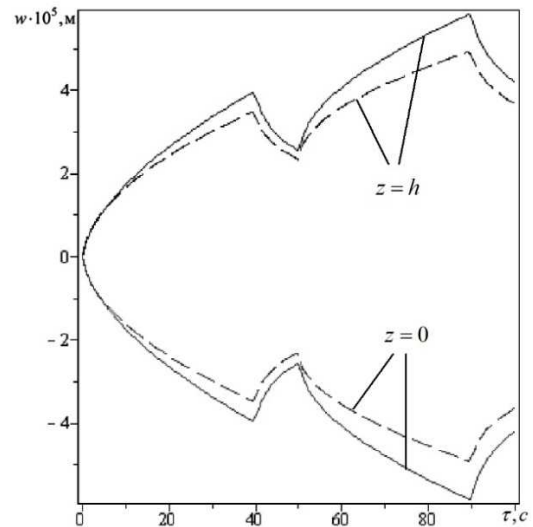


Рисунок 5

Figure 5

На рис.4 зображено залежності напружень від часу на поверхнях поділу. Бачимо, що напруження у тілі мають стрибкоподібний характер. Нехтування термочутливістю, аналогічно як у випадку температури, призводить до завищення абсолютних значень напружень. Її вплив для кожної складової проявляється по-різному: якщо для першої та третьої складової різниця між відповідними значеннями напружень з та без врахування температурної залежності характеристик не перевищує 5%, то для проміжного шару – близько 20%.

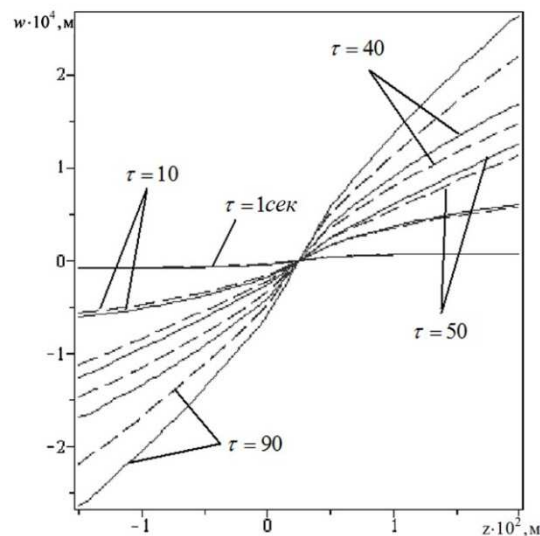


Рисунок 6

Figure 6

Залежності переміщень від часу на поверхнях поділу та від координати для різних часів зображені відповідно на рис.5,6. На відміну від температури та напружень, абсолютні значення переміщень за температурозалежних характеристик є більшими, ніж за сталих. Найбільш помітний вплив термочутливості в кінці першого та другого імпульсів у півбезмежних складових: різниця між абсолютними значеннями переміщень з та без врахування температурної залежності характеристик досягає

10% та 22% відповідно. Зазначимо, що зі збільшенням $|z|$ переміщення за сталих та залежних від температури характеристик співпадати будуть. Розподіл переміщень є асиметричним відносно серединної поверхні проміжкового шару.

Висновки. Запропоновано й апробовано чисельно-аналітичний підхід до розв'язування квазістатичних задач термопружності для безмежних трискладових термочутливих тіл за дії об'ємних джерел тепла. Відповідну задачу теплопровідності з використанням перетворення Кірхгофа, узагальнених функцій, функцій Гріна та лінійних сплайнів зведено до розв'язування рекурентної системи двох нелінійних алгебраїчних рівнянь відносно значень змінної Кірхгофа на поверхнях поділу у вузлах сітки сплайна.

Результати числових досліджень показали, що нехтування термочутливістю зумовлює завищення значень температури та напружень, що найбільш помітно на серединній поверхні проміжкового шару. Для переміщень неврахування температурної залежності характеристик призводить до заниження їхніх абсолютних значень.

Conclusions. The numerically-analytical approach to solving the quasi-static thermoelasticity problem for infinite threelayer bodies under the action of volumetric heat sources was proposed and approbated. The corresponding heat conduction problem using the Kirchhoff transformation, generalized functions, Green's functions and linear spline was reduced to solving a system of two recurrent non-linear algebraic equations relative to values of the Kirchhoff variable at the surfaces of division in the grid spline.

The results of numerical studies, in particular, showed that the neglect of thermosensitivity causes overstating of values of temperature and stress which is most notable on the median surface of intermediate layer. For displacements the neglect of the temperature dependence of characteristics results in the decrease of their absolute values.

Список використаної літератури

1. Моделирование теплопроводности трехслойной конструкции в системе конечно-элементного моделирования ANSYS [Текст] / Али М. Абед Аль-Зобайде, С.А. Пронкевич, И.М. Мартыненко // Теоретическая и прикладная механика. – Вып.27: международный научно-технический сборник; под ред. А.В. Чigareва. – Минск, 2012. – С.234–239.
2. Теплоперенос в трехслойной конструкции с высокотеплопроводной вставкой при циклическом изменении температуры внешней среды [Текст] / А.Я. Кузин, А.Н. Хуторной, Т.А. Мирошниченко, С.В. Хон // Теплофизика и аэромеханика. – 2005. – Т.12, №1. – С.85–94.
3. Подстригач, Я.С. Температурные поля и напряжения в элементах электро-вакуумных приборов [Текст] / Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно, М.М. Семерак. – Київ: Наук. думка, 1981. – 342 с.
4. Xu Yangjian. Convective Heat Transfer Steady Heat Conduction and Thermal Stress in a Ceramic/FGM/Metal Composite EFBF Plate [Text] / Xu Yangjian, Tu Daihui, Du Haiyang// Journal of Software. – 2011. – Vol.6, №2. – P.201–208.
5. Подстригач, Я.С. Термоупругость тел неоднородной структуры [Текст] / Я.С. Подстригач, В.А. Ломакин, Ю.М. Коляно. – М.: Наука, 1984. – 378с.
6. Дяконюк, Л.М. Гетерогенний підхід до моделювання процесу теплоперенесення в багатошарових конструкціях з урахуванням малих товщин окремих шарів [Текст] / Л.М. Дяконюк, Я.Г. Савула // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2005. – Вип. 1. – С.61–70.
7. Подстригач, Я.С. Температурное поле в системе твердых тел, сопряженных с помощью тонкого промежуточного слоя [Текст] // Инж.-физ. журн. – 1963. – Т.6, № 10. – С. 59–64.
8. Сулим, Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями: монографія. – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
9. Mohammad, Azadi. Nonlinear transient heat transfer and thermoelastic analysis of thick-walled FGM cylinder with temperature-dependent material properties using Hermitian transfinite element / Mohammad Azadi, Mahboobeh Azadi// Journal of Mechanical Science and Technology. – October 2009. – Vol.23, Issue 10. – P.2635–2644.
10. Tao, L.N. The heat conduction problem with temperature-dependent material properties [Text] / L.N. Tao // International Journal of Heat and Mass Transfer. – March, 1989. – Vol.32. – P.487–491.
11. Ünal, H.C. Temperature distribution in a plate with temperature-dependent thermal conductivity and internal heat generation [Text] / H.C. Ünal // International Journal of Heat and Mass Transfer. – October, 1989. – Volume 32. Issue 10. – P.1917–1926.

12. Численно-аналитический метод решения нелинейного нестационарного уравнения теплопроводности [Текст] / В.Д. Белик, Б.А. Урюков, Г.А. Фролов, Г.В. Ткаченко // Инженерно-физический журнал – 02 December 2008. – Т.81, №6. – С.1058–1062.
13. Tanigawa, Y. Transient heat conduction and material thermal stress problems of a nonhomogeneous plate with temperature dependent properties [Text] / Y. Tanigawa, T. Akai, R. Kawamura, N. Oka // J. of Thermal Stresses. – 1996. – 19:1. – P.77–102.
14. Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл; за заг. ред. Я.Й. Бурака, Р.М. Кушніра; в 5-ти т. – Т.3. Термопружність термочутливих тіл [Текст] / Р.М. Кушнір, В.С. Попович. – Львів: СПОЛОМ, 2009. – 412 с.
15. Процюк, Б.В. Квазистатические температурные напряжения в многослойной термочувствительной пластине при нагреве тепловым потоком [Текст] / Б.В. Процюк // Теоретическая и прикладная механика. – 2003. – Вып.38 – С.63–69.
16. Зиновьев, В.Е. Теплофизические свойства металлов при высоких температурах [Текст] / В.Е. Зиновьев. – Справ. М., 1989. – 384 с.
17. Процюк, Б.В. Нестационарное одномерное температурное поле тришаровых тел с плоско-параллельными границами раздела [Текст] / Б.В. Процюк, І.І. Верба // Вісник Львів. ун.- ту. Сер. прикл. матем. та інформ., 1999. – Вип.1. – С.200–205.
18. Кушнір, Р.М. Температурні напруження та переміщення в багат шаровій пластині з нелінійними умовами теплообміну [Текст] / Р.М. Кушнір, Б.В. Процюк, В.М. Синюта // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2002. – №6. – С.31–38.

Отримано 02.10.2014