

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ТЕРНОПІЛЬСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ІВАНА ПУЛЮЯ

**ГЛАДКА Олена Миколаївна**

УДК 519.63.001.57

**МОДЕЛЮВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ У  
ТЕХНОГЕННО-ДЕФОРМОВАНИХ ПЛАСТАХ МЕТОДАМИ  
КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ ТА СУМАРНИХ ЗОБРАЖЕНЬ**

**01.05.02** – математичне моделювання та обчислювальні методи

**Автореферат  
дисертації на здобуття наукового ступеня  
кандидата технічних наук**

Тернопіль – 2015

Дисертацією є рукопис

Робота виконана у Національному університеті водного господарства та природокористування Міністерства освіти і науки України, м. Рівне

**Науковий керівник:** доктор технічних наук, професор  
**Бомба Андрій Ярославович,**  
Рівненський державний гуманітарний університет,  
м. Рівне, завідувач кафедри інформатики та  
прикладної математики

**Офіційні опоненти:** доктор технічних наук, професор  
**Чернуха Ольга Юрївна,**  
Центр математичного моделювання Інституту  
прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я.С. Підстригача НАН України, м. Львів,  
завідувач відділом математичного моделювання  
нерівноважних процесів

доктор технічних наук, професор  
**Бейко Іван Васильович,**  
Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут», м. Київ,  
професор кафедри математичної фізики

Захист відбудеться “ 30 ” червня 2015 р. о 14 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д **58.052.01** у Тернопільському національному технічному університеті імені Івана Пулюя за адресою: 46001, м. Тернопіль, вул. Руська, 56.

З дисертацією можна ознайомитись у науково-технічній бібліотеці Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя за адресою: 46001, м. Тернопіль, вул. Руська, 56.

Автореферат розіслано “     ” травня 2015 р.

Вчений секретар  
спеціалізованої вченої ради Д 58.052.01

Б. Г. Шелестовський

## ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

**Актуальність теми.** На даний час є актуальними проблеми розробки методики математичного опису складних фільтраційних процесів, зокрема, витіснення вуглеводнів із неоднорідних нафтогазових чи ущільнених (сланцевих) пластів, що зазнали деформацій при експлуатації покладів, з метою подальшого дослідження цих процесів за допомогою комп'ютерного моделювання.

При цьому виникає необхідність у побудові математичних моделей, які б враховували зворотній вплив характеристик процесу на фільтраційні властивості пористого середовища, нелінійність фільтрації, що пов'язана зі зміною потенціалу швидкості в окремих зонах пласта, та зміни границь цих зон тощо. Ефективним методом математичного моделювання таких процесів у криволінійних областях, обмежених лініями течії і еквіпотенціальними лініями, є розроблений А.Я. Бомбою і його учнями підхід на базі комплексного аналізу (з використанням методів квазіконформних відображень). Він автоматизує побудову динамічних сіток, що є основою для розрахунків величини поля швидкості, розподілу тиску в пласті, значень фільтраційних витрат і перетоків між свердловинами, точок призупинки потоку, інших характеристик моделі. Проте у випадках зонально-неоднорідних пластів цей підхід потребує подальшого розвитку, а також розроблення нової методики та обчислювальної технології для числового розв'язання і визначення параметрів відповідних крайових задач.

Одним із шляхів підвищення ефективності зазначеного підходу є використання як його компонентів числово-аналітичних методів сумарних зображень, що були розроблені Г.М. Положим і розвинуті у роботах його учнів А.А. Глуценка, І.І. Ляшка та ін., а також альтернуючого методу Шварца декомпозиції області. Аналіз літературних джерел показує, що такий підхід залишився поза увагою науковців.

Тому видається доцільним покласти в основу дисертаційного дослідження ідею синтезу числових методів комплексного аналізу, сумарних зображень і декомпозиції області з метою розв'язання актуального наукового завдання – математичного моделювання нелінійних квазіідеальних фільтраційних процесів у техногенно-деформованих пористих пластах, границі зон неоднорідності яких визначаються шуканими лініями динамічної сітки.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Робота виконана в рамках планів наукових досліджень Національного університету водного господарства та природокористування (1991–2015 рр.) та науково-дослідних робіт на теми: “Системне математичне моделювання нелінійних збурень процесів типу «фільтрація-конвекція-дифузія» з післядією при неповних даних” (№ ДР 0109U001065); “Просторові аналоги крайових задач на квазіконформні відображення і проблеми моделювання нелінійних процесів у пористих середовищах” (№ ДР 0112U001014).

**Мета і задачі дослідження.** *Метою роботи* є математичне моделювання нелінійних квазіідеальних фільтраційних процесів у зонально-неоднорідних пористих нафтогазових, водоносних, малопроникних (сланцевих) LEF-пластах, геометрія зон яких визначається з урахуванням зворотнього впливу характеристик процесу на провідність середовища, і розроблення підходу до розв'язання відповідних крайових задач та визначення (ідентифікації) параметрів на основі

синтезу числових методів комплексного аналізу, сумарних зображень та декомпозиції задачі.

Для досягнення мети поставлено такі завдання:

1) сформувати математичні моделі квазіідеальних фільтраційних процесів у LEF-пластах (горизонтальних пористих схильних до деформації водонафтогазових пластах) для випадків нелінійно-шаруватих, нелінійно двояко-шаруватих, неоднорідних середовищ, а також малопроникних середовищ із зонами підвищеної проникності;

2) розробити методику і обчислювальну технологію розв'язування нелінійних крайових задач для одно-, дво- та багатозв'язних криволінійних LEF-областей та LEF-областей з вільними межами на основі синтезу і модифікації числових методів комплексного аналізу (конформних і квазіконформних відображень), сумарних зображень (та їх узагальнень), декомпозиції області і задачі та поетапної фіксації характеристик процесу і середовища;

3) узагальнити методи сумарних зображень шляхом побудови числово-аналітичних представлень розв'язків нелінійних крайових задач для рівнянь із змінними коефіцієнтами, що моделюють фільтраційні процеси у неоднорідних, анізотропних, деформівних середовищах;

4) розроблені математичні моделі і методи застосувати до математичного опису особливостей протікання нелінійних фільтраційних процесів у нелінійно-шаруватих, нелінійно двояко-шаруватих, неоднорідних пористих пластах за умов зворотнього впливу параметрів процесу на вихідні характеристики середовища;

5) розробити методику числового визначення параметрів моделі.

*Об'єкт дослідження* – нелінійні квазіідеальні фільтраційні процеси у LEF-пластах за умов взаємовпливу характеристик процесу і середовища.

*Предмет дослідження* – математичні моделі фільтраційних процесів у зонально-неоднорідних пористих нафтогазових, водоносних, ущільнених (сланцевих) LEF-пластах за умов взаємовпливу їх характеристик та параметрів середовища і числові методи розв'язання нелінійних крайових задач.

**Методи дослідження.** У роботі розроблено методику математичного моделювання та розв'язання задач на основі синтезу числових методів комплексного аналізу (конформних та квазіконформних відображень), методів сумарних зображень та їх модифікацій, методів декомпозиції області і задачі та розпаралелювання обчислень; побудовано методику отримання числово-аналітичних представлень розв'язків, які узагальнюють методи сумарних зображень на випадки задач для рівнянь із змінними коефіцієнтами; запропоновано методику числового визначення параметрів квазіідеальних процесів у нелінійно-шаруватих областях, а також використано методи побудови різницевих схем, поетапної параметризації окремих характеристик процесу і середовища.

### **Наукова новизна отриманих результатів:**

1) сформувано нові та модифіковано існуючі математичні моделі нелінійних процесів витіснення (фільтрації) у зонально-неоднорідних пористих LEF-пластах, геометрія зон яких наперед невідома і визначається з урахуванням зворотнього впливу потенціалу поля швидкості та функції течії на провідність середовища;

2) здійснено постановку нелінійних крайових задач, в яких коефіцієнт провідності середовища залежить від потенціалу поля (напору, тиску) і від функції

течії, для одно-, дво- та багатозв'язних криволінійних LEF-областей і вперше розроблено методику та обчислювальну технологію їх розв'язання на основі синтезу числових методів квазіконформних відображень, сумарних зображень для диференціальних рівнянь з розривними коефіцієнтами (у випадках нелінійно-шаруватих середовищ) чи числово-аналітичних представлень розв'язків (що є узагальненнями методів сумарних зображень на випадки нелінійно-неоднорідних середовищ) та декомпозиції області із застосуванням альтернуючого методу Шварца;

3) розроблені на основі LEF-пластів математичні моделі і методи розв'язання нелінійних крайових задач вперше застосовано до комп'ютерного моделювання нелінійних фільтраційних процесів у нафтогазових, водоносних, ущільнених (сланцевих) пластах, зональна неоднорідність яких є техногенно-зумовленою, за умов взаємовпливу параметрів процесу і середовища;

4) вперше отримано розв'язки задач на числове визначення параметрів квазіідеальних процесів (значень коефіцієнта провідності, критичних значень потенціалу і значень локальних фільтраційних витрат) у нелінійно-шаруватих LEF-пластах;

5) подальший розвиток отримали методи сумарних зображень, які були узагальнені на випадки спеціального класу нелінійних крайових задач для рівнянь із змінними коефіцієнтами, що описують фільтраційні процеси у неоднорідних, анізотропних середовищах.

*Достовірність* отриманих у роботі результатів підтверджена строгим використанням як компонентів розробленої методики повністю теоретично обґрунтованих методів сумарних зображень, відомого альтернуючого методу Шварца декомпозиції області та апробованих іншими дослідниками числових методів конформних і квазіконформних відображень. Стійкість та збіжність запропонованих методів і алгоритмів проілюстровано великою кількістю числових розрахунків, зокрема, з використанням відомих точних розв'язків для тестових прикладів та шляхом порівняння отриманих результатів з числовими розрахунками за іншими алгоритмами.

#### **Практичне значення отриманих результатів.**

- Розроблені у роботі математичні моделі дозволяють описувати реальні процеси фільтрації (витіснення) вуглеводнів з пласта за умов зворотнього впливу характеристик процесу на властивості середовища, дають можливість замінити дороговартісні фізичні експерименти для дослідження впливу техногенно-зумовлених деформацій породи у навколосвердловинних зонах нафтогазових пластів на процеси нафтогазовидобутку.

- Побудовані математичні моделі і методи розв'язання відповідних задач можуть бути використані для виконання прогностичних розрахунків при проектуванні розробок родовищ нафти і газу, застосовуватися для експертної оцінки результатів різноманітних технічних заходів, що проводяться з метою інтенсифікації нафтогазовидобування, виявлення і ліквідації застійних зон тощо.

- Розроблена методика розв'язання нелінійних крайових задач дозволяє автоматично розраховувати координати вузлів динамічної сітки, знаходити лінії розділу шарів (ділянок) сталості коефіцієнта провідності середовища, обчислювати фільтраційні витрати, величину швидкості і інші параметри

досліджуваних процесів, а також визначати (ідентифікувати) значення коефіцієнта провідності, критичні значення потенціалу і значення локальних фільтраційних витрат за додатковими даними.

- Створена обчислювальна технологія містить комплекс комп'ютерних програм (процедур), що реалізують розроблені у роботі алгоритми, які є універсальними і придатними для вирішення також і інших, не описаних тут задач, зокрема, екологічних та природоохоронних.

- Результати роботи впроваджено Дочірнім підприємством «Науково-дослідний інститут нафтогазової промисловості» Національної акціонерної компанії «Нафтогаз України» (ДП «Науканафтогаз»).

- Окремі матеріали дисертаційної роботи використовуються у навчальному процесі при розробці дисциплін “Чисельні методи конформних і квазіконформних відображень” для студентів НУВГП та “Методи комплексного аналізу”, “Проблеми оптимізації і керування процесами і системами”, “Сучасні проблеми прикладної математики” для студентів РДГУ із спец. “Прикладна математика”, а також при написанні студентами курсових та дипломних робіт.

- Більшість результатів, отриманих в роботі, подано у вигляді формул, алгоритмів, таблиць і рисунків, які можуть бути включені у різні посібники та довідники і використані в інженерній практиці.

**Апробація результатів дисертації.** Матеріали дисертаційної роботи обговорювалися на III, IV, XIII, XIV міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука (Київ, 1994, 1995, 2010, 2012), I, III наук.-техн. конф. “Обч. методи і системи перетворення інформації” (Львів, 2010, 2014), міжнар. матем. конф. ім. В.Я. Скоробогатька (Львів, 2011), IV, V, VI, VII міжнар. конф. ім. акад. І.І. Ляшка “Обч. та прикл. матем.” (Київ, 2011, 2012, 2013, 2014), XVIII всеукр. наук. конф. “Сучасні проблеми прикл. матем. та інформатики” (Львів, 2012), IV міжнар. конф. молодих вчених з диф. рівнянь та їх застосувань ім. Я.Б. Лопатинського (Донецьк, 2012), всеукр. наук. конф. “Сучасні проблеми матем. моделювання та обч. методів” (Рівне, 2013, 2015), Intern. Conf. “Complex Analysis, Potential Theory and Applications” (Київ, 2013), 9-тій міжнар. наук.-практ. конф. “Нафта і газ – 2013” (Яремча, 2013), усеукр. наук. конф. “Матем. моделювання та матем. фізика” (Кременчук, 2013), міжнар. наук. конф. “Питання оптимізації обчислень” (Кацивелі, 2013), VI міжнар. наук. конф. “Сучасні проблеми матем. моделювання, прогнозування та оптимізації” (Кам'янець-Подільський, 2014), Intern. Conf. “Complex Analysis and Related Topics” (St. Petersburg, 2014), міжнар. наук.-техн. конф. “Комп'ютерне моделювання в наукомістких технологіях” (Харків, 2014), всерос. научн. конф. “Обратные краевые задачи и их приложения” (Казань, 2014), VIII междунар. научно-практ. конф. “Матем. моделиров. в научно-технолог. и эколог. проблемах нефтегазовой отрасли” (Атырау, Казахстан, 2014), на звітних науково-практичних конференціях професорсько-викладацького складу, аспірантів і студентів НУВГП (Рівне, 1991–2015).

У повному обсязі дисертація обговорювалася на розширеному науковому семінарі кафедри автоматизації, електротехнічних та комп'ютерно-інтегрованих технологій Національного університету водного господарства та природокористування під керівництвом д. т. н., проф. В.В. Древецького (21 жовтня 2014 р.); розширеному науковому семінарі кафедри програмної інженерії Тернопільського

національного технічного університету імені Івана Пулюя під керівництвом д. т. н., проф. М.Р. Петрика (23 лютого 2015 р.); розширеному науковому семінарі кафедри обчислювальної математики факультету кібернетики Київського національного університету ім. Т. Шевченка під керівництвом чл.-кор. НАН України, д. ф.-м. н., проф. С.І. Ляшка (16 жовтня 2014 р.); розширеному науковому семінарі Центру математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України під керівництвом д. т. н., проф. О.Ю. Чернухи (7 жовтня 2014 р.); засіданні секції розробки родовищ нафти та газу і буріння свердловин Вченої ради ДП «Науканафтогаз» (20 лютого 2014 р.).

**Публікації.** За основними матеріалами роботи опубліковано 42 наукові праці, серед яких: 20 статей, із них – 11 у фахових наукових виданнях України, 2 статті – в іноземних фахових наукових періодичних виданнях; 22 публікації у матеріалах міжнародних та всеукраїнських конференцій, 5 праць опубліковані без співавторів. Є статті у виданнях, що індексуються у міжнародних наукометричних базах Scopus [1], РИНЦ (eLibrary.ru) [1, 5, 7, 10], Math. Reviews [1], EBSCO [2], Ulrich's Periodicals Directory [2, 7], Index Copernicus [2, 7] та ін.

**Особистий внесок здобувача** полягає у безпосередній участі у проведенні теоретичних досліджень, модифікації методів та розробці алгоритмів розв'язання відповідних крайових задач, самостійному проведенні числових експериментів, оформленні проміжних результатів роботи у вигляді публікацій і доповідей. Науковому керівнику А.Я. Бомбі, а також А.П. Кузьменку належить загальна постановка задач та загальний підхід до їх розв'язання. Всі результати, що складають основний зміст дисертаційної роботи, отримані автором самостійно.

У публікаціях, написаних у співавторстві, здобувачеві належить: розробка обчислювальної технології розв'язання нелінійних крайових задач для LEF-областей на основі синтезу числових методів комплексного аналізу і сумарних зображень [3, 6, 18, 27–29, 41], побудова математичних моделей фільтраційних процесів у нелінійно-шаруватих нафтогазових та сланцевих LEF-пластах [5, 8, 21, 35–36], узагальнення методів сумарних зображень [4, 7, 10, 12, 23–26], розробка підходу до визначення (ідентифікації) параметрів квазіідеальних процесів [1–2, 11, 30–33], розробка й програмна реалізація чисельних алгоритмів [1–3, 5–8, 10–13, 17–20, 25–29, 32–34, 36–42].

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел (198 бібліографічних найменувань) та 3-х додатків. Загальний обсяг дисертації – 206 сторінок, з них – 155 сторінок основного тексту, 45 рисунків, 10 таблиць.

## ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** обґрунтовано актуальність роботи, сформульовано мету та основні задачі дослідження, визначено наукову новизну роботи та її зв'язок із науковими програмами. Наведено основні висновки та результати, отримані у роботі, їх практичне значення, дані про їх апробацію та особистий внесок здобувача.

У **першому розділі** викладено загальний опис проблеми дослідження, наведено огляд літературних джерел за темою дисертації, розглянуто основи числових методів конформних і квазіконформних відображень та числово-аналітичних методів сумарних зображень. Вивчено та систематизовано наведені у

науковій літературі основні досягнення з проблем теорії фільтрації, підземної гідрогазодинаміки, з проблем математичного та комп'ютерного моделювання процесів витіснення у неоднорідних водонафтогазових пластах та числових методів розв'язання відповідних крайових задач, теорії обернених та некоректно поставлених задач.

У роботі вводиться поняття LEF-пласта (LEF – абр. від Lines of Equipotential and Flow) – пористого (водоносного, нафтогазового, сланцевого) пласта, що моделюється криволінійною обмеженою поверхнями течії (поверхнями, що утворені лініями течії) і еквіпотенціальними поверхнями (утвореними еквіпотенціальними лініями) LEF-областю із заданим квазіпотенціальним полем, відповідна область комплексного квазіпотенціалу якої є багатогранником (у плоскому випадку – багатокутником) із сторонами, паралельними осям координат, що є сукупністю “склесених” між собою вздовж вертикальних чи горизонтальних поверхонь багатогранників (багатокутників, у кінцевому рахунку – прямокутників), котрі відповідають ділянкам пласта (з неповними даними про їх границі), які характеризуються однорідним середовищем чи деякими спеціальним чином заданими параметрами.

Більшість сучасних наукових розробок у напрямку моделювання фільтраційних процесів, незважаючи на величезну їх різноманітність, що пов'язана як з особливостями протікання відповідних процесів, так і з необхідністю різного роду схематизацій об'єктів досліджень, спираються на основний закон фільтрації (закон Дарсі) та його модифікації. У 20-х роках минулого століття у розвитку теорії фільтрації визначились два взаємопов'язані напрямки: вивчення руху ґрунтових вод під гідротехнічними спорудами, меліоративного будівництва тощо (фундаментом для якого послужили роботи М.М. Павловського) і наука про підземну гідравліку нафти і газу, засновником якої є Л.С. Лейбензон, у роботах котрого вперше розроблена цілісна математична теорія фільтрації газу і газованої рідини. Фундаментальний внесок у розвиток теорії фільтрації у нафтогазоводоносних пластах внесли також і Б.Б. Лапук, П.Я. Полубаринова-Кочина, С.А. Христианович, І.А. Чарний, В.Н. Щелкачев та ін. Розробками основ технології нафтовіддачі присвячені роботи М. Маскета, основи теорії двофазної фільтрації викладені у роботах С. Баклея, М. Леверетта, дослідження А. Ван Евердингена і У. Херста дозволили удосконалити гідродинамічні розрахунки просування води у нафтогазових покладах.

Важливі результати з розробки методів послідовних конформних відображень стосовно фільтраційних задач отримав П.Ф. Фільчаков. В.І. Лаврик розробив підхід до розв'язання модельних задач для рівнянь конвективного переносу, що ґрунтується на переході від криволінійної фізичної області фільтрації до відповідної області комплексного потенціалу. Серед розробок у напрямку математичного моделювання складних фізичних процесів, що відбуваються, зокрема, при фільтрації ґрунтових вод, витісненні вуглеводнів із нафтогазових пластів тощо, за умов зворотнього впливу характеристик процесу на вихідні параметри середовища і з урахуванням фільтраційних деформацій та збурень важливе місце займають дослідження А.Я. Бомби та його учнів.

Значний внесок у створення фундаментальних підходів до побудови математичних моделей складних систем та процесів і методів їх розв'язання



зробили також Х. Азіз, Дж. Андерсон, Г.І. Баренблатт, І.В. Бейко, В.М. Булавацький, А.П. Власюк, О.В. Голубева, В.С. Дейнека, В.Н. Єнгов, Ю.П. Желтов, Л.М. Журавчак, Р. Коллінз, Н. Крістеа, І.І. Ляшко, С.І. Ляшко, В.О. Міщенко, В.Н. Моначов, Е. Оран, М.Р. Петрик, В.Ф. Півень, Я.Д. П'янило, П. Роуч, І.В. Сергієнко, Е. Сеттарі, В.В. Скопєцький, Г. Уолліс, А. Упер, Р.Т. Фазлиєв, Є.Я. Чапля, О.Ю. Чернуха та ін.

Основи методу сумарних зображень були розроблені у роботах Г.М. Положого та його учнів: Б.Н. Бублика, І.М. Великоіваненка, І.І. Ляшка, А.А. Глушенка, О.Ю. Грищенко, І.М. Ляшенка, В.Л. Макарова, А.А. Скоробагатька, П.І. Чаленка та ін., які розвивали цей метод стосовно задач теорії фільтрації, теорії пружності, теорії пластин і оболонок, теорії потенціалу тощо. Метод сумарних зображень можна вважати дискретним аналогом методу інтегральних представлень, що є узагальненою назвою класичних методів теорії потенціалу, інтегральних рівнянь, функції Гріна, інтегральних перетворень і розділення змінних. При цьому розв'язки задач отримуються у вигляді числово-аналітичних формул сумарних зображень, що дозволяє робити вибірковий рахунок, дає можливість уникнути накопичення обчислювальних похибок та є зручним для комп'ютерної реалізації.

У розділі також розроблено методуку застосування методів сумарних зображень і декомпозиції області до розв'язання крайових задач стаціонарної і нестаціонарної фільтрації у плоских та просторових елементах нафтових пластів. Зокрема, запропоновано підхід до розв'язання модельної задачі фільтрації у шаруватому горизонтальному великої протяжності нафтовому пласті (що описується крайовою задачею для еліптичного рівняння із кусково-сталими коефіцієнтами у нескінченній смузі), в основі якого поєднання ідеї альтернуючого методу Шварца з ефектом інтегральних перетворень методу сумарних зображень. Розв'язано модельні задачі нестаціонарної фільтрації у плоскому та просторовому елементах нафтових пластів з використанням декомпозиції задачі шляхом синтезу методу сумарних зображень з методом прямих. Ці прийоми та методи, а також побудовані алгоритми використані у наступних розділах роботи для розв'язання більш складних задач у криволінійних LEF-областях.

У **другому розділі** на основі синтезу числових методів квазіконформних відображень та сумарних зображень розроблено методуку і обчислювальну технологію розв'язування нелінійних крайових задач для криволінійних одно- та багатозв'язних LEF-областей, а також для LEF-областей з вільними межами.

Розглядаються задачі стаціонарної фільтрації, що підпорядковується закону Дарсі, знаходження гармонічної функції (потенціалу)  $\varphi = \varphi(x, y)$  у криволінійних LEF-областях  $G_z$  ( $z = x + iy$ ): а) **однозв'язних**, обмежених екіпотенціалами

$$L_* = \{z : f_1(x, y) = 0\}, \quad L^* = \{z : f_3(x, y) = 0\} \quad \text{і лініями течії} \quad L_0 = \{z : f_4(x, y) = 0\}, \\ L^0 = \{z : f_2(x, y) = 0\}, \quad \text{у яких потенціал поля задовольняє крайові умови} \quad \varphi|_{L_*} = \varphi_*,$$

$$\varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{L_0} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{L^0} = 0 \quad (-\infty < \varphi_* < \varphi^* < +\infty - \text{сталі, } n - \text{зовнішня нормаль до}$$

відповідної кривої); б) **двоzv'язних**, обмежених двома гладкими замкненими

контурами  $L_* = \{z : f_*(x, y) = 0\}$  – внутрішнім і  $L^* = \{z : f^*(x, y) = 0\}$  – зовнішнім, у яких для утворення однозв’язних областей  $G_z^{\Gamma} = G_z \setminus \Gamma$  робиться умовний розріз  $\Gamma$  вздовж деякої шуканої лінії течії (тоді,  $L_0$  і  $L^0$  – граничні лінії течії області  $G_z^{\Gamma}$ , що є відповідно верхнім і нижнім берегами розрізу  $\Gamma$ ); в) **тризв’язних**, обмежених двома внутрішніми контурами свердловин – еквіпотенціальними лініями  $L_* = \{z : f_*(x, y) = 0\}$  і  $L^* = \{z : f^*(x, y) = 0\}$  і непроникним зовнішнім контуром  $L = \{z : f(x, y) = 0\}$ , у яких робляться два умовні розрізи  $\Gamma_*$  і  $\Gamma^*$  вздовж таких ліній течії (що є лініями розділення течії), котрі однозначно визначаються точками “призупинки” потоку  $H_* \in L$ ,  $H^* \in L$  і  $G_z^{\Gamma} = G_z \setminus (\Gamma_* \cup \Gamma^*)$ ; г) **з вільною межею** (кривою депресії), на якій задана додаткова умова:  $\varphi|_{BC} = g(y)$ .  $H \geq y \geq y_* = f^*(x_*)$  ( $g(y)$  – деяка відома монотонно спадна функція).

Для **багатозв’язних** LEF-областей складність полягає у неповній визначеності вигляду області комплексного квазіпотенціалу, що залежить від впливу багатьох чинників: конфігурації фізичної області, зокрема, взаємного розміщення свердловин, способів проведення умовних розрізів з метою зведення багатозв’язної області до однозв’язної, співвідношення між значеннями граничних потенціалів тощо. У роботі запропоновано новий підхід до класифікації ситуаційних станів формування течії, що дозволяє уніфікувати постановки задач на обернення квазіконформних відображень, їх різницеві аналоги і алгоритми розв’язання для всіх випадків **тризв’язної** криволінійної LEF-області, обмеженої трьома еквіпотенціальними лініями, і **чотиризв’язної** криволінійної LEF-області, обмеженої трьома еквіпотенціальними лініями та непроникним контуром.

Введенням функції течії  $\psi = \psi(x, y)$ , комплексно спряженої до  $\varphi$ , і заміною крайових умов вздовж граничних ліній течії на  $\psi|_{L_0} = 0$ ,  $\psi|_{L^0} = Q = \int_{L_*} -\frac{\partial \varphi}{\partial y} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy$  (де  $Q$  – повна фільтраційна витрата чи перетік між відповідними контурами), приходимо до більш загальної задачі на квазіконформне відображення  $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$  LEF-області  $G_z$  ( $G_z^{\Gamma}$ ) на відповідну область комплексного потенціалу, що є багатокутником, сторони якого паралельні осям координат, а, отже, може розглядатися як сукупність, певним чином, “склеєних” між собою прямокутників (рис. 1), зокрема, у найпростішому випадку – прямокутником  $G_{\omega} = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$  з невідомою висотою  $Q$ .

Цю задачу замінено на обернену до неї, тому що, область комплексного потенціалу  $G_{\omega}$  є більш “зручною”, на відміну від геометрично складної фізичної області  $G_z$ , перехід до оберненого відображення автоматично вирішує проблему дискретизації задачі при застосуванні числових методів, дозволяє використати переваги методу сумарних зображень для розв’язання відповідних різницевих

задач, будувати динамічну сітку руху речовини, визначити фільтраційні витрати (перетоки) не розв'язуючи інтегральних рівнянь тощо. Тут під терміном “обернена задача” розуміється як перехід від конформного відображення  $G_z \rightarrow G_\omega$  до оберненого відображення  $G_\omega \rightarrow G_z$  так і те, що задача на конформне відображення  $G_\omega \rightarrow G_z$  є ще й оберненою у традиційному сенсі (коли за додатковими даними про розв'язок задачі, знаходять ще й невідомі коефіцієнти, які входять у рівняння чи крайові умови), оскільки постановка задачі містить невідомі параметри (витрати та ін.).

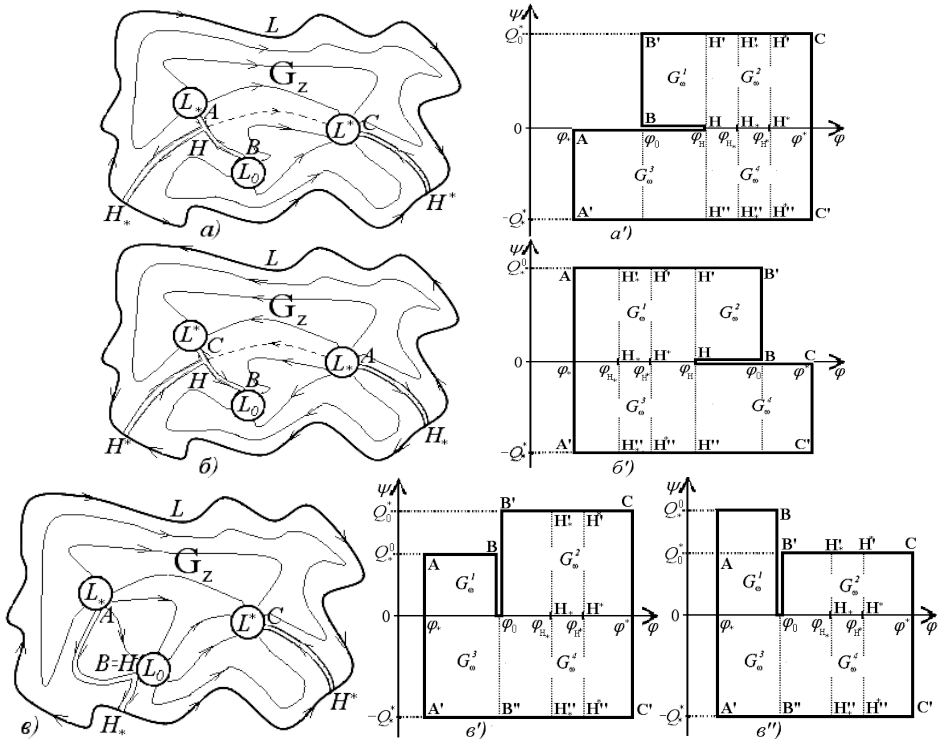


Рис. 1. Схеми формування течії (а, б, в) і конфігурації відповідної області комплексного квазіпотенціалу (а', б', в', в'') для чотириз'язної LEF-області у випадках:

- 1)  $Q_*^0 = 0$  (а, а'), 2)  $Q_*^0 = 0$  (б, б'), 3)  $Q_*^0 > 0$ ,  $Q_0^* > 0$  (в, в', в'')

Обернена крайова задача на конформне відображення  $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$  області  $G_\omega$  на  $G_z$  ( $G_z^r$ ) при невідомих значеннях параметрів

$$\tilde{Q} = \int_0^{\tilde{Q}} \frac{1}{J} \left( \left( \frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2 \right) d\psi \quad (J = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \text{якобіан переходу, } \tilde{Q} - \text{повна}$$

витрата  $Q$  чи значення перетоків  $Q_*^*, Q_0^*, Q_*^0$ ), доповнена умовами ортогональності

$$\left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} \right) \Big|_{\varphi=\tilde{\varphi}} = 0, \quad \left( \frac{\partial x}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} \right) \Big|_{\psi=\tilde{\psi}} = 0 \quad (\tilde{f} = \tilde{f}(x, y), \quad \tilde{f}' = \tilde{f}'(x, y) -$$

рівняння відповідних граничних еквіпотенціалей і ліній течії,  $\tilde{\varphi}$  – граничне значення потенціалу,  $\tilde{\psi}$  – може мати значення  $0, Q, Q_*, Q_0^*, Q_0^0$ ), зводиться до розв’язування у прямокутних підобластях  $G_\omega$  рівнянь Лапласа  $\Delta x(\varphi, \psi) = 0$ ,  $\Delta y(\varphi, \psi) = 0$  при відповідних умовах спряження, крайових умовах і умовах ортогональності ліній динамічної сітки до границі області.

На основі визначеної в області комплексного квазіпотенціалу ортогональної сітки  $G_\omega^\gamma$  побудовано різницевий аналог поставленої задачі. У випадку двозв’язної чи тривз’язної LEF-області замість відповідно двох крайових умов масмо умови періодичності функцій  $x$  і  $y$  на розрізах, а умови ортогональності ліній динамічної сітки до границі на розрізах замінюємо вимогами задовольняти рівняння Лапласа. Окрім цього, в області комплексного квазіпотенціалу, що відповідає багатозв’язній LEF-області, будуємо нерівномірну сітку і задаємо додаткові умови для знаходження точок “призупинки” потоку та умови спряження на границях прямокутних підобластей. Також додаткові умови задаємо і для LEF-області з вільною межею.

Наближення значень функцій  $x$  і  $y$  у внутрішніх вузлах розрахункової сітки (координат внутрішніх вузлів динамічної сітки) у процесі ітерацій знаходимо за формулами сумарних зображень  $(x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j), y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j))$ :

$$x_{i,j} = \sum_{k=1}^n p_{j,k} \left( \mu_k^i a_k + \nu_k^i b_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^m \frac{\nu_k^{|i-t|}}{\mu_k - \nu_k} (p_{1,k} x_{t,0} + p_{n,k} x_{t,n+1}) \right),$$

$$y_{i,j} = \sum_{k=1}^n p_{j,k} \left( \mu_k^i c_k + \nu_k^i d_k + \gamma^2 \sum_{t=1}^m \frac{\nu_k^{|i-t|}}{\mu_k - \nu_k} (p_{1,k} y_{t,0} + p_{n,k} y_{t,n+1}) \right), i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}.$$

Невідомі витрати  $\tilde{Q}$  у процесі ітераційних наближень знаходимо за формулами  $\tilde{Q} = \Delta_\varphi(n+1)/\gamma$ , де квазіконформний інваріант  $\gamma = \Delta_\varphi / \Delta_\psi$  отримуємо на підставі умови “конформної подібності в малому” відповідних елементарних чотирикутників областей  $G_\omega^\gamma$  і  $G_z^\gamma$ :  $\gamma = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=0}^{m,n} \gamma_{i,j}$ ,

$$\gamma_{i,j} = \frac{\sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i,j+1})^2}}{\sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j})^2}}.$$

У розділі розроблено алгоритми числового розв’язання відповідних задач, що реалізовані у вигляді процедур для подальшого комп’ютерного моделювання, які автоматично вирішують проблему вибору вузлів та побудови динамічної сітки, розрахунку поля величини швидкості, обчислення фільтраційних витрат та інших невідомих параметрів процесу. Проведено низку числових розрахунків для

областей різної конфігурації та при різній дискретизації, які підтверджують збіжність, обчислювальну стійкість та ефективність запропонованих алгоритмів.

У **третьому розділі** розроблено підхід до моделювання нелінійних процесів витіснення (одно- та двофазної фільтрації) у неоднорідних малопроникних нафтогазових (чи ущільнених, сланцевих) деформівних пластах (LEF-пластах, геометрія зон неоднорідності яких наперед невідома) з урахуванням зворотнього впливу потенціалу поля швидкості та функції течії на провідність середовища. Побудовано методіку та обчислювальну технологію розв'язування відповідних крайових задач для нелінійно-шаруватих, нелінійно-двожко-шаруватих, нелінійно-неоднорідних та анізотропних одно-, дво- та трив'язних криволінійних областей, обмежених еквіпотенціальними лініями і лініями течії, на основі синтезу числових методів квазіконформних відображень, сумарних зображень для диференціальних рівнянь з розривними коефіцієнтами чи числово-аналітичних узагальнень методів сумарних зображень у поєднанні з декомпозицією області за методом Шварца.

Квазіідеальні процеси у нелінійно-шаруватих (нелінійно-двожко-шаруватих) горизонтальних LEF-пластах описуємо відповідними крайовими задачами, отриманими на основі закону Дарсі  $\vec{v} = \kappa_f \cdot \text{grad } \varphi$  та рівняння нерозривності  $\text{div } \vec{v} = 0$ , де  $\vec{v} = v_x(x, y) + i v_y(x, y)$  – швидкість,  $\varphi$  – квазіпотенціал поля,  $\kappa_f = \kappa / \mu_n$  – коефіцієнт фільтрації,  $\mu_n$  – динамічна в'язкість у пластових умовах речовини, що видобувається,  $\kappa$  – коефіцієнт проникності пласта, який задається:

1) кусково-сталою функцією, лініями розриву котрої є шукані еквіпотенціали:  $\kappa(\varphi(x, y)) = \kappa_l$  ( $\varphi^{(l-1)} < \varphi \leq \varphi^{(l)}$ ,  $l = \overline{1, \bar{s}}$ ), що моделює нелінійно-шаруватий LEF-пласт з урахуванням зворотнього впливу потенціалу поля на проникність середовища; 2)  $\kappa(x, y) = \begin{cases} \kappa_0, & (x, y) \in G_z^0, \\ \kappa_{l, \bar{l}}, & (x, y) \in L_z^{(l)}, l = \overline{1, \bar{s}}, \bar{l} = \overline{1, \bar{s}}, \end{cases}$  де  $\kappa_0$  – коефіцієнт

проникності недеформованого пласта,  $\kappa_{l, \bar{l}}$  – коефіцієнт проникності у  $l$ -тій тріщині ( $\kappa_0 \ll \kappa_{l, \bar{l}}$ ), що моделює процеси витіснення із ущільнених скелясто-

осадових порід (котрі є малопроникними), в яких для промислової (економічно вигідної) експлуатації існуючі мікротріщини (що містять вуглеводні) об'єднані в єдину структуру між собою та з свердловинами за допомогою штучно утворених тріщин гідравлічного розриву пласта; 3) кусково-сталою функцією із розривами вздовж ділянок шуканих еквіпотенціальей і ліній течії:  $\kappa(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)) = \kappa^{(q, l)}$ , ( $\varphi_* \leq \varphi^{(q-1)} < \varphi \leq \varphi^{(q)} \leq \varphi^*$ ,  $q = \overline{1, \bar{s}}$ ,  $0 \leq \psi^{(l-1)} < \psi \leq \psi^{(l)} \leq Q$ ,  $l = \overline{1, \bar{s}}$ ), що моделює

нелінійно-двожко-шаруватий LEF-пласт з урахуванням зворотнього впливу потенціалу поля та функції течії на проникність середовища; 4) функцією від квазіпотенціалу:  $\kappa = \kappa(\varphi)$ , що моделює нелінійно-неоднорідний LEF-пласт з урахуванням зворотнього впливу потенціалу поля на проникність середовища; 5)  $\kappa(\varphi, \psi) = \tilde{\kappa}(\varphi) \underline{\kappa}(\psi)$ , що моделює нелінійно-неоднорідний LEF-пласт з урахуванням зворотнього впливу потенціалу поля та функції течії на проникність середовища.

Для шаруватих LEF-пластів значення функцій  $x$  і  $y$  у внутрішніх вузлах сіткової області комплексного квазіпотенціалу (сукупності суміжних вздовж вертикальних і/або горизонтальних ліній сіткових прямокутників) з урахуванням умов спряження знаходимо шляхом поєднання альтернуючого методу Шварца і методу сумарних зображень для диференціальних рівнянь з розривними коефіцієнтами. Для цього область  $G_\omega^\gamma$  “розбиваємо” на сіткові прямокутники з

“накладками”:  $G_\omega^\gamma = \bigcup_{q=1}^{\bar{s}} \left( \bigcup_{l=1}^{\bar{s}-1} \tilde{G}_{q,l} \right) = \bigcup_{l=1}^{\bar{s}} \left( \bigcup_{q=1}^{\bar{s}-1} \tilde{G}_{q,l} \right)$ , де  $\tilde{G}_{q,l} = \{(\varphi_i, \psi_j) \in G_\omega^\gamma :$

$\varphi_{m^{(q-1)}+1} \leq \varphi_i \leq \varphi_{m^{(q)}-1}, \psi_{n^{(l-1)}+1} \leq \psi_j \leq \psi_{n^{(l)}-1}\}$ ,  $\tilde{G}_{q,l} = \{(\varphi_i, \psi_j) \in G_\omega^\gamma : \varphi_{m^{(q-1)}+1} \leq \varphi_i \leq \varphi_{m^{(q+1)}-1}, \psi_{n^{(l-1)}+1} \leq \psi_j \leq \psi_{n^{(l)}-1}\}$ . Отримуємо  $\bar{s}(\bar{s}-1) + \bar{s}(\bar{s}-1)$  проєкцій вихідної

задачі (стосовно підобластей  $\tilde{G}_{q,l}, \tilde{G}_{q,l}$ ) для знаходження послідовностей функцій

$$\left\{ \left( \tilde{x}_{i,j}^{(q,l)(\xi)}, \tilde{y}_{i,j}^{(q,l)(\xi)} \right) \right\}_{\xi=0}^{\infty} \quad (l = \overline{1, \bar{s}-1}): \quad \tilde{x}_{i,j}^{(q,l)} = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \tilde{x}_{i,j}^{(q,l)(\xi)}, \quad \tilde{y}_{i,j}^{(q,l)} = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \tilde{y}_{i,j}^{(q,l)(\xi)};$$

$$\left\{ \left( \tilde{x}_{i,j}^{(q,l)(\delta)}, \tilde{y}_{i,j}^{(q,l)(\delta)} \right) \right\}_{\delta=0}^{\infty}, \quad (q = \overline{1, \bar{s}-1}): \quad \tilde{x}_{i,j}^{(q,l)} = \lim_{\delta \rightarrow \infty} \tilde{x}_{i,j}^{(q,l)(\delta)}, \quad \tilde{y}_{i,j}^{(q,l)} = \lim_{\delta \rightarrow \infty} \tilde{y}_{i,j}^{(q,l)(\delta)}.$$

У випадках неоднорідних та анізотропних LEF-пластів з використанням ідеї поетапної фіксації окремих параметрів задачі шляхом поєднання числових (різницевих) і аналітичних (розділення змінних, інтегральних представлень тощо) методів побудовано числово-аналітичні представлення розв'язків відповідних задач, які є узагальненнями методів сумарних зображень.

У розділі розглядаються задачі витіснення вуглеводнів із пласта, коли витісняюча речовина і речовина, що видобувається, мають однакові фізичні та механічні властивості, поршневого (повного) витіснення нафти водою і двофазної фільтрації (вода-нафта) за схемою Баклея-Леверетта, коли має місце сумісний рух обох рідин. Математичне моделювання цих процесів зводиться до задачі відшукування положення лінії розділу рідин, розв'язання якої потребує знаходження розв'язків двох взаємопов'язаних підзадач: на побудову поля швидкості та динамічної сітки у конкретний момент часу і на визначення рівняння лінії розділу, шляхом розв'язання задачі конвективного переносу відносно побудованого поля швидкості (рис. 2).

У **четвертому розділі** на основі синтезу числових методів квазіконформних відображень та сумарних зображень у поєднанні з декомпозицією області за методом Шварца розроблено метод розв'язання нелінійних модельних задач теорії шаруватих криволінійних LEF-областей за умов взаємовпливу характеристик процесу і середовища та визначення (ідентифікації) параметрів (кусково-сталих значень коефіцієнта провідності, критичних значень квазіпотенціалу на екіпотенціальних лініях розділу шарів, локальних витрат через ділянки границі, обмежені лініями течії, що розділяють шари) за вимірами на границі.

У цьому розділі термін “обернена” задача використовується у двох різних значеннях: а) як обернена коефіцієнтна задача, що полягає в ідентифікації

параметрів відповідної математичної моделі; б) як задача на побудову оберненого квазіконформного відображення, що виступає у ролі “прямої” задачі для обернених коефіцієнтних.

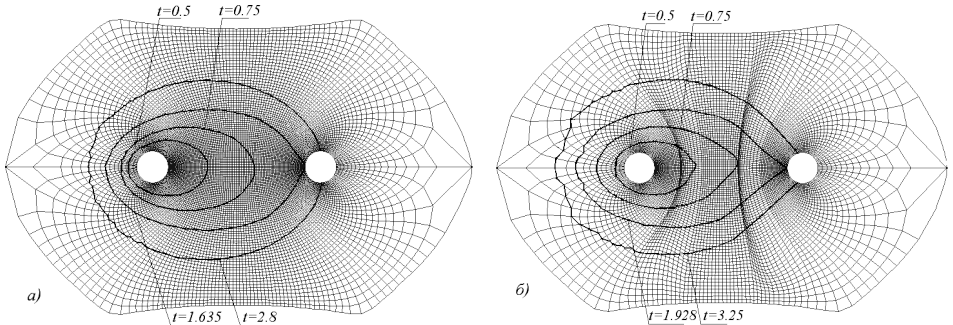


Рис. 2. Динамічна сітка та лінії розділу рідин у різні моменти часу  $t$  для однорідного (а) та нелінійно-шаруватого (б) LEF-пластів

Пропонований підхід, як і більшість сучасних методів розв'язання таких задач, базується на певному звуженні класу шуканих коефіцієнтів, додатковому використанні особливостей прямих задач та підходів до їх розв'язання. Суттєво використовується те, що у розв'язаних задачах процес фільтрації досліджується саме у LEF-областях, а геометрія підобластей сталості коефіцієнта проникності пласта визначається еквіпотенціальними лініями і лініями течії. При переході до оберненого квазіконформного відображення нелінійність вихідної задачі локалізується, а використання запропонованих прийомів декомпозиції задачі у поєднанні з синтезом методів комплексного аналізу і сумарних зображень дозволяє без значних труднощів, шляхом лише незначної модифікації відповідних процедур розроблених раніше алгоритмів з додаванням виведених додаткових умов, знаходити розв'язки задач на визначення параметрів з одночасним розрахунком динамічної сітки, значень величини швидкості тощо.

## ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ РОБОТИ ТА ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота є завершеним науковим дослідженням, в якому розв'язано наукове завдання математичного моделювання нелінійних квазіідеальних фільтраційних процесів у нафтогазових, водоносних, ущільнених (сланцевих) зонально-неоднорідних LEF-пластах і розроблення на основі синтезу числових методів комплексного аналізу, сумарних зображень та декомпозиції задачі методики і обчислювальної технології розв'язання відповідних крайових задач за умов взаємовпливу характеристик процесу і середовища та визначення параметрів моделі. При цьому отримано такі основні результати та висновки.

1. Сформовано нові математичні моделі нелінійних процесів витіснення (одно- та двофазної фільтрації) у шарувато-неоднорідних пористих чи тріщинуватих горизонтальних нафтогазових пластах, ущільнених осадових породах (сланцях) з зонами підвищеної проникності (тріщинами ГРП), в яких лінії розділу шарів наперед невідомі і визначаються з урахуванням зворотнього впливу характеристик процесу на провідність середовища.

2. Розроблено методику розв'язання нелінійних крайових задач для систем еліптичних диференціальних рівнянь, в яких коефіцієнт провідності середовища зазнає зворотнього впливу від потенціалу поля (напору, тиску) і від функції течії, для одно-, дво- та багатозв'язних криволінійних областей, обмежених еквіпотенціальними лініями і лініями течії, (LEF-областей) з використанням методів сумарних зображень для диференціальних рівнянь з розривними коефіцієнтами (у випадках шаруватих середовищ) чи числово-аналітичних представлень розв'язків (що є узагальненнями методів сумарних зображень на випадки неоднорідних та анізотропних середовищ).

3. Створено обчислювальну технологію на основі синтезу числових методів квазіконформних відображень, сумарних зображень і декомпозиції області за методом Шварца, яка реалізована у вигляді пакету прикладних програм для подальшого комп'ютерного моделювання з автоматичним розрахунком координат вузлів динамічної сітки, знаходженням ліній розділу шарів (ділянок) сталості коефіцієнта провідності середовища, обчисленням фільтраційних витрат (перетоків), розрахунком поля величини швидкості і інших параметрів досліджуваних процесів.

4. Вперше метод сумарних зображень застосовано як компоненту розроблених раніше (на основі комплексного аналізу) обчислювальних процедур. Поєднання методів комплексного аналізу (обернень конформних відображень) і методів сумарних зображень для наближення координат внутрішніх вузлів динамічної сітки дозволило суттєво покращити існуючі методики розв'язання такого класу задач, підвищити ефективність (швидкість збіжності) відповідного ітераційного процесу, оскільки, вирішило проблему відшукування необхідної точності початкового наближення шуканих функцій, а також дало можливість у комплексі (сумарно) на кожному ітераційному кроці враховувати вплив не тільки навколишніх, а й усіх граничних і внутрішніх вузлів динамічної сітки, а тому значно пришвидшило досягнення спряженості шуканих гармонічних функцій.

5. Розроблено методику синтезу числових методів квазіконформних відображень з декомпозицією задачі із застосуванням альтернуючого методу Шварца для декомпозиції області комплексного квазіпотенціалу на підобласті з "накладками", що дає змогу, по-перше, ефективно знаходити ("склеювати") неперервні розв'язки нелінійних крайових задач для диференціальних рівнянь з розривними коефіцієнтами, по-друге, розв'язувати задачі у більш "зручних" підобластях, аніж уся область вихідної задачі, що є особливо актуальним для розрахунків у нафтогазових пластах, де маємо значні співвідношення між розмірами продуктивної зони пласта і діаметрами свердловин, по-третє, дозволяє розпаралелювати обчислювальний процес, оскільки розрахунки у підобластях на кожному ітераційному кроці є незалежними один від одного і можуть виконуватись паралельно з використанням сучасних комп'ютерних мережевих технологій.

6. Узагальнено методи сумарних зображень на випадки розв'язання крайових задач, що описують квазіідеальні процеси у неоднорідних та анізотропних середовищах. Отримані при цьому числово-аналітичні представлення розв'язків відповідних задач для рівнянь із змінними коефіцієнтами побудовано з використанням ідеї поетапної фіксації окремих параметрів задачі шляхом



поєднання числових (різницевих) і аналітичних (розщеплень, розділення змінних, інтегральних представлень тощо) методів.

7. Розроблено підхід і відповідні алгоритми числового визначення параметрів квазіідеальних процесів (кусково-сталих значень коефіцієнта провідності, критичних значень потенціалу і значень локальних фільтраційних витрат) у нелінійно-шаруватих пористих середовищах.

8. Проведені числові експерименти показали, що для областей різної конфігурації, зокрема, і з негладкими границями, та при різних значеннях параметрів розбиття розрахункової області отримані значення повної витрати, матриць величини швидкості і координат вузлів динамічної сітки практично співпадають з експериментальними результатами, котрі описані у літературі, та аналогічними розрахунками, зробленими іншими авторами, що підтверджує обчислювальну стійкість алгоритмів. Ефективність розробленого підходу забезпечується меншою кількістю кроків ітераційних процесів, за яку досягається прийнятний результат, та вищою точністю обчислень.

9. Розроблено рекомендації й виконано дослідно-промислові роботи з впровадження методики розрахунку та моделювання квазіідеальних процесів за умов зворотнього впливу характеристик процесу на вихідні характеристики середовища. Спільно з ДП «Науканафтогаз» встановлено експрес методики інтерпретації результатів індикаторних досліджень напрямків фільтраційних потоків та ідентифікації параметрів при розробці та проектуванні родовищ нафти і газу.

## СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Бомба А.Я. Методы комплексного анализа идентификации параметров квази-идеальных процессов в нелинейно двоякостроистых пористых пластах / А.Я. Бомба, Е.Н. Гладкая // Международный научно-технический журнал "Проблемы управления и информатики". – 2014.– № 6. – С. 17–28.

2. Hladka O. The complex analysis method of numerical identification of parameters of quasiideals processes in doubly-connected nonlinear-layered curvilinear domains / O. Hladka, A. Bomba // Journal of Mathematics and System Science (USA). – 2014. – Vol. 4, № 7 (Ser. No. 29). – P. 514–521.

3. Бомба А.Я. Синтез числових методів квазіконформних відображень, сумарних зображень та декомпозиції області для розв'язання нелінійних крайових задач у шаруватих середовищах / А.Я. Бомба, О.М. Гладка // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2013.– №1 (111) – С. 35–45.

4. Бомба А.Я. Численно-аналитические методы комплексного анализа и расщеплений моделирования одного класса нелинейных квазиидеальных полей/ А.Я. Бомба, Е.Н. Гладкая // Компьютерная математика. – 2014. – № 2. – С. 3–13.

5. Бомба А.Я. Математичне моделювання нелінійних фільтраційних процесів у сланцевих пластах / А.Я. Бомба, О.М. Гладка // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – Львів, 2013. – № 18. – С. 32–42.

6. Бомба А.Я. Синтез числових методів конформних відображень та сумарних зображень при моделюванні ідеальних полів для криволінійних областей / А.Я. Бомба, А.П. Кузьменко, О.М. Гладка // Вісник Київського національного університету ім. Т. Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки. – Київ, 2012.– № 2. – С. 87–94.

7. Бомба А.Я. Числово-аналітичні представлення розв'язків одного класу нелінійних крайових задач / А.Я. Бомба, О.М. Гладка // Вісник КрНУ ім. М. Остроградського. – Кременчук, 2013. – Вип. 3 (80). – С. 76–83.

8. Бомба А.Я. Методи комплексного аналізу і сумарних зображень моделювання нелінійних процесів витіснення для системи двох свердловин у двоюго-шаруватому нафтогазовому пласті / А.Я. Бомба, О.М. Гладка, А.П. Кузьменко // Вісник ТНТУ. – Тернопіль, 2014. – Вип. 1 (73). – С. 238–251.

9. Гладка О.М. Задачі ідентифікації характеристик середовища і параметрів квазіідеального процесу за умов їх взаємовпливу / О.М. Гладка // Вісник ТНТУ. – Тернопіль, 2014. – Вип. 2 (74). – С. 242–253.

10. Бомба А.Я. Числово-аналітичне узагальнення методу сумарних зображень розв'язання одного класу нелінійних крайових задач / А.Я. Бомба, О.М. Гладка // Вісник Харк. нац. ун-ту. – 2013. – № 1089. Сер. "Мат. моделюв. Інформ. технології. АСУ". Вип. 23. – С. 22–30.

11. Бомба А.Я. Моделювання зворотнього впливу характеристик процесу витіснення нафти на проникність пласта / А.Я. Бомба, О.М. Гладка // Матем. та комп'ютерне моделюв. Серія: Техн. науки: зб. наук. пр. – Кам'янець-Подільський, 2014. – Вип. 11. – С. 5–20.

12. Bomba A. The syntheses of numerical methods of complex analysis and numerical-analytical representations for solving of a class of nonlinear boundary value problems in curvilinear domains / A. Bomba, O. Hladka. // Zeszyty Naukowe WSinf. – 2014.– Vol. 13, Nr 1. – С. 120–131.

13. Гладка О.М. Про розв'язок крайової задачі для рівняння дивергентного типу у нескінченній багатоплощинній смузі / О.М. Гладка, А.П. Кузьменко // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. праць. – К. : Інститут математики НАН України, 1995. – Вип. 9. – С. 168–173.

14. Гладка О.М. Розв'язування крайових задач для одного класу двозв'язних криволинійних областей поєднанням числових методів конформних відображень та сумарних зображень / О.М. Гладка // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. – Рівне, 2012. – Вип. 9 (18). – С. 45–58.

15. Гладка О.М. До розв'язування крайових задач для рівняння дивергентного типу з розривними коефіцієнтами в шаруватих кругових областях / О.М. Гладка // Вісник НУВГП. – Рівне, 2005. – Вип. 2 (30). – С. 276–281.

16. Гладка О.М. До розв'язування нестационарної крайової задачі для рівняння з розривними коефіцієнтами в багатоплощинній області / О.М. Гладка // Вісник НУВГП. – Рівне, 2007. – Вип. 1 (37). – С. 282–287.

17. Кузьменко А.П. До розв'язування нестационарних крайових задач у шаруватих кругових областях / А.П. Кузьменко, О.М. Гладка // Гідромеліорація та гідротехнічне будівництво. Наук.-техн. збірник. – Рівне, 1998. – Вип. 23. – С. 76–83.

18. Бомба А.Я. Синтез числових методів комплексного аналізу і сумарних зображень розв'язання модельних крайових задач для областей з вільними межами / А.Я. Бомба, О.М. Гладка, А.П. Кузьменко // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. – Рівне, 2013. – Вип. 10 (19). – С. 105–116.

19. Кузьменко А.П. До розв'язування початково-крайової задачі для параболічного рівняння методом прямих / А.П. Кузьменко, О.М. Гладка // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. – Рівне, 2010. – Вип. 7 (16). – С. 110–115.

20. Кузьменко А.П. Один з підходів до застосування методу прямих сумісно з Р-трансформаціями для розв'язування просторової початково-крайової задачі / А.П. Кузьменко, О.М. Гладка // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. – Рівне, 2011. – Вип. 8 (17). – С. 108–112.

21. Бомба А.Я. О математическом моделировании нелинейных процессов вытеснения нефти и газа с учетом образования трещин гидроразрыва пласта / А.Я. Бомба, Е.Н. Гладкая

- // Сб. трудов VIII междунар. научно-практ. конф. «Матем. моделиров. в научно-технолог. и эколог. проблемах нефтегазовой отрасли» – Атырау (Казахстан), 2014. – С. 22–28.
22. Hladka O. The complex analysis method of numerical identification of parameters of nonlinear quasiideal processes / O. Hladka // Intern. Conf. "Complex Analysis and Related Topics". Abstracts. – St. Petersburg: Chebyshev Laboratory of St. P. S. Univ., 2014. – P. 13.
23. Бомба А.Я. Синтез методів комплексного аналізу і числово-аналітичних узагальнень формул сумарних зображень розв'язання одного класу нелінійних крайових задач для криволінійних областей / А.Я. Бомба, О.М. Гладка // Праці міжнародної наукової конференції "Питання оптимізації обчислень (ПОО-ХЛ)". – Кацивелі, 2013. – С. 40.
24. Bomba A. Methods Quasiconformal Mappings and Splittings for Solution of a Class of Nonlinear Boundary Value Problems / A. Bomba, O. Hladka // International Conference "Complex Analysis, Potential Theory and Applications". Abstracts. – Kyiv, 2013. – [http://www.imath.kiev.ua/~complex/conf\\_2013/abstracts.html](http://www.imath.kiev.ua/~complex/conf_2013/abstracts.html).
25. Бомба А.Я. Методи квазіконформних відображень і числово-аналітичних розщеплень моделювання одного класу нелінійних квазіідеальних полів / А.Я. Бомба, О.М. Гладка // VI Міжнародна наукова конференція ім. акад. І.І. Ляшка "Обчислювальна та прикладна математика". Матеріали конференції. – Київ, 2013. – С. 82.
26. Бомба А.Я. Розв'язання одного класу нелінійних крайових задач шляхом синтезу методів комплексного аналізу і числово-аналітичних представлень / А.Я. Бомба, О.М. Гладка // Усеукраїнська наукова конференція «Математичне моделювання та математична фізика»: матеріали конференції. – Кременчук, 2013. – С. 40–41.
27. Бомба А.Я. Розв'язання нелінійних крайових задач у шаруватих середовищах шляхом синтезу числових методів квазіконформних відображень та сумарних зображень / А.Я. Бомба, О.М. Гладка // IV Міжнар. конференція з диф. рівнянь та їх застосувань ім. Я.Б. Лопатинського. Тези доповідей. – Донецьк, 2012. – С. 25.
28. Бомба А.Я. Синтез числових методів квазіконформних відображень, сумарних зображень та декомпозиції області при моделюванні квазіідеальних полів для криволінійних областей / А.Я. Бомба, А.П. Кузьменко, О.М. Гладка // V Міжнародна наукова конференція "Обчислювальна та прикладна математика" (до 90-річчя від дня народження академіка І.І. Ляшка). Матеріали конференції. – Київ, 2012. – С. 36.
29. Бомба А.Я. Обчислювальна технологія розв'язання нелінійних крайових задач на основі синтезу числових методів квазіконформних відображень, сумарних зображень та декомпозиції області / А.Я. Бомба, О.М. Гладка // XVIII Всеукр. наук. конф. "Сучасні проблеми прикл. матем. та інформатики". Матеріали конференції. – Львів, 2012. – С. 45.
30. Бомба А.Я. Синтез числових методів комплексного аналізу і сумарних зображень ідентифікації параметрів нелінійних квазіідеальних процесів / А.Я. Бомба, О.М. Гладка, Л.Л. Крока // VII Міжнародна наукова конференція "Обчислювальна та прикладна математика" ім. акад. І.І. Ляшка: Матеріали конференції – Київ, 2014. – С. 26–27.
31. Бомба А.Я. Проблемы идентификации коэффициента проницаемости нефтегазовых пластов / А.Я. Бомба, Е.Н. Гладкая, С.В. Ярошак // Обратные краевые задачи и их приложения: материалы конф. [Электронный ресурс]: – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2014.
32. Бомба А.Я. Метод числової ідентифікації параметрів квазіідеальних процесів витіснення у малопроникних (сланцевих) пластах / А.Я. Бомба, О.М. Гладка // Вип. 3. Обч. методи і системи перетвор. інформації; зб. пр. III наук.-техн. конф. – Львів, 2014. – С. 9–10.
33. Бомба А.Я. Метод комплексного аналізу ідентифікації параметрів нелінійних квазіідеальних процесів / А.Я. Бомба, О.М. Гладка // «Комп'ютерне моделювання в наукомістких технологіях». Праці міжнар. наук.-техн. конф. – Харків, 2014. – С. 33–36.
34. Кузьменко А.П. До розв'язування крайових задач для рівнянь параболічного типу / А.П. Кузьменко, О.М. Гладка // Наук.-техн. конф. "Обч. методи і системи перетворення інформації". Збірник праць. – Львів, 2010. – С. 40–43.

35. Бомба А.Я. Числові методи комплексного аналізу моделювання нелінійних процесів витіснення нафти та газу із складно структурованих осадових порід / А.Я. Бомба, О.М. Гладка, А.М. Сінчук, С.В. Ярошак // Матеріали 9-ої Міжнар. наук.-практ. конф. "Нафта і газ України – 2013" – Яремче, 2013. – С. 74–75.

36. Бомба А.Я. Синтез числових методів комплексного аналізу, сумарних зображень та декомпозиції задачі при математичному моделюванні нелінійних процесів витіснення у сланцевих пластах / А.Я. Бомба, О.М. Гладка // VI Міжнар. наук. конф. «Сучасні проблеми матем. моделюв., прогнозув. та оптимізації». – Кам'янець-Подільський, 2014. – С. 20–21.

37. Кузьменко А.П. Паралельний алгоритм чисельно-аналітичного розв'язку одного класу просторових початково-крайових задач для параболічного рівняння з розривними коефіцієнтами / А.П. Кузьменко, О.М. Гладка, В.М. Кузьменко // XIV Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука. Матеріали конференції. – Київ, 2012. – С. 263.

38. Кузьменко А.П. Варіант синтезу методу прямих та методу сумарних наближень із декомпозицією області / А.П. Кузьменко, О.М. Гладка, В.М. Кузьменко // IV Міжнар. конф. ім. акад. І.І. Ляшка. "Обч. та прикл. матем.". Матеріали конференції. – Київ, 2011. – С. 102.

39. Кузьменко А.П. Один варіант синтезу методу прямих та Р-трансформацій на основі декомпозиції області / А.П. Кузьменко, О.М. Гладка, В.М. Кузьменко // Міжнар. матем. конференція ім. В.Я. Скоробогатка. Тези доповідей. – Львів, 2011. – С. 109.

40. Кузьменко А.П. До методики розв'язування крайових задач в шаруватих середовищах / А.П. Кузьменко, О.М. Гладка // IV Міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука. Тези доповідей. – Київ, 1995. – С. 143.

41. Бомба А.Я. Обчислювальна технологія на основі синтезу числових методів комплексного аналізу і сумарних зображень розв'язання модельних крайових задач для областей з вільними межами / А.Я. Бомба, А.П. Кузьменко, О.М. Гладка // Всеукр. наук. конф. "Сучасні пробл. матем. моделюв. та обч. методів". Матер. конф. – Рівне, 2013. – С. 33.

42. Кузьменко А.П. Один метод розв'язування крайових задач для деяких рівнянь у частинних похідних із розривними коефіцієнтами / А.П. Кузьменко, О.М. Гладка // III Міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука. Тези доповідей. – Київ, 1994. – С. 66.

## АНОТАЦІЇ

**Гладка О. М. Моделювання нелінійних фільтраційних процесів у техногенно-деформованих пластах методами комплексного аналізу та сумарних зображень.** – На правах рукопису.

*Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи.* – Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя. – Тернопіль, 2015.

Дисертація присвячена математичному моделюванню нелінійних квазіідеальних фільтраційних процесів у водонафтогазових техногенно-деформованих пластах, геометрія зон неоднорідності яких визначається з урахуванням зворотнього впливу характеристик процесу на провідність середовища, і розробленню на основі синтезу числових методів квазіконформних відображень, сумарних зображень та декомпозиції задачі методики розв'язування відповідних крайових задач з можливістю визначення параметрів моделі.

Створено обчислювальну технологію і комплекс прикладних програм, що реалізують відповідні алгоритми розв'язання нелінійних крайових задач, в яких коефіцієнт провідності середовища залежить від потенціалу поля і від функції течії, для одно-, дво- та багатозв'язних криволінійних LEF-областей, обмежених лініями течії і еквіпотенціальними лініями, з використанням методів сумарних

зображень для диференціальних рівнянь з розривними коефіцієнтами (у випадках шаруватих середовищ) чи побудованих числово-аналітичних представлень розв'язків (що узагальнюють методи сумарних зображень на випадки неоднорідних середовищ). Розроблено методіку поєднання числових методів квазіконформних відображень з декомпозицією задачі із застосуванням альтернуючого методу Шварца для розділення області комплексного квазіпотенціалу на підобласті з “накладками”. Запропоновано підхід і відповідні алгоритми числового визначення параметрів квазіідеальних процесів у нелінійно-шаруватих і нелінійно двоєко-шаруватих LEF-пластах.

**Ключові слова:** математичне моделювання, числові методи, квазіконформні відображення, методи комплексного аналізу, методи сумарних зображень, декомпозиція області.

**Гладкая Е. Н. Моделирование нелинейных фильтрационных процессов в техногенно-деформированных пластах методами комплексного анализа и суммарных представлений.** – На правах рукописи.

*Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 01.05.02 – математическое моделирование и вычислительные методы. – Тернопольский национальный технический университет имени Ивана Пулюя. – Тернополь, 2015.*

Диссертация посвящена математическому моделированию нелинейных квазиидеальных фильтрационных процессов в водонафтогазовых техногенно-деформированных пластах, геометрия зон неоднородности которых определяется с учетом обратного влияния характеристик процесса на проводимость среды, и разработке на основе синтеза численных методов квазиконформных отображений, суммарных представлений и декомпозиции задачи методіки решения соответствующих краевых задач с возможностью определения параметров модели.

Создана вычислительная технология и комплекс прикладных программ, реализующих соответствующие алгоритмы решения нелинейных краевых задач, в которых коэффициент проводимости среды зависит от потенциала поля и от функции тока, для одно-, двух- и многосвязных криволинейных LEF-областей, ограниченных линиями тока и эквипотенциальными линиями, с использованием методов суммарных представлений для дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами (в случаях слоистых сред) или построенных численно-аналитических представлений решений (обобщающих методы суммарных представлений на случаи неоднородных сред).

Разработана методіка сочетания численных методов квазиконформных отображений с декомпозицией задачи с применением альтернирующего метода Шварца для разделения области комплексного квазіпотенціалу на подобласті с “накладками”, что дает возможность, эффективно “склеивать” решения нелинейных краевых задач для дифференциальных уравнений с разрывными коэффициентами, решать задачи в более “удобных” подобластях, чем вся область исходной задачи, что является особенно актуальным для расчетов нефтяных пластов, где имеем большую разницу между размерами продуктивной зоны и диаметрами скважин, а также позволяет распараллелить вычислительный процесс.

В работе методы суммарных представлений обобщены также на случаи решения краевых задач, описывающих квазиидеальные процессы в неоднородных и анизотропных средах. Полученные при этом численно-аналитические представления решений соответствующих задач для уравнений с переменными коэффициентами построены с использованием идеи поэтапной фиксации отдельных параметров задачи путем сочетания численных (разностных) и аналитических (расщеплений, разделения переменных, интегральных представлений и т.п.) методов.

Предложен подход и соответствующие алгоритмы численного определения параметров квазиидеальных процессов в нелинейно-слоистых и нелинейно двояко-слоистых LEF-пластах.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, численные методы, квазиконформные отображения, методы комплексного анализа, методы суммарных представлений, декомпозиция области.

**Hladka O. M. Modelling of nonlinear filtration processes in technogenic-deformable reservoirs by methods of complex analysis and summary representations.** – On the right of the manuscript.

*The Thesis for a Technical Science Candidate's (PhD) degree on specialty 01.05.02 – mathematical modelling and computational methods. – The Ternopil Ivan Puliuy National Technical University. – Ternopil, 2015.*

The thesis is devoted to the mathematical modelling of nonlinear, quasiideals, filtration processes in technogenic-deformable reservoirs of water or oil and gas, in which geometry of zones of heterogeneity determined considering the reverse influence characteristics of the process on the conductivity of environment, and to the development of the methods for solving appropriate boundary value problems on based the synthesis of numerical methods of complex analysis, summary representations and task decomposition with the ability to determine the model parameters.

The computational technology and complex of applications that implement appropriate algorithms for solving nonlinear boundary value problems, in which the coefficient of conductivity of the medium depends from the potential of field and from the function of flow, for one-, two- and multiply-connected curvilinear LEF-domains bounded by lines flow and equipotential lines, using summary representations methods for differential equations with discontinuous coefficients (in the cases of layered environments), or constructed numerical-analytic representations of solutions (which generalize summary representations methods in cases heterogeneous environments), were created. The methodology a combination of numerical methods quasiconformal mappings with the task decomposition using of alternating method by Schwarz for separating the complex quasipotential domain into subdomains with “overlays” was developed. The approach and the algorithms numerical determination of parameters quasiideals processes in nonlinear-layered and nonlinear doubly-layered LEF- layers were proposed.

**Keywords:** mathematical modelling, numerical methods, quasiconformal mappings, numerical method of complex analysis, summary representations methods, domain decomposition.