

Міністерство освіти і науки України
Рівненський державний гуманітарний університет

На правах рукопису

СІНЧУК Алеся Михайлівна

УДК [519.876.5:530.182]:553.98

**МОДЕЛЮВАННЯ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ З УРАХУВАННЯМ
ВПЛИВУ ТРІЩИН ГІДРОРОЗРИВУ ЧИСЕЛЬНИМИ МЕТОДАМИ
КВАЗІКОНФОРМНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ**

01.05.02 – Математичне моделювання та обчислювальні методи

Дисертація на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук

Науковий керівник:
Бомба Андрій Ярославович
доктор технічних наук, професор

Рівне – 2015

З М І С Т

ВСТУП	4
Розділ 1 АНАЛІТИЧНИЙ ОГЛЯД СУЧАСНОГО СТАНУ ТА ТЕНДЕНЦІЙ РОЗВИТКУ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ ВИТІСНЕННЯ ПРИ РОЗРОБЦІ НАФТОВИХ РОДОВИЩ.....	13
1.1 Огляд праць сучасного стану та тенденцій розвитку моделювання процесів витіснення за наявності тріщин гідророзриву.....	13
1.2 Фільтраційні задачі процесів витіснення в пористих середовищах та числові методи комплексного аналізу	17
1.3 Висновки до Розділу 1, загальна постановка завдань досліджень.....	25
Розділ 2 МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОДНОФАЗНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ З УРАХУВАННЯМ ВПЛИВУ ТРІЩИН ГІДРОРОЗРИВУ	28
2.1 Математичне моделювання процесу витіснення нафти законтурною водою з урахуванням включень скінченної проникності..	28
2.2 Методика визначення усередненого коефіцієнта фільтрації присвердловинної ділянки пласта	45
2.3 Моделювання поведінки системи «нагнітальна-експлуатаційна» свердловини при витісненні однієї рідини іншою.....	50
2.4 Висновки до Розділу 2	64
Розділ 3 МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЕДІНКИ СИСТЕМИ «СВЕРДЛОВИНИ- ТРІЩИНИ-ПЛАСТ» В УМОВАХ ІНТЕНСИФІКАЦІЇ ПРОЦЕСУ ВИТІСНЕННЯ	65
3.1 Математичне моделювання двофазної фільтрації у горизонтальному пласті з урахуванням впливу тріщин гідророзриву	65
3.2 Розробка спеціальних схем розміщення свердловин при площовому заводненні за умов оптимізації параметрів та керування	74
3.3 Моделювання процесу витіснення нафти теплоносієм за умов впливу тріщин гідророзриву	90

3.4 Висновки до Розділу 3	102
Розділ 4 ЧИСЛОВІ МЕТОДИ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ ВИТІСНЕННЯ У ВАЖКОПРОНИКНИХ ОСАДОВИХ ПОРОДАХ.....	104
4.1 Методика розв'язання крайових задач інтенсифікації процесу витіснення у нафтових пластах за умов збурення присвердловинної зони пласта шляхом дії вибуху	104
4.2 Моделювання процесу витіснення у важкопроникних пластах з урахуванням впливу тріщин гідророзриву	109
4.3 Метод комплексного аналізу для моделювання процесів витіснення у просторово-викривлених пластах	116
4.4 Висновки до Розділу 4	126
ВИСНОВКИ.....	128
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	131
ДОДАТКИ	153

ВСТУП

Актуальність теми. На сьогоднішній день зниження обсягів нафтовидобутку головним чином пов'язане із структурою порід-колекторів, більше половини з яких становлять важковидобувні, енергетично-виснажені та високообводнені поклади, висока неоднорідність яких, зокрема, призводить до нерівномірного вилучення нафти, зниження коефіцієнта нафтовіддачі та ін. Один із найпоширеніших та перспективних методів інтенсифікації процесу витіснення, зокрема, підвищення фільтраційно-ємнісних характеристик привибійної зони свердловин, є гідравлічні розриви пласта (ГРП). Дія тріщин, утворених внаслідок ГРП, направлена на окремі ділянки продуктивного пласта. Таким чином, змінюючи напрямок і швидкість фільтраційних потоків, встановлюється зв'язок із іншими зонами підвищеної проникності.

Більшість вчених, що досліджували процес фільтрації у нафтогазових пластах з урахуванням впливу існуючих тріщин гідророзриву, зокрема такі як Economides M.J., Каневская Р. Д., Perkins T.S. і Kern L.R. та інші, моделюючи тріщини у вигляді прямокутної, еліпсоїдної або радіальної форми, визначали їх вплив на значення фільтраційно-ємнісних характеристик середовища та процесу. Однак і до тепер залишились відкритими питання оцінки ефективності впливу тріщин ГРП, зокрема, на залишок флюїду (нафти або газу) у пласті, часу повного його заводнення тощо. В зв'язку з чим виникає потреба комплексного вивчення гідродинаміки вибраної ділянки родовища з урахуванням фільтраційних властивостей пласта, розстановки свердловин, їх взаємодії та впливу розміщення і параметрів тріщин ГРП на фільтраційний потік. Таким чином, розв'язання цих проблем є *актуальним* для подальших досліджень, що зумовлює розвиток методів математичного моделювання гідродинамічних процесів розробки родовищ із застосуванням процедури ГРП. При цьому зазначимо, що, на відміну від традиційних числових методів наближеного розв'язання крайових задач для нелінійних

систем диференціальних рівнянь в частинних похідних, виникає потреба розвитку підходу до математичного моделювання процесів розробки родовищ, що ґрунтується на розвитку числових методів комплексного аналізу (теорії квазіконформних відображень). Такий підхід має забезпечувати можливість одночасно враховувати різноманітні аспекти протікання досліджуваного процесу в одній розрахунковій процедурі, з встановленням оптимізаційних випадків за умов взаємовпливу характеристик середовища і процесу, без додаткового перерахунку фільтраційних характеристик (поля швидкостей, фільтраційних витрат тощо) та використання інтерполяційних і градієнтних методів для побудови еквіпотенціалей, ліній та трубок течії.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалась у відповідності з планами науково-дослідних робіт Рівненського державного гуманітарного університету (РДГУ) на замовлення Міністерства освіти і науки України “Системне математичне моделювання нелінійних збурень процесів типу “фільтрація-конвекція-дифузія” з післядією при неповних даних” (2009 – 2011 рр., номер державної реєстрації 0109U001065), “Розробка методів та графічного формату прогресуючого стиснення кольорових зображень без втрат” (01.01.2013 - 30.06.2013р., номер державної реєстрації 0113U001203), “Просторові аналоги крайових задач на квазіконформні відображення і проблеми моделювання нелінійних процесів у пористих середовищах” (2012 – 2014 рр., номер державної реєстрації – 0112U001014).

Метою дослідження є математичне моделювання процесів витіснення флюїдів у нафтогазових пластах з урахуванням впливу тріщин гідророзриву та розвиток числових методів комплексного аналізу розв'язання відповідних крайових задач одно- та багатофазної фільтрації.

Для досягнення поставленої мети визначені такі **завдання дослідження**:

- ✓ удосконалити математичні моделі процесу витіснення флюїдів у нафтових пластах за наявності тріщин ГРП, розвинути числові методи комплексного

аналізу та розробити алгоритми розв'язування відповідних крайових задач, на основі чого провести числові розрахунки та аналіз отриманих результатів;
 ✓ розвинути, в рамках теорії Баклея-Левеверетта, методику математичного моделювання нелінійних процесів витіснення в умовах площового заводнення на випадок урахування впливу тріщин ГРП, розробити алгоритм розв'язування відповідних крайових задач та здійснити його комп'ютерну реалізацію;

✓ розвинути методологію розв'язання задач багатофазної фільтрації в елементах площового заводнення на випадок теплорежиму з урахуванням впливу тріщин гідравлічного розриву;

✓ удосконалити числові методи комплексного аналізу стосовно моделювання процесу витіснення у важкопроникних (типу сланцевих) породах з урахуванням впливу тріщин гідророзриву.

Об'єктом дослідження є фільтраційні процеси витіснення у нафтових пластах з урахуванням впливу тріщин гідророзриву.

Предметом дослідження є математичні моделі процесів фільтрації у горизонтальних нафтогазових пластах з урахуванням впливу тріщин ГРП, числові методи комплексного аналізу розв'язування відповідних крайових задач.

Методи дослідження. У процесі розв'язання поставлених завдань використано числові методи комплексного аналізу та поетапної фіксації характеристик середовища і процесу, інші числові методи (методи скінчених різниць, блочних ітерацій, послідовних наближень в різного роду модифікаціях), методи побудови консервативних різницевих схем.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в наступному:

✓ розвинено, запропоновану Бомбою А. Я. та Ярощаком С. В., методику математичного моделювання фільтраційних процесів витіснення у нафтогазових пластах, на випадок урахування впливу тріщин гідравлічного розриву та вирв (утворених внаслідок дії вибуху зарядів) на присверловинну ділянку;

- ✓ вперше, з використанням квазіконформних відображень та поетапної фіксації характеристик середовища і процесу, розроблено підхід до моделювання витіснення однієї рідини іншою у горизонтальних однорідних та зонально-неоднорідних пластах за умов урахування впливу тріщин ГРП та побудовано числові алгоритми розв'язування відповідних крайових задач, які, зокрема, адаптовано на випадок визначення усередненого коефіцієнта фільтрації привибійної зони свердловин за відомим дебітом експлуатаційної свердловини;
- ✓ у рамках теорії Баклея-Лeverетта (закону збереження мас), модифіковано метод комплексного аналізу моделювання багатофазної фільтрації, що, зокрема, забезпечує можливість оптимізації перетоків, з метою уникнення формування так званих «застійних» зон, на випадок інтенсифікації процесу витіснення тріщинами гідравлічного розриву в елементах площового заводнення;
- ✓ на основі розвинутої методології моделювання ізотермічної багатофазної фільтрації, вперше одержано числовий розв'язок крайових задач неізотермічного процесу витіснення в елементах площового заводнення шляхом збурення фільтраційної течії тріщинами ГРП;
- ✓ вперше розроблено підхід до розв'язання крайових задач на інтенсифікацію нафтовидобутку із важкопроникних тріщинувато-пористих осадових порід з урахуванням суміжних деформаційних процесів у присвердловинній зоні пласта, коли за умов квазістаціонарності фільтраційної течії досліджуваний процес описується спеціальним чином модифікованим законом Дарсі відносно критичного значення градієнта тиску;
- ✓ на основі методів квазіконформних відображень, удосконалено метод прогнозування розміру вирв, шляхом вибуху, що є підґрунтям можливого утворення тріщин розриву;
- ✓ вперше узагальнено методологію розв'язання двовимірних крайових задач однофазної фільтрації у важкопроникних тріщинувато-пористих

родовищах на випадок просторово-викривлених пластів із урахуванням тріщин гідророзриву.

Практичне значення одержаних результатів полягає в удосконаленні та розвиненні числові методи комплексного аналізу для моделювання нелінійних процесів витіснення в нафтових пластах з урахуванням впливу тріщин гідророзриву, що дозволяють визначати, зокрема, момент часу прориву витісняючої рідини до експлуатаційної свердловини та повного її обводнення, координати критичних точок типу «призупинки» та значень квазіпотенціалу у них, а також визначення положення границі розділу рідин у різні моменти часу. На основі цих методів, розроблено числові алгоритми для розв'язування відповідних крайових задач на побудову відповідної гідродинамічної сітки, розрахунку загальної фільтраційної витрати на експлуатаційній свердловині, встановлення залежності частки у ній нафти, об'єму витісненого флюїду у пласті на протязі визначеного часу та відповідного об'єму, що залишається у пласті в довільний момент часу, зокрема, після припинення процесу витіснення, та створено програмний комплекс, що їх реалізує. Проведені у роботі дослідження дають можливість аналізувати процеси витіснення за умов врахування розмірів та розміщення тріщин гідророзриву, зокрема, залежно від розподілу нафтонасиченості і пластового тиску на площі родовища, проектувати буріння нагнітальних свердловин у зонах пониженого пластового тиску та експлуатаційних - у зонах з підвищеним пластовим тиском, а також відшукування місцезнаходження значних по своїй площі застійних зон (з метою надання пропозицій «проектувальникам» стосовно подальшої розробки родовищ).

Результати роботи впроваджено Дочірнім підприємством «Науково-дослідний інститут нафтогазової промисловості» Національної акціонерної компанії «Нафтогаз України» при проектуванні розстановки свердловин, параметрів та розміщення на них тріщин ГРП, з метою уникнення формування так званих «застійних» зон та збільшення відбору нафти з урахуванням її залишку у пласті.

Викладені в дисертаційній роботі матеріали використовуються у навчальному процесі РДГУ та НУВГП при читанні дисциплін: “Методи комплексного аналізу”, “Проблеми оптимізації і керування процесами і системами”, “Сучасні проблеми прикладної математики” та “Чисельні методи конформних і квазіконформних відображень”, а також є основою для написання курсових та дипломних робіт по кафедрі інформатики та прикладної математики для студентів РДГУ та НУВГП за спеціальністю “Прикладна математика”. Більшість результатів, отриманих в роботі, подано у вигляді алгоритмів, ілюстрацій та графіків, які можуть бути включені у посібники та довідники і використані в інженерній практиці.

Апробація результатів дисертації. Основні наукові результати дисертаційної роботи обговорювалися на XVII Всеукраїнській науковій конференції “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики” (Львів, 2011 р.); V Міжнародній науковій конференції “Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації” (Кам’янець-Подільський, 2012 р.); II Всеукраїнській школи-семінарі молодих вчених і студентів «Сучасні комп’ютерні інформаційні технології» (Тернопіль, 2012 р.); Міжнародній науковій конференції "Обчислювальна та прикладна математика" (Київ, 2012 р.); VIII International Conference POROUS MATERIALS. Theory and Experiment (Львів, 2012 р.); II Науково-технічній конференції «Обчислювальні методи і системи перетворення інформації» (Львів, 2012 р.); Всеукраїнській науковій конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів» (Рівне, 2013 р.); III Всеукраїнській школи-семінарі молодих вчених і студентів «Сучасні комп’ютерні інформаційні технології» (Тернопіль, 2013 р.); 9 Міжнародній науково-практичній конференції “Нафта і газ України – 2013” (Яремче); Усеукраїнській науковій конференції «Математичне моделювання та математична фізика» (Кременчук, 2013); Міжнародній науково-технічній конференції «Компьютерное моделирование в наукоемких технологиях» (Харків, 2014); Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми

математичного моделювання та обчислювальних методів» (м. Рівне, 2015 р.) на звітних науково-практичних конференціях професорсько-викладацького складу, аспірантів та студентів Рівненського державного гуманітарного університету (Рівне, 2011–2015 рр.).

У повному обсязі дисертація обговорювалася 31 жовтня 2014 р. на розширеному науковому семінарі при кафедрі інформатики і прикладної математики Рівненського державного гуманітарного університету (керівник – д.т.н. А. П. Власюк); 20 лютого 2014 р. на засіданні секції розробки родовищ нафти та газу і буріння свердловин Вченої ради Дочірнього підприємства «Науководослідного інституту нафтогазової промисловості» Національної акціонерної компанії «Нафтогаз України» (керівник – к.т.н. В. П. Гришаненка); 7 жовтня 2014 р. на засіданні секції розширеного наукового семінару Центру математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України (керівник – д.т.н. Я. Д. П'янило); 23 жовтня 2014 р. на засіданні розширеного наукового семінару кафедри розробки родовищ корисних копалин, гірничих машин та комплексів Національного університету водного господарства та природокористування (керівник – д.т.н. З. Р. Маланчук).

Публікації. За основними матеріалами роботи опубліковано 23 наукових праці: 13 статей, з яких 9 у фахових наукових виданнях з технічних наук (зокрема, 1 опублікована без співавторів), у тому числі 5 в журналах, що входять до міжнародних реферативних та наукометричних бази даних: Index Copernicus International [39], Directory of Open Access Journals [39], Cambridge Scientific Abstracts [32], Computer and Information Systems Abstracts [32], INIS Collection [32], Ulrich's Periodicals Directory [35], ВІНІТІ РАН [32, 39], Science Index РІНЦ [32, 36, 37, 39]; 10 публікацій у матеріалах Міжнародних та Всеукраїнських конференцій.

Особистий внесок здобувача полягає в безпосередній участі в проведенні розрахунково-теоретичних досліджень, оформленні проміжних результатів роботи у вигляді публікацій і доповідей. Науковому керівнику

належить постановки задач, визначення схеми досліджень та участь в обговоренні одержаних результатів. Всі результати, що складають основний зміст дисертаційної роботи, отримані автором самостійно.

У публікаціях, написаних у співавторстві здобувачеві належить: у [39, 44, 48] - розробка підходу до розв'язання задач неізотермічної багатофазної фільтрації в елементах площового заводнення за умов урахування впливу тріщин гідророзриву, побудова числового алгоритму для розрахунку фільтраційно-ємкісних характеристик, обробка та аналіз отриманих результатів; у [32, 43, 47] - поширення методу комплексного аналізу на випадок дослідження процесу витіснення, в умовах двофазної фільтрації, з урахуванням впливу тріщин гідравлічного розриву пласта; у статті [37] – розробка підходу до розв'язання задач однофазної фільтрації в просторово-маловикривлених важкопроникних нафтових пластах за умов збурення фільтраційної течії тріщинами гідравлічного розриву із використанням ідей методу квазіконформного відображення та поетапної фіксації характеристик середовища і процесу; у [34, 35, 38, 169] - проведення системного аналізу процесів витіснення за умов двофазної фільтрації у випадку площового заводнення з урахуванням впливу тріщин гідравлічного розриву, виконання числових розрахунків, обробка та аналіз отриманих результатів; у [36, 45, 46] - моделювання інтенсифікації відтоку газу з сланцевих осадових порід, коли за умов квазістаціонарності фільтраційної течії досліджуваний процес описується спеціальним чином модифікованим законом Дарсі, відносно критичного значення градієнта тиску; у [29-31, 40, 41] – модифікація методів комплексного моделювання фільтраційних процесів витіснення на випадок урахування впливу тріщин гідророзриву, розробка числових алгоритмів для розв'язування відповідних крайових задач; у [33, 42] – розробка підходу до ідентифікації усередненого коефіцієнта фільтрації привибійної зони свердловини, з урахуванням відомого дебіту експлуатаційної свердловини шляхом корекції його відхилення від заданого значення; у [28] - розробка алгоритму числового розв'язання обернених нелінійних крайових задач

теорії вибуху на квазіконформні відображення.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел (202 бібліографічних найменувань) та 3 додатків. Загальний обсяг дисертаційної роботи – 157 сторінок, з них 128 сторінок основного тексту, в тому числі 38 рисунків.

РОЗДІЛ 1

АНАЛІТИЧНИЙ ОГЛЯД СУЧАСНОГО СТАНУ ТА ТЕНДЕНЦІЙ РОЗВИТКУ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ ВИТІСНЕННЯ ПРИ РОЗРОБЦІ НАФТОВИХ РОДОВИЩ

У розділі наведено короткий огляд праць та аналіз проблем, що стосуються сучасного стану досягнень у сфері математичного моделювання процесів витіснення при розробці нафтогазових родовищ за умов збурення фільтраційної течії тріщинами гідравлічного розриву (ГРП). Представлено основні моделі процесів витіснення та числові методи комплексного аналізу розв'язання відповідних крайових задач. Здійснено загальну постановку завдань досліджень.

1.1 Огляд праць сучасного стану та тенденцій розвитку моделювання процесів витіснення за наявності тріщин гідророзриву

На практиці нафтогазовидобувної промисловості широкого застосування набуває новий механічний метод розробки родовищ такий як гідравлічний розрив пласта.

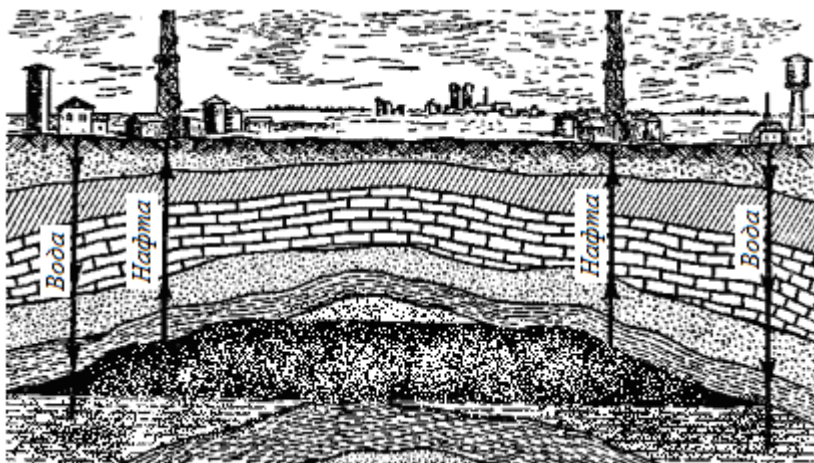


Рис. 1.1. Нафтогазове родовище [170]

Вперше він був проведений у нафтогазових пластах на території США у 1947 р., завдяки якому утворюються високопровідні тріщини гідророзриву,

що дозволяють значно збільшити дебіт свердловин. Такі вчені як Баренблатт Г.И., Єнтов В.М. [8], Желтов Ю.П. [74], Geertsma J. [184], Perkins T.S. і Kern L.R. [192-193] створили перші теоретичні моделі дослідження процесу фільтрації у горизонтальному пласті з урахуванням впливу тріщин ГРП. Математичне моделювання процесу витіснення після проведення процедури ГРП базується на фундаментальних законах термодинаміки, фільтрації, фізики нафтогазоносних пластів. Вперше процес витіснення до свердловини, розкритої тріщиною ГРП необмеженої довжини, в умовах стаціонарної фільтрації вивчався М. Маскетом [120], який в залежності від співвідношення коефіцієнтів проникності пласта і тріщини та її ширини отримав розподіл тиску та ліній течії із пласта до тріщини. Необхідність оцінки ефективності гідравлічного розриву пласта викликали появу нових методів дослідження роботи свердловин розкритих тріщинами, відповідні рівняння описані, зокрема, у працях [105, 113, 118].

Аналітичне вираження для розрахунку фільтрації однорідної рідини до свердловини із тріщиною ГРП від зовнішнього контуру живлення вперше отримано М. І. Швідлером [162], при чому ним приймалися різні припущення щодо відношення коефіцієнт проникності пласта і тріщин ГРП, одне з яких це те, що тріщини є нескінченно проникними (ідеальними, тому тиск на контурі тріщини сталий і дорівнює забійному).

Пізніше Р.Д. Канєвскою [90-94] було представлено аналітичні розв'язки задач фільтрації до тріщин гідророзриву в неоднорідних та анізотропних пластах. Нею досліджувався вплив тріщин гідророзриву не тільки на продуктивність окремих свердловин, а й на розробку покладів в цілому, зокрема, проблеми інтерференції свердловин із тріщинами ГРП на них, обводнення свердловин після проведення гідророзриву.

Далі в роботах [85, 141, 168] проводилось математичне моделювання процесу витіснення у випадку існування тріщин гідророзриву скінченої проникності заповнених пропантом. Із припущень, що течія в горизонтальній тріщині радіальна, а у вертикальній – плоско-паралельна, Ю.М. Шехтманом

[164] отримано розподіл тиску у пласті, в центрі якої розміщена свердловина із горизонтальною чи вертикальною тріщиною ГРП. Запропонована гіпотеза характеру течії у тріщині дозволила сформулювати граничні умови для задачі дослідження фільтрації в пласті та розв'язувати її незалежно від розподілу швидкості течії у тріщині. В результаті чого виявилось, що заповнення тріщини пропантом призводить до зменшення дебіту свердловини приблизно на 25 %. У процесі досліджень ним розраховувався розподіл тиску в обох суміжних областях: у пласті та тріщині. У результаті чого підтвердилося, що ефект тріщин гідравлічного розриву суттєво залежить від значення коефіцієнта проникності пропанта та розмірів самої тріщини. Такими вченими як В. В. Кадетом, В. І. Сіляковим [89], М. Prats [194], досліджено граничні параметри тріщин ГРП, перевищення яких не призводить до збільшення коефіцієнта продуктивності експлуатації свердловин. В роботі А. Ф. Зазовського, Г. Т. Тодуа [78] показано, що створювати дуже протяжні тріщини не завжди ефективно, так як фільтраційний потік в тріщину при її великому гідравлічному опорі локалізується близько свердловини, а віддалена частина тріщини не впливає на значення коефіцієнта продуктивності.

Відома проблема видобутку нафти з високим коефіцієнтом в'язкості (наприклад, природних бітумів та т.ін.), зокрема, такі вчені як Алішаєв М. Г. [3], Аметов И.М. [4], Ахмадишин Р.З. [7], Габриелов Л.В. [60], Кондрат Р.М. [99-101], Briggs P.J., Wright M.S. [170] розробляли нові методи та технології підвищення коефіцієнта нафто вилучення у відповідних родовищах. Кондратом О.Р. було виявлено, що ефективною, для підтримки пластового тиску та покращення реологічних властивостей флюїдів, є технологія нагнітання в пласт різних робочих агентів, зокрема, теплоносіїв. При цьому, за рахунок перенесення течією тепла здійснюється розігрів зон пласта між свердловинами в зв'язку з чим знижується в'язкість нафти в цих зонах і, тим самим, забезпечується гідродинамічний зв'язок між ними.

При проведенні процесу витіснення у важкопроникних пластах, зокрема

сланцевих осадових породах, досить ефективно застосовувати метод інтенсифікації гідравлічного розриву пласта, який об'єднує тріщини та мікротріщин, що пронизують пласт, в деревовидні структури тим самим розширюючи зону впливу, що дренується свердловиною [61, 134]. Однак у деяких випадках використовують також вибухові технології [58, 85, 87, 108], які завдяки своїй потужності та миттєвій дії, значною мірою є ефективними. Деякі задачі збурення плоского фільтраційного потоку тріщинами різного походження розглядались також у роботах [66, 107, 157, 158].

Проектування тріщин гідророзриву з метою досягнення максимального дебіту експлуатаційних свердловин вимагає детального вивчення різних параметрів як тріщин так і пластової системи. Як було доведено вченими, зокрема, Economides M.J., Nolte K.G. [165, 182], Elbel J.L. [183], збільшення довжини та провідності тріщин не призводить до пропорційного зростання фільтраційної витрати свердловин. Враховуючи значення сталого коефіцієнта провідності тріщини ГРП, можна визначити граничне значення її довжини, збільшення якого практично не призводить до приросту дебіту і навпаки: для тріщин усталених розмірів збільшення її коефіцієнта провідності також дає незначний ефект. Не менш важливим фактором, що впливає на вибір оптимальних розмірів тріщини гідророзриву, являється розміщення свердловин та орієнтація тріщин відносно них. Такі вчені як Lacy L.L. [188], Malekzadeh D., Khan F.U., Day J.J. [189] досліджували орієнтацію протяжних тріщин, довжина яких за розмірами наближається до значення відстані між свердловинами, з метою уникнення передчасного обводнення експлуатаційної свердловини. D.N. Meehan [190] вивчав вплив неоднорідності пласта на оптимізацію довжини тріщин і розміщення свердловин у пласті.

Не менш важливим є дослідження процесу витіснення в неоднорідних середовищах, зокрема, Chen C.-C., Raghavan R. [189], Chu W. [174], Cinco-Ley H. [175] проаналізували вплив наявності тріщини ГРП на фільтраційно-ємкісні характеристики пласта у випадку розміщення видобувної

свердловини у низькопроникній ділянці пласта, при цьому тріщини виходять за межі включення, або повністю належать йому. Такі включення невеликих розмірів можуть характеризувати забруднюючу ділянку у привибійній ділянці свердловин. М. Prats [194] розглядав задачу стаціонарної фільтрації з урахування впливу тріщин ГРП нескінченної проникності, що розміщені в забрудненій зоні свердловини. Розрахунки показали, що наявність забрудненої зони практично не призводить до зменшення ефективного радіуса свердловини із утвореною на ній тріщиною ГРП.

При оптимізації параметрів та розміщення тріщин гідророзриву необхідно враховувати, окрім фільтраційних властивостей пласта, ще й технологічні обмеження щодо створення самих тріщин (в'язкість рідини, концентрацію пропанта тощо). Математичне моделювання та детальний гідродинамічний аналіз ділянки пласта в цілому дозволяють проаналізувати вплив розподілу неоднорідності пласта та розміщення системи нагнітальних та видобувних свердловин, визначити параметри та оптимальне розміщення тріщин ГРП.

1.2. Фільтраційні задачі процесів витіснення в пористих середовищах та числові методи комплексного аналізу

Основоположником розвитку теорії фільтрації став видатний французький інженер Г. Дарсі, який досліджуючи рух рідин у пористих середовищах встановив і опублікував (у 1856 р.) лінійний закон фільтрації: $\vec{v} = -k_{\phi} \vec{I}$, де $\vec{v}$ – вектор швидкості фільтрації, $\vec{I}$ – вектор градієнта напору, k_{ϕ} – коефіцієнт фільтрації [178]. Теоретичне дослідження закону Дарсі експериментально підтверджено його співвітчизниками Ж. Дюпюї та Уїтейкером [181, 200].

В сучасному трактуванні закон Дарсі має дещо модифіковану форму запису, в якій розділено вплив на процес витіснення властивостей пористого середовища і рідини, що рухається в ньому [22-27, 55, 150]:

$$\vec{v} = -\frac{k}{\mu} \text{grad } p, \quad (1.1)$$

де k – коефіцієнт проникності середовища;

μ – динамічна в'язкість рідини;

p – тиск.

У роботі розглянуто процеси витіснення у нафтогазових пластах, зокрема, на рисунку 1.2. зображено пласт обмежений зовнішнім непроникним контуром (L), а також нагнітальними (L_*) та експлуатаційними (L^*) свердловинами за наявності тріщин гідророзриву (G_z^λ , де λ - кількість тріщин) скінченої проникності, тоді (1.1) матиме вигляд [64, 123, 129, 136, 155, 179, 196]:

$$\vec{v}_l = \frac{k \cdot \tilde{k}_l}{\mu_l} \text{grad } p, \quad (1.2)$$

де $\vec{v}_l$ - швидкість фільтрації l -ої фази за умови, що $\text{div} \sum_{i=1}^l \vec{v}_i = 0$,

$k = \alpha \sigma$ – коефіцієнт проникності середовища, α - деякий емпіричний параметр, що визначається експериментально;

σ - коефіцієнт пористості середовища: $\sigma = \sigma_0$ - ґрунту, $\sigma = \sigma_\lambda$ - пористість λ -ої тріщини ГРП;

$\tilde{k}_l = \tilde{k}_l(s)$ - відносні фазові проникності (є заданими функціями насиченості, температури, тощо, $s = s_l(x, y, t)$ - насиченість пласта l -ою фазою, $\sum_{l=1}^d s_l = 1$);

μ_l - в'язкість l -ої фази, яка залежить від насиченості, температури, вмісту інших хімічних елементів у середовищі.

У більшості з випадків, цілісно дослідити процес витіснення, у такому пласті, та охарактеризувати взаємовплив самих свердловин – складно, тому під час розв'язування відповідних крайових задач обираємо деякий контур живлення (еквіпотенціаль) навколо свердловини, чи системи свердловин і

проводимо дослідження у відповідному фрагменті пласта. Зокрема, така задача матиме самостійний характер у випадку витіснення рідких флюїдів із пласта законтурною водою.

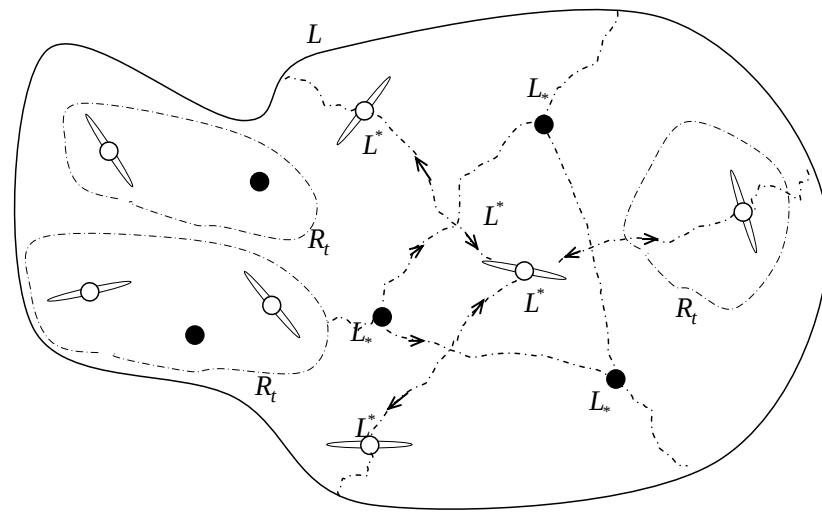


Рис. 1.2. Горизонтальний пласт за наявності тріщин ГРП

На початковому етапі досліджень, для більш детального представлення методології розв'язання відповідних крайових задач методами квазіконформних відображень та поетапної фіксації характеристик середовища і процесу, у роботі розглядається спрощений випадок: витіснення однофазної фільтрації (модель «різнокольорових» рідин), яку вперше запропонував у 1932 р. Герольд С. П. [63]. В рамках такої моделі область фільтрації повністю заповнена однорідною рідиною з незмінними характеристиками, наприклад, такими ж, як у витісняємій рідині - нафті. Термін «різнокольорові» рідини введено ще в роботах Голуб'євої О.В. [65], Данілова В. Л. [67, 68], Маскета М. [120, 121] та т. ін., де під різнокольоровими рідинами у них розуміються мічені частинки (уявним кольором), що є однаковими за своїм фізичними та механічними властивостями (густина, в'язкість тощо), тобто нема дійсного зафарбування (фактично простежується переміщення первісної межі розділу рідин при відомому полі тисків). Такий підхід значно спрощує алгоритм розв'язування відповідної задачі, який дозволяє встановити положення границі розділу рідин у різні моменти часу і відповідно місцезнаходження значних по своїй

площі застійних зон (сильно-насичених ділянок) та водонасичених ділянок, об'єму витісненого флюїду у пласті на протязі визначеного часу та відповідного об'єму, що залишається у пласті в довільний момент часу, зокрема, після припинення процесу витіснення.

Задача про витіснення розглядалася ще в так званій «поршневій» постановці, напр., як у роботах [128, 133, 144, 163], згідно якої передбачалося повне витіснення нафти із пласта. Базуючись на ідеях закладених в поршневій моделі відповідну задачу досить часто вдається сформулювати як задачу з рухомою границею, припускаючи, що обидві рідини фізично не відрізняються. Однак поршнева модель у випадку однорідного пласта дуже спрощено відображає реальну картину розробки нафтових родовищ в умовах їх заводнення. Оскільки у припущенні однорідності пласта при використанні такої моделі спостерігається повністю безводний період розробки, що суперечить фактичним даним, згідно з якими існує досить довгий період, коли із свердловин відбирається як нафта так і вода. Варто також відмітити, що при цьому процес витіснення ніколи не буває повним, і в пласті утворюються значні по своїх розмірах зони сумісного руху декількох рідин.

Пізніше такі вені як Buckley S.E., Leverett M.C. [171], Rappoport L.A., Leas W.I. [195] створили моделі багатофазної фільтрації – «різнофазних» рідин, де не відслідковується чітка межа між фазами, зокрема, ними вводиться залежність коефіцієнта фазової проникності від насиченості. У цих моделях спільним є те, що система рівнянь, яка описує двофазну фільтрацію складається з нелінійного гіперболічного рівняння для фазової насиченості і еліптичного рівняння для тиску (квазіпотенціалу).

В подальшому у роботі, на основі теорії Баклея-Левеверетта, розглядається процес витіснення багатофазної фільтрації, де рідини рухаються сумісно і незалежно одна від одної, так ніби границі між ними є твердими стінками. При моделюванні відповідних процесів потрібно враховувати особливості фільтрації рідин, що рухаються у пласті, та співвідношення їх в'язкостей для отримання адекватних прогнозів згідно обраної моделі.

За останній період часу числовому розв'язуванню задач двофазної фільтрації присвячені роботи Колдоби А.В. [96-97], Коновалова А.Н. [102, 103], Бомби А.Я., Ярошака С.В. [19, 23-27] та інших.

Іншою достатньо розповсюдженою моделлю витіснення є модель Маскет-Лeverетта, в якій, на відміну від моделі Бакля-Лeverетта, враховуються капілярні сили і до системи рівнянь додається закон Лапласа. Подальшим дослідженням цієї моделі займалися такі вчені як Брусиловский А. И. [49], Васильев В. П. [56], Зубов Н. В., Марченко Н. А. [119], Монахов В. Н. [124] і багато інших.

Наукові досягнення попередніх років у теорії фільтрації та розробці методів розв'язання відповідних задач знайшли відбиток в обширній науковій літературі, що широко застосовується як до задач нафтогазової промисловості, механіки ґрунтів, так і до проектування гідромеліоративних та гідротехнічних конструкцій. Це пов'язано, в першу чергу, з особливостями протікання відповідних процесів та введенням різного роду інженерних схематизацій об'єктів дослідження, що вимагало побудови якісних методів їх розв'язання. Розробці та розвитку методів розв'язання відповідних задач присвячено значну кількість праць як іноземних так і вітчизняних авторів, зокрема, варто відмітити праці Х. Азіза [1], А. Я. Бомби [16-27], В. М. Булавацького [50], В. Я. Булигіна [51, 52], А. П. Власюка [59], В. С. Дейнеки [70-71], Л. М. Журавчак [75-77], Р. Коллінза [98], І. І. Ляшка [115–117], М.М. Максимова [118], А.Х. Мирзаджанзаде [122], Р. І. Нігматуліна [125, 126], В. Н. Ніколаєвського [130–132], В. Ф. Півня [137], Я. Д. П'янило [130], В. В. Скопечького [17-18, 22, 50], Р. Т. Фазлієва [152], Є. Я. Чаплі [159], І. А. Чарного [160] та ін.

Павловським М.М. був запропонований точний теоретичний метод розв'язування плоских задач усталеної фільтрації – метод конформних відображень [135]. Даний метод використовували та розвивали далі у своїх роботах Лаврентєва М. А. [109-110], Лаврика В. І. [111–112], Полубаринова-Кочина П. Я. [138] та інші.

Багато вчених вивчали та досліджували виникнення фільтраційних деформацій у ґрунті; основним фактором, що зумовлює їх появу, є градієнт напору. Однак, вплив деформацій ґрунту враховувався, у кращому випадку, формальним призначенням коефіцієнта фільтрації. У формулах для обчислення витрати, коефіцієнт фільтрації ґрунту, згідно з класичною теорією фільтрації, вважається сталою величиною [14-15, 95, 104, 151]. Але, у випадках великих градієнтів напору (більших за критичні значення) навколо дрени (свердловини) відбуваються суфозійні деформації ґрунту (переміщення та зупинка дрібних частинок, переорієнтація у просторі частинок, які формують скелет тощо), що спричиняють зміну коефіцієнта фільтрації як в просторі, так і в часі, та суттєво впливають на водоприймальну спроможність дрен.

В результаті проведених А.П.Івашенком та Б.П.Сидорчуком (за методикою і під керівництвом М.М.Хлапука та А.Я.Бомби) у гідротехнічній лабораторії Українського державного університету водного господарства та природокористування ряду експериментів на ґрунтових моделях було виявлено, що втрата фільтраційної міцності ґрунтів (яка призводить до зміни коефіцієнта фільтрації) в навікодренному середовищі відбувається при перевищенні діючими градієнтами допустимого (критичного) значення для даного ґрунту [86]. Характер і розвиток фільтраційних деформацій придренної зони визначається абсолютним значенням градієнтів, властивостями ґрунтів та конструкцією дренажу. З метою математичного моделювання такого роду процесів фільтрації, з урахуванням взаємовпливу градієнтів напору та коефіцієнта фільтрації, А.Я. Бомбою був розроблений підхід до розв'язування відповідних нелінійних крайових задач [18-19].

Така методика застосовується до розв'язування нелінійних обернених крайових задач на конформні та квазіконформні відображення при моделюванні процесів витіснення з урахуванням деформацій в пористих середовищах – довільних криволінійних чотирикутних областях, обмежених лініями течії та еквіпотенціальними лініями. Термін “обернена крайова

задача” означає перехід від конформного відображення фізичної області G_z на відповідну область комплексного потенціалу G_ω до більш вигідного оберненого відображення $G_\omega \rightarrow G_z$. Задача на конформне відображення $G_z \rightarrow G_\omega$ ($G_\omega \rightarrow G_z$) є ще й оберненою задачею у традиційному розумінні (коли за додатковими відомостями про розв’язок задачі, знаходять ще й невідомі коефіцієнти, що входять у рівняння, граничні умови, тощо), адже при постановці крайової (фізичної) задачі в області G_ω невідомими є її параметри (напр., повна фільтраційна витрата).

Основою розвитку ідей числових методів комплексного аналізу стали роботи [18-19, 54, 84] у яких проведено дослідження фільтраційних процесів витіснення в пористих середовищах – криволінійних чотирикутних областях складної геометрії, обмежених лініями течії та екіпотенціальними лініями, з урахуванням взаємовпливу характеристик середовища та процесу. Використовуючи ідею поетапної параметризації характеристик середовища та процесу, розроблені нові ефективні алгоритми розв’язування відповідних крайових задач на конформні та квазіконформні відображення криволінійних чотирикутників на прямокутники, що описують процеси зворотного впливу градієнтів квазіпотенціалу (більших за їх критичні значення) на фільтраційні характеристики середовища. На основі побудованих розв’язків таких нелінійних задач, коли коефіцієнт фільтрації та компоненти тензора фільтрації залежать як від координат фізичної області фільтрації, так і від шуканих функцій течії, потенціалу та його градієнту досліджено характер формування збурених зон середовища. Отримано модельні співвідношення між характеристиками недеформівного середовища та середовища, що деформується під впливом гідродинамічної дії фільтраційного потоку. На основі проведених розрахунків встановлено, що врахування властивостей пористого середовища та впливу градієнтів потенціалу на процес фільтрації принципово змінює базові положення відомої у літературі методики оцінки фільтраційних характеристик ґрунтів.

Відповідну методологію Д.О. Пригорницьким [16, 17, 19] перенесено на випадок фільтрації у багатозв'язних криволінійних областях. При цьому ним вирішено проблему врахування роздвоєння лінії течії при переході від багатозв'язної області фільтрації до однозв'язної. Розроблено нові ефективні числові методи та алгоритми розв'язування нелінійних обернених крайових задач на конформні та квазіконформні відображення для двозв'язних та тризв'язних областей на основі відомого методу почергової параметризації характеристик процесу та середовища при моделюванні суфозійних явищ у ґрунтах; отримано числові розв'язки задач із врахуванням фільтраційної деформації середовища при врахуванні взаємовпливу градієнту квазіпотенціалу та фільтраційних характеристик середовища, встановлено зони збурення вихідного потоку змінним коефіцієнтом фільтрації; вперше на основі результатів числових розрахунків встановлено співвідношення між характеристиками середовища і процесу до та після деформації (фільтраційна витрата, гідродинамічна сітка, коефіцієнт фільтрації, ін.) для випадків, коли фізична область фільтрації є багатозв'язною.

На цій основі С.В. Ярощак [19, 22-27] розроблено комплексний підхід до математичного моделювання нелінійних процесів витіснення в нафтогазових пластах, обмежених еквіпотенціальними лініями та лініями течії за умов зворотнього впливу та розвинуто числові методи конформних і квазіконформних відображень розв'язання відповідних нелінійних крайових задач багатофазної фільтрації. Зокрема, розроблено алгоритми розрахунку процесів багатофазної фільтрації у нафтогазових пластах за умов утворення додаткових фільтраційних впливів шляхом поповнення існуючого фонду свердловин, при цьому, проаналізовано і описано всі можливі випадки формування течії залежно від значень керуючого потенціалу та виділено «ключові» типи задач на знаходження тих його значень, які забезпечували б оптимізацію певних функціоналів (витрат, перетоків тощо), зокрема, з метою уникнення формування застійних зон. На основі комбінації і модифікації методів квазіконформного відображення та поетапної фіксації характеристик

середовища і процесу розроблено підхід до розв'язання відповідних крайових задач. Побудовано методику комплексного моделювання двофазної фільтрації за умови неповного витіснення (модель Баклея-Лeverетта), оптимізації параметрів та керування.

1.3 Висновки до Розділу 1, загальна постановка завдань досліджень

Процес видобутку нафти є складним як з технологічної сторони так і із економічної, адже нераціональна розробка родовищ тягне за собою великі витрати, що звісно не є бажаним, тому постає проблема раціоналізувати процес видобутку сировини та мінімізувати фінансові витрати. Найбільш висока ефективність проведення процедури ГРП забезпечується при комплексному підході до проектування з врахуванням таких факторів як провідність пласта, схема розстановки свердловин, характеристики рідини розриву та розклинюючого агенту, технологічні та економічні обмеження. Для реалізації цього підходу окрім моделей тріщиноутворення необхідно створення моделей фільтрації в системі свердловин розкритих тріщинами ГРП вивчення особливостей руху флюїдів в області тріщини, у тому числі в неоднорідних та обводнених пластах. Тому стає актуальним розвиток методів математичного моделювання гідродинамічних процесів розробки нафтових родовищ із застосуванням ГРП на основі теоретичних досліджень та сучасних комп'ютерних технологій.

Одним із способів досягнення вище сказаного є створення нових, з наступним використанням, або ж використання існуючих математичних моделей процесів, що відбуваються в нафтогазових пластах та розрахунку на їх основі характеристик процесу, що дозволяють оптимізувати виробництво [1-2]. Ефективність роботи тріщин вимагає підбору адекватних параметрів їх геометрії, аналізу їх взаємодії між собою, визначення впливу розмірів тріщини на фільтраційний процес та значення дебіту свердловин [4]. Досить часто буває, що у досліджуваному пласті існують ще й так звані недіючі свердловини (призупинені, «закинені»; потоки через контури яких

дорівнюють нулю). Необхідним етапом будь-якої сучасної технології проектування нафтових і газових родовищ є комп'ютерний експеримент з використанням математичних моделей процесів і об'єктів моделювання, який передбачає проведення багатоваріантних розрахунків для вибору оптимальних сценаріїв розробки продуктивних площ [2]. Одними з вимог, що відповідають комп'ютерній моделі процесу розроблення з використанням ГРП, є: адекватне відображення фізичних процесів, що відбуваються в пласті та тріщині; швидкодія, порівняно з аналогічними показниками традиційних моделей; можливість коректного співставлення варіантів розроблення з використанням ГРП й інших технологій тощо. Для підтвердження підпорядкованості комп'ютерної моделі кожній із цих вимог існують різні підходи. Наприклад, для обґрунтування адекватності опису фізичних процесів згідно з вибраною моделлю, зазвичай використовують точні аналітичні розв'язки задач у спрощених випадках (підбирають простіші області фільтрації або ж спрощують процес, який потрібно описати, тощо). Для досягнення поставленої мети визначені такі основні **завдання дослідження**:

- ✓ розробити, з використанням ідей квазіконформного відображення та поетапної фіксації характеристик середовища і процесу, методику моделювання процесу витіснення однієї рідини іншою у горизонтальних однорідних та зонально-неоднорідних пластах за умов урахування впливу тріщин ГРП та побудувати числові алгоритми розв'язування відповідних крайових задач з подальшою їх комп'ютерною реалізацією з метою встановлення фільтраційно-ємкісних характеристик таких, як об'єм добутої нафти та відповідний об'єм, що залишається у пласті в довільний момент часу, зокрема, після припинення процесу витіснення, моменту прориву витісняючої рідини та часу повного обводнення експлуатаційної свердловини тощо, відшукування місцезнаходження значних по своїй площі «застійних» зон;
- ✓ модифікувати методологію моделювання багатофазної фільтрації в елементах площового заводнення періодичної структури, в рамках теорії Баклея-Леверетта, на випадок інтенсифікації притоку пластової рідини до

свердловини за умови збурення фільтраційної течії тріщинами гідравлічного розриву пласта, яка дозволяла б забезпечити оптимізацію певних функціоналів (зокрема, загальної фільтраційної витрати та частки в ній витісненого флюїду тощо) з метою, зокрема, уникнення формування так званих «застійних» зон, при цьому, проаналізувати типові випадки формування течії залежно від параметрів та розміщення тріщин;

✓ розробити, на основі розвинутої методології моделювання ізотермічної багатофазної фільтрації запропоновану Бомбою А. Я. та Ярощак С. В., підхід до числового розв'язання крайових задач неізотермічного процесу витіснення в елементах площового заводнення шляхом збурення фільтраційної течії тріщинами ГРП за умов терморежиму;

✓ розробити методику розв'язання крайових задач на інтенсифікацію нафтовидобутку із важкопроникних тріщинувато-пористих (типу сланцевих) осадових порід, коли за умов квазістаціонарності фільтраційної течії досліджуваний процес описується спеціальним чином модифікованим законом Дарсі, відносно критичного значення градієнта тиску:

$$\vec{v} = -\frac{k\chi(I, I_{kr})}{\mu} \text{grad } p;$$

✓ узагальнити методологію розв'язання двовимірних крайових задач однофазної фільтрації у важкопроникних родовищах на випадок просторово-маловикривлених пластів із врахуванням тріщин гідророзриву.

РОЗДІЛ 2

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОДНОФАЗНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ ЗА УМОВ ЗБУРЕННЯ ТЕЧІЇ ТРІЩИНАМИ ГІДРОРОЗРИВУ ПЛАСТА

У розділі, на основі ідей методів квазіконформного відображення та поетапної фіксації характеристик середовища і процесу, розроблено новий підхід до моделювання нелінійних процесів витіснення в горизонтальних нафтових пластах з урахуванням збурень фільтраційної течії включеннями скінченної проникності типу призупинених свердловин, тріщин гідравлічного розриву пласта, малопроникних зон. Розроблено числові алгоритми розв'язання відповідних крайових задач, зокрема, розрахункову процедуру обчислення коефіцієнта проникності привибійної зони свердловин нафтового пласта, з урахуванням відомого дебіту експлуатаційної свердловини. На основі чого створено програмні засоби комп'ютерної їх реалізації що дозволяють визначати, зокрема, моменти часу прориву витісняючої рідини до експлуатаційної свердловини та повного її обводнення, координати критичних точок типу «призупинки» та значень квазіпотенціалу у них, положення границі розділу рідин у різні моменти часу, значення загальної фільтраційної витрати на експлуатаційній свердловині, частки у ній витісненого флюїду, об'єму, що залишається у пласті в довільний момент часу, зокрема, після припинення процесу витіснення, а також відшукування місцезнаходення значних по своїй площі застійних зон (із відповідною вмістимістю нафти).

2.1 Математичне моделювання процесу витіснення нафти законтурною водою з урахуванням включень скінченної проникності

Розглянемо модельну задачу на еволюцію (рух) границі розділу R_t двох різнокольорових рідин [2, 29, 197], за умов їх не змішування, коли «витісняєма» (пластова) і «витісняюча» рідини характеризуються одними і

тими ж властивостями (описуються одними і тими ж рівняннями; відрізняються лише уявним кольором, що не впливає на параметри, грубо кажучи «нафта» витісняється «нафтою»), в пласті G_z ($z = x + iy$), обмеженому контуром живлення L_* та контуром експлуатаційної свердловини L^* (рис. 2.1). Для зручності викладок, на початковому етапі застосуємо найпростіший із законів витіснення: закон Дарсі та рівняння нерозривності течії, які моделюють даний процес, представимо відносно квазіпотенціалу швидкості фільтрації $\varphi = \varphi(x, y, t) = -p(x, y, t) + \tilde{p}$ (тут $p(x, y, t)$ – тиск у точці (x, y) в момент часу t , $\tilde{p}$ – деяке характерне його значення) [19]: $\vec{v} = k \operatorname{grad} \varphi$, $\operatorname{div} \vec{v} = 0$, тоді k – коефіцієнт проникності середовища: $k = k_0$ – ґрунту, $k = k_\lambda$ – проникність λ -ої тріщини ГРП.

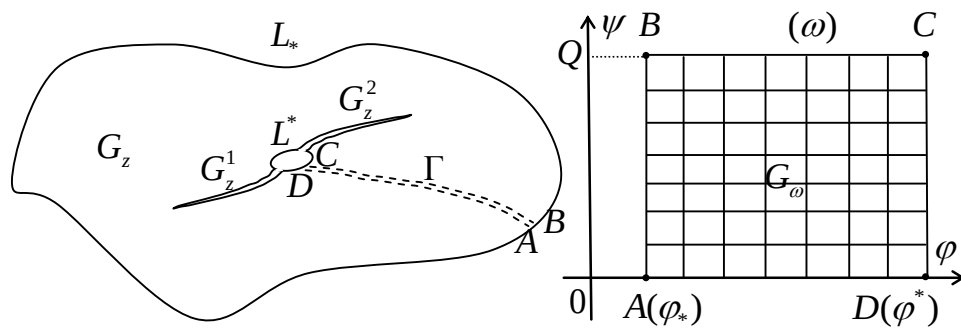


Рис. 2.1. Горизонтальний пласт за умов існування тріщин ГРП та відповідна область комплексного квазіпотенціалу

Аналогічно до [23], ввівши функцію течії $\psi = \psi(x, y)$ комплексно спряжену до $\varphi = \varphi(x, y)$ та здійснивши умовний розріз Γ області G_z вздовж лінії розділу течії, що визначається точками $A = B = (x_*, y_*) \in L_*$ та $C = D = (x^*, y^*) \in L^*$, задача на побудову гідродинамічної сітки, відшукування фільтраційної витрати $Q = \oint_{L^*} -v_y dx + v_x dy$ та інших характерних фільтраційних параметрів зводиться до задачі квазіконформного відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ [18], утвореної при цьому

однозв'язної області $G_z^0 = G_z \setminus \Gamma$ на відповідну прямокутну область комплексного квазіпотенціалу $G_\omega = \{\omega: \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$:

$$k(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad k(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z^0, \quad (2.1)$$

$$\varphi|_{L_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad \psi|_{AD} = 0, \quad \psi|_{BC} = Q, \quad (2.2)$$

$$[\varphi]|_{\partial G_z^\lambda} = 0, \quad [\nu_n]|_{\partial G_z^\lambda} = 0, \quad (2.2^*)$$

де $[\bullet]|_{\partial G_z^\lambda}$ – стрибок відповідної функції на контурі ∂G_z^λ .

Границя розділу R_t двох різнокольорових рідин визначається наступним рівнянням з відповідними умовами [19]:

$$\sigma \frac{\partial \varsigma}{\partial t} + \vec{\nu} \cdot \text{grad} \varsigma = 0, \quad \varsigma|_{L_*} = 1, \quad \varsigma(x, y, t)|_{t=t_0} = 0. \quad (2.3)$$

Через геометричну складність області G_z^0 та тривіальність відповідної їй області комплексного квазіпотенціалу G_ω ми розглядатимемо замість прямої задачі на квазіконформне відображення $G_z^0 \rightarrow G_\omega$ обернену до неї:

$$k \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad k \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \quad (2.4)$$

$$f_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q,$$

$$x(\varphi, 0) = x(\varphi, Q), \quad y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q), \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \quad (2.5)$$

$$[x(\varphi, \psi)]|_{\partial G_\omega^\lambda} = [y(\varphi, \psi)]|_{\partial G_\omega^\lambda} = 0,$$

$$\left[\frac{k}{J} \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2} \cos(\vec{\nu}, \vec{n}) \right]_{\partial G_\omega^\lambda} = 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left(k \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \psi} \left(k \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad (2.7)$$

де f_* , f^* – задані функції, що визначають контури відповідно L_* , L^* .

Маючи характеристичну функцію течії $z = z(\omega)$ та виділивши її дійсну і уявну частини $x = \text{Re } z(\omega)$, $y = \text{Im } z(\omega)$, знаходимо поле швидкості,

КОМПОНЕНТИ якої визначаємо такими співвідношеннями:

$$v_x = \frac{k(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi))}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial y(\varphi, \psi)}{\partial \psi}, \quad v_y = -\frac{k(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi))}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial x(\varphi, \psi)}{\partial \psi}, \quad \text{де}$$

$$J(\varphi, \psi) = x'_\varphi y'_\psi - x'_\psi y'_\varphi. \quad \text{З урахуванням вищеприведеного, задачу} \quad (2.3)$$

перепишемо так:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{v^2}{\sigma k} \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} \quad (2.8)$$

$$\zeta(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi), t) = 1, \quad \zeta(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), t_0) = 0,$$

$$0 \leq \psi \leq Q, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*. \quad (2.9)$$

Інтегруючи відповідне (2.8) характеристичне диференціальне рівняння

$$\frac{dt}{\sigma k} = \frac{d\varphi}{v^2}, \quad \text{знайдемо час } t \text{ проходження частинкою шляху від точки } (\varphi_*, \bar{\psi}_0)$$

до біжучої точки $(\varphi, \bar{\psi}_0)$ уздовж відповідної лінії течії $\psi(x, y) = \bar{\psi}_0$:

$$t = \Phi(\varphi, \bar{\psi}_0) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\varphi_*}^{\varphi} \sigma k v^{-2}(x(\tilde{\varphi}, \bar{\psi}_0), y(\tilde{\varphi}, \bar{\psi}_0)) d\tilde{\varphi}, \quad (2.10)$$

де $\varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*$. Використовуючи (2.10), знаходимо положення лінії розділу

$\Phi(\varphi, \psi) = \bar{t}$ різнокольорових рідин в довільний фіксований момент часу

$t = \bar{t}$, зокрема, час початку та повного заводнення експлуатаційної

свердловини, відповідно $t_{\min} = \Phi(\varphi^*, \underline{\psi}) =$

$$= \min_{\psi \in [0, Q]} \Phi(\varphi^*, \psi), \quad t_{\max} = \Phi(\varphi^*, \bar{\psi}) =$$

$$= \max_{\psi \in [0, Q]} \Phi(\varphi^*, \psi).$$

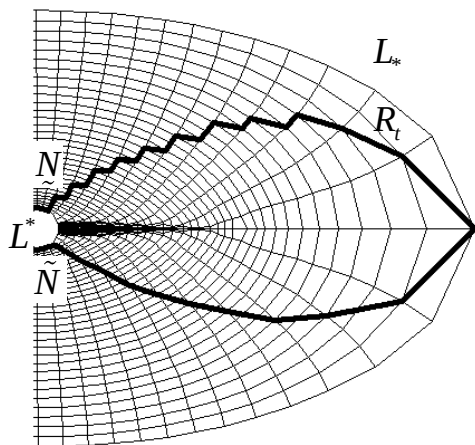


Рис.2.3. Розміщення границі розділу рідин R_t в елементі симетрії пласта G_z

Для обчислення наближеного об'єму добутої нафти в довільний фіксований момент часу $t = \bar{t}$, в результаті розв'язку рівняння $\Phi(\varphi^*, \psi) = \bar{t} \quad (0 \leq \psi < Q, \quad t_{\min} < \bar{t} < t_{\max})$ знаходимо відповідні

точкам $\tilde{N}$, $\tilde{N}$ перетину даної лінії розділу течії із контуром експлуатаційної свердловини (рис. 2.2.), що ділять його на ділянки поступання нафти та води, відповідно, значення $\psi = \psi(\bar{t})$, $\psi = \tilde{\psi}(\bar{t})$. Тоді дебіт відбору нафти у даний момент часу становитиме:

$$Q_n(\bar{t}) = (\tilde{\psi}(\bar{t}) - \psi(\bar{t})) \times \oint_{L^*} -v_y dx + v_x dy =$$

$$= (\tilde{\psi}(\bar{t}) - \psi(\bar{t})) \cdot Q.$$

Звідси шуканий об'єм добутої нафти з пласта від початку витіснення до моменту часу $t = \bar{t}$ визначається за формулою:

$$V_{вн}(\bar{t}) = \int_{t_0}^{\bar{t}} Q_n(\tilde{t}) d\tilde{t}.$$

Тоді як об'єм нафти, що міститься у ньому до початку

витіснення визначається: $V_n = V \cdot \sigma$, де V - об'єм досліджуваного пласта. Таким чином, залишок нафти у відповідний момент часу наближено обчислимо за формулою: $V_{зл}(\bar{t}) = V_n - V_{вн}(\bar{t})$.

Для побудови різницевого аналогу поставленої задачі введемо в області G_ω рівномірну ортогональну сітку $G_\omega^\gamma = \{(\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \varphi_* + i\Delta\varphi, \text{ де } \Delta\varphi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{n} \text{ при } i = \overline{0, n}; \psi_j = j \cdot \Delta\psi, \text{ де } \Delta\psi = \frac{Q}{m}, \text{ при } j = \overline{0, m}\}$, де $n, m \in \mathbb{N}$ - параметри розбиття області комплексного квазіпотенціалу, $\Delta\varphi$, $\Delta\psi$ - кроки сітки відповідно по змінним φ та ψ .

Рівняння (2.7) у середині сіткової області G_ω та розрізі Γ , крайові умови та умови періодичності з додатковими умовами для граничних та приграничних вузлів (умови ортогональності) апроксимуємо наступним чином [142, 199]:

$$\begin{cases} \gamma^2(k_{i,j+\frac{1}{2}}(x_{i,j+1} - x_{i,j}) - k_{i,j-\frac{1}{2}}(x_{i,j} - x_{i,j-1})) + \frac{x_{i+1,j} - x_{i,j}}{k_{i+1/2,j}} - \frac{x_{i,j} - x_{i,j-1}}{k_{i-1/2,j}} = 0, \\ \gamma^2(k_{i,j+\frac{1}{2}}(y_{i,j+1} - y_{i,j}) - k_{i,j-\frac{1}{2}}(y_{i,j} - y_{i,j-1})) + \frac{y_{i+1,j} - y_{i,j}}{k_{i+1/2,j}} - \frac{y_{i,j} - y_{i,j-1}}{k_{i-1/2,j}} = 0, \end{cases} \quad (2.11)$$

$$\begin{cases} f_*(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, & f^*(x_{n,j}, y_{n,j}) = 0, & j = \overline{0, m}, \\ x_{i,0} = x_{i,m}, & y_{i,0} = y_{i,m}, & i = \overline{0, n}; \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\begin{cases} (4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j})(x_{0,j+1} - x_{0,j-1}) + (4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j}) \times \\ \times (y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) = 0, & (3x_{n,j} + x_{n-2,j} - 4x_{n-1,j})(x_{n,j+1} - x_{n,j-1}) + \\ + (3y_{n,j} + y_{n-2,j} - 4y_{n-1,j})(y_{n,j+1} - y_{n,j-1}) = 0, & j = \overline{0, m-1}, \end{cases} \quad (2.13)$$

де $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$, $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$, $k_{i,j+1/2} = k\left(\frac{x_{i,j+1} + x_{i,j}}{2}, \frac{y_{i,j+1} + y_{i,j}}{2}\right)$,

$$k_{i,j-1/2} = k\left(\frac{x_{i,j} + x_{i,j-1}}{2}, \frac{y_{i,j} + y_{i,j-1}}{2}\right), \quad k_{i+1/2,j} = k\left(\frac{x_{i+1,j} + x_{i,j}}{2}, \frac{y_{i+1,j} + y_{i,j}}{2}\right),$$

$$k_{i-1/2,j} = k\left(\frac{x_{i,j} + x_{i-1,j}}{2}, \frac{y_{i,j} + y_{i-1,j}}{2}\right); \quad \gamma = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi} - \text{квазіконформний інваріант.}$$

Невідому витрату Q шукаємо за формулою $Q = \frac{m \cdot \Delta\varphi}{\gamma}$, величину γ – одержуємо на підставі умови «квазіконформної подібності в малому» відповідних елементарних чотирикутників двох областей:

$$\gamma = \frac{1}{mn} \sum_{i,j=0}^{n-1,m-1} \frac{1}{k_{i+1/2,j+1/2}} \frac{\alpha_{i,j} + \alpha_{i,j+1}}{\beta_{i,j} + \beta_{i+1,j}}, \quad (2.14)$$

де $\alpha_{i,j} = \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2}$, $\beta_{i,j} = \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2}$.

Згідно з (2.10) маємо формулу для наближеного розрахунку часу проходження частинкою шляху вздовж j -тої лінії течії від i_* до i^* еквіпотенціалей:

$$t_{j(i_*, i^*)} = \sum_{i=i_*}^{i^*} \frac{\sigma \cdot k_{i,j} \cdot \Delta\varphi}{v^2(x(\varphi_i, \psi_j), y(\varphi_i, \psi_j))}, \quad j = \overline{0, m}, \quad (i_*, i^*) = \overline{0, n}. \quad (2.15)$$

Формули для знаходження поля швидкостей апроксимуємо наступним чином:

- для внутрішніх вузлів сітки:

$$(\nu_x, \nu_y)_{i,j} = \frac{k_{i,j}}{2\Delta\psi J_{i,j}} (y_{i,j+1} - y_{i,j-1}, x_{i,j-1} - x_{i,j+1}), \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m-1},$$

$$J_{i,j} = \frac{(x_{i+1,j} - x_{i-1,j})(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) - (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})(y_{i+1,j} - y_{i-1,j})}{4\Delta\psi\Delta\varphi};$$

- для вузлів сітки на розрізі Γ :

$$(\nu_x, \nu_y)_{i,0} = (\nu_x, \nu_y)_{i,m} = \frac{k_{i,m}}{2\Delta\psi J_{i,m}} (y_{i,1} - y_{i,m-1}, x_{i,m-1} - x_{i,1}), \quad i = \overline{1, n},$$

$$J_{i,m} = \frac{(x_{i+1,m} - x_{i-1,m})(y_{i,1} - y_{i,m-1}) - (x_{i,1} - x_{i,m-1})(y_{i+1,m} - y_{i-1,m})}{4\Delta\psi\Delta\varphi};$$

- для граничних вузлів сітки L^* :

$$(\nu_x, \nu_y)_{0,j} = \frac{k_{0,j}}{2\Delta\psi J_{0,j}} (y_{0,j+1} - y_{0,j-1}, x_{0,j-1} - x_{0,j+1}), \quad j = \overline{1, m-1},$$

$$J_{0,j} = \frac{(x_{1,j} - x_{0,j})(y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) - (x_{0,j+1} - x_{0,j-1})(y_{1,j} - y_{0,j})}{2\Delta\psi\Delta\varphi};$$

- для граничних вузлів сітки L_* :

$$(\nu_x, \nu_y)_{n,j} = \frac{k_{n,j}}{2\Delta\psi J_{n,j}} (y_{n,j+1} - y_{n,j-1}, x_{n,j-1} - x_{n,j+1}), \quad j = \overline{1, m-1},$$

$$J_{n,j} = \frac{(x_{n,j} - x_{n-1,j})(y_{n,j+1} - y_{n,j-1}) - (x_{n,j+1} - x_{n,j-1})(y_{n,j} - y_{n-1,j})}{2\Delta\psi\Delta\varphi};$$

- для точок C, D:

$$(\nu_x, \nu_y)_{0,0} = (\nu_x, \nu_y)_{0,m} = \frac{k_{0,0}}{2\Delta\psi J_{0,0}} (y_{0,1} - y_{0,m-1}, x_{0,m-1} - x_{0,1}),$$

$$J_{0,0} = \frac{(x_{1,0} - x_{0,0})(y_{0,1} - y_{0,m-1}) - (x_{0,1} - x_{0,m-1})(y_{1,0} - y_{0,0})}{2\Delta\psi\Delta\varphi};$$

- для точок A, B:

$$(\nu_x, \nu_y)_{n,0} = (\nu_x, \nu_y)_{n,m} = \frac{k_{n,0}}{2\Delta\psi J_{n,0}} (y_{n,1} - y_{n,m-1}, x_{n,m-1} - x_{n,1}),$$

$$J_{n,0} = \frac{(x_{n,0} - x_{n-1,0})(y_{n,1} - y_{n,m-1}) - (x_{n,1} - x_{n,m-1})(y_{n,0} - y_{n-1,0})}{2\Delta\psi\Delta\varphi}. \quad (2.16)$$

Таким чином, алгоритм наближення розв'язку оберненої диференціальної задачі (2.4)–(2.7) різницевою задачею в загальному випадку, як і в роботах [16-19], побудуємо шляхом поетапної параметризації величини γ , граничних та внутрішніх вузлів сітки з використанням ідей блочної ітерації, для аналітичного обґрунтування його збіжності. А саме: задавши геометричну конфігурацію фізичної області G_z , що обмежена контурами L_* , L^* , кількість вузлів розбиття відповідної області комплексного квазіпотенціалу G_ω (параметри n та m); параметри необхідної точності роботи алгоритму ε_1 , ε_2 та рівень квазіконформності δ_* відображення. Задаємо початкові наближення шуканих координат граничних вузлів, так щоб виконувалися умови (2.12), та координат внутрішніх вузлів гідродинамічної сітки і, використовуючи (2.14), знаходимо початкове наближення квазіконформного інваріанту $\gamma^{(0)}$ та невідому величину витрати $Q^{(0)} = \frac{(\varphi^* - \varphi_*)m}{n\gamma^{(0)}}$. Проводимо уточнення

координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j}, y_{i,j})$ за формулами, отриманими шляхом розв'язання (2.11) відносно $x_{i,j}$ та $y_{i,j}$ (з метою прискорення швидкості збіжності всього процесу і економії машинного часу використовуємо лише перший ітераційний крок, при цьому враховуємо періодичність шуканих функцій). Підправляємо граничні вузли (координати даного вузла підправляємо за умови фіксації навколишніх граничних та приграничних), використовуючи різницеві аналоги умов типу Коші-Рімана (2.13). Використовуючи значення квазіконформних інваріантів (2.14), знаходимо нове наближення величини Q , якщо її зміна за останню проведену ітерацію більша за ε_1 , то повертаємося до уточнення вузлів. Визначаємо величину

$$S = \max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(k)} - x_{i,j}^{(k-1)})^2 + (y_{i,j}^{(k)} - y_{i,j}^{(k-1)})^2} - \text{зміщення вузлів на границі за}$$

проведену k -ту загальну ітерацію, якщо вона більша за ε_2 , то переходимо до уточнення вузлів. У протилежному випадку оцінюємо ступінь

квазіконформності $\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$ отриманого відображення області комплексного квазіпотенціалу на фізичну область із розрізами вздовж ліній течії, де δ_1, δ_2 – нев’язки апроксимацій рівнянь (2.4):

$$\delta_1 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} |(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) - \gamma k_{i,j}(y_{i,j+1} - y_{i,j-1})|,$$

$$\delta_2 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} |(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) - \gamma k_{i,j}(x_{i,j+1} - x_{i,j-1})|.$$

Якщо $\delta \geq \delta_*$, то змінюємо кількість вузлів розбиття області G_ω та повторюємо кроки алгоритму, інакше задача розв’язана із необхідною точністю.

Після встановлення гідродинамічної сітки, поля потенціалу, знаходимо за формулою (2.15) час руху частинки від фіксованої точки $(\varphi_*, \bar{\psi}_0)$ до біжучої точки $(\varphi, \bar{\psi}_0)$ уздовж відповідної лінії течії $\psi(x, y) = \bar{\psi}_0$. Враховуючи той факт, що рівняння (2.8) є одномірним гіперболічним, адже змінна ψ лише в якості параметру, а положення границі розділу рідин R_t не обов’язково характеризується вузлами гідродинамічної сітки, здійснимо побудову різницевого алгоритму її відшукування виходячи з ідей методу характеристик, аналогічно [18-19].

З метою підтвердження адекватності запропонованої математичної моделі, розглянемо процес стаціонарної фільтрації однорідної рідини для випадку, коли $L^* = \{x + iy : x^*(\theta) = 2 \cdot \cos(\theta), y^*(\theta) = 2 \cdot \sin(\theta), 0 \leq \theta < 2\pi\}$,

$$G_z^\lambda = \left\{ (x, y) : \left(\frac{x}{a_\lambda} \right)^2 + \left(\frac{y}{b_\lambda} \right)^2 \leq 1 \right\} \text{ де } a_1 = 10 \text{ м., } b_1 = 0.1 \text{ м., та } L_* = \{x + iy :$$

$$x_*(\theta) = 0,1 \cdot \cos(\theta), y_*(\theta) = 0,1 \cdot \sin(\theta), 0 \leq \theta < 2\pi\} \text{ при } p_* = 112 \cdot 10^5 \text{ Па., } p^* = 198 \cdot 10^5 \text{ Па., } k_0 = 5 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2, k_1 = 11 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2, n \times m = 38 \times 80 \text{ (рис. 2.2. а).}$$

Як відомо, для того щоб результати могли описати достатньо широкий клас задач, розв’язок зазвичай шукають у безрозмірних величинах. Такий підхід дозволяє не тільки виявити характерні особливості процесу, але й

якісний опис його розвитку у ширшому класі розглядаємих явищ, не проводячи щоразу розрахунки у випадку зміни вхідних параметрів задачі, які вимагають додаткового часу та відповідних ресурсів. Тому введемо комплекс

обезрозмірювання характерних величин: $\tilde{x} = \frac{x}{L}$, $\tilde{y} = \frac{y}{L}$ ($L =$

$= \max_{0 \leq \theta \leq \pi} \sqrt{\left(x^*(\theta + \pi) - x^*(\theta)\right)^2 + \left(y^*(\theta + \pi) - y^*(\theta)\right)^2}$ - характерний розмір

пласта), $\tilde{t} = \frac{t}{T}$ ($T \approx t_{\max}$), $\vec{\tilde{v}}_i = \frac{\vec{v}_i \cdot T}{L}$, $\tilde{p}_i = \frac{(p^* - p_*) \cdot k \cdot T}{\mu_i \cdot L^2}$, звідки будемо мати:

$$a_1 = 1, b_1 = 0.05, \varphi_* = 0, \varphi^* = 1, k_1 = 10, k_0 = 1.$$

На рис. 2.4. *a* зображено відповідну гідродинамічну сітку, розраховану за описаним вище алгоритмом з точністю $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \delta_* = 10^{-5}$.

Для такого конфокального взаємного розміщення свердловини та тріщини ГРП [6] існують аналітичні формули розрахунку характерних фільтраційних параметрів, зокрема комплексного потенціалу $\omega(z) = \varphi(x, y) + i \cdot \psi(x, y)$ відповідного фільтраційного поля та значення витрати Q :

$$\omega_1(z) = \varphi_1(x, y) + i\psi_1(x, y) = \frac{Q}{2\pi} \ln z + k_1 \sum_{n=0}^{+\infty} D_n z^{2n}, \quad (2.17)$$

$$\omega_2(z) = \varphi_2(x, y) + i\psi_2(x, y) = \frac{Q}{2\pi} \ln z + k_0 \sum_{n=0}^{+\infty} B_n z^{-2n}, \quad (2.18)$$

$$Q = Q_0 \frac{\ln R_c - \ln r_w}{\ln(R_c/r_w) + S}, \quad (2.19)$$

де D_n , B_n – сталі й знаходяться з відповідних умов на контурах тріщини та фільтраційної області (при цьому знаходження поля швидкості фільтрації в пласті та тріщині є можливим шляхом диференціювання комплексного потенціалу (2.17) – (2.18));

S – скін-фактор (характерний параметр, що відображає вплив тріщини ГРП на продуктивність свердловини);

$$Q_0 = \frac{2 \cdot \pi \cdot k_1 \cdot h \cdot (\varphi_* - \varphi^*)}{\mu \cdot \ln(R_c/r_w)} - \text{дебіт свердловини без тріщини ГРП [6].}$$

На основі вищеописаних аналітичних формул побудовано відповідну гідродинамічну сітку (рис 2.4. в). Порівняння числових значень розрахунків фільтраційно-ємкісних характеристик у відповідних вузлах сітки є вагомим вргументом адекватності запропонованої нами математичної моделі та ефективність методу. Крім цього, формули (2.17) – (2.19) доцільно використовувати для контролю точності та вибору початкового наближення параметрів.

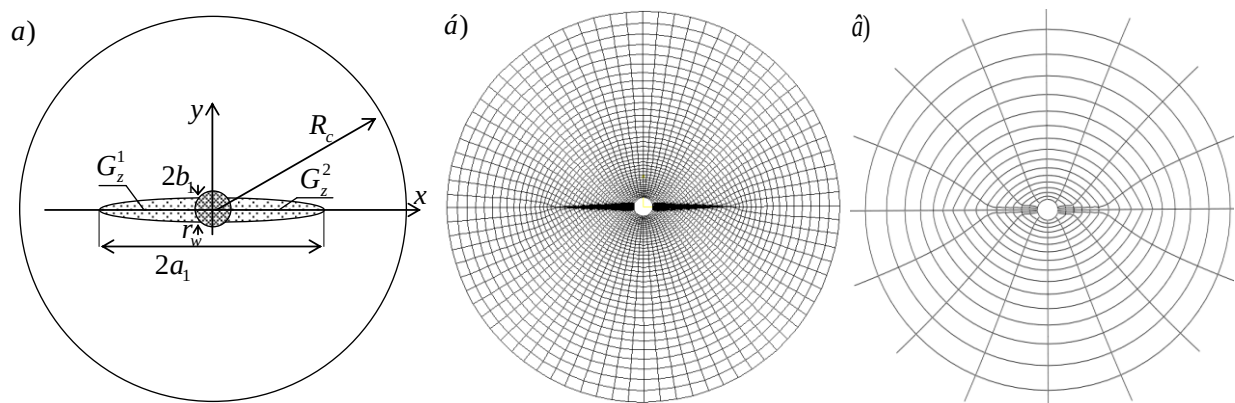


Рис. 2.4. Круговий пласт із тріщинами гідророзриву (а) й відповідні йому гідродинамічні сітки, розраховані за допомогою розробленого алгоритму (б) та аналітичних формул (в)

На основі запропонованого нами алгоритму дослідження закономірностей процесу витіснення нафти законтурною водою з

урахуванням тріщин ГРП $(G_z^\lambda = \left\{ (x, y) : \left(\frac{1}{a_\lambda} (x \cos \alpha_\lambda + y \sin \alpha_\lambda) \right)^2 + \left(\frac{1}{b_\lambda} (-x \sin \alpha_\lambda + y \cos \alpha_\lambda) \right)^2 \leq 1 \right\})$, проведемо числові розрахунки для більш

ускладненої моделі в результаті збільшення кількості тріщин та зміни їх розміщення, яка не має аналітичних розв'язків для пласта обмеженого

контурами $L^* = \{x + iy : x^*(t) = 0.1 \cdot \cos(\theta), y^*(t) = 0.1 \cdot \sin(\theta), 0 \leq \theta < 2\pi\}$ та

$L_* = \{x + iy : x_*(\theta) = 2(\cos(\theta) + 0.1\cos(3\theta)), y_*(\theta) = 2(\sin(\theta) - 0.1\sin(4\theta)), 0 \leq \theta < 2\pi\}$ при $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$, $\sigma = 0.5$, $n \times m = 70 \times 180$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \delta_* = 10^{-5}$, де $k_0 = 1$, $k_1 = k_2 = 10$. На рисунку 2.5 зображено гідродинамічні сітки пласта при відсутності тріщин ГРП (рис. 2.5. а) та їх наявності: $a_1 = 1$, $b_1 = 0.05$, $\alpha_1 = 0$ (рис. 2.5. б), $a_1 = 0.05$, $b_1 = 1$, $\alpha_1 = 135$ (рис. 2.5. в), $a_1 = b_2 = 1$, $b_1 = a_2 = 0.05$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$ (рис. 2.5. г).

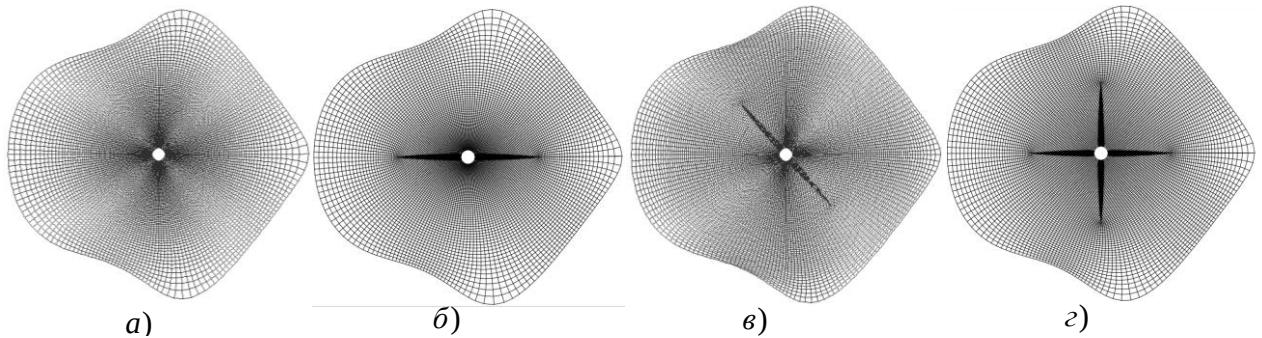


Рис. 2.5. Гідродинамічні сітки у пласті при відсутності (а) та наявності (б-г) тріщин гідророзриву

На рисунку 2.6 зображено гідродинамічні сітки та лінії розділу різнокольорових рідин у різні моменти часу для вищеписаних випадків, зокрема значення загальної фільтраційної витрати експлуатаційної свердловини, відповідно, дорівнюють: 2.114, 2.956, 2.847, 3.564.

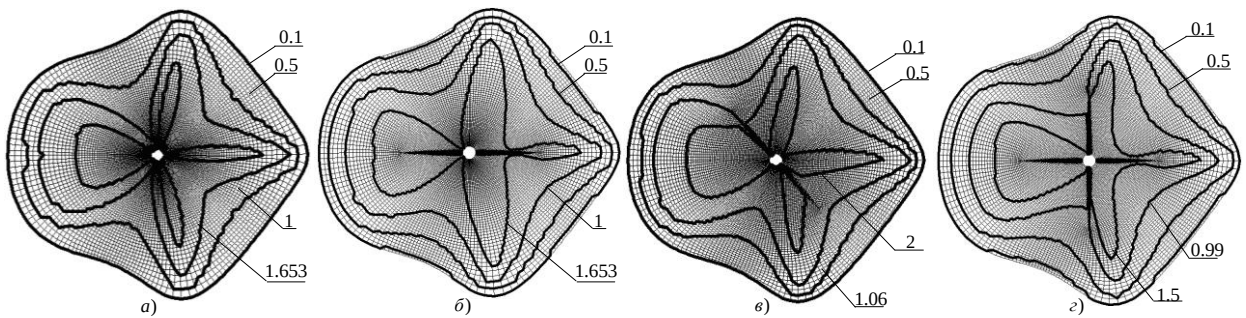


Рис. 2.6. Гідродинамічні сітки та лінії розділу різнокольорових рідин у різні моменти часу

На рис. 2.7 зображено графік залежності частки витісняючої рідини (води) Q_t у загальній фільтраційній витраті Q експлуатаційної свердловини від часу для вищеписаних випадків. Враховуючи той факт, що на практиці процес витіснення в основному припиняють за умови $Q_t / Q > 0.8$, то в

результаті здійснення розрахунків, встановлено і позначено на графіку (штрих-пунктирними лініями) моменти часу виконання даної умови для кожного з випадків: $\bar{t}_1 = 3.71$, $\bar{t}_2 = 3.14$, $\bar{t}_3 = 2.76$, $\bar{t}_4 = 2.28$, відповідно $V_{\text{вн}}(\bar{t}_1) = 2.12$, $V_{\text{вн}}(\bar{t}_2) = 2.08$, $V_{\text{вн}}(\bar{t}_3) = 2.04$, $V_{\text{вн}}(\bar{t}_4) = 2.06$. На графіку також відзначено момент часу прориву води до експлуатаційної свердловини: 1.756, 1.653, 0.923 та 0.989, та повного її обводнення: 4.334, 3.505, 3.066, 2.337. Так як об'єм нафти, що міститься у пласті до початку витіснення становить $V_n = 2.4$. Як бачимо, з використанням процедури ГРП віддача пласта значно збільшується зі збільшенням кількості тріщин.

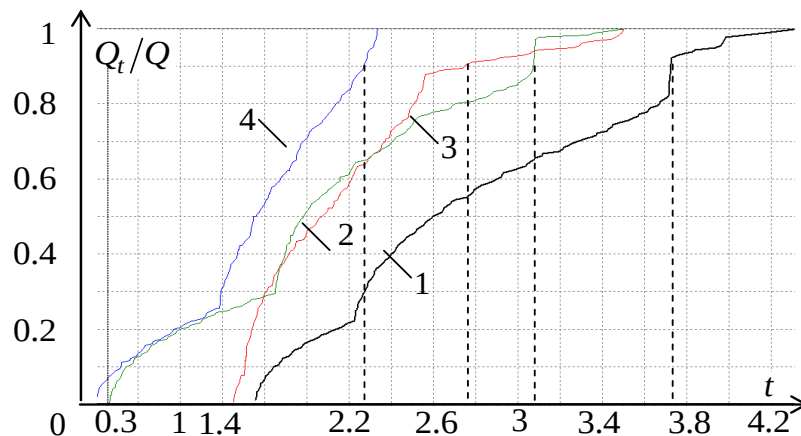


Рис. 2.7. Графік залежності частки витісняючої рідини у загальній фільтраційній витраті від часу.

Таким чином, змінюючи орієнтацію тріщин чи збільшуючи їх кількість змінюються відповідно і фільтраційно-ємкісні характеристики процесу витіснення, що підтверджують доцільність застосування ГРП для інтенсифікації нафтовидобутку, в результаті чого вдається підібрати такі параметри тріщин (розміри і положення), при якому час розробки пласта є мінімальним, а фільтраційна витрата – максимальною.

Досить часто при розробці нафтових родовищ відбувається призупинка свердловин, тому проведемо дослідження процесу витіснення у пласті, обмеженому зовнішнім контуром живлення $L^* = \{(x, y): x^2 + y^2 = R_c\}$, у випадку наявності включень скінченої проникності типу призупинених

свердловин $G_z^{\tilde{\lambda}} = \{(x, y): (x - x_0^{\tilde{\lambda}})^2 + (y - y_0^{\tilde{\lambda}})^2 = 1\}$ і утворених на експлуатаційній свердловині $L_* = \{(x, y): x^2 + y^2 = r_w^2\}$ тріщин ГРП $G_z^{\lambda} = \{(x, y): \left(\frac{x}{a_{\lambda}}\right)^2 + \left(\frac{y}{b_{\lambda}}\right)^2 = 1\}$, де $\tilde{\lambda} + \underline{\lambda} = \lambda$, $k_{\tilde{\lambda}} = 1000$, $k_{\underline{\lambda}} = 10$, $k_0 = 1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \delta_* = 10^{-5}$, $R_c = 2$, $r_w = 0.1$, $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$, $a_1 = 1$, $b_1 = 0.05$, $n \times m = 38 \times 80$ (рис. 2.8).

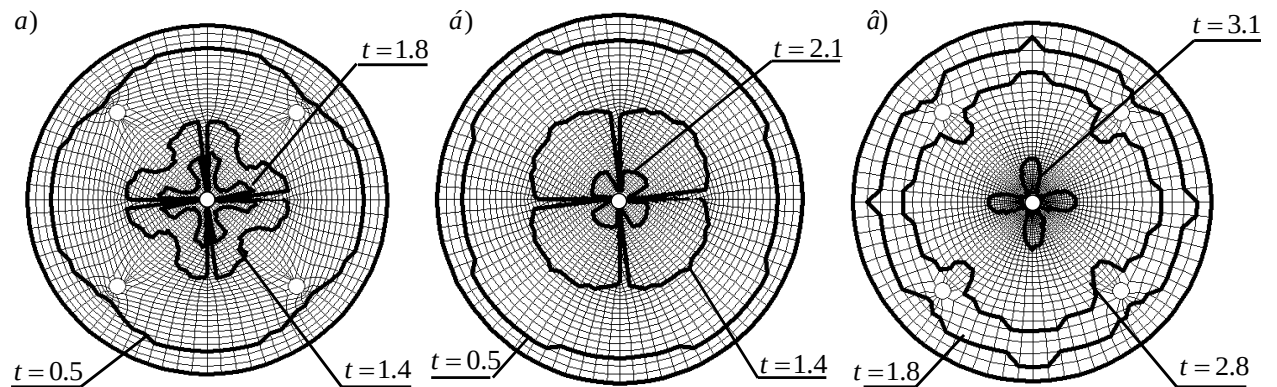


Рис. 2.8. Гідродинамічні сітки пласта з включеннями типу призупинених свердловин та тріщинами ГРП (а), тільки з тріщинами ГРП (б), тільки з включеннями типу призупинених свердловин (в)

Таблиця 2.1.

Значення Q , $t_{\min}$ та $t_{\max}$ для відповідних випадків (а), (б), (в).

	Q	$t_{\min}$	$t_{\max}$
а)	3,305	1,425	1,884
б)	3,306	1,483	2,213
в)	2,086	2,55	3,247

У таблиці 2.1. представлені значення фільтраційної витрати Q , часу прориву $t_{\min}$ витісняючої рідини до експлуатаційної свердловини та часу повного її заводнення – $t_{\max}$ у кожному із описаних вище випадків.

Бачимо, що наявність у досліджуваному пласті недіючих свердловин значно сповільнює процес витіснення, на відміну від тріщин ГРП, при наявності яких суттєво збільшується фільтраційна витрата і зменшується час повного обводнення, що значно оптимізує процес витіснення однак, при наявності і недіючих свердловин, і тріщин ГРП час витіснення – найменший, а витрата майже не змінилась.

З використанням вищеописаної моделі, проведемо порівняння фільтраційних характеристик у випадку існування у пласті включень, що мають різні значення коефіцієнту проникності. На рис. 2.9 зображено ситуаційні стани формування течії у випадках, близьких до критичних ($k_f=0$ та $k_f=\infty$), а саме, коли $k_f=0,1$ (а) та $k_f=1000$ (б).

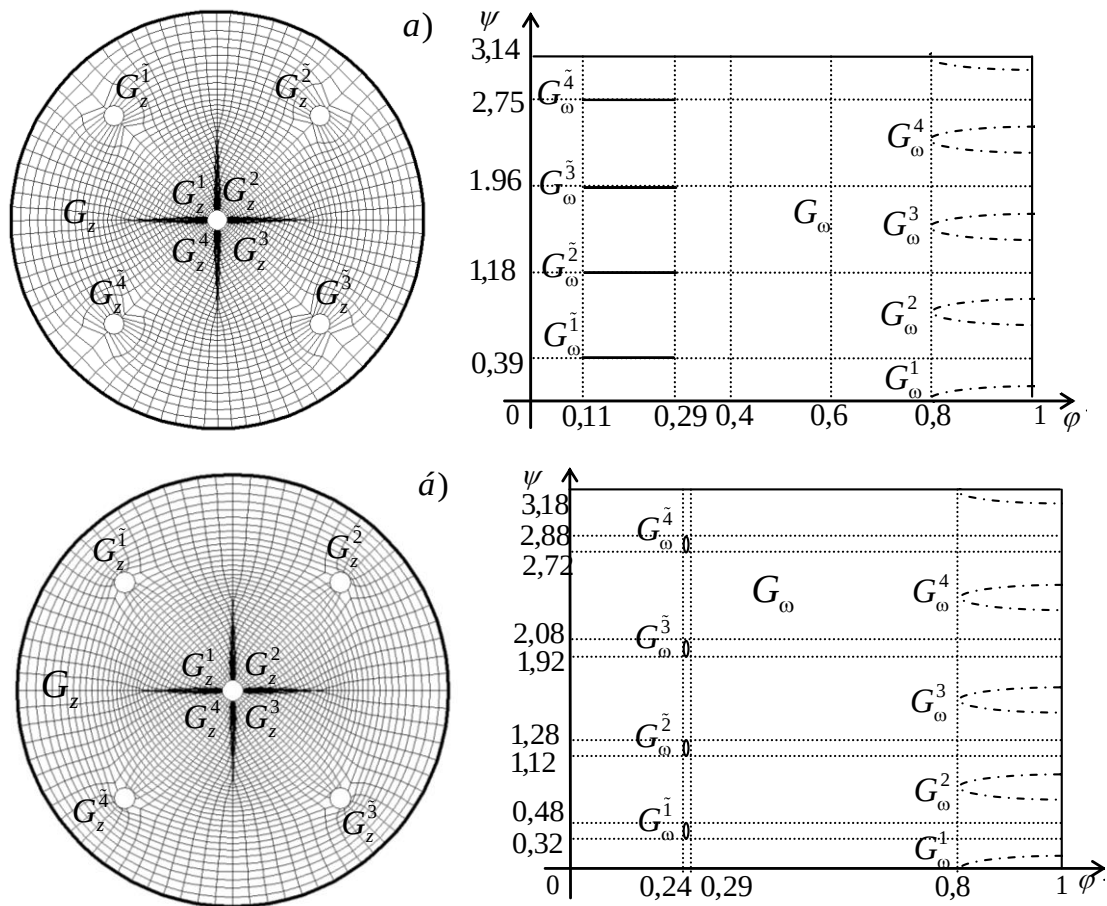


Рис. 2.9. Фізична область G_z та відповідна область комплексного квазіпотенціалу G_ω при $k_f=0,1$ (а) та $k_f=1000$ (б)

Як відомо, підобласті $G_{\omega}^{\tilde{l}}$ (образи $G_z^{\tilde{l}}$) при $k_{\tilde{l}} \rightarrow 0$ вироджуються в горизонтальні відрізки, адже утворюються зони оптікання непроникних (малопроникних) зон, а при $k_{\tilde{l}} \rightarrow \infty$ - «вертикальні» еліпси, що пояснюється прискоренням руху навколо цих зон. Отже, маємо: по-перше, ще один варіант перевірки адекватності моделі та ефективності методу і, по-друге, наближений розв'язок відповідних задач: обтікання непроникних включень; перетікання через включення з нескінченно великою проникністю (обмеженими еквіпотенціальними лініями).

Найчастіше при моделюванні розробки нафтових родовищ спостерігається висока неоднорідність пластів-колекторів, тому проаналізуємо зміну фільтраційних характеристик у випадку зміни розміщення експлуатаційної свердловини та тріщин ГРП на ній відносно зон неоднорідностей скінченої проникності. Проведемо числові розрахунки для пласта обмеженого зовнішнім контуром живлення $L_* = \{x + iy : x_*(\theta) = 2(\cos(\theta) + 0.1\cos(7\theta)), y_*(\theta) = 2(\sin(\theta) - 0.1\sin(4\theta)), 0 \leq \theta < 2\pi\}$ та контуром експлуатаційної свердловини $L^* = \{x + iy : x^*(\theta) = 0.1\cos(\theta) + \tilde{x}^*, y^*(\theta) = 0.1\sin(\theta) + \tilde{y}^*, 0 \leq \theta < 2\pi\}$, при $n \times m = 48 \times 80$, $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$, $\sigma = 0.5$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \delta_* = 10^{-5}$, $k_0 = 1$, коли фільтраційна течія збурена малопроникними зонами $G_z^{\tilde{\lambda}} = \left\{ (x, y) : \left((x - x_0^{\tilde{\lambda}}) / a_{\tilde{\lambda}} \right)^2 + \left((y - y_0^{\tilde{\lambda}}) / b_{\tilde{\lambda}} \right)^2 = 1 \right\}$ і утвореними на експлуатаційній свердловині тріщинами гідророзриву $G_z^{\tilde{\lambda}} = \left\{ (x, y) : \left((x - \tilde{x}^*) / a_{\tilde{\lambda}} \right)^2 + \left((y - \tilde{y}^*) / b_{\tilde{\lambda}} \right)^2 = 1 \right\}$, де $\tilde{\lambda} + \tilde{\lambda} = \lambda$, $k_{\tilde{\lambda}} = 0,4$ ($\tilde{\lambda} = \overline{1,3}$), $a_{\tilde{\lambda}} = 0,5$, $b_{\tilde{\lambda}} = 0,4$ ($\tilde{\lambda} = \overline{1,2}$), $a_{\tilde{\lambda}} = 0,4$, $b_{\tilde{\lambda}} = 0,5$ ($\tilde{\lambda} = 3$), $k_{\tilde{\lambda}} = 8$ ($\tilde{\lambda} = \overline{1,2}$), $a_{\tilde{\lambda}} = b_{\tilde{\lambda}+1} = 0,05$ і $b_{\tilde{\lambda}} = a_{\tilde{\lambda}+1} = 1$ ($\tilde{\lambda} = 1$) (рис. 2.10).

Проведемо порівняння зміни положення границі розділу рідин у різні моменти часу (рис. 2.11) розробки пласта та встановимо значення

фільтраційної витрати, час прориву витісняючої рідини до експлуатаційної свердловини та час повного її обводнення (табл. 2.2) відносно зон неоднорідностей ґрунту, що дозволить, в свою чергу, передбачити напрямки обводнення і провести відповідні дії щодо уникнення пов'язаних з цим небажаних ефектів.

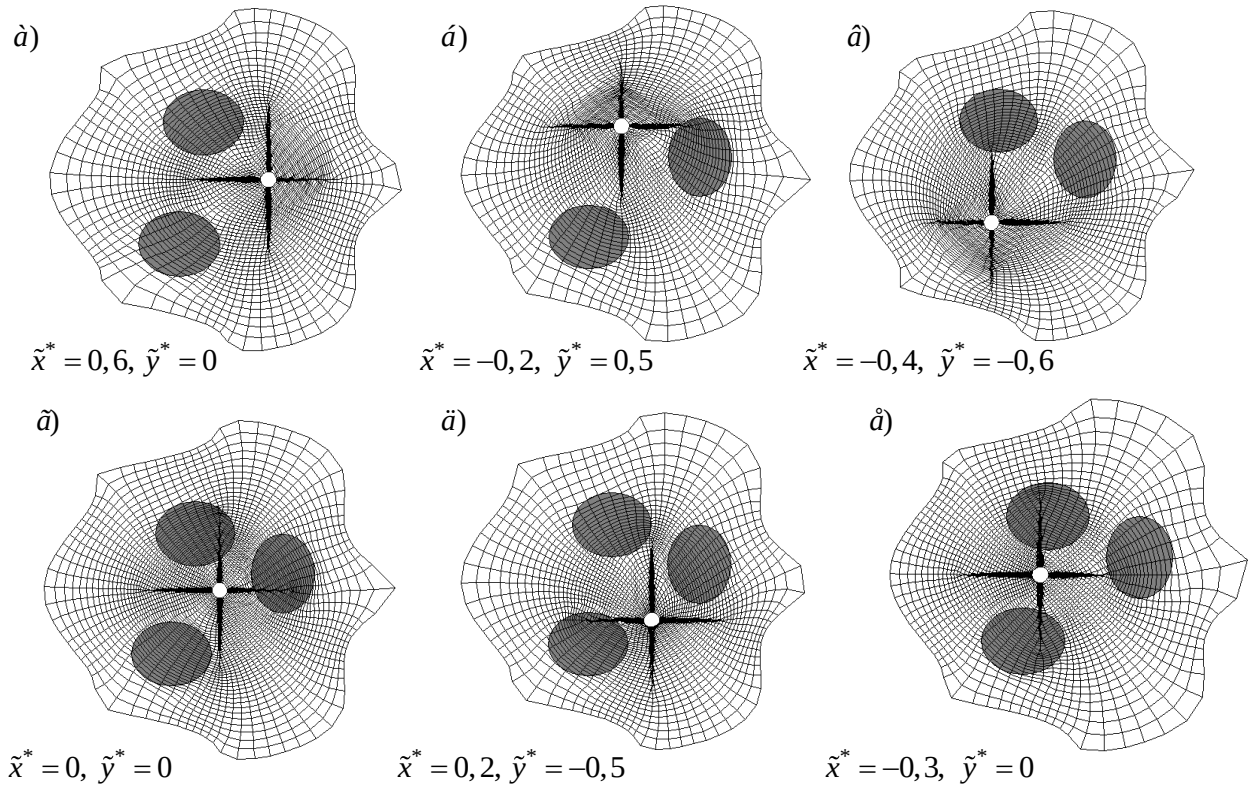


Рис. 2.10. Гідродинамічні сітки для локально неоднорідного пласта

Таблиця 2.2.

Значення Q , $t_{\min}$ та $t_{\max}$

	а)	а')	а'')	а)	а'')	а'')
Q	2,537	2,564	2,394	2,692	2,691	2,614
$t_{\min}$	0,59	0,45	0,18	1,11	0,48	1,12
$t_{\max}$	5,62	7,49	6,31	4,52	4,69	4,73

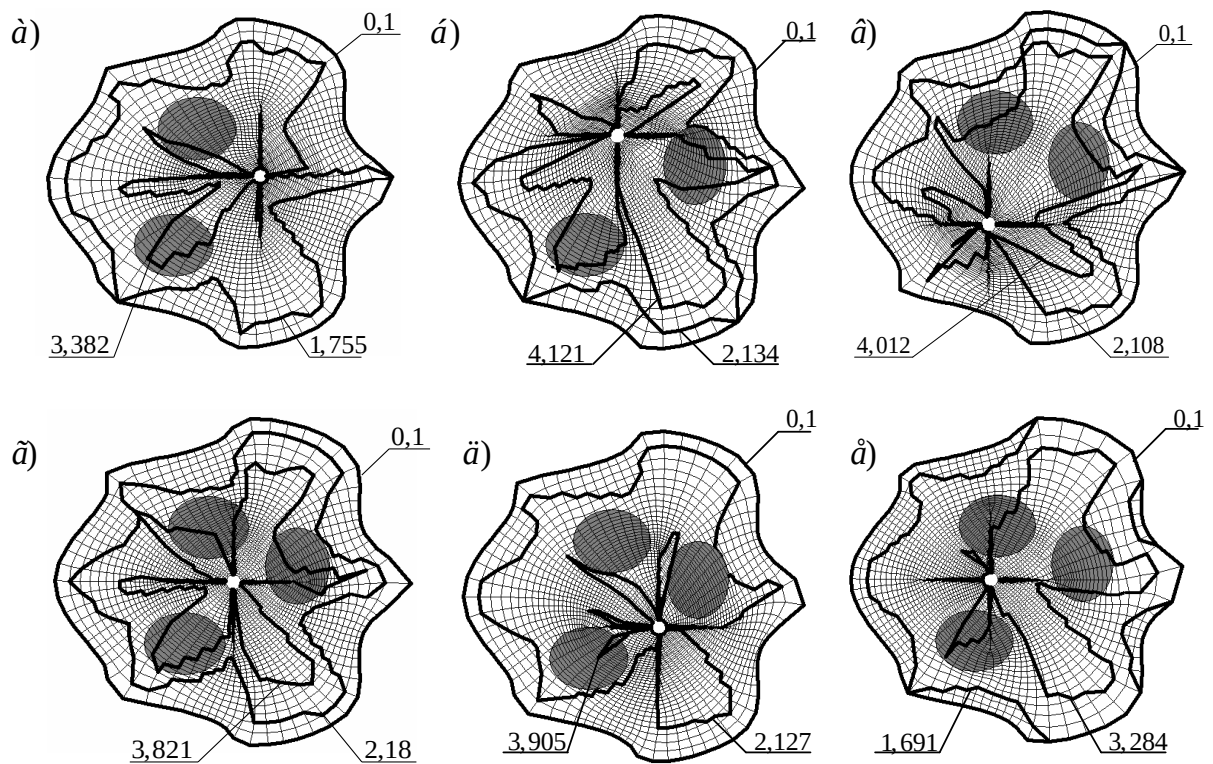


Рис. 2.11. Гідродинамічні сітки для різних випадків розміщення експлуатаційної свердловини відносно зон неоднорідностей у пласті

В результаті досліджень було помічено, що при розміщенні експлуатаційної свердловини у одній із зон неоднорідностей (рис. 2.11 а, 2.11 б, 2.11 в), на відміну від випадків її розміщення між ними (рис. 2.11 г, 2.11 д, 2.1 е), значення її дебіту значно менше, час повного обводнення – більше, у зв'язку із вищим загальним фільтраційним опором пласта в його привибійній ділянці. Змінюючи просторове розміщення експлуатаційної свердловини, при використанні розробленого алгоритму, вдалося підібрати таке її положення, при якому час розробки пласта є мінімальним, а фільтраційна витрата – максимальною, що забезпечує оптимальні умови експлуатації пласта за мінімальних затрат коштів.

2.2 Методика визначення усередненого коефіцієнта проникності присвердловинної ділянки пласта

Задача визначення фільтраційно-смкісних характеристик нафтогазових пластів, за даними, отриманими внаслідок лабораторних дослідів на керні, є

досить актуальною, проте важливим етапом такого дослідження є виділення в пласті зон впливу цих параметрів та встановлення основних їх характеристик: коефіцієнта фільтрації та природу його зміни в межах виділеної зони, геометричні розміри зон впливу, фільтраційні параметри тріщин гідравлічного розриву пласта, тощо. Така задача ідентифікації відноситься до класу обернених коефіцієнтних задач [19, 33, 82-83] і виникає, зокрема, на етапі адаптації геолого-гідродинамічної моделі досліджуваного об'єкта по відомим апіорним даним щодо фільтраційних і динамічних властивостей розроблюваного пласта [62, 81]. При спорудженні та експлуатації свердловин в частинах пласта, що прилягають до них, відбуваються зміни фільтраційних властивостей пористого середовища та його фільтраційно-ємкісних характеристик і формується система навколосвердловинних зон з особливими умовами фільтрації. Ефект такої зміни при моделюванні, в деяких випадках, враховують завдяки введенню кусково-неперервного коефіцієнта проникності у припущенні, що границі зон є нерухомими і заданими.

Ідентифікація фільтраційно-ємкісних параметрів проводиться в умовах стаціонарної однофазної фільтрації рідини у горизонтальному зонально неоднорідному пласті (області G_z , $z = x + iy$), обмеженому контуром живлення L_* та контуром експлуатаційної свердловини L^* (рис. 2.12) і описується рівнянням нерозривності та законом Дарсі [4,5]: $\operatorname{div} \vec{v} = 0$,

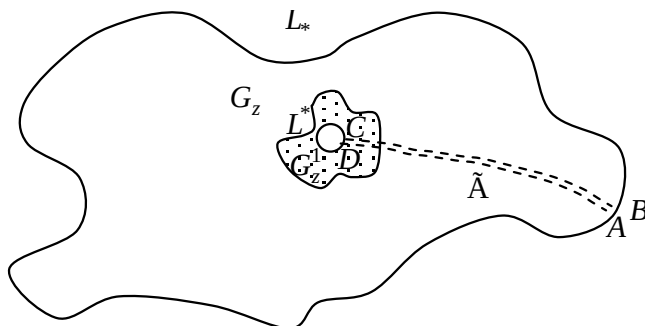


Рис. 2.12. Пласт з неоднорідністю у навколо свердловинній ділянці

$\vec{v} = k(x, y) \operatorname{grad} \varphi$ відповідно, де

$\varphi = \varphi(x, y)$ – квазіпотенціал

швидкості фільтрації $\vec{v} = v_x + iv_y$,

$$k(x, y) = \begin{cases} k^*, & (x, y) \in G_z^1, \\ k_*, & (x, y) \in G_z \setminus G_z^1, \end{cases} -$$

коефіцієнт фільтрації, k^* – шукане

значення коефіцієнта фільтрації в присвердловинній зоні G_z^1 (із заданою границею), k_* – відомий коефіцієнт фільтрації в області $G_z \setminus G_z^1$.

Задачу на ідентифікацію фільтраційно-ємкісних характеристик нафтового пласта зводимо до задачі на квазіконформне (кусково-конформне) відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, утвореної при цьому, однозв'язної області $G_z^0 = G_z \setminus \Gamma$, де Γ – умовний розріз вздовж лінії розділу течії (через AD та BC на рис. 2.10 позначено відповідно верхній та нижній його береги), на відповідну прямокутну область комплексного квазіпотенціалу $G_\omega = \{\omega: \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$, з відповідними рівняннями типу Коші-Рімана (2.1) і початковими умовами (2.2), граничними умовами на контурі забрудненої зони: $[\varphi]_{\partial G_z^1} = 0, [\psi_n]_{\partial G_z^1} = 0$.

Для відшукування значення коефіцієнта фільтрації k^* привибійної зони G_z^1 введемо в розгляд функцію нев'язки $\tilde{Q}(k)$, мінімізація якої і дозволяє його знайти наступним чином:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(k) &= |Q(k) - Q^*| = \left| \int_{L^*} -v_y dx + v_x dy - Q^* \right| = \\ &= \left| \int_{L^*} -k \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx + k \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy - Q^* \right| = \left| \int_{L^*} \left(k \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2} - \frac{Q^*}{2\pi r^*} \right) dl \right|, \end{aligned} \quad (2,20)$$

де Q^* – заданий дебіт експлуатаційної свердловини радіуса r^* .

Як і в попередньому параграфі, через геометрична складність заданої області G_z^0 (що, зокрема, породжує проблему побудови гідродинамічної сітки) та тривіальність відповідної їй області комплексного квазіпотенціалу G_ω , ми розглядатимемо обернену задачу на квазіконформне відображення $(G_\omega \rightarrow G_z^0)$, яка має вигляд (2.4)-(2.5), (2.7) з відповідними граничними умовами:

$$\begin{aligned} [x(\varphi, \psi)]|_{\partial G_\omega^1} &= 0, \quad \left[\frac{k}{J} \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2} \cos(\vec{v}, \vec{n}) \right] \Big|_{\partial G_\omega^1} = 0, \\ [y(\varphi, \psi)]|_{\partial G_\omega^1} &= 0, \end{aligned} \quad (2.21)$$

тоді відповідну формулу відшукування функції невязки (2.20) представимо у вигляді:

$$\tilde{Q}(k) = |Q(k) - Q^*| = \left| \int_0^{Q^*} \frac{k}{J} \left(\left(\frac{\partial y(\varphi^*, \psi)}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial x(\varphi^*, \psi)}{\partial \psi} \right)^2 \right) d\psi - Q^* \right|. \quad (2.22)$$

Для побудови різницевого аналогу задачі введемо, як і у попередньому параграфі, в області G_ω ортогональну сітку G_ω^γ та рівняння (2.7), у внутрішності сіткової області G_ω та розрізі Γ , крайові умови та умови періодичності з додатковими умовами для граничних та приграничних вузлів (умовами ортогональності) апроксимуємо аналогічно (2.11) – (2.13).

Невідому витрату Q шукаємо за формулою $Q = \frac{m\Delta\varphi}{\gamma}$, величину γ – одержуємо на підставі умови «квазіконформної подібності в малому» відповідних елементарних чотирикутників двох областей, аналогічно (2.14).

Використовуючи (2.22), формулу для наближеного знаходження значення коефіцієнта фільтрації k^* привибійної зони запишемо у вигляді:

$$k^{*(p)} = \frac{Q^*}{\sum_{j=1}^m \frac{1}{4\Delta\psi^2 J_{n,j}^{(p-1)}} \left(\left(x_{n,j-1}^{(p-1)} - x_{n,j+1}^{(p-1)} \right)^2 + \left(y_{n,j-1}^{(p-1)} - y_{n,j+1}^{(p-1)} \right)^2 \right)}, \quad (2.23)$$

де p – ітераційний параметр.

Таким чином, алгоритм наближення розв'язку вищеописаної оберненої диференціальної задачі з різницевою задачею, в загальному випадку, побудуємо, як і в попередньому параграфі, шляхом поетапної параметризації величини γ , граничних та внутрішніх вузлів сітки з використанням ідей блочної ітерації, для аналітичного обґрунтування його збіжності: задавши геометричну конфігурацію фізичної області G_z , що обмежена контурами L_* ,

L^* та привибійної зони, кількість вузлів розбиття відповідної області комплексного квазіпотенціалу G_ω (параметри n та m); параметри необхідної точності роботи алгоритму $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ та рівень квазіконформності δ_* відображення Використовуючи значення квазіконформних інваріантів (2.14), знаходимо нове наближення величини Q та за допомогою формулу (2.23) наближено знаходимо значення коефіцієнта фільтрації k^* привибійної зони пласта, якщо їх зміна за останню проведену ітерацію більша за $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ то повертаємося до уточнення вузлів. Визначаємо величину $S = \max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(p)} - x_{i,j}^{(p-1)})^2 + (y_{i,j}^{(p)} - y_{i,j}^{(p-1)})^2}$ – зміщення вузлів на границі за проведену p -ту загальну ітерацію, якщо вона більша за ε_3 , то переходимо до уточнення вузлів. У протилежному випадку оцінюємо ступінь квазіконформності $\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$ отриманого відображення області комплексного квазіпотенціалу на фізичну область із розрізом вздовж лінії течії. Якщо $\delta \geq \delta_*$, то змінюємо кількість вузлів розбиття області G_ω та повторюємо кроки алгоритму, інакше задача розв'язана із необхідною точністю.

Використовуючи розроблений алгоритм, розв'яжемо задачу ідентифікації коефіцієнта проникності присвердловинної зони при $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$, $k_* = 1$, $Q^* = 1.018$. Зовнішній контур живлення та контур експлуатаційної свердловини запишемо у параметричній формі: $L_* = \{x + iy : x_*(\theta) = 2(\cos(\theta) + 0.1\cos(4\theta)), y_*(\theta) = 2(\sin(\theta) - 0.1\sin(4\theta)), 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, $L^* = \{x + iy : x^*(\theta) = 0.1\cos(\theta) + 0.2, y^*(\theta) = 0.1\sin(\theta) - 0.2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, границю забрудненої зони змодельовуємо у вигляді кола: $G_z^1 = \{(x, y) : (x - 0.2)^2 + (y + 0.2)^2 \leq 0.5\}$.

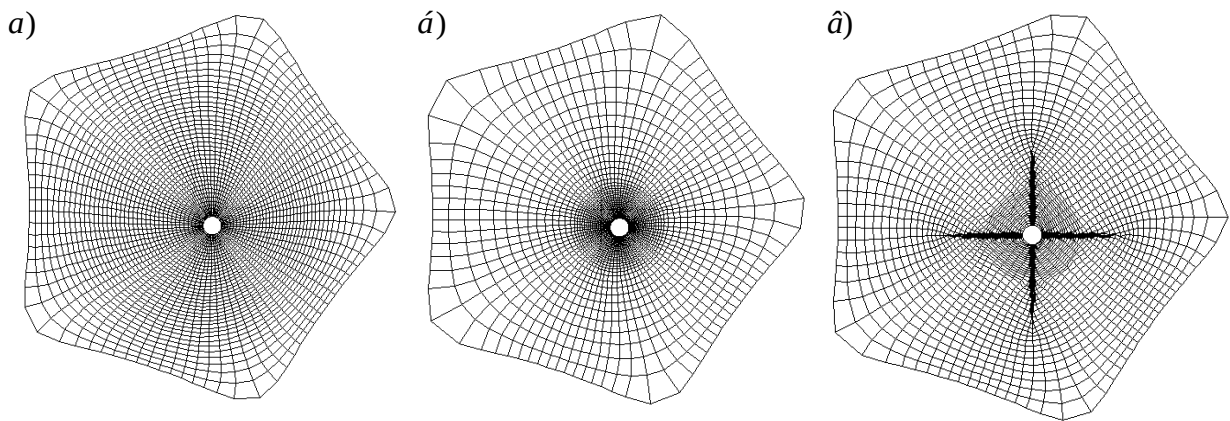


Рис. 2.13. Гідродинамічні сітки однорідного пласта (а) зонально неоднорідного (б) та із тріщинами ГРП (в).

На рис. 2.13. *а-б* зображено гідродинамічні сітки у випадку однорідного пласта та при наявності зони забруднення відповідно. З використанням розробленого числового алгоритму, встановлено значення коефіцієнта фільтрації привибійної зони $k_1^* = 0.352$.

З проведених числових розрахунків, було встановлено, що дане забруднення присвердловинної зони приводить до зменшення дебіту свердловини на 48% від розрахункового значення $Q = 2.108$ (для пласта без забруднення). З метою збільшення віддачі свердловини хоча б до значення витрати $Q = 3.11$, проведено процедуру ГРП з тріщинами фіксованих розмірів (взаємноортогональних еліпсів з півосями $a = 0.06$, $b = 1.5$, рис. 2.13. *в*) та встановлено відповідне значення коефіцієнта фільтрації в тріщинах $k_1^* = 10.15$.

2.3 Моделювання поведінки системи «нагнітальна-експлуатаційна» свердловини при витісненні однієї рідини іншою

У даному параграфі, на основі методів комплексного аналізу [32], розроблено підхід до математичного моделювання поведінки системи «нагнітальна-експлуатаційна» свердловини при витісненні однієї рідини іншою, запропоновано числовий алгоритм інтенсифікації притоку пластової рідини до свердловини за умови збурення фільтраційної течії тріщинами ГРП

скінченної проникності. Він дозволяє врахувати взаємне розміщення свердловин на продуктивній площі, тріщин гідророзриву, розподіл неоднорідностей пласта тощо. На конкретному прикладі проаналізовано ефективність гідророзриву та вплив характеристичних параметрів тріщини на роботу експлуатаційної та нагнітальної свердловин.

Розглянемо модельну задачу дослідження еволюції границі розділу різнокольорових рідин у горизонтальному, неоднорідному пласті G_z ($z = x + iy$), обмеженому непроникним зовнішнім контуром L , контурами нагнітальної L_* та експлуатаційної L^* свердловин (рис. 2.14), коли фільтраційне поле збурене тріщинами гідророзриву G_z^λ .

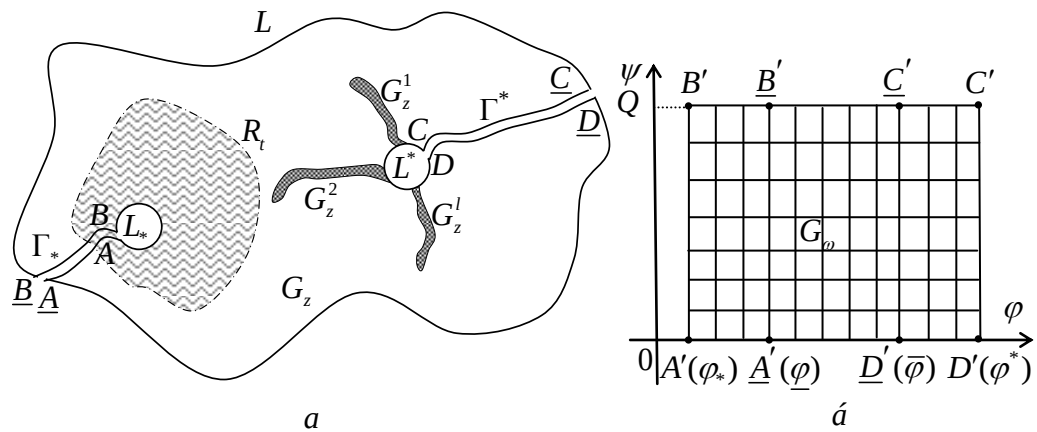


Рис. 2.14. Фізична область в пласті G_z за умови існування тріщин ГРП та відповідна область комплексного квазіпотенціалу

Для математичної постановки задачі фільтрації рідин у пористому середовищі запишемо рівняння нерозривності та рівняння руху у тріщинах ГРП $D_z = \bigcup_{\lambda} G_z^\lambda$, $\lambda = \overline{1, d}$, де d - кількість тріщин, а також в частині пласта без

тріщин $\tilde{G}_z = G_z \setminus \bigcup_{\lambda} G_z^\lambda$, наступним чином [13, 19]: $\operatorname{div} \vec{v} = 0$,

$\vec{v} = k(x, y) \operatorname{grad} \varphi$, $(x, y) \in G_z$, за умов $\varphi|_{L_*} = \varphi_*$, $\varphi|_{L^*} = \varphi^*$, $\frac{\partial \varphi}{\partial n}|_L = 0$ на

свердловинах і зовнішньому контурі пласта, тут φ – квазіпотенціал швидкості фільтрації, $k(x, y) = \begin{cases} k_l, (x, y) \in G_z^\lambda, \lambda = \overline{1, d} \\ k_0(x, y), (x, y) \in \tilde{G}_z \end{cases}$ – коефіцієнт фільтрації.

Ввівши функцію течії $\psi = \psi(x, y)$, комплексно спряжену до φ , як попередньо, та здійснивши умовні розрізи Γ_* , Γ^* області G_z вздовж ліній розділу течії, що визначаються точками «призупинки» потоку $\underline{A} = \underline{B} = (x_0^*, y_0^*) \in L$, $\underline{C} = \underline{D} = (x_*^0, y_*^0) \in L$ та точками $A = B = (x_*, y_*) \in L_*$, $C = D = (x^*, y^*) \in L^*$, задача на побудову гідродинамічної сітки, відшукування фільтраційної витрати та інших характерних фільтраційних параметрів зводимо до задачі квазіконформного відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ [18], утвореної при цьому однозв'язної області $G_z^0 = G_z \setminus (\Gamma_* \cup \Gamma^*)$ на відповідну прямокутну область комплексного квазіпотенціалу $G_\omega = \{\omega: \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$:

$$k(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad k(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z^0, \quad (2.24)$$

$$\varphi|_{L_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad \varphi_\lambda = \varphi_0|_{\partial G_z^\lambda}, \quad \psi|_{AD} = 0, \quad \psi|_{BC} = Q, \quad (2.25)$$

$$(\nu_\lambda)_n = (\nu_0)_n|_{\partial G_z^\lambda}, \quad \nu(x_0^*, y_0^*) = 0, \quad \nu(x_*^0, y_*^0) = 0, \quad (2.26)$$

де $\nu(x, y) = \sqrt{\nu_x^2(x, y) + \nu_y^2(x, y)}$, $Q = \oint_{L_*} -\nu_y dx + \nu_x dy$ – невідома витрата на

контурі експлуатаційної свердловини.

Як і раніше, більш доцільним є перехід до оберненого квазіконформного відображення $G_\omega \rightarrow G_z^0$, що спрощує та в деякій мірі автоматизує побудову гідродинамічної сітки, тоді крайова задача (2.24)-(2.26) та рівняння для дійсної $x = x(\varphi, \psi)$ і уявної $y = y(\varphi, \psi)$ частин (виконання яких вимагатимемо і на розрізах для врахування їх «роздвоєння» при переході від області G_z до G_ω) характеристичної функції течії будуть записані у вигляді:

$$k \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad k \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \quad (2.27)$$

$$u_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad u^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q,$$

$$u(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, \quad u(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) = 0, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \quad (2.28)$$

$$x(\varphi, 0) = x(\varphi, Q), \quad y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q), \quad \varphi_* < \varphi \leq \underline{\varphi}, \quad \bar{\varphi} \leq \varphi < \varphi^*, \quad (2.29)$$

$$[x(\varphi, \psi)]|_{\partial G_\omega^\lambda} = [y(\varphi, \psi)]|_{\partial G_\omega^\lambda} = 0,$$

$$\left[\frac{k}{J} \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2} \cos(\vec{v}, \vec{n}) \right]_{\partial G_\omega^\lambda} = 0, \quad (2.30)$$

$$\nu(x(\underline{\varphi}, \tilde{\psi}), y(\underline{\varphi}, \tilde{\psi})) = 0, \quad \nu(x(\bar{\varphi}, \tilde{\psi}), y(\bar{\varphi}, \tilde{\psi})) = 0, \quad \tilde{\psi} = \{0, Q\}, \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left(k \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \psi} \left(k \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad (2.32)$$

де $\underline{\varphi}$, $\bar{\varphi}$ – значення квазіпотенціалу в шуканих точках «призупинки» (відповідно «розходження» та «сходження» течії), u_* , u^* , u – функції, що визначають контури області G_z : L_* , L^* , L відповідно.

Для запису різницевого аналогу задачі (2.27) – (2.32) здійснимо побудову сітки у області G_ω , вузли (φ_i, ψ_j) якої визначаються наступним чином:

$$\varphi_i = \begin{cases} \varphi_* + i\Delta\varphi_l, \text{ де } \Delta\varphi_l = \frac{\varphi - \varphi_*}{n_1 + 1}, \text{ при } i = \overline{0, n_1}, l = 1, \\ \underline{\varphi} + (i - n_1 - 1)\Delta\varphi_l, \text{ де } \Delta\varphi_l = \frac{\bar{\varphi} - \underline{\varphi}}{n_2 - 1}, \text{ при } i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}, l = 2, \\ \bar{\varphi} + (i - n_1 - n_2)\Delta\varphi_l, \text{ де } \Delta\varphi_l = \frac{\varphi^* - \bar{\varphi}}{n_3 + 1}, \text{ при } i = \overline{n_1 + n_2 + 1, n}, l = 3, \end{cases} \quad (2.33)$$

$$\psi_j = j\Delta\psi, \quad \Delta\psi = Q/m, \quad j = \overline{0, m},$$

де $n = n_1 + n_2 + n_3 + 1$; $n_1, n_2, n_3, m \in N$ – параметри розбиття області комплексного квазіпотенціалу, $\Delta\varphi_l, \Delta\psi$ – кроки сітки.

У зв'язку із загальністю запису коефіцієнта фільтрації (у відповідних рівняннях), що є функцією від координат точки і може бути як неперервною так кусково-неперервною, наприклад, при переході через межу двох середовищ з різними його значеннями, рівняння (2.32) у середині сіткової області G_ω та на розрізах Γ_*, Γ^* апроксимуємо використовуючи метод скінченних об'ємів [199]. Метод скінченних об'ємів забезпечує виконання різницевого аналогу законів збереження та консервативності відповідної різницевої схеми:

$$\begin{cases} \gamma_l^2 \left(k_{i,j+1/2} (x_{i,j+1} - x_{i,j}) - k_{i,j-1/2} (x_{i,j} - x_{i,j-1}) \right) + \frac{x_{i+1,j} - x_{i,j}}{k_{i+1/2,j}} - \frac{x_{i,j} - x_{i,j-1}}{k_{i-1/2,j}} = 0, \\ \gamma_l^2 \left(k_{i,j+1/2} (y_{i,j+1} - y_{i,j}) - k_{i,j-1/2} (y_{i,j} - y_{i,j-1}) \right) + \frac{y_{i+1,j} - y_{i,j}}{k_{i+1/2,j}} - \frac{y_{i,j} - y_{i,j-1}}{k_{i-1/2,j}} = 0, \end{cases} \quad (2.34)$$

$$\text{де } k_{i,j\pm 1/2} = k\left(\frac{x_{i,j\pm 1} + x_{i,j}}{2}, \frac{y_{i,j\pm 1} + y_{i,j}}{2}\right), \quad k_{i\pm 1/2,j} = k\left(\frac{x_{i\pm 1,j} + x_{i,j}}{2}, \frac{y_{i\pm 1,j} + y_{i,j}}{2}\right),$$

$$x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j), \quad y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j), \quad \gamma_l = \frac{\Delta\varphi_l}{\Delta\psi} - \text{квазіконформні інваріанти.}$$

Крайові умови та умови періодичності з додатковими умовами зв'язку граничних та приграничних вузлів апроксимуємо таким чином [29, 31]:

$$\begin{cases} u_*(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, \quad u^*(x_{n,j}, y_{n,j}) = 0, \quad j = \overline{0, m}, \\ u(x_{i,0}, y_{i,0}) = 0, \quad u(x_{i,m}, y_{i,m}) = 0, \quad i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}, \\ x_{i,0} = x_{i,m}, \quad y_{i,0} = y_{i,m}, \quad i = \overline{0, n_1 + 1} \cup \overline{n_1 + n_2, n}; \end{cases} \quad (2.35)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j})(x_{0,j+1} - x_{0,j-1}) + (4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j})(y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) = 0, \\ (3x_{n,j} + x_{n-2,j} - 4x_{n-1,j})(x_{n,j+1} - x_{n,j-1}) + (3y_{n,j} + y_{n-2,j} - 4y_{n-1,j}) \times \\ \times (y_{n,j+1} - y_{n,j-1}) = 0, \quad j = \overline{0, m-1}, \\ (4x_{i,1} - 3x_{i,0} - x_{i,2})(x_{i+1,0} - x_{i-1,0}) + (4y_{i,1} - 3y_{i,0} - y_{i,2})(y_{i+1,0} - y_{i-1,0}) = 0, \\ (3x_{i,m} + x_{i,m-2} - 4x_{i,m-1})(x_{i+1,m} - x_{i-1,m}) + (3y_{i,m} + y_{i,m-2} - 4y_{i,m-1}) \times \\ \times (y_{i+1,m} - y_{i-1,m}) = 0, \quad i = \overline{n_1+1, n_1+n_2}. \end{array} \right. \quad (2.36)$$

Невідому повну витрату Q та значення квазіпотенціалу $\underline{\varphi}$ та $\bar{\varphi}$ в точках «призупинки» потоку шукаємо в процесі ітераційного розрахунку за формулами:

$$Q = m\Delta\psi, \quad \underline{\varphi} = \frac{\varphi_* + \tilde{\alpha}\varphi^*}{1 + \tilde{\alpha}}, \quad \bar{\varphi} = \frac{\varphi^* + \tilde{\beta}\varphi_*}{1 + \tilde{\beta}},$$

$$\text{де} \quad \tilde{\alpha} = \frac{\gamma_1(n_1 + 1)}{\gamma_2(n_2 - 1) + \gamma_3(n_3 + 1)}, \quad \tilde{\beta} = \frac{\gamma_3(n_3 + 1)}{\gamma_2(n_2 - 1) + \gamma_1(n_1 + 1)},$$

$$\Delta\psi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{\gamma_1(n_1 + 1) + \gamma_2(n_2 - 1) + \gamma_3(n_3 + 1)}.$$

Величини квазіконформних інваріантів γ_l одержуємо на підставі умови «квазіконформної подібності в малому» відповідних елементарних чотирикутників двох областей наступним чином:

$$\gamma_1 = \frac{1}{m(n_1 + 1)} \sum_{i,j=0}^{n_1, m-1} \gamma_{i,j}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{m(n_2 - 1)} \sum_{i,j=n_1+1,0}^{n_1+n_2-1, m-1} \gamma_{i,j},$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{m(n - n_1 - n_2)} \sum_{i,j=n_1+n_2,0}^{n-1, m-1} \gamma_{i,j}, \quad (2.37)$$

$$\text{де} \quad \gamma_{i,j} = \frac{1}{k_{i+1/2, j+1/2}} \frac{\alpha_{i,j} + \alpha_{i,j+1}}{\beta_{i,j} + \beta_{i+1,j}}, \quad \alpha_{i,j} = \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2},$$

$$\beta_{i,j} = \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2},$$

$$k_{i+1/2, j+1/2} = k \left(\frac{x_{i,j} + x_{i+1,j} + x_{i,j+1} + x_{i+1,j+1}}{4}, \frac{y_{i,j} + y_{i+1,j} + y_{i,j+1} + y_{i+1,j+1}}{4} \right).$$

Формули для знаходження поля швидкостей апроксимуємо наступним чином:

$$(\nu_x, \nu_y)_{i,j} = \frac{k_{i,j}}{2\Delta\psi J_{i,j}} (y_{i,j+1} - y_{i,j-1}, x_{i,j-1} - x_{i,j+1}), \quad i = \overline{1, n_1}, \quad l = 1,$$

$$J_{i,j} = \frac{(x_{i+1,j} - x_{i-1,j})(y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) - (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})(y_{i+1,j} - y_{i-1,j})}{4\Delta\psi\Delta\varphi_l},$$

$$i = \overline{n_1+2, n_1+n_2-1}, \quad l = 2, \quad i = \overline{n_1+n_2+1, n-1}, \quad l = 3, \quad j = \overline{1, m-1};$$

$$(\nu_x, \nu_y)_{i,0} = (\nu_x, \nu_y)_{i,m} = \frac{k_{i,m}}{2\Delta\psi J_{i,m}} (y_{i,1} - y_{i,m-1}, x_{i,m-1} - x_{i,1}),$$

$$J_{i,m} = \frac{(x_{i+1,m} - x_{i-1,m})(y_{i,1} - y_{i,m-1}) - (x_{i,1} - x_{i,m-1})(y_{i+1,m} - y_{i-1,m})}{4\Delta\psi\Delta\varphi_l},$$

$$i = \overline{1, n_1}, \quad l = 1, \quad i = \overline{n_1+n_2+1, n-1}, \quad l = 3;$$

$$(\nu_x, \nu_y)_{0,j} = \frac{k_{0,j}}{2\Delta\psi J_{0,j}} (y_{0,j+1} - y_{0,j-1}, x_{0,j-1} - x_{0,j+1}), \quad l = 1, \quad j = \overline{1, m-1},$$

$$J_{0,j} = \frac{(x_{1,j} - x_{0,j})(y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) - (x_{0,j+1} - x_{0,j-1})(y_{1,j} - y_{0,j})}{2\Delta\psi\Delta\varphi_l};$$

$$(\nu_x, \nu_y)_{n,j} = \frac{k_{n,j}}{2\Delta\psi J_{n,j}} (y_{n,j+1} - y_{n,j-1}, x_{n,j-1} - x_{n,j+1}), \quad l = 3, \quad j = \overline{1, m-1},$$

$$J_{n,j} = \frac{(x_{n,j} - x_{n-1,j})(y_{n,j+1} - y_{n,j-1}) - (x_{n,j+1} - x_{n,j-1})(y_{n,j} - y_{n-1,j})}{2\Delta\psi\Delta\varphi_l};$$

$$(\nu_x, \nu_y)_{i,m} = \frac{k_{i,m}}{\Delta\psi J_{i,m}} (y_{i,m} - y_{i,m-1}, x_{i,m-1} - x_{i,m}), \quad l = 2,$$

$$J_{i,m} = \frac{(x_{i+1,m} - x_{i-1,m})(y_{i,m} - y_{i,m-1}) - (x_{i,m} - x_{i,m-1})(y_{i+1,m} - y_{i-1,m})}{2\Delta\psi\Delta\varphi_l},$$

$$(\nu_x, \nu_y)_{i,0} = \frac{k_{i,0}}{\Delta\psi J_{i,0}} (y_{i,1} - y_{i,0}, x_{i,0} - x_{i,1}), \quad i = \overline{n_1+2, n_1+n_2-1},$$

$$J_{i,0} = \frac{(x_{i+1,0} - x_{i-1,0})(y_{i,1} - y_{i,0}) - (x_{i,1} - x_{i,0})(y_{i+1,0} - y_{i-1,0})}{2\Delta\psi\Delta\varphi_l};$$

$$(\nu_x, \nu_y)_{n_1+1,j} = \frac{k_{n_1+1,j}}{2\Delta\psi J_{n_1+1,j}} (y_{n_1+1,j+1} - y_{n_1+1,j-1}, x_{n_1+1,j-1} - x_{n_1+1,j+1}), \quad j = \overline{1, m-1},$$

$$\begin{aligned}
J_{n_1+1,j} &= \frac{(x_{n_1+2,j} - x_{n_1+1,j})(y_{n_1+1,j+1} - y_{n_1+1,j-1}) - (x_{n_1+1,j+1} - x_{n_1+1,j-1})(y_{n_1+2,j} - y_{n_1+1,j})}{2\Delta\psi\Delta\phi_2}; \\
(\nu_x, \nu_y)_{n_1+n_2,j} &= \frac{k_{n_1+n_2,j}}{2\Delta\psi J_{n_1+n_2,j}} \left(y_{n_1+n_2,j+1} - y_{n_1+n_2,j-1}, x_{n_1+n_2,j-1} - x_{n_1+n_2,j+1} \right), \\
J_{n_1+n_2,j} &= \frac{(x_{n_1+n_2,j} - x_{n_1+n_2-1,j})(y_{n_1+n_2,j+1} - y_{n_1+n_2,j-1})}{2\Delta\psi\Delta\phi_2} - \\
&\quad - \frac{(x_{n_1+n_2,j+1} - x_{n_1+n_2,j-1})(y_{n_1+n_2,j} - y_{n_1+n_2-1,j})}{2\Delta\psi\Delta\phi_2}, \quad j = \overline{1, m-1}; \\
(\nu_x, \nu_y)_{0,0} &= (\nu_x, \nu_y)_{0,m} = \frac{k_{0,0}}{2\Delta\psi J_{0,0}} \left(y_{0,1} - y_{0,m-1}, x_{0,m-1} - x_{0,1} \right), \\
J_{0,0} &= \frac{(x_{1,0} - x_{0,0})(y_{0,1} - y_{0,m-1}) - (x_{0,1} - x_{0,m-1})(y_{1,0} - y_{0,0})}{2\Delta\psi\Delta\phi_1}; \\
(\nu_x, \nu_y)_{n,0} &= (\nu_x, \nu_y)_{n,m} = \frac{k_{n,0}}{2\Delta\psi J_{n,0}} \left(y_{n,1} - y_{n,m-1}, x_{n,m-1} - x_{n,1} \right), \\
J_{n,0} &= \frac{(x_{n,0} - x_{n-1,0})(y_{n,1} - y_{n,m-1}) - (x_{n,1} - x_{n,m-1})(y_{n,0} - y_{n-1,0})}{2\Delta\psi\Delta\phi_3}; \\
(\nu_x, \nu_y)_{n_1+n_2,0} &= (\nu_x, \nu_y)_{n_1+n_2,m} = \frac{k_{n_1+n_2,0}}{2\Delta\psi J_{n_1+n_2,0}} \times \\
&\quad \times \left(y_{n_1+n_2,1} - y_{n_1+n_2,m-1}, x_{n_1+n_2,m-1} - x_{n_1+n_2,1} \right) \\
J_{n_1+n_2,0} &= \frac{(x_{n_1+n_2,0} - x_{n_1+n_2-1,0})(y_{n_1+n_2,1} - y_{n_1+n_2,m-1})}{2\Delta\psi\Delta\phi_2} - \\
&\quad - \frac{(x_{n_1+n_2,1} - x_{n_1+n_2,m-1})(y_{n_1+n_2,0} - y_{n_1+n_2-1,0})}{2\Delta\psi\Delta\phi_2} \\
(\nu_x, \nu_y)_{n_1+1,0} &= (\nu_x, \nu_y)_{n_1+1,m} = \frac{k_{n_1+1,0}}{2\Delta\psi J_{n_1+1,0}} \left(y_{n_1+1,1} - y_{n_1+1,m-1}, x_{n_1+1,m-1} - x_{n_1+1,1} \right), \\
J_{n_1+1,0} &= \frac{(x_{n_1+2,0} - x_{n_1+1,0})(y_{n_1+1,1} - y_{n_1+1,m-1})}{2\Delta\psi\Delta\phi_2} - \\
&\quad - \frac{(x_{n_1+1,1} - x_{n_1+1,m-1})(y_{n_1+2,0} - y_{n_1+1,0})}{2\Delta\psi\Delta\phi_2}. \tag{2.38}
\end{aligned}$$

Згідно з (2.15) наближено знаходимо час проходження частинкою шляху вздовж j - тої лінії течії від i_* - ї до i^* - ї еквіпотенціалей.

Маючи різницеву задачу для ітераційного відшукування гідродинамічної сітки, коли відома тільки геометрія області фільтрації (контури границі та умови на них), слід задати «якісне» початкове наближення розміщення її вузлів, як на границі так і в середині області, тому, що швидкість збіжності ітераційного процесу сильно залежить від нього.

Задання початкового наближення розміщення точок на контурах області не викликає труднощів, особливо, коли контури задані параметрично. Для побудови початкового наближення координат внутрішніх вузлів, можна використати один із алгебраїчних чи варіаційних методів побудови сіток, наприклад метод трансфінітної інтерполяції [19]. Проте, використання такого роду методів для геометрично складних областей, досить часто призводить до небажаних результатів, наприклад, в деяких місцях лінії сітки можуть перетинати самі себе. Для уникнення цього ефекту та покращення побудованої сітки, доцільно ввести корегуючі поправки на взаємне розміщення вузлів або ж здійснити їх поправку вручну.

Таким чином, алгоритм наближення розв'язку оберненої диференціальної задачі (2.27)–(2.32) різницевою задачею у загальному випадку, як і в роботах [22–23], побудуємо шляхом поетапної параметризації величини γ_l , граничних та внутрішніх вузлів сітки з використанням ідей блочної ітерації [142], для аналітичного обґрунтування його збіжності.

На першому кроці алгоритму задаємо геометричну конфігурацію фізичної області G_z , що обмежена контурами L , L_* , L^* , кількість вузлів розбиття відповідної області комплексного квазіпотенціалу G_ω (параметри n_1 , n_2 , n_3 та m) та параметри необхідної точності роботи алгоритму ε_1 , ε_2 , рівень квазіконформності δ_* відображення. Потім задаємо початкові наближення шуканих координат граничних вузлів, так щоб виконувалися умови (2.35), та координат внутрішніх вузлів гідродинамічної сітки і,

використовуючи (2.37), знаходимо початкове наближення квазіконформних

$$\text{інваріантів } \gamma_l^{(0)} \text{ та невідомих величин } \underline{\varphi}^{(0)} = \frac{\varphi_* + \tilde{\alpha}\varphi^*}{1 + \tilde{\alpha}}, \quad \bar{\varphi}^{(0)} = \frac{\varphi^* + \tilde{\beta}\varphi_*}{1 + \tilde{\beta}},$$

$$Q^{(0)} = \frac{(\varphi^* - \varphi_*)m}{\gamma_1^{(0)}(n_1 + 1) + \gamma_2^{(0)}(n_2 - 1) + \gamma_3^{(0)}(n_3 + 1)}, \quad \text{де} \quad \tilde{\alpha} = \frac{\gamma_1^{(0)}(n_1 + 1)}{\gamma_2^{(0)}(n_2 - 1) + \gamma_3^{(0)}(n_3 + 1)},$$

$$\tilde{\beta} = \frac{\gamma_3^{(0)}(n_3 + 1)}{\gamma_2^{(0)}(n_2 - 1) + \gamma_1^{(0)}(n_1 + 1)}.$$

Проводимо уточнення координат внутрішніх

вузлів $(x_{i,j}, y_{i,j})$ за формулами, отриманими шляхом розв'язання (2.34)

відносно $x_{i,j}$ та $y_{i,j}$ (з метою прискорення швидкості збіжності всього процесу і економії машинного часу використовуємо лише перший ітераційний крок, при цьому враховуємо періодичність шуканих функцій).

Підправляємо граничні вузли (за умови фіксації навколишніх граничних та приграничних), використовуючи різницеві аналоги умов типу Коші-Рімана

(2.36). Використовуючи значення квазіконформних інваріантів (2.37),

знаходимо нове наближення величин Q , $\underline{\varphi}$, $\bar{\varphi}$, якщо їх зміна за останню проведену ітерацію більша за ε_1 , то повертаємося до уточнення вузлів.

Визначаємо величину $S = \max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(k)} - x_{i,j}^{(k-1)})^2 + (y_{i,j}^{(k)} - y_{i,j}^{(k-1)})^2}$ зміщення

вузлів на границі за проведену k -ту загальну ітерацію, якщо вона більша за ε_2 , то переходимо до уточнення вузлів. У протилежному випадку оцінюємо

ступінь квазіконформності $\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$ отриманого відображення області комплексного квазіпотенціалу на фізичну область із розрізами вздовж ліній течії, де δ_1, δ_2 – нев'язки апроксимацій рівнянь (2.27):

$$\delta_1 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} |(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) - \gamma_l k_{i,j}(y_{i,j+1} - y_{i,j-1})|,$$

$$\delta_2 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} |(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) - \gamma_l k_{i,j}(x_{i,j+1} - x_{i,j-1})|, \quad l = \begin{cases} 1, & \text{при } i = \overline{1, n_1}, \\ 2, & \text{при } i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}, \\ 3, & \text{при } i = \overline{n_1 + n_2 + 1, n - 1}. \end{cases}$$

Якщо $\delta \geq \delta_*$, то змінюємо кількість вузлів розбиття області G_ω та повторюємо кроки алгоритму, інакше задача розв'язана із необхідною точністю. У випадку конформного відображення співвідношення між параметрами n_1, n_2, n_3, m намагаємося вибирати так, щоб, по-перше, виконувалися умови рівності усіх трьох конформних інваріантів і, по-друге, $\gamma_1 \approx \gamma_2 \approx \gamma_3 \approx 1$, що з геометричної точки зору є умовою близькості сітки до квадратної.

Проведемо числові розрахунки для пласта обмеженого контурами $L_* = \{x + iy: x_*(\theta) = 0.1\cos(\theta) + \tilde{x}_*, y_*(\theta) = 0.1\sin(\theta) + \tilde{y}_*, 0 \leq \theta < 2\pi\}$, $L^* = \{x + iy: x^*(\theta) = 0.1\cos(\theta) + \tilde{x}^*, y^*(\theta) = 0.1\sin(\theta) + \tilde{y}^*, 0 \leq \theta < 2\pi\}$, $L = \{x + iy: x_0(t) = 2(\cos(\theta) + 0.1\cos(3\theta)), y_0(t) = 2(\sin(\theta) - 0.1\sin(4\theta)), 0 \leq \theta < 2\pi\}$ при $\varphi_* = 0, \varphi^* = 1, k_0 = 1, \sigma = 0.5, \varepsilon = 10^{-5}, n_1 \times n_2 \times n_3 = 8 \times 40 \times 8, m = 70$. На експлуатаційній свердловині змодельуємо тріщини гідравлічного розриву пласта у вигляді еліпсів з осями a_l та b_l , коефіцієнт проникності яких $k_1 = k_2 = 10$. Зазначимо, що об'єм нафти, що міститься у пласті до початку витіснення становить $V_n = 6,28$. На рисунку 2.13 зображено гідродинамічні сітки при різних положеннях тріщин утворених в наслідок проведення процедури ГРП на експлуатаційній свердловині.

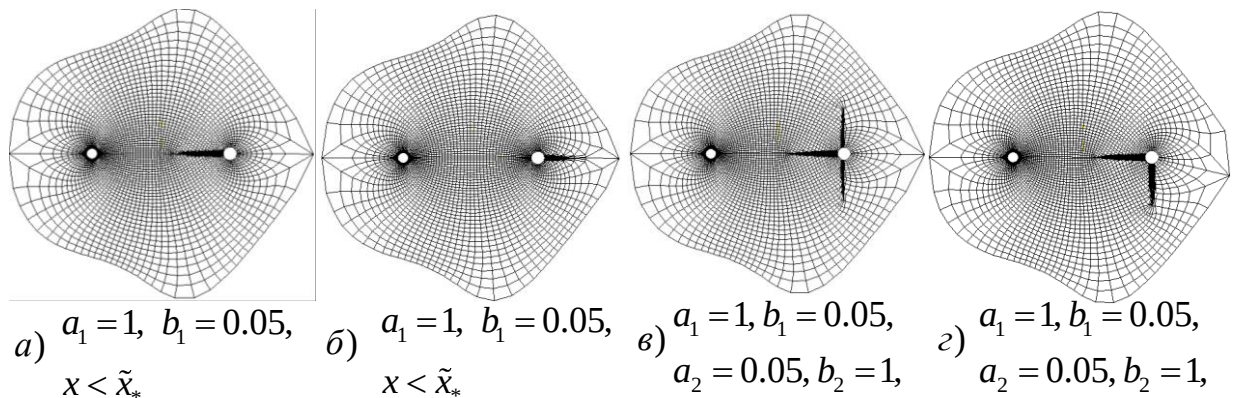


Рис. 2.13 Гідродинамічні сітки для пласта з тріщинами ГРП

Для розміщення свердловин та тріщин ГРП як зображено на рис. 2.13, проведемо порівняння зміни положення границі розділу рідин, загальної

фільтраційної витрати, значень частки витісненого флюїду (нафти) від часу в експлуатаційній свердловині, координат критичних точках типу «призупинки» $((x_0^*, y_0^*), (x_*^0, y_*^0))$, значень квазіпотенціалу у них $\underline{\varphi}$, $\bar{\varphi}$, моментів часу прориву витісняючої рідини до експлуатаційної свердловини $t_{\min}$ та повного обводнення $t_{\max}$ її, що дозволить в свою чергу передбачити напрямки обводнення і провести відповідні дії щодо уникнення пов'язаних з цим небажаних ефектів [26].

В першу чергу визначимо вищеописані характеристики у випадку, коли в пласті відсутні тріщини гідророзриву (рис. 2.14): $Q = 0.879$, $Q_H(0.5) = 0.879$, $Q_H(2.1) = 0.789$, $Q_H(18.3) = 0.091$, $\underline{\varphi} = 0.17$, $\bar{\varphi} = 0.84$, $t_{\min} = 1.96$,

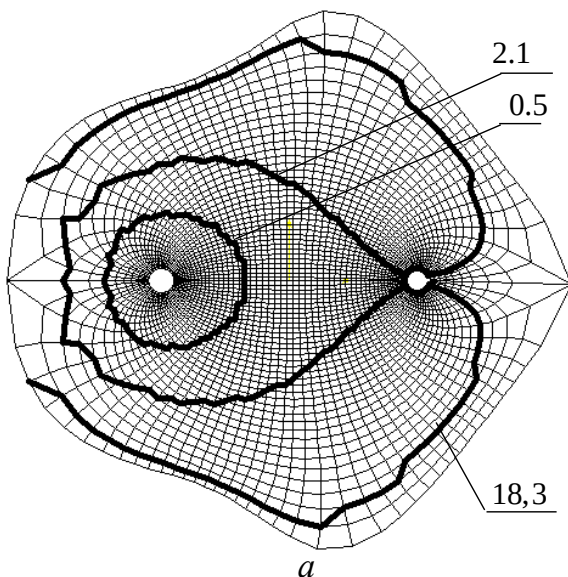


Рис. 2.14. Пласт без тріщин ГРП

$t_{\max} = 48.05$. який характерний сповільненим процесом витіснення та найменшим значенням дебіту видобувної свердловини і, як наслідок, найменшим значенням об'єму добутої нафти $V_{вн}(18.3) = 5,81$ з пласта від початку витіснення до моменту часу $\bar{t} = 18.3$ заводнення видобувної свердловини більше як на 90%, адже подальша експлуатація свердловини стає економічно не вигідна і процес

витіснення в більшості випадків припиняють, або ж проводять водоізоляційні та інші роботи [106, 167]. Водночас симетричність гідродинамічної сітки і ліній розділу фаз у відповідні моменти часу за умов симетрії пласта є вагомим підтвердженням точності методу.

Провівши збурення фільтраційної течії тріщиною ГРП (частина еліпса) в напрямку нагнітальної свердловини (рис. 2.15 а) було помічено, що час прориву та час повного обводнення експлуатаційної свердловини зменшились, а фільтраційна витрата значно зросла, в зв'язку з пониженням

загального фільтраційного опору пласта в його привибійній ділянці, як наслідок, значення об'єму добутої нафти становить $V_{\text{вн}}(17.2) = 5,89$.

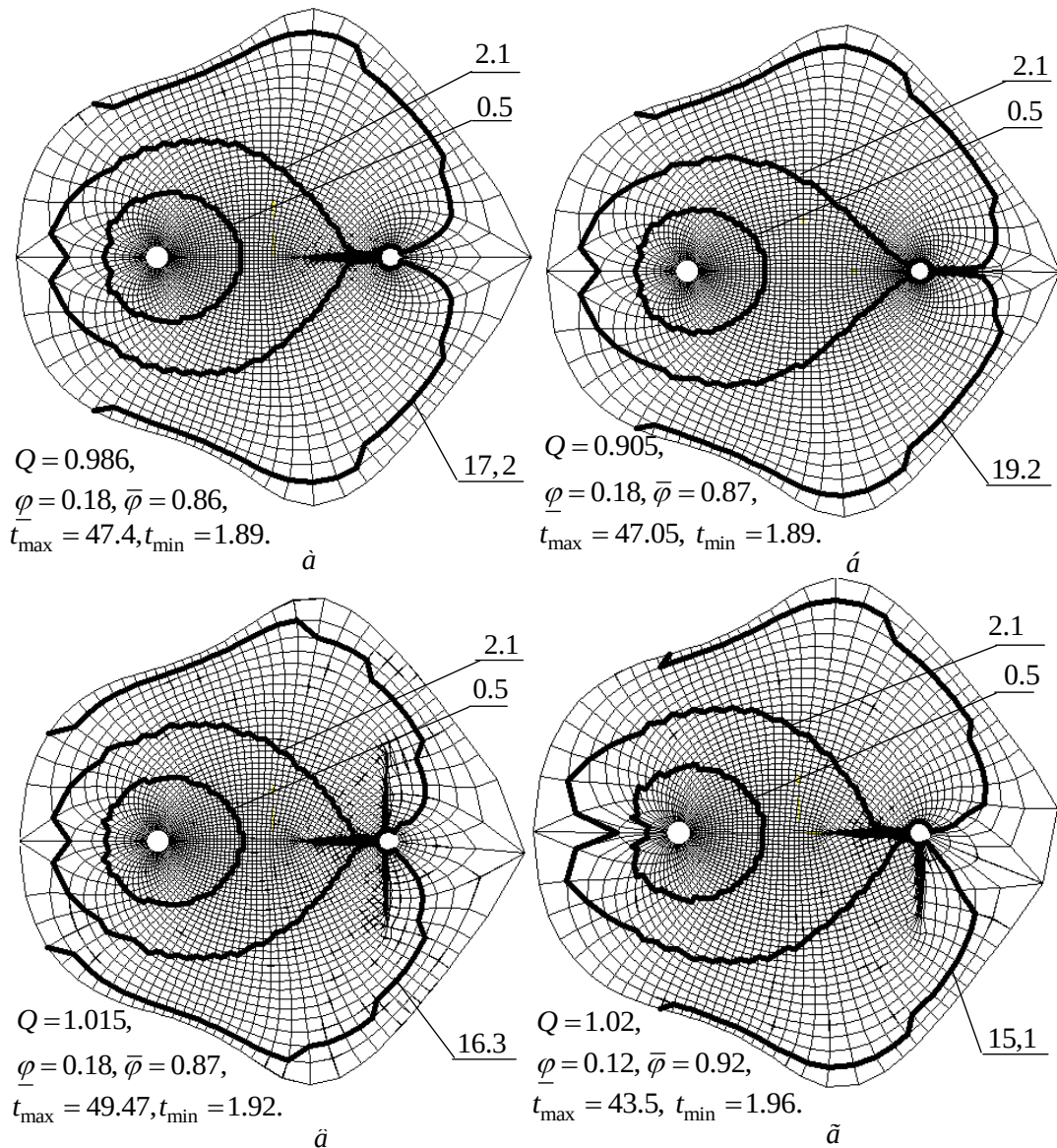


Рис. 2.15. Положення границі розділу рідин у різні моменти часу в пласті при наявності тріщин гідорозриву

На рисунку 2.15 б продемонстровано процес витіснення нафти та зміну положення границі розділу рідин у випадку розміщення тріщини у протилежному напрямку від нагнітальної свердловини, в результаті чого час прориву води до видобувної свердловини є таким, як і при відсутності тріщин ГРП, а час повного її обводнення значно меншим, ніж у попередніх випадках. При такому розміщенні тріщини, процес витіснення (до виконання

умови $Q_n(t)/Q < 0.1$) є найдовшим, а об'єму добутої нафти становить $V_{\text{вн}}(19.2) = 5,96$ є найбільшим.

У випадку наявності декількох тріщин симетрично розміщених відносно осі симетрії пласта (рис. 2.15 в) суттєвим є те, що значення фільтраційної витрати зросло до $Q = 1.016$, а значення об'єму добутої нафти становить $V_{\text{вн}}(16.3) = 5,78$, що є найменшим показником, відносно всіх попередніх випадків (це пояснюється тим, що у період часу $t_{\min} < t < t_{\max}$ значення частки витісняючої рідини $Q_n(t)$ у загальній фільтраційній витраті Q різко зменшується. На відміну від вищерозглянутих можливих розміщень тріщин ГРП, у випадку їх асиметрії, як зображено на рисунку 2.15 г, продемонстровано порушення симетрії фронту витіснення, що призводить у даному випадку до передчасного обводнення видобувної свердловини та нерівномірного «вимиву» нафти з пласта. При цьому, як наслідок, спостерігається зміщення точок «призупинки» течії та зміна значень квазіпотенціалу у них. У такому випадку час процесу витіснення $\bar{t} = 15.1$ є мінімальним, а значення об'єму добутої нафти протягом цього часу суттєво не збільшилося відносно випадку відсутності тріщин ГРП у пласті і становить: $V_{\text{вн}}(15.1) = 5,83$.

Таким чином, змінюючи положення та параметри тріщин, при фіксованому розміщенні свердловин, можемо забезпечити оптимальні умови експлуатації пласта за мінімальних затрат коштів. Ввівши цільову функцію, що враховує об'єм залишеної нафти, її локальну зосередженість, та затрати на буріння, експлуатацію нових свердловин і тріщин ГРП на них, розв'язавши традиційну задачу оптимізації (на екстремум цільової функції), можливим є прийняття автоматизованого рішення стосовно доцільності розробки пласта. Щоб уникнути виникнення ефекту передчасного обводнення та, як наслідок, зменшення залишку нафти у пласті $V_{\text{зл}}(\bar{t})$, доцільно проводити процедуру ГРП таким чином, щоб загальна площа

тріщин приймала однаковий об'єм рідини в одиницю часу та їх розміщення було у протилежному напрямку від нагнітальної свердловини.

2.4 Висновки до Розділу 2.

Запропоновано методологію математичного моделювання процесів витіснення в нафтових пластах за наявності тріщин гідравлічного розриву пласта для побудови рівномірної гідродинамічної сітки, визначення притоку пластової рідини до свердловини, частки витісняючої рідини у загальній фільтраційній витраті, координат критичних точок типу «призупинки» та значень квазіпотенціалу у них (при наявності збурюючих фільтраційну течію включень скінченої проникності типу призупинених свердловин та низькопроникних областей), об'єму витісненого флюїду у пласті на протязі визначеного часу та відповідного об'єму, що залишається у пласті в довільний момент часу, зокрема, після припинення процесу витіснення, а також положень границі розділу рідин у різні моменти часу (яка на початковому етапі моделюється у вигляді смужки), для встановлення місцезнаходження значних по своїй площі застійних зон.

Числові методи комплексного аналізу нелінійних процесів витіснення флюїдів адаптовано на випадок задачі ідентифікації усередненого коефіцієнта фільтрації нафтогазового пласта, з урахуванням відомого дебіту експлуатаційної свердловини, шляхом корекції його відхилення від заданого значення. На основі розроблених алгоритмів, проведено розрахунки розподілу квазіпотенціалу швидкості у пласті із паралельним встановленням коефіцієнта фільтрації присвердловинної зони.

РОЗДІЛ 3

МОДЕЛЮВАННЯ ПОВЕДІНКИ СИСТЕМИ «СВЕРДЛОВИНИ-ТРИЩИНИ-ПЛАСТ» В УМОВАХ ІНТЕНСИФІКАЦІЇ ПРОЦЕСУ ВИТІСНЕННЯ

У розділі узагальнено методи комплексного аналізу розв'язання задач багатофазної фільтрації на випадок математичного моделювання нелінійних процесів витіснення в нафтових пластах з урахуванням тріщин гідророзриву. Створено підхід до розв'язання задач неізотермічної багатофазної фільтрації, основні властивості якого продемонстровані на прикладі площового заводнення, побудовано числовий алгоритм для розрахунку гідродинамічної сітки, відшукування полів температури та насиченості, координат критичних точок, фільтраційних витрат, часу повного заводнення тощо. Проведено аналіз числових розрахунків перерозподілу відповідних фільтраційних характеристик та здійснено порівняння протікання процесу витіснення у випадках неізотермічної та ізотермічної фільтрації.

2.1.. Математичне моделювання двофазної фільтрації у горизонтальному пласті з урахуванням впливу тріщин гідророзриву

У даному параграфі розроблено підхід стосовно дослідження поведінки елементів системи «свердловина-тріщина-пласт», зокрема, врахування зміни насиченості при двофазній фільтрації в однорідному горизонтальному пласті, на випадок інтенсифікації притоку пластової рідини до свердловини шляхом збурення течії тріщинами гідравлічного розриву пласта скінченної проникності.

Розглянемо процес двофазної фільтрації при витісненні однієї рідини іншою в нафтовому пласті G_z ($z = x + iy$), обмеженому непроникним зовнішнім контуром L , контурами нагнітальної L_* та експлуатаційної L^* свердловин (рис. 2.14), коли фільтраційне поле збурене тріщинами ГРП G_z^I .

Закон руху та рівняння нерозривності двофазної фільтраційної течії, запишемо відносно квазіпотенціалу швидкості фільтрації $\varphi = \varphi(x, y, t) = -p(x, y, t) + \tilde{p}$ (тут $p(x, y, t)$ – тиск у точці (x, y) в момент часу t , $\tilde{p}$ – деяке характерне його значення), згідно з [24-27] подамо відповідно у вигляді:

$$\vec{v}_l = \frac{k(x, y) \tilde{k}_l}{\mu_l} \text{grad} \varphi, \quad \sigma \frac{\partial s_l}{\partial t} + \text{div} \vec{v}_l = 0, \quad \sum_{l=1}^2 s_l = 1, \quad l = 1, 2, \quad (3.1)$$

де $\vec{v}_l$, μ_l – вектор швидкості, динамічна в'язкість відповідної l – тої фази;

$$k(x, y) = \begin{cases} k_\lambda, & (x, y) \in G_z^\lambda, \quad \lambda = 1, 2, \dots \\ k_0, & (x, y) \in G_z \setminus \bigcup_\lambda G_z^\lambda, \end{cases} \quad \text{– коефіцієнт проникності пласта;}$$

$\tilde{k}_1, \tilde{k}_2$ – відносні фазові проникності (є заданими функціями насиченості:

$$\tilde{k}_1 = \tilde{k}_1(s), \quad \tilde{k}_2 = \tilde{k}_2(s), \quad s = s_2 = 1 - s_1);$$

σ – пористість ґрунту;

$s_l = s_l(x, y, t)$ – насиченість пласта відповідної l – тої фази.

Звідси, з урахуванням сумарної швидкості $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ фільтраційної течії, маємо: $\text{div} \vec{v} = 0, \quad \vec{v} = \bar{k}(s) \text{grad} \varphi, \quad \sigma \frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v} \text{grad} f(s) = 0,$ де

$$\bar{k}(s) = \frac{k \tilde{k}_1(s)}{\mu_1} + \frac{k \tilde{k}_2(s)}{\mu_2}, \quad f(s) = \frac{\mu_1 \tilde{k}_2(s)}{\mu_2 \tilde{k}_1(s) + \mu_1 \tilde{k}_2(s)}.$$

Вважаємо, що на нагнітальній L_* та експлуатаційній L^* свердловинах підтримуються постійні тиски (відповідні їм квазіпотенціали позначимо через φ_*, φ^*), на границі ∂G_z^l тріщин ГРП виконуються умови неперервності потоку і тиску, а інші ділянки границі області G_z є лініями течії, вздовж яких

має місце рівність $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_L = 0$, де $L = \{z: x = x_0(\theta), \quad y = y_0(\theta),$

$$\alpha_0 \leq \theta \leq \beta_0\} = \{z: u(x, y) = 0\}, \quad L_* = \{z: x = x_*(\theta), \quad y = y_*(\theta), \quad \alpha_* \leq \theta \leq \beta_*\} = \\ = \{z: u_*(x, y) = 0\}, \quad L^* = \{z: x = x^*(\theta), \quad y = y^*(\theta), \quad \alpha^* \leq \theta \leq \beta^*\} = \{z:$$

$u^*(x, y) = 0\}$. Початковий розподіл насиченості в пласті і її значення на нагнітальній свердловині позначимо відповідно через $s(x, y, 0) = \tilde{s}(x, y)$ і $s|_{L^*} = s_*$.

Аналогічно до [19], ввівши функцію течії $\psi = \psi(x, y)$, комплексно спряжену до $\varphi = \varphi(x, y)$, та здійснивши умовні розрізи Γ_* , Γ^* області G_z вздовж ліній розділу течії, що визначаються точками «призупинки» течії $\underline{A} = \underline{B} = (x_0^*, y_0^*) \in L$, $\underline{C} = \underline{D} = (x_*^0, y_*^0) \in L$ та відповідними точками $A = B = (x_*, y_*) \in L_*$, $C = D = (x^*, y^*) \in L^*$, задачу про побудову гідродинамічної сітки, відшукування фільтраційної витрати та інших характерних фільтраційних параметрів за знайденим (фіксованим у даний момент часу) полем насиченості зводимо до задачі квазіконформного відображення, утвореної при цьому однозв'язної області $G_z^0 = G_z \setminus (\Gamma_* \cup \Gamma^*)$ на відповідну прямокутну область комплексного квазіпотенціалу $G_\omega = \{\omega: \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$:

$$\bar{k}(s) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \bar{k}(s) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z^0, \quad (3.1)$$

$$\varphi|_{L^*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad \psi|_{AD} = 0, \quad \psi|_{BC} = Q,$$

$$[\varphi]|_{\partial G_z^l} = 0, \quad [\nu_n]|_{\partial G_z^l} = 0, \quad \nu(x_0^*, y_0^*) = 0, \quad \nu(x_*^0, y_*^0) = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\bar{k}}{\sigma} \frac{\partial f}{\partial s} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial s}{\partial y} \right), \quad s|_{L^*} = s_*, \quad s(x, y, t)|_{t=0} = \tilde{s}(x, y), \quad (3.3)$$

$$\text{де } Q = \oint_{L_*} -\nu_y dx + \nu_x dy, \quad \nu(x, y) = \sqrt{\nu_x^2(x, y) + \nu_y^2(x, y)}.$$

Обернена до (3.1) – (3.2) крайова задача на квазіконформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z та рівняння для дійсної $x = x(\varphi, \psi)$ і уявної $y = y(\varphi, \psi)$ частин (виконання яких

вимагатимемо і на розрізах для врахування їх «роздвоєння» при переході від області G_z до G_ω) характеристичної функції течії запишуться у вигляді:

$$\bar{k} \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad \bar{k} \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \quad (3.4)$$

$$u_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad u^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q,$$

$$u(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, \quad u(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) = 0, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \quad (3.5)$$

$$x(\varphi, 0) = x(\varphi, Q), \quad y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q), \quad \varphi_* < \varphi \leq \underline{\varphi}, \quad \bar{\varphi} \leq \varphi < \varphi^*, \quad (3.6)$$

$$v(x(\underline{\varphi}, \tilde{\psi}), y(\underline{\varphi}, \tilde{\psi})) = 0, \quad v(x(\bar{\varphi}, \tilde{\psi}), y(\bar{\varphi}, \tilde{\psi})) = 0, \quad \tilde{\psi} = \{0, Q\},$$

$$\begin{aligned} [x(\varphi, \psi)]|_{\partial G_z^I} &= 0, \quad \left[\bar{k} \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2} \cos(\vec{v}, \vec{n}) \right] \Big|_{\partial G_z^I} = 0, \\ [y(\varphi, \psi)]|_{\partial G_z^I} &= 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left(\bar{k} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\bar{k}} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\bar{k} \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\bar{k}} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad (3.8)$$

де $\underline{\varphi}$, $\bar{\varphi}$ – значення квазіпотенціалу в шуканих точках «призупинки» (відповідно «роздвоєння» та «здвоєння» течій);

u_* , u^* , u – функції, що визначають контури області G_z : L_* , L^* , L , відповідно.

Використавши формули переходу [6-8] $J = x_\varphi y_\psi - x_\psi y_\varphi$,

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{y_\psi}{J} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{y_\varphi}{J} \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{x_\psi}{J} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{x_\varphi}{J} \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi},$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad \text{умови (3) і формули для обчислення компонент}$$

$$\text{сумарної швидкості} \quad v_x = \frac{\bar{k}(s)}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad v_y = -\frac{\bar{k}(s)}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial x}{\partial \psi}, \quad \text{задачу для}$$

насиченості (3.3) перепишемо так:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{v^2}{\sigma \bar{k}} \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \varphi}, \quad (3.9)$$

$$s(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi), t) = s_*, \quad s(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), 0) = \tilde{s}(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)), \quad (3.10)$$

де отримане диференціальне рівняння в частинних похідних є фактично просторово одновимірним, адже змінна ψ тут фігурує як параметр.

Для запису різницевого аналогу задачі (3.4) – (3.10) здійснимо побудову сітки у області G_ω , вузли (φ_i, ψ_j) якої визначаються наступним чином:

$$\varphi_i = \begin{cases} \varphi_* + i\Delta\varphi_l, \text{ де } \Delta\varphi_l = \frac{\varphi - \varphi_*}{n_1 + 1}, \text{ при } i = \overline{0, n_1}, l = 1, \\ \underline{\varphi} + (i - n_1 - 1)\Delta\varphi_l, \text{ де } \Delta\varphi_l = \frac{\bar{\varphi} - \varphi}{n_2 - 1}, \text{ при } i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}, l = 2, \\ \bar{\varphi} + (i - n_1 - n_2)\Delta\varphi_l, \text{ де } \Delta\varphi_l = \frac{\varphi^* - \bar{\varphi}}{n_3 + 1}, \text{ при } i = \overline{n_1 + n_2 + 1, n}, l = 3, \end{cases} \quad (3.11)$$

$$\psi_j = j\Delta\psi, \Delta\psi = Q/m, j = \overline{0, m},$$

де $n = n_1 + n_2 + n_3 + 1$; $n_1, n_2, n_3, m \in N$ – параметри розбиття області комплексного квазіпотенціалу;

$\Delta\varphi_l, \Delta\psi$ – кроки сітки.

У зв'язку із загальністю запису коефіцієнта проникності (у відповідних еліптичних рівняннях), що є функцією від координат та насиченості і може бути як неперервною так кусково-неперервною, наприклад, при переході через межу тріщини ГРП, рівняння (3.8) у середині сіткової області G_ω та на розрізах Γ_* , Γ^* апроксимуємо використовуючи основні ідеї методу скінченних об'ємів [199], що дозволяє забезпечити виконання різницевого аналогу законів збереження та консервативність відповідної різницевої схеми:

$$\begin{cases} \gamma_l^2 \left(\bar{k}_{i,j+1/2}(x_{i,j+1} - x_{i,j}) - \bar{k}_{i,j-1/2}(x_{i,j} - x_{i,j-1}) \right) + \frac{x_{i+1,j} - x_{i,j}}{\bar{k}_{i+1/2,j}} - \frac{x_{i,j} - x_{i,j-1}}{\bar{k}_{i-1/2,j}} = 0, \\ \gamma_l^2 \left(\bar{k}_{i,j+1/2}(y_{i,j+1} - y_{i,j}) - \bar{k}_{i,j-1/2}(y_{i,j} - y_{i,j-1}) \right) + \frac{y_{i+1,j} - y_{i,j}}{\bar{k}_{i+1/2,j}} - \frac{y_{i,j} - y_{i,j-1}}{\bar{k}_{i-1/2,j}} = 0, \end{cases} \quad (3.12)$$

де $\bar{k}_{i,j\pm 1/2} = \frac{1}{2}(\bar{k}_{i,j\pm 1} + \bar{k}_{i,j})$, $\bar{k}_{i\pm 1/2,j} = \frac{1}{2}(\bar{k}_{i\pm 1,j} + \bar{k}_{i,j})$, $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$,
 $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$, $\gamma_l = \frac{\Delta \varphi_l}{\Delta \psi}$ - квазіконформні інваріанти.

Крайові умови та умови періодичності з додатковими умовами зв'язку граничних та приграничних вузлів апроксимуємо таким чином [19]:

$$\begin{cases} u_*(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, \quad u^*(x_{n,j}, y_{n,j}) = 0, \quad j = \overline{0, m}, \\ u(x_{i,0}, y_{i,0}) = 0, \quad u(x_{i,m}, y_{i,m}) = 0, \quad i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}, \\ x_{i,0} = x_{i,m}, \quad y_{i,0} = y_{i,m}, \quad i = \overline{0, n_1 + 1}, \\ x_{i,0} = x_{i,m}, \quad y_{i,0} = y_{i,m}, \quad i = \overline{n_1 + n_2, n}; \end{cases} \quad (3.13)$$

$$\begin{cases} (4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j})(x_{0,j+1} - x_{0,j-1}) + (4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j})(y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) = 0, \\ (3x_{n,j} + x_{n-2,j} - 4x_{n-1,j})(x_{n,j+1} - x_{n,j-1}) + (3y_{n,j} + y_{n-2,j} - 4y_{n-1,j}) \times \\ \times (y_{n,j+1} - y_{n,j-1}) = 0, \quad j = \overline{0, m-1}, \\ (4x_{i,1} - 3x_{i,0} - x_{i,2})(x_{i+1,0} - x_{i-1,0}) + (4y_{i,1} - 3y_{i,0} - y_{i,2})(y_{i+1,0} - y_{i-1,0}) = 0, \\ (3x_{i,m} + x_{i,m-2} - 4x_{i,m-1})(x_{i+1,m} - x_{i-1,m}) + (3y_{i,m} + y_{i,m-2} - 4y_{i,m-1}) \times \\ \times (y_{i+1,m} - y_{i-1,m}) = 0, \quad i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}. \end{cases} \quad (3.14)$$

Невідому повну витрату Q та значення квазіпотенціалів $\underline{\varphi}$ та $\bar{\varphi}$ у точках «призупинки» течії шукаємо в процесі ітераційного розрахунку за формулами [24-27]: $Q = m\Delta\psi$, $\underline{\varphi} = \frac{\varphi_* + \tilde{\alpha}\varphi^*}{1 + \tilde{\alpha}}$, $\bar{\varphi} = \frac{\varphi^* + \tilde{\beta}\varphi_*}{1 + \tilde{\beta}}$, де

$$\Delta\psi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{\gamma_1(n_1 + 1) + \gamma_2(n_2 - 1) + \gamma_3(n_3 + 1)}, \quad \tilde{\alpha} = \frac{\gamma_1(n_1 + 1)}{\gamma_2(n_2 - 1) + \gamma_3(n_3 + 1)},$$

$$\tilde{\beta} = \frac{\gamma_3(n_3 + 1)}{\gamma_2(n_2 - 1) + \gamma_1(n_1 + 1)}.$$

Величини квазіконформних інваріантів γ_l одержуємо на підставі умови «квазіконформної подібності в малому» відповідних елементарних чотирикутників двох областей наступним чином:

$$\gamma_1 = \frac{1}{m(n_1 + 1)} \sum_{i,j=0}^{n_1, m-1} \gamma_{i,j}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{m(n_2 - 1)} \sum_{i,j=n_1+1,0}^{n_1+n_2-1, m-1} \gamma_{i,j},$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{m(n - n_1 - n_2)} \sum_{i,j=n_1+n_2,0}^{n-1,m-1} \gamma_{i,j}, \quad (3.15)$$

де

$$\gamma_{i,j} = \frac{1}{k_{i+1/2,j+1/2}} \frac{\alpha_{i,j} + \alpha_{i,j+1}}{\beta_{i,j} + \beta_{i+1,j}}, \quad \alpha_{i,j} = \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2},$$

$$\beta_{i,j} = \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2}.$$

Рівняння (3.9) апроксимуємо різницевою схемою «проти потоку» [199] наступним чином:

$$\hat{s}_{i,j} = s_{i,j} - \frac{\tau v_{i,j}^2}{\sigma \bar{k}_{i,j} \Delta \varphi_l} f' \left(\frac{s_{i-1,j} + s_{i,j}}{2} \right) \cdot (s_{i,j} - s_{i-1,j}), \quad (3.16)$$

де τ – крок за часом; $s_{i,j}$, $\hat{s}_{i,j}$ – насиченості у відповіді моменти часу;

$v_{i,j}$ – швидкість (знаходимо, як у роботі [19]), $j = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, n_1}$, при $l = 1$,
 $i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}$, при $l = 2$, $i = \overline{n_1 + n_2 + 1, n - 1}$, при $l = 3$.

Граничну та початкову умови для насиченості в сітковій області запишемо так: $s_{0,j} = s_*$, $s(x_{i,j}, y_{i,j}, 0) = \tilde{s}(x_{i,j}, y_{i,j})$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$.

Алгоритм наближення розв'язку оберненої диференціальної задачі (3.4)–(3.10) різницевою задачею у загальному випадку, як і в роботах [17-19], побудуємо шляхом поетапної параметризації величини γ_l , граничних та внутрішніх вузлів сітки з використанням ідей блочної ітерації (зокрема, для аналітичного обґрунтування його збіжності). Так, на першому кроці роботи алгоритму задаємо геометричну конфігурацію пласта G_z , крок за часом τ , параметри розбиття n_1 , n_2 , n_3 , m , області G_ω та точності ε_1 , ε_2 роботи алгоритму, початкові наближення координат граничних вузлів (так, щоб виконувалися умови (3.13)) і початкові наближення координат внутрішніх вузлів, за формулами (3.15) знаходимо наближення величин $\gamma_l^{(0)}$ та значення $\underline{\varphi}^{(0)}$, $\bar{\varphi}^{(0)}$, $Q^{(0)}$. Далі проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів

гідродинамічної сітки $(x_{i,j}, y_{i,j})$ шляхом розв'язання (3.12) відносно $x_{i,j}$ та $y_{i,j}$ (з метою прискорення швидкості збіжності всього процесу і економії машинного часу використовуємо лише перший ітераційний крок, при цьому враховуємо періодичність шуканих функцій). Після цього, підправляємо граничні вузли (за умови фіксації навколишніх граничних та приграничних), використовуючи різницеві аналоги умов типу Коші-Рімана (3.14). Знаходимо значення квазіконформних інваріантів (3.15) та уточнюємо величин Q , φ , $\bar{\varphi}$. Серед умов завершення алгоритму побудови гідродинамічної сітки (відшукування невідомих фільтраційних параметрів, зокрема, поля швидкості) на даному ітераційному етапі є: стабілізація граничних вузлів $\left(\max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(k)} - x_{i,j}^{(k-1)})^2 + (y_{i,j}^{(k)} - y_{i,j}^{(k-1)})^2} < \varepsilon_2 \right)$; стабілізація витрати Q $\left(|Q^{(k+1)} - Q^{(k)}| < \varepsilon_1 \right)$ тощо. Використовуючи поле швидкостей та поле насиченості з попереднього ітераційного кроку за часом (з урахуванням граничної умови), згідно з (3.16) знаходимо новий розподіл насиченості у пласті та повторюємо кроки алгоритму.

Проведено числові розрахунки процесу витіснення у пласті обмеженому зовнішнім непроникним контуром: $L_0 = \{x + iy : x_0(\theta) = 2(\cos(\theta) + 0.1\cos(3\theta)), y_0(\theta) = 2(\sin(\theta) - 0.1\sin(5\theta)), 0 \leq \theta < 2\pi\}$, контурами свердловин: $L_* = \{x + iy : x_*(\theta) = 0.1\cos(\theta) - 1, y_*(\theta) = 0.1\sin(\theta), 0 \leq \theta < 2\pi\}$, $L^* = \{x + iy : x^*(\theta) = 0.1\cos(\theta) + 1, y^*(\theta) = 0.1\sin(\theta), 0 \leq \theta < 2\pi\}$ при існуванні тріщини ГРП, контур якої задано рівнянням еліпса: $G_z^1 = \{(x, y) : ((x-1)/0.7)^2 + (y/0.05)^2 \leq 1\}$ на експлуатаційній свердловині (рис. 3.2 а.), при умовах $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$, $\sigma = 0.5$, $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 1$, $\tau = 0.0001$, $\tilde{k}_1 = (1-s)^2$, $\tilde{k}_2 = s^2$, $s_* = 1$, $\tilde{s}(x, y) = 0$, $k_1 = 10$, $k_* = 1$, $n_1 \times n_2 \times n_3 \times m = 2 \times 40 \times 2 \times 70$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-5}$.

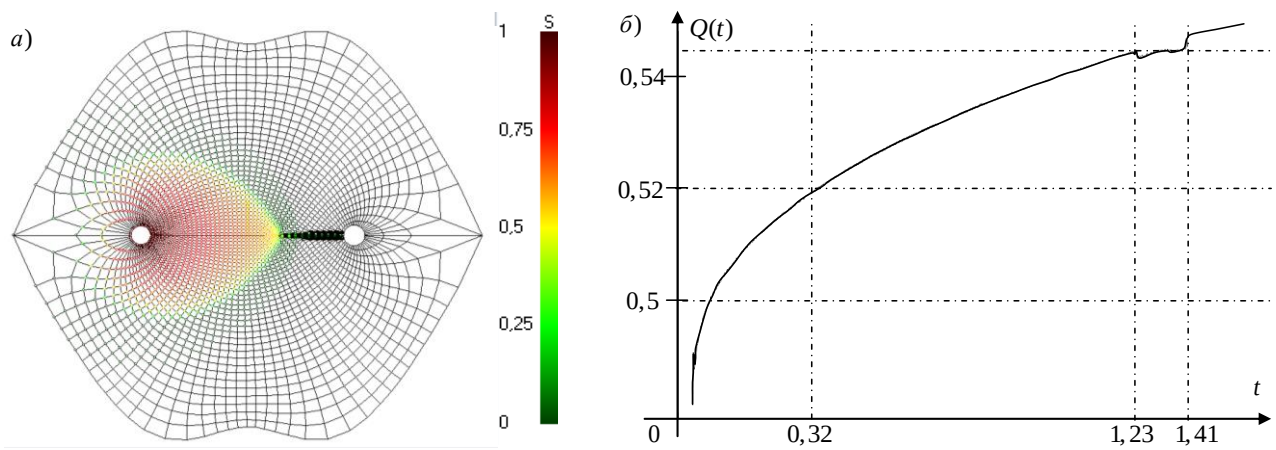


Рис. 3.2. Гідродинамічна сітка (а) та розподіл сумарної витрати (б)

На основі результатів числових розрахунків, встановлено, що швидкість просування фронту витіснення з наближенням до тріщини ГРП зменшується, як і сумарна фільтраційна витрата на експлуатаційній свердловині. Це пов'язано, в основному, із відмінністю коефіцієнтів проникності в пласті та на втрамбованому, в результаті ГРП, контурі тріщини, адже при перетіканні через границю середовищ різної проникності витісняючій рідині необхідно перебороти супротив, породжений внутрішніми силами – так званий капілярний ефект. Вплив внутрішніх сил на зміну сумарної витрати $Q = Q(t)$ продемонстрований на рис. 3.2 б, зокрема, підтверджено наявність, «ступінчато-подібного» ефекту її зміни на проміжку часу $t \in [1.23, 1.41]$.

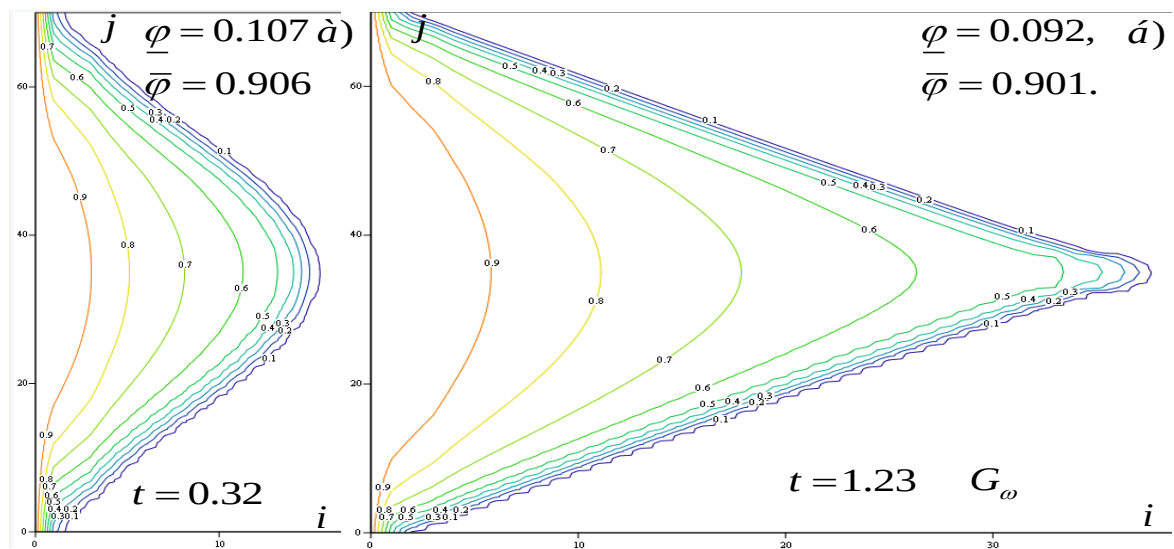


Рис. 3.9. Розподіл насиченості в області G_ω у відповідні моменти часу $t = \tilde{t}$

На рисунку 3.3 зображено розподіл насиченості в області G_{ω} , у деякий момент часу $t = 0.32$ та в момент $t = 1.23$ – проникнення витісняючого агента у тріщину гідравлічного розриву.

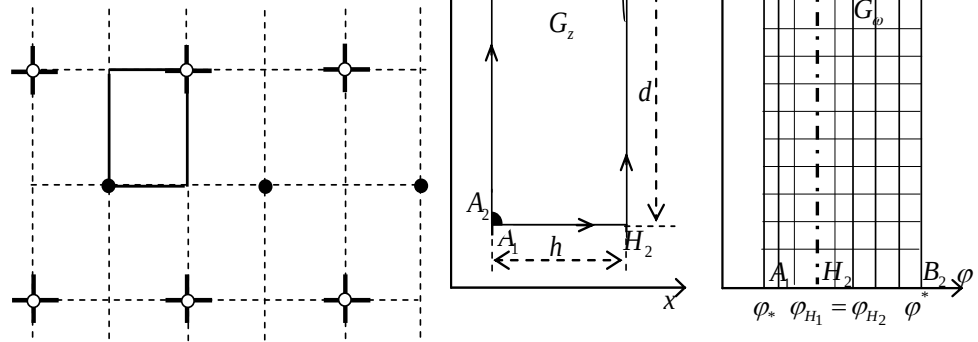
Величини сумарної фільтраційної витрати у відповідні моменти часу становлять: $Q(0.23) = 0.519$ та $Q(1.23) = 0.545$. Таким чином, після прориву витісняючого флюїду (води) у тріщину ГРП із більшим коефіцієнтом проникності ніж пласта відбувається пришвидшення фільтрації та збільшення витрати в цілому.

3.2. Розробка спеціальних схем розміщення свердловин при площовому заводненні за умов оптимізації параметрів та керування

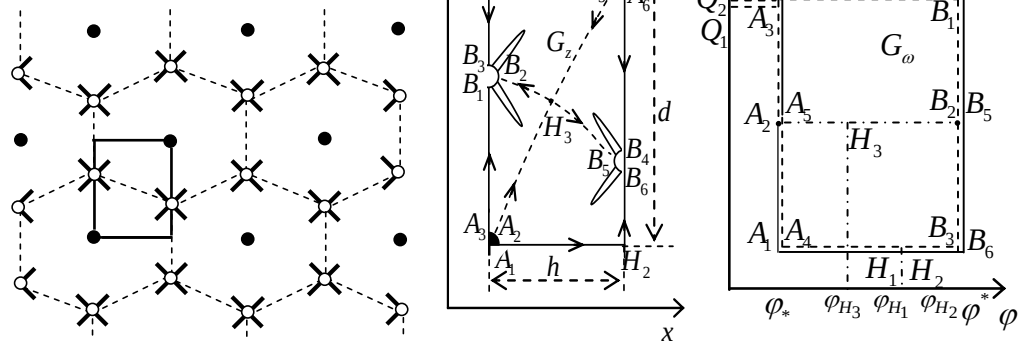
У попередньому параграфі розвинуто методи комплексного аналізу на випадок двофазної фільтрації при взаємодії нагнітальної та експлуатаційної свердловин за умов збурення фільтраційної течії тріщинами ГРП. Однак на сьогоднішній день найбільш суттєвим є дослідження перебігу процесу нафтовилучення у багаторядних схемах розробки родовищ. Тому у даному параграфі розроблено підхід, на основі моделі Баклея-Левеверетта, до розв'язання крайових задач на інтенсифікацію процесу видобутку у випадку рядної схеми розміщення свердловин.

Традиційна класифікація розміщення свердловин на основі виділених симетричних елементів площового заводнення (п'ятиточкове, семиточкове та дев'ятиточкове) є найбільш ефективною лише у випадку ізотропного середовища [22-27]. У зв'язку із застосуванням механічного методу інтенсифікації видобутку – гідравлічного розриву пласта (ГРП), відбувається збурення ліній фільтраційної течії утвореними тріщинами і питання оптимальності розміщення свердловин, а значить і тріщин ГРП на них, залишається відкритим.

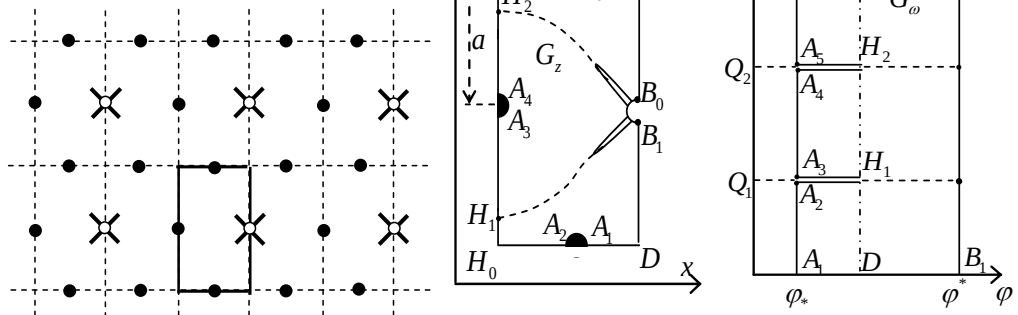
Випадок 1. П'ятиточкове
розміщення свердловин



Випадок 2. Семиточкове
розміщення свердловин



Випадок 3. Семиточкове (мішане)
розміщення свердловин



Випадок 4. Дев'ятиточкове
розміщення свердловин

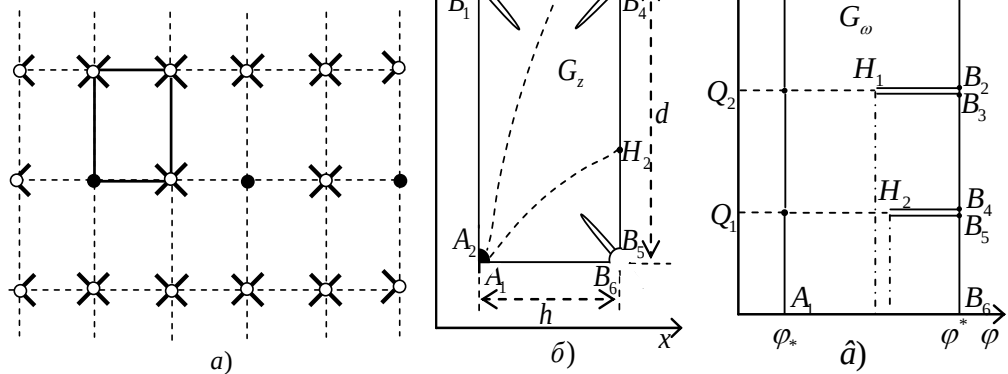


Рис. 3.4 Схематичне зображення розробки пласта (а) з виділеним елементом симетрії (б) та відповідна область комплексного квазіпотенціалу (в)

На рисунку 3.4 представлено схематичне зображення розробки нафтового пласта (а) з виділеним елементом симетрії (б) та відповідною областю комплексного квазіпотенціалу (в), де виявлено особливості зміни траєкторії течії внаслідок впливу існуючих тріщин гідророзриву на експлуатаційних свердловинах та їхнього взаємного розміщення відносно нагнітальних свердловин.

Розглянемо процес двофазної ізотермічної фільтрації у горизонтальному пласті-колекторі, обмеженому зовнішнім непроникним контуром, контурами почергово розміщеними прямолінійними рядами нагнітальних та експлуатаційних свердловин, пронизаних тріщинами ГРП скінченної проникності (рис. 3.4 а), в умовах відсутності перетоків між відповідними рядами.

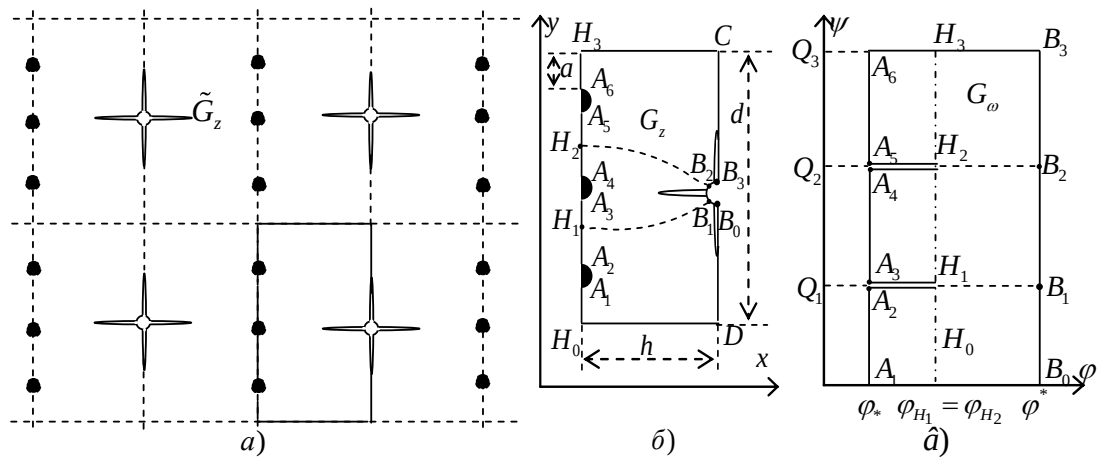


Рис. 3.4 – Схематичне зображення розробки пласта: а – з виділеним елементом симетрії ((●) – нагнітальна, (○) – експлуатаційна свердловини); б – відповідна фізична область; в – область комплексного квазіпотенціалу

З огляду на симетрію розміщення свердловин, у пласті $\tilde{G}_z$ маємо можливість виділити елемент $G_z \in \tilde{G}_z$, що містить n_* нагнітальних свердловин та одну експлуатаційну з відповідними тріщинами та симетричними їх частинами (див. рис. 3.4 б, де $d = 2n_*(r^0 + a)$ – відстань між лініями розділу елементів симетрії, r^0 – радіус свердловин, a – половина відстані між нагнітальними свердловинами, h – відстань між рядами, $n_* = 3$).

Закон руху та рівняння нерозривності течії, представимо у вигляді (3.1).
Контур λ -ої тріщини гідророзриву на експлуатаційній свердловині задамо у

вигляді:

$$G_z^\lambda = \left\{ (x, y) : \left(\frac{1}{a_\lambda} \left((x-h) \cos \alpha_\lambda + \left(y - \frac{d}{2} \right) \sin \alpha_\lambda \right) \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{b_\lambda} \left(-(x-h) \sin \alpha_\lambda + \left(y - \frac{d}{2} \right) \cos \alpha_\lambda \right) \right)^2 \leq 1 \right\}, \text{ де } a_l, b_l, \alpha_l - \text{відповідні півосі}$$

еліпсів, що моделюють тріщини ГРП та кут її нахилу. Звідси, з урахуванням сумарної швидкості $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ фільтраційної течії, маємо:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad \vec{v} = \bar{k}(s) \operatorname{grad} \varphi, \quad \sigma \frac{\partial s}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

$$\varphi|_{L_g} = \varphi^*, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_L = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\bar{L}} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{L^*} = 0, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*,$$

$$s|_{L_g} = s^*, \quad s(x, y, 0) = \tilde{s}(x, y),$$

де $f(s) = \frac{\mu_1 \tilde{k}_2(s)}{\mu_2 \tilde{k}_1(s) + \mu_1 \tilde{k}_2(s)}, \quad \bar{k}(s) = \frac{k \tilde{k}_1(s)}{\mu_1} + \frac{k \tilde{k}_2(s)}{\mu_2}, \quad L_g = \{z = x + iy :$

$$x = r^0 \cos(\theta), \quad y = r^0 \sin(\theta) + (2g-1)(a+r^0), \quad 3\pi/2 \leq \theta \leq 5\pi/2\} =$$

$$= \{z : u_g(x, y) = 0, \quad g = \overline{1, n_*}\}, \quad L^* = \{z = x + iy : \quad x = r^0 \cos(\theta) + h,$$

$$y = r^0 \sin(\theta) + d/2, \quad \pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2\} = \{z : u^*(x, y) = 0\}, \quad L_* = \bigcup_{u=2}^{n_*} A_{2u-2} A_{2u-1},$$

$$A_{2u-2} A_{2u-1} = \{z : 2(u-1)(a+r^0) - a \leq y \leq 2(u-1)(a+r^0) + a, \quad x = 0\}, \quad \bar{L} =$$

$$= A_1 H_0 \cup H_0 D \cup D B_0 = \{z : f(x, y) = 0\}, \quad \tilde{L} = A_{2n_*} H_{n_*} \cup H_{n_*} C \cup C B_{2n_*+1} =$$

$$= \{z : \tilde{f}(x, y) = 0\}, \quad A_1 H_0 = \{z : x = 0, \quad 0 \leq y \leq a\}, \quad H_0 D = \{z : y = 0, \quad 0 \leq x \leq h\},$$

$$D B_0 = \{z : x = h, \quad 0 \leq y \leq d/2\}, \quad A_{2n_*} H_{n_*} = \{z : x = 0, \quad d-a \leq y \leq d\},$$

$$H_{n_*} C = \{z : 0 \leq x \leq h, y = d\}, \quad C B_{2n_*+1} = \{z : x = h, d/2 \leq y \leq d\}.$$

Аналогічно, як у попередньому параграфі, ввівши функцію течії ψ , комплексно спряжену до φ , задача на побудову гідродинамічної сітки, відшукання фільтраційної витрати та інших характерних фільтраційних

параметрів за знайденим (фіксованим у даний момент часу) полем насиченості зводимо до квазіконформного відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ однозв'язної області G_z на відповідну область

комплексного квазіпотенціалу $G_\omega = \bigcup_{g=1}^{n_*} G_g \cup \bigcup_{g=1}^{n_*-1} \bar{L}_g$:

$$\bar{k}(s) \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \bar{k}(s) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z,$$

$$\varphi|_{L_g} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L_*} = \varphi^*, \quad \psi|_{L_g} = 0, \quad \psi|_{L_*} = Q_{n_*}, \quad \psi|_{L_*} = Q_{n_*-1}, \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\bar{k}}{\sigma} \frac{\partial f}{\partial s} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial s}{\partial y} \right), \quad s|_{L_g} = s_*, \quad s|_{t=0} = \tilde{s}(x, y), \quad (3.18)$$

де $\nu(x, y) = \sqrt{\nu_x^2(x, y) + \nu_y^2(x, y)}$, $G_g = \{\omega: \varphi_* < \varphi < \varphi^*, \quad Q_{g-1} < \psi < Q_g, \quad Q_0 = 0\}$,
 $\bar{L}_g = \{\omega: \varphi_{H_g} < \varphi < \varphi^*, \quad \psi = Q_g\}$;

$$Q_g - Q_{g-1} = \oint_{L_g} -\nu_y dx + \nu_x dy \quad - \text{невідомі сумарні фільтраційні витрати з}$$

нагнітальних свердловин;

$$Q = \sum_{g=1}^{n_*} (Q_g - Q_{g-1}) = Q_{n_*} \quad - \text{сумарна витрата на експлуатаційній}$$

свердловині.

При цьому значення відбору нафти визначається за формулою:

$$\begin{aligned} Q^*(t) &= \oint_{L_*} (1 - f(s)) \cdot (-\nu_y dx + \nu_x dy) \approx \\ &\approx (1 - f(\bar{s})) \cdot \oint_{L_*} -\nu_y dx + \nu_x dy = (1 - f(\bar{s})) \cdot Q_{n_*}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

де $\bar{s}$ – деяке усереднене значення насиченостей на контурі L_* .

Об'єм добутої нафти у процесі витіснення. від його початку, за час t_* в одному елементі симетрії всього досліджуваного пласта-колектора, визначається за формулою:

$$V_{\text{вн}}(t_*) = \int_0^{t_*} Q^* dt, \quad (3.20)$$

тоді як, об'єм нафти, що міститься в ньому до початку відбору знайдемо за формулою:

$$V_n = \left(d \cdot h - \pi \cdot (r^0)^2 \cdot (n_* + 1)/2 \right) \cdot \sigma. \quad (3.21)$$

Таким чином, залишок нафти $V_{\text{зл}}$ на момент часу t_* у відповідному елементі обчислюється за формулою: $V_{\text{зл}}(t_*) = V_n - V_{\text{вн}}(t_*)$.

Обернувши до (3.17) крайову задачу квазіконформного відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z , а також (як наслідок) рівняння для дійсної $x = x(\varphi, \psi)$ і уявної $y = y(\varphi, \psi)$ частин характеристичної функції течії запишемо у вигляді

$$\bar{k} \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad \bar{k} \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \quad (3.22)$$

$$\underline{u}(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, \quad \tilde{u}(x(\varphi, Q_{n_*}), y(\varphi, Q_{n_*})) = 0, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*,$$

$$u_g(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad Q_{g-1} \leq \psi \leq Q_g,$$

$$u^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q_{n_*}, \quad g = \overline{2, n_*},$$

$$x_-(\varphi, Q_{g-1}) = 0, \quad 2(g-1)(a+r^0) - a \leq y_-(\varphi, Q_{g-1}) \leq y_{H_{g-1}},$$

$$x_+(\varphi, Q_{g-1}) = 0, \quad y_{H_{g-1}} \leq y_+(\varphi, Q_{g-1}) \leq 2(g-1)(a+r^0) + a,$$

$$\varphi_* \leq \varphi \leq \varphi_{H_{g-1}}, \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left(\bar{k} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\bar{k}} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\bar{k} \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\bar{k}} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) = 0. \quad (3.24)$$

Використавши відповідні формули переходу $J = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial y}{\partial \varphi}$,

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad \text{умови (3.22) і формули для}$$

$$\text{обчислення компонент сумарної швидкості} \quad v_x = \frac{\bar{k}}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial y}{\partial \psi},$$

$$v_y = -\frac{\bar{k}}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial x}{\partial \psi}, \quad \text{задачу для насиченості (3.18) перепишемо так:}$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{v^2}{\sigma \bar{k}} \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \varphi}, \quad (3.25)$$

$$s(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi), t) = s_*, \quad s(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), 0) = \tilde{s}(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)),$$

$$0 \leq \psi \leq Q, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \quad (3.26)$$

де рівняння (3.25) є фактично просторово одновимірним, адже змінна ψ тут входить як параметр. Введення таким чином фіктивного комплексного квазіпотенціалу з наступним використанням ідей методу квазіконформних відображень та процедури поетапної фіксації різних характеристик середовища і процесу суттєво спрощує загальну стратегію розчеплення алгоритму розв'язання вихідної задачі – подання його у вигляді блоків, що виконуються один за одним циклічно. Спочатку за фіксованим розподілом насиченості s , аналогічно до [25], розв'язуємо задачу квазіконформного відображення: будуємо гідродинамічну сітку, характерні лінії розділу течії, знаходимо квазіпотенціал φ , витрату та інші невідомі фільтраційні параметри. Далі за знайденими фільтраційними характеристиками згідно з (3.25) знаходимо перерозподіл насиченості та перевіряємо умови зупинки процесу обчислень. Однією з них може бути умова перевищення допустимої частки витісняючої рідини в продукції експлуатаційної свердловини.

Очевидно, що розв'язок відповідних задач про побудову гідродинамічної сітки та відшукування поля насиченості дозволяє спрогнозувати темпи обводнення експлуатаційних свердловин та визначити особливості експлуатації того чи іншого родовища за умови запроектованого розміщення свердловин та тріщин ГРП на них. У цих умовах виникає проблема оптимізації відбору нафти [69, 114, 166], в залежності від заданих параметрів

тріщин ГРП на експлуатаційній свердловині. При цьому виникає потреба розв'язання більш ширших задач, коли приходить встановлювати їх оптимальне розміщення, яке задовольняло б ті чи інші критерії. Зокрема, ставиться задача підібрати таке значення величин a_l , b_l та α_l , за умов сталості a та h , так щоб час прориву $t = \tilde{t}$ води до експлуатаційної свердловини та об'єм нафти $V_{\text{ен}}(t)$ були максимальними, а в наступні моменти часу $t > \tilde{t}$ об'єм води в сумарній витраті був мінімальним.

Різницевий аналог та алгоритм розв'язання задачі будуємо як у [24-26]. На початковому етапі знаходимо величини параметрів φ_{H_1} , φ_{H_2} , далі послідовно розв'язуємо серію проміжних задач, що відповідають рис. 3.4 в. Вузли (φ_i, ψ_j) сіткової області G_ω визначаємо так:

$$\varphi_i = \begin{cases} \varphi_* + i\Delta\varphi_1^g, & i = \overline{0, n_1^g}, \Delta\varphi_1^g = (\varphi_{H_g} - \varphi_*)/(n_1^g + 1), \\ \varphi_H + (i - n_1^g - 1)\Delta\varphi_2^g, & i = \overline{n_1^g + 1, n}, \Delta\varphi_2^g = (\varphi^* - \varphi_{H_g})/(n_2^g + 1), \end{cases}$$

$$\psi_j^g = j \cdot \Delta\psi_g, \quad (\varphi_i, \psi_j^g) \in G_\omega^g,$$

$$\text{де } j = \overline{\tilde{m}_1, \tilde{m}_2}, \quad \tilde{m}_1 = \sum_{l=0}^{g-1} m_l + g - 1, \quad \tilde{m}_2 = \sum_{l=0}^g m_l + g - 1, \quad \Delta\psi_g = (Q_g - Q_{g-1})/m_g,$$

$$m_g = \sum_{l=1}^g m_l + g - 1, \quad g = \overline{1, n_*}, \quad Q_0 = 0, \quad m_0 = 0, \quad n = n_1^g + n_2^g + 1, \quad m = \sum_{l=1}^{n_*} m_l + n_* - 1,$$

$m_l, n_1^g, n_2^g \in N$. Рівняння (3.24) апроксимуємо, використовуючи метод скінченних об'ємів [199], наступним чином:

$$\begin{aligned} x_{i,j} &= (a_n x_{i,j+1} + a_s x_{i,j-1} + a_e x_{i-1,j} + a_s x_{i+1,j})/a_p, \\ y_{i,j} &= (a_n y_{i,j+1} + a_s y_{i,j-1} + a_e y_{i-1,j} + a_s y_{i+1,j})/a_p, \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\text{де } x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j), \quad y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j), \quad a_n = k_n \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_+}, \quad a_s = k_s \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_-}, \quad a_e = \frac{\Delta\psi}{k_e \Delta\varphi_+},$$

$$a_w = \frac{\Delta\psi}{k_w \Delta\varphi_-}, \quad a_p = a_n + a_s + a_e + a_w, \quad \Delta\varphi = \frac{\Delta\varphi_- + \Delta\varphi_+}{2}, \quad \Delta\psi = \frac{\Delta\psi_- + \Delta\psi_+}{2},$$

$$k_n = \frac{2k_{i,j}k_{i,j+1}}{k_{i,j} + k_{i,j+1}}, \quad k_s = \frac{2k_{i,j}k_{i,j-1}}{k_{i,j} + k_{i,j-1}}, \quad k_e^{-1} = 0.5(k_{i,j}^{-1} + k_{i-1,j}^{-1}), \quad k_w^{-1} = 0.5(k_{i,j}^{-1} + k_{i+1,j}^{-1}).$$

Вибір величин $\Delta\varphi_-$, $\Delta\varphi_+$, $\Delta\psi_-$, $\Delta\psi_+$ визначається належністю вузла (φ_i, ψ_j^g) тій чи іншій підобласті сіткової області G_ω . Наприклад, якщо $\varphi_i = \varphi_{H_1}$, $\psi_j^g = 0$, то $\Delta\varphi_- = \Delta\varphi_1$, $\Delta\varphi_+ = \Delta\varphi_2$, $\Delta\psi_+ = \Delta\psi_1$, $\Delta\psi_- = \Delta\psi_1$.

Апроксимації крайових умов запишемо так:

$$\begin{aligned} u_g(x_{0,j}, y_{0,j}) &= 0, \quad j = \overline{\tilde{m}_1, \tilde{m}_2}, \quad u^*(x_{n,j}, y_{n,j}) = 0, \quad j = \overline{0, m}, \\ x_{i,m_{g-1}} &= 0, \quad 2(g-1)(a+r^0) - a \leq y_{i,m_{g-1}} \leq y_{H_{g-1}}, \\ x_{i,m_g} &= 0, \quad y_{H_{g-1}} \leq y_{i,m_g} \leq 2(g-1)(a+r^0) + a, \quad i = \overline{0, n_1}, \\ \tilde{u}(x_{i,0}, y_{i,0}) &= 0, \quad \underline{u}(x_{i,m_p}, y_{i,m_p}) = 0, \quad i = \overline{0, n}, \quad j = \overline{0, m}, \quad g = \overline{2, n_*}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Тут, як і в [34-35], комплексну спряженість гармонічних функцій $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$, $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$ забезпечують умови ортогональності приграничних нормальних векторів до відповідних дотичних вздовж границі області G_z . Їх різницеві аналоги на контурах свердловин мають вигляд:

$$\begin{aligned} (4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j})(x_{0,j+1} - x_{0,j-1}) + \\ + (4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j})(y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) &= 0, \quad j = \overline{\tilde{m}_1, \tilde{m}_2}, \\ (3x_{n,j} + x_{n-2,j} - 4x_{n-1,j})(x_{n,j+1} - x_{n,j-1}) + \\ + (3y_{n,j} + y_{n-2,j} - 4y_{n-1,j})(y_{n,j+1} - y_{n,j-1}) &= 0, \quad j = \overline{0, m}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Невідомі наближені значення витрат Q_g та потенціалу φ_{H_g} в точках розходження течії в процесі ітерацій шукаємо за формулами:

$$\varphi_{H_g} = \varphi_* + (n_1^g + 1)\Delta\psi_1\gamma_1^g, \quad Q_g = m_g\Delta\psi_g, \quad \text{де} \quad \Delta\psi_g = \frac{\Delta\varphi_1\gamma_2^g + \Delta\varphi_2\gamma_1^g}{2\gamma_1^g\gamma_2^g}, \quad \text{а} \quad \gamma_l^g$$

одержуємо на підставі умови «квазіконформної подібності в малому» відповідних елементарних чотирикутників двох областей:

$$\gamma_1^g = \sum_{i=0, j=\tilde{m}_1}^{n_1, \tilde{m}_2-1} \frac{\gamma_{i,j}}{m_g(n_1+1)}, \quad \gamma_2^g = \sum_{i=n_2+1, j=\tilde{m}_1}^{n, \tilde{m}_2-1} \frac{\gamma_{i,j}}{m_g n_2},$$

$$\gamma_{i,j} = \frac{1}{\overline{k_{i+1/2,j+1/2}}} \frac{a_{i,j} + a_{i,j+1}}{b_{i,j} + b_{i+1,j}}, \quad g = \overline{1, n_*}, \quad (3.30)$$

$$\text{де } a_{i,j} = \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2}, \quad b_{i,j} = \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2}.$$

Рівняння (3.24) апроксимуємо, як і раніше, різницевою схемою «проти потоку» наступним чином:

$$\widehat{s}_{i,j} = s_{i,j} - \frac{\tau v_{i,j}^2}{\sigma \overline{k_{i,j}} \Delta \varphi_l^g} f'(s_{i-1/2,j})(s_{i,j} - s_{i-1,j}), \quad s_{i-1/2,j} = \frac{s_{i,j} + s_{i-1,j}}{2}, \quad (3.31)$$

$$j = \overline{1, m}, \quad i = \overline{1, n_1^g + 1}, \quad l = 1, \quad i = \overline{n_1^g + 2, n}, \quad l = 2,$$

де τ – крок за часом;

$s_{i,j}$, $\widehat{s}_{i,j}$ – насиченості у відповідні моменти часу;

$v_{i,j}$ – швидкість фільтрації.

Граничну та початкову умови для насиченості в сітковій області запишемо так: $s_{0,j} = s_*$, $s(x_{i,j}, y_{i,j}, 0) = \tilde{s}(x_{i,j}, y_{i,j})$, $j = \overline{0, m}$, $i = \overline{1, n}$.

Задавши крок τ , параметри розбиття n_1^g , n_2^g , m_g , $g = \overline{1, n_*}$, області G_ω та точності ε_1 , ε_2 роботи алгоритму, початкові наближення координат граничних вузлів (так, щоб виконувалися умови (3.27)) і початкові наближення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$, за формулами (3.29) знаходимо наближення величин γ_l^g . Далі проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів гідродинамічної сітки шляхом розв'язання (3.26) відносно $x_{i,j}$ та $y_{i,j}$. Після цього підправляємо граничні вузли за умов фіксації навколишніх граничних та приграничних, використовуючи умови ортогональності, та знаходимо наближення величин Q_g , $Q^*(t)$, $V_{\hat{a}i}(t)$, φ_{H_g} . Серед умов завершення алгоритму побудови гідродинамічної сітки (відшукування невідомих фільтраційних параметрів, зокрема, поля швидкості) на даному ітераційному етапі є: стабілізація витрат Q_g ($|Q_g^{(\kappa+1)} - Q_g^{(\kappa)}| < \varepsilon_1$);

стабілізація граничних вузлів $(\max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(\kappa)} - x_{i,j}^{(\kappa-1)})^2 + (y_{i,j}^{(\kappa)} - y_{i,j}^{(\kappa-1)})^2} < \varepsilon_2)$

тощо. У випадку невиконання хоча б однієї із цих умов відмічаємо на гідродинамічній сітці ділянки порушення квазіконформності. Використовуючи поле швидкостей та поле насиченості з попереднього ітераційного кроку за часом (з урахуванням граничної умови), згідно з (3.29) знаходимо новий розподіл насиченості у пласті та повторюємо кроки алгоритму.

Вище описаний алгоритм числового розрахунку поставленої задачі реалізуємо у вигляді комп'ютерної програми для ПК IBM PC/AT. Проведемо дослідження відповідного процесу витіснення у випадку, коли в елементі симетрії на одну експлуатаційну свердловину припадає дві нагнітальних, змінюючи просторову орієнтацію тріщин ГРП, отримаємо відповідні гідродинамічні сітки при $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$, $r^0 = 0.2$, $a = 1$, $h = 2.5$, $b = 2.2$, $k_0 = 1$, $k_\lambda = 10$, $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 1$, $\sigma = 0.5$, $s_* = 1$, $\tilde{s}(x, y) = 0$, $\tau = 0.001$, $t = 0$, $n_1 \times n_2 \times m_1 \times m_2 = 10 \times 40 \times 35 \times 35$, зображені на рисунку 3.5.

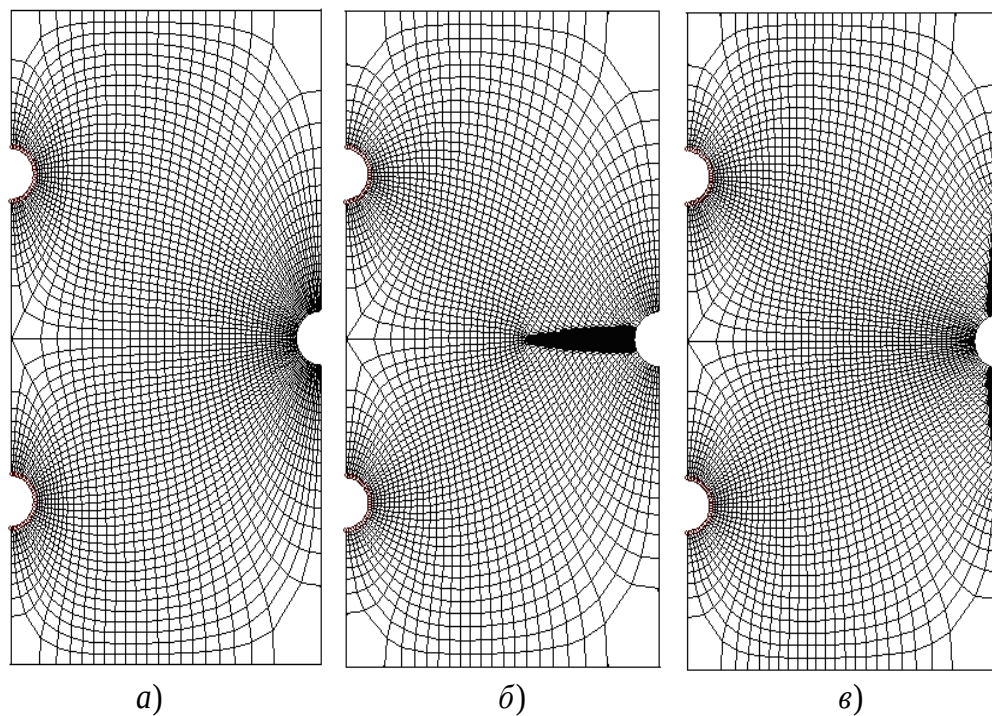


Рис. 3.5. Гідродинамічні сітки елементів симетрії пласта, за умов відсутності (а) та наявності тріщин ГРП ($a_1 = 0.1$, $b_1 = 1$ (б), $a_1 = 1$, $b_1 = 0.1$ (в))

Розподіл насиченості у відповідних елементах симетрії площового заводнення пласта, зображених на рисунку 3.6, у момент часу $t = 4.09$, дозволяє проаналізувати процес витіснення та підібрати оптимальне розміщення тріщин, а також порівняти залежність зміни контурів рівня насиченості за умов відсутності та наявності впливу тріщин ГРП на процес витіснення.

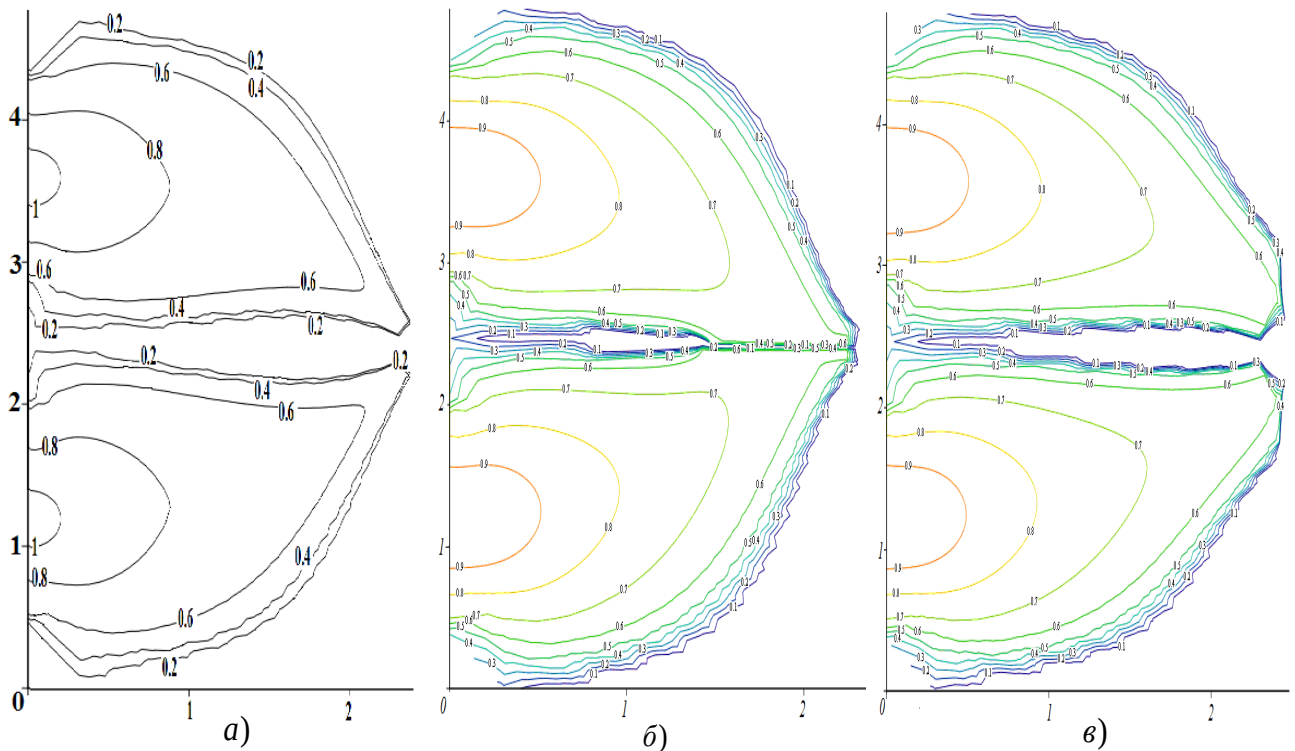


Рис. 3.6. Поле насиченості в момент часу $t = 4.09$ у відповідних елементах симетрії

Залежність від часу сумарної фільтраційної витрати (суцільні лінії) та значення відбору нафти (пунктирні лінії), відповідно у випадках відсутності (рис. 3.7 а) та наявності тріщин ГРП (рис. 3.7 б-в), що мають параметри: $a_1 = 0.1$, $b_1 = 1$ (б), $a_1 = 1$, $b_1 = 0.1$ (в), що представлена на рисунку 4, доводить ефективність утворення тріщин ГРП вздовж границі елемента симетрії для збільшення зони впливу нагнітальних свердловин, зокрема, спостерігається значний приріст значення витрати на початковому етапі нагнітання води в пласт в наслідок зменшення загального фільтраційного опору у привибійній ділянці.

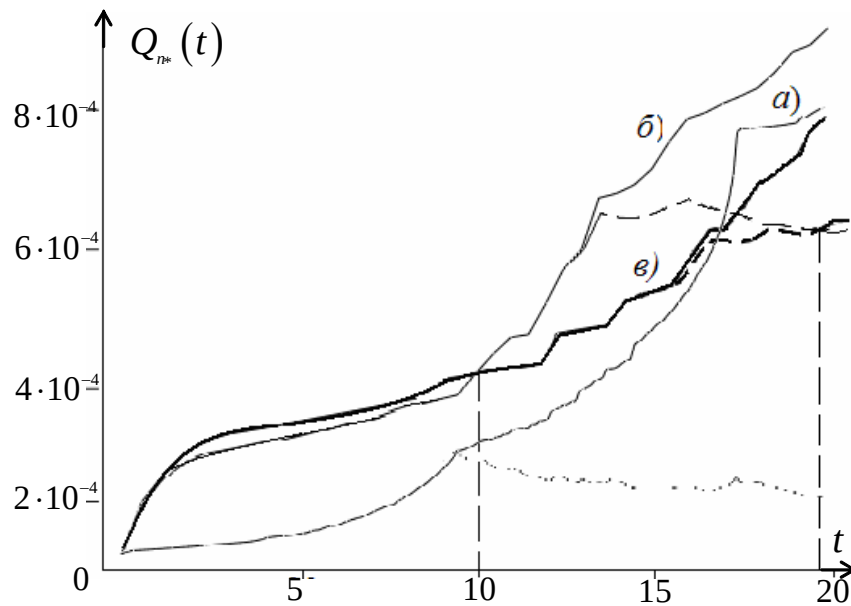


Рис. 3.7. Графік залежності сумарної витрати від часу у відповідних елементах симетрії

Далі проведемо числові розрахунки тої ж самої математичної моделі, однак при різних значеннях характерних параметрів, які задають геометрію тріщин ГРП та їх розміщення, за умов $h=3$, $n_1 \times n_2 \times m_1 \times m_2 = 4 \times 20 \times 25 \times 25$.

На рисунках 3.8 а-в зображено гідродинамічні сітки елементів симетрії, у початковий момент часу, а на рисунках 3.8 а'-в' – відповідний розподіл насиченості у момент часу $t=\tilde{t}$ при таких параметрах тріщин гідророзриву: $a_1=b_2=0.1$, $b_1=a_2=1$, $\alpha_1=\alpha_2=0^\circ$ (Випадок 1); $a_1=a_2=0.1$, $b_1=b_2=1$, $\alpha_{1,2}=\pm 45^\circ$ (Випадок 2); $a_1=0.18$, $b_1=1$, $\alpha=0^\circ$ (Випадок 3).

На рисунку 3.9 зображено залежності сумарної фільтраційної витрати $Q_{n*}(t)$ та значень відбору нафти $Q^*(t)$ від часу $t \in [0, t_*]$ ($t_*=18.62$, далі проводити розрахунки практично немає сенсу, через різке зниження відбору нафти) для вищеписаних характерних випадків.

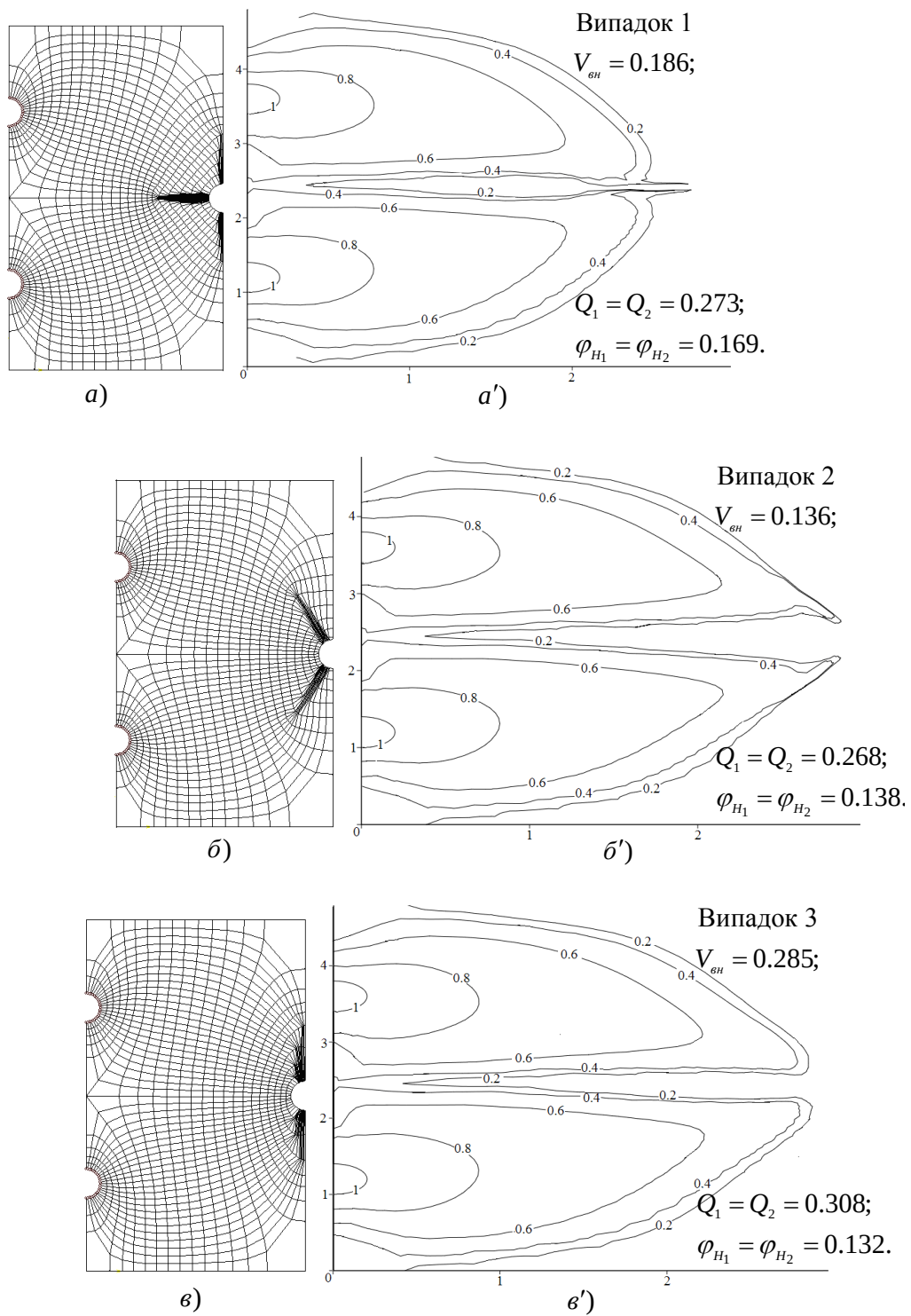


Рис. 3.8 – Гідродинамічні сітки (а, б, в) та, відповідні їм, розподіли насиченості елементів симетрій у момент часу $\tilde{t} = 4.64$ (а'), $\tilde{t} = 4.92$ (б'), $\tilde{t} = 5.98$ (в')

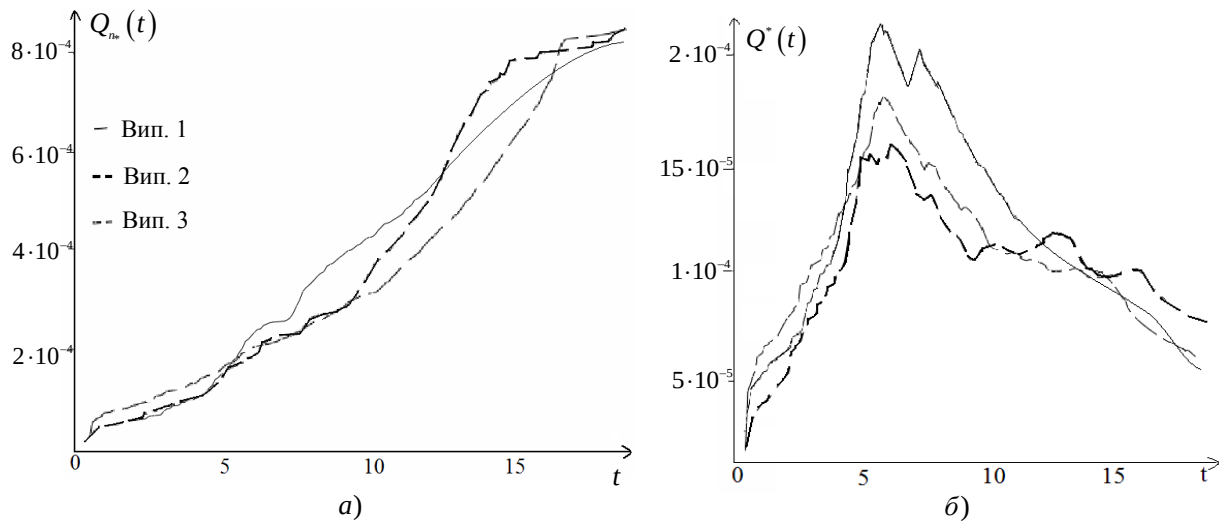


Рис. 3.9 – Графік залежності сумарної витрати (а) та значення відбору нафти (б) від часу у відповідних елементах симетрії

За підрахунками, згідно формул (3.20) - (3.21), об'єм нафти, яка знаходилась у цих елементах симетрії до початку витіснення – $V_n = 7.106$, а об'єм добутої нафти та її залишок у пласті за час протікання процесу, відповідно, становить $V_{вн} = 3.965$, $V_{зл}(18.62) = 3.141$ (для випадку 1), $V_{вн} = 3.428$, $V_{зл}(18.62) = 3.678$ (для випадку 2). $V_{вн} = 3.789$, $V_{зл}(18.62) = 3.317$ (для випадку 3).

Згідно експериментального дослідження, бачимо, що при $t > \tilde{t}$, об'єм відбору нафти різко зменшується, а значення об'єму витісняючого реагента (що потрапляє у експлуатаційну свердловину) в сумарній фільтраційній витраті у кожному з випадків зростає по-різному. Це пояснюється суттєвою різницею коефіцієнтів в'язкості фаз, відносної фазової проникності, параметрів та розміщень тріщин ГРП: у випадку 1 відбувається швидке обводнення експлуатаційної свердловини через одну з тріщин і виникає ризик утворення так званих зон застою нафти; у випадку 2 цей ризик значно зменшується, однак збільшується час для повного витіснення нафти; у випадку 3 спостерігаємо надто повільний перебіг процесу відбору нафти («близькість» відборів, особливо для випадків 1 та 3, пояснюється рівністю площ тріщин ГРП). Також підтверджується факт, що напрямленість тріщин ГРП в «поперечному напрямку» (стосовно лінії розміщення нагнітальних

свердловин) пришвидшує час прориву витісняючого реагента до експлуатаційної свердловини (хоча забезпечує певне зростання значень відбору нафти на початкових часових етапах), а їх розміщення «вздовж» – сприяє зменшенню зон застою нафти. При цьому підкреслимо, що зони застою нафти в даних випадках є близькими до так званих застійних зон (ділянок пластів, в кожній точці яких величина градієнта є меншою деякого критичного значення).

Для підтвердження точності даного методу проведемо дослідження процесу витіснення з нафтового пласта на основі натурних даних [177]:

$$p_* = 112 \cdot 10^5 \text{ Па.}, \quad p^* = 198 \cdot 10^5 \text{ Па.}, \quad r^0 = 0.1 \text{ м.}, \quad a = 7.1 \text{ м.}, \quad h = 12.3 \text{ м.}, \quad b = 14.4 \text{ м.},$$

$$k_0 = 5 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2, \quad k_\lambda = 11 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2, \quad \mu_1 = 2 \frac{\kappa_2 \cdot M}{c}, \quad \mu_2 = 1 \frac{\kappa_2 \cdot M}{c}, \quad \sigma = 0.3,$$

$$s_* = 1, \quad \tilde{s}(x, y) = 0, \quad \tau = 0.01 \text{ с.}$$

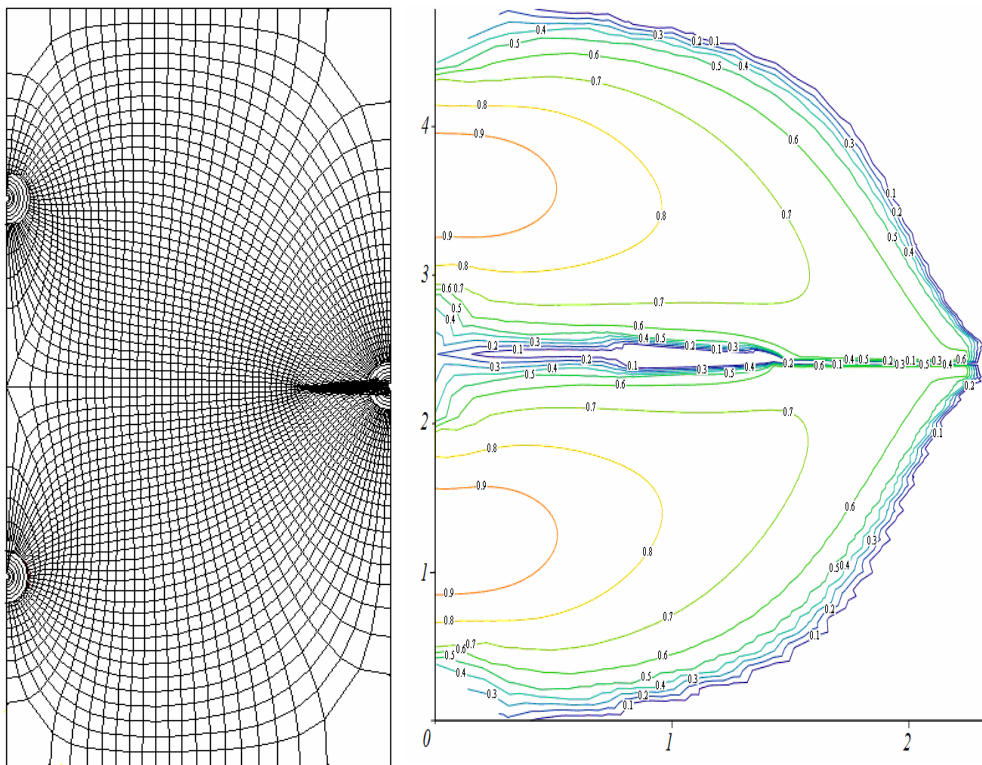


Рис. 3.10 – Гідродинамічна сітка та розподіл насиченості у момент часу $\tilde{t} = 10.4$.

Як бачимо, процес витіснення тут відбувається надто повільно, порівняно із попередніми тестовими розрахунками, однак поле насиченості (в порівнянні) суттєво не змінилась.

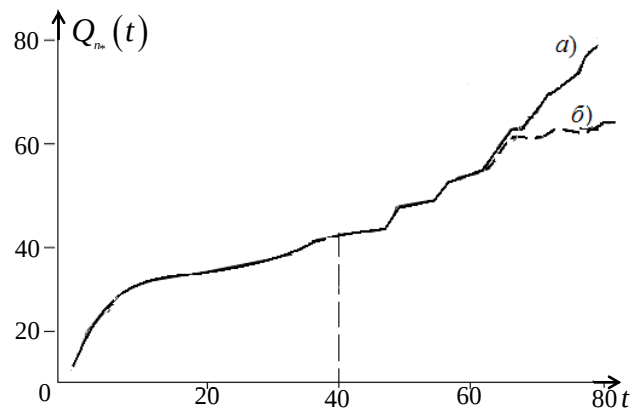


Рис. 3.11 – Графік залежності сумарної витрати (a) та значення відбору нафти (б) від часу.

На рисунку 3.11 зображено графік залежності сумарної фільтраційної витрати (a) та значення відбору нафти (б) від часу, який також підтверджує якість розрахунків.

Таким чином, проведені попередньо обчислювальні експерименти з використанням безрозмірних величин, які отримані із натурних даних за допомогою формул обезрозмірювання [95] ($\tilde{x} = \frac{x}{L}$, $\tilde{y} = \frac{y}{L}$ ($L = \sqrt{h^2 + 4b^2}$ - характерний розмір пласта), $\tilde{t} = \frac{t}{T}$ ($T \approx t_{\max}$), $\vec{\tilde{v}}_i = \frac{\vec{v}_i \cdot T}{L}$, $\tilde{p}_i = \frac{(p^* - p_*) \cdot k \cdot T}{\mu_i \cdot L^2}$), мають підґрунтя для проведення відповідного аналізу перебігу процесу витіснення у нафтових пластах.

3.3. Моделювання процесу витіснення нафти теплоносієм за умов впливу тріщин гідророзриву

При розробці нафтових родовищ, в'язкість якої перевищує деякі критичні значення (наприклад, родовища нафти середньої та високої в'язкості, природних бітумів), ефективною, для підтримки пластового тиску та покращення реологічних властивостей флюїдів, є технологія нагнітання в

пласт різних робочих агентів – теплоносіїв [5, 114, 145, 154, 172], при цьому за рахунок переносу течією тепла здійснюється розігрів зон пласта між свердловинами в зв'язку з чим знижується в'язкість нафти в цих зонах і, тим самим, забезпечується гідродинамічний зв'язок між ними.

У цьому параграфі розвинуто розроблені нами методи комплексного аналізу [29-34] математичного моделювання ізотермічної багатофазної фільтрації на випадок витіснення нафти з горизонтального пласта теплоносієм, в умовах його гідравлічного розриву (ГРП). При цьому, на основі ідей методів квазіконформних відображень та поетапної фіксації характеристик середовища і процесу розроблено числовий алгоритм розв'язування відповідних задач на побудову гідродинамічних сіток, відшукування полів температури та насиченості, координат точок «призупинки», фільтраційних витрат, часу повного заводнення тощо.

Розглянемо задачу моделювання процесу двофазної неізотермічної фільтрації при витісненні нафти теплоносієм (зокрема, водою) в горизонтальному пласті, обмеженому зовнішнім непроникним контуром, контурами почергово розміщеними рядами нагнітальних та експлуатаційних свердловин, пронизаних тріщинами ГРП скінченної проникності (див. рис. 3.10 а), в умовах відсутності перетоків між відповідними рядами. За умов існування певного роду симетрії, можна виділити елемент G_z ($z = x + iy$), що містить 2 – нагнітальні свердловин та 1 – експлуатаційну (див., рис. 3.12 б, де $d = 4(r + a)$, r – радіус свердловин, a – половина відстані між нагнітальними свердловинами, h – відстань між рядами нагнітальних та експлуатаційних свердловин).

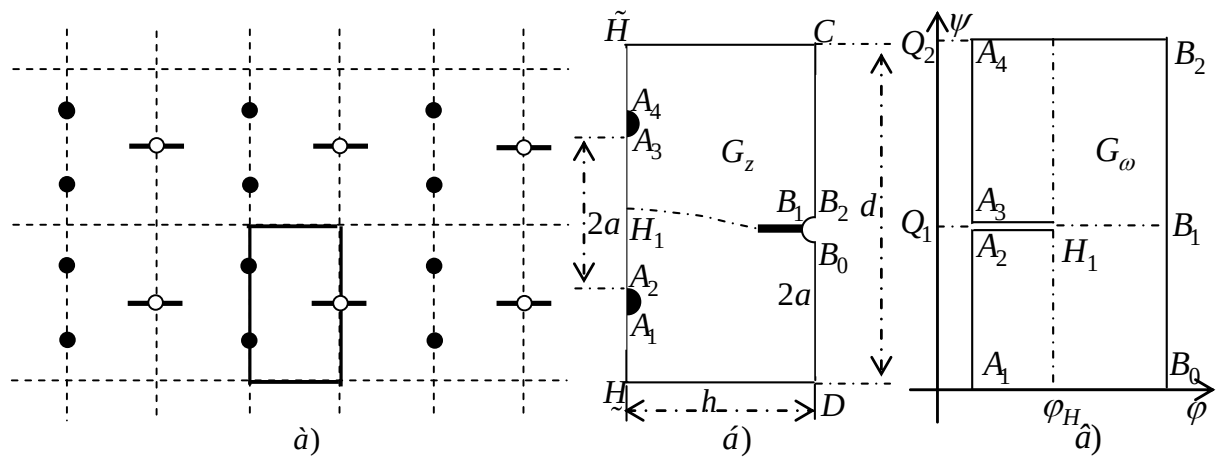


Рис. 3.12. Рядна схема розміщення свердловин (а) з виділеним елементом симетрії (б) та відповідна область комплексного квазіпотенціалу (в) (● – нагнітальна свердловина, —○— експлуатаційна з тріщиною ГРП)

Відповідні закон руху та рівняння нерозривності течії, записані відносно квазіпотенціалу швидкості фільтрації $\varphi = \varphi(x, y, t) = -p(x, y, t) + \tilde{p}$ ($p(x, y, t)$ – тиск в точці (x, y) в момент часу t , $\tilde{p}$ – деяке характерне його значення),

згідно з [19] представимо у вигляді: $\vec{v}_l = \frac{k(x, y) \tilde{k}_l}{\mu_l(T)} \text{grad} \varphi$, $\sigma \frac{\partial s_l}{\partial t} + \text{div} \vec{v}_l = 0$,

$l = \overline{1, 2}$, $s_1 + s_2 = 1$, де $s_1(x, y, t)$, $s_2(x, y, t)$ – відповідно насиченості пористого середовища нафтою та водою в точці (x, y) у момент часу t (тут і надалі час

t та інші величини є безрозмірними); σ , $k(x, y) = \begin{cases} k_\lambda, (x, y) \in G_z^\lambda, \lambda = 1, 2, \dots \\ k_0, (x, y) \in G_z \setminus \bigcup_l G_z^\lambda, \end{cases}$ –

коефіцієнти пористості та абсолютної проникності ґрунту, де G_z^λ – ділянка пласта, що відповідає λ -ій тріщині; $\tilde{k}_1 = \tilde{k}_1(s)$, $\tilde{k}_2 = \tilde{k}_2(s)$ – відносні фазові проникності ($s = s_2$); $\vec{v}_l$, $\mu_l(T)$ – вектор швидкості та коефіцієнт в'язкості l -тої фази, $T = T(x, y, t)$ – температура. Звідси, з урахуванням сумарної швидкості $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ фільтраційної течії, маємо:

$$\text{div} \vec{v} = 0, \vec{v} = \bar{k}(s, T) \cdot \text{grad} \varphi, \quad (3.32)$$

$$\sigma \frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad} f(s, T) = 0, \quad (3.33)$$

$$\text{де } f(s, T) = \frac{\mu_1(T) \tilde{k}_2(s)}{\mu_2(T) \tilde{k}_1(s) + \mu_1(T) \tilde{k}_2(s)}, \quad \bar{k}(s, T) = \frac{k \tilde{k}_1(s)}{\mu_1(T)} + \frac{k \tilde{k}_2(s)}{\mu_2(T)}.$$

Вважаємо, що на нагнітальних L_g ($g = \overline{1, 2}$) та експлуатаційній L^* свердловинах підтримуються постійні тиски (відповідні їм квазіпотенціали позначимо: φ_* та φ^*), на межі ∂D_λ тріщин ГРП виконуються умови неперервності потоку і тиску, а інші ділянки границі області G_z є лініями течії, вздовж яких, зокрема, мають місце рівності $\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\tilde{L}} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_L = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{\tilde{L}} = 0$, де

$$L_g = \{z = x + iy : f_g(x, y) = 0\} = \{z : x = r \cdot \cos(\tau), y = r \cdot \sin(\tau) + (2g - 1) \cdot (a + r), 1,5\pi \leq \tau \leq 2,5\pi\},$$

$$L^* = \{z = x + iy : f^*(x, y) = 0\} = \{z : x = r \cdot \cos(\tau) + h, y = r \cdot \sin(\tau) + d/2, 0,5\pi \leq \tau \leq 1,5\pi\},$$

$$\tilde{L} = A_1 \tilde{H} \cup \tilde{H} D \cup D B_0 = \{z : \tilde{f}(x, y) = 0\},$$

$$A_1 \tilde{H} = \{z : x = 0, 0 \leq y \leq a\}, \quad 0 \leq x \leq h, \quad \tilde{H} D = \{z : y = 0, D B_0 = \{z : x = h, 0 \leq y \leq d/2 - r\},$$

$$\tilde{L} = A_4 \tilde{H} \cup \tilde{H} C \cup C B_2 = \{z : \tilde{f}(x, y) = 0\}, \quad A_4 \tilde{H} = \{z : x = 0, d - a \leq y \leq d\},$$

$$\tilde{H} C = \{z : y = d, 0 \leq x \leq h\}, \quad C B_2 = \{z : x = h, d/2 + r \leq y \leq d\},$$

$$\tilde{\tilde{L}} = A_2 H_1 A_3 = \{z : x = 0, 2(a + r) - a \leq y \leq 2(a + r) + a\}.$$

Початковий розподіл насиченості в пласті і її значення на нагнітальних свердловинах позначимо відповідно через $s(x, y, 0) = s^0(x, y)$ та $s|_{L_g} = s_*$.

Для опису процесу перерозподілу тепла між фазами та скелетом, прийемо однотемпературну модель, згідно з якою передбачається миттєва передача тепла від флюїду до скелету і в зворотному напрямку. Таким чином, для розрахунку теплового поля використовуватимемо наступне рівняння [8]:

$$\frac{\partial (\sigma \rho_1 c_1 (1 - s) + \sigma \rho_2 c_2 s + (1 - \sigma) \rho_3 c_3) \cdot T}{\partial t} + \text{div}((c_1 \rho_1 \vec{v}_1 + c_2 \rho_2 \vec{v}_2) \cdot T) = 0, \quad (3.34)$$

де $\sigma \rho_1 c_1 (1 - s) + \sigma \rho_2 c_2 s + (1 - \sigma) \rho_3 c_3 = C(s)$ – об'ємна теплоємність пористого середовища;

c_κ , ρ_κ – питома теплоємність і густина для нафти, води і скелету пласта ($\kappa = \overline{1, 3}$).

Використовуючи формули для визначення швидкостей руху нафти та води: $\vec{v}_1 = (1 - f(s, T)) \cdot \vec{v}$, $\vec{v}_2 = f(s, T) \cdot \vec{v}$ і співвідношення (3.32), рівняння (3.34) перепишемо так:

$$\sigma \frac{\partial \tilde{T}(s)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad} \tilde{f}(s, T) = 0 \quad (3.35)$$

де $\tilde{T}(s) = C(s) \cdot T = (\tilde{\alpha}s + \tilde{\beta}) \cdot T$, $\tilde{f}(s, T) = (\tilde{\alpha}f(s, T) + c_1\rho_1) \cdot T$, $\tilde{\alpha} = \rho_2c_2 - \rho_1c_1$, $\tilde{\beta} = \rho_1c_1 + (\sigma^{-1} - 1)\rho_3c_3$. Як бачимо, спрощений запис рівняння (3.35) (для відшукування теплового поля) є аналогічним до рівняння (3.33) (для відшукування поля насиченості), що в свою чергу є передумовою для використання розроблених в роботах [24-27] алгоритмів розв'язання ізотермічних задач багатозфазної фільтрації.

Для однозначності відшукування поля температури вважатимемо заданим його розподіл в початковий момент часу $T(x, y, 0) = T^0(x, y)$ та значення температури на контурах області:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\tilde{L}} = \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_L = \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\tilde{L}} = 0, \quad T|_{L_1} = T|_{L_2} = T_*. \quad (3.36)$$

Ввівши функцію течії ψ , комплексно спряжену до φ , задача на побудову гідродинамічної сітки, відшукування фільтраційної витрати та інших характерних фільтраційних параметрів за знайденими (фіксованими у даний момент часу) полями насиченості та температури зводиться до задачі на квазіконформне відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ однозв'язної області G_z на відповідну область комплексного квазіпотенціалу

$$G_\omega = \bigcup_{g=1}^2 G_g \cup \bar{L}_1:$$

$$\begin{aligned} \bar{k}(s, T) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \bar{k}(s, T) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z, \\ \varphi|_{L_1} &= \varphi|_{L_2} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad [\varphi]|_{\partial D_\lambda} = 0, \quad [\nu_n]|_{\partial D_\lambda} = 0, \\ \psi|_{\tilde{L}} &= 0, \quad \psi|_{A_2H_1A_3} = Q_1, \quad \psi|_{\tilde{L}} = Q_2, \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{\bar{k}}{\sigma} \frac{\partial f}{\partial s} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial s}{\partial y} \right), \quad s|_{L_1} = s|_{L_2} = s_*, \quad s|_{t=0} = s^0(x, y), \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} = -\frac{\bar{k}}{\sigma} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} \right), \quad T|_{L_1} = T|_{L_2} = T_*, \quad T|_{t=0} = T^0(x, y), \quad (3.39)$$

де $\nu(x, y) = \sqrt{\nu_x^2(x, y) + \nu_y^2(x, y)}$, $G_1 = \{\omega: \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q_1\}$, $G_2 = \{\omega: \varphi_* < \varphi < \varphi^*, Q_1 < \psi < Q_2\}$, $\bar{L}_1 = \{\omega: \varphi_{H_1} < \varphi < \varphi^*, \psi = Q_1\}$, $Q_1 = \oint_{L_1} -\nu_y dx + \nu_x dy$,

$Q_2 - Q_1 = \oint_{L_2} -\nu_y dx + \nu_x dy$ – невідомі витрати, а Q_2 – сумарна витрата на

експлуатаційній свердловині, $[\bullet]_{\partial G_z^l}$ –стрибок відповідної функції на ∂G_z^l .

Обернену до (3.37) крайову задачу на квазіконформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z , а також, як наслідок, рівняння для дійсної $x = x(\varphi, \psi)$ і уявної $y = y(\varphi, \psi)$ частин характеристичної функції течії запишемо у вигляді:

$$\bar{k} \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad \bar{k} \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega, \quad (3.40)$$

$$\underline{u}(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) = 0, \quad \tilde{u}(x(\varphi, Q_2), y(\varphi, Q_2)) = 0, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*,$$

$$u_1(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q_1, \quad u_2(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad Q_1 \leq \psi \leq Q_2,$$

$$u^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q_2,$$

$$x_-(\varphi, Q_1) = 0, \quad 2(a+r) - a \leq y_-(\varphi, Q_1) \leq y_{H_1},$$

$$x_+(\varphi, Q_1) = 0, \quad y_{H_1} \leq y_+(\varphi, Q_1) \leq 2(a+r) + a, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi_{H_1},$$

$$[x(\varphi, \psi)]_{\partial G_z^\lambda} = [y(\varphi, \psi)]_{\partial G_z^\lambda} = 0,$$

$$\left[\frac{\bar{k}}{J} \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial \psi} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \psi} \right)^2} \cos(\vec{v}, \vec{n}) \right]_{\partial G_z^\lambda} = 0, \quad l \in N, \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left(\bar{k} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\bar{k}} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\bar{k} \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\bar{k}} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) = 0. \quad (3.42)$$

Використавши відповідні формули переходу $J = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial y}{\partial \varphi}$,

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \psi},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad \text{умови (3.40) та формули для}$$

обчислення компонент сумарної швидкості $v_x = \frac{\bar{k}}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial y}{\partial \psi},$

$$v_y = -\frac{\bar{k}}{J(\varphi, \psi)} \frac{\partial x}{\partial \psi}, \quad \text{задачі для насиченості та теплопровідності (3.38)–(3.39)}$$

перепишемо так:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\frac{v^2}{\sigma \bar{k}} \frac{\partial f}{\partial \varphi}, \quad (3.43)$$

$$s(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi), t) = s_*, \quad \psi \in [0, Q_1) \cup (Q_1, Q_2],$$

$$s(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), 0) = s^0(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)), \quad \psi \in [0, Q_2], \quad \varphi \in [\varphi_*, \varphi^*], \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} = -\frac{v^2}{\sigma \bar{k}} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}, \quad (3.44)$$

$$\tilde{T}(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi), t) = (\tilde{\alpha} \cdot s_* + \tilde{\beta}) \cdot T_*, \quad \psi \in [0, Q_1) \cup (Q_1, Q_2],$$

$$\tilde{T}(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi), 0) = (\tilde{\alpha} \cdot \tilde{s}(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)) + \tilde{\beta}) \cdot T^0(x(\varphi, \psi), y(\varphi, \psi)),$$

$$0 \leq \psi \leq Q_2, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \quad (3.45)$$

де рівняння (3.43) та (3.45) є фактично просторово одновимірними, адже змінна ψ тут фігурує як параметр.

Таким чином використання ідей методу квазіконформних відображень та процедури поетапної фіксації різних характеристик середовища і процесу дозволило суттєво спростити розв'язання задачі неізотермічної багатофазної фільтрації та представити відповідний алгоритм її розв'язування у вигляді наступної послідовності етапів: за заданими геометрією області фільтрації та початковими і граничними умовами розраховується поле потенціалу швидкості за поточними полями насиченості та температури (розв'язуємо

задачу на квазіконформне відображення: будуємо гідродинамічну сітку, характерні лінії розділу течії, знаходимо квазіпотенціал φ , витрату та інші невідомі фільтраційні параметри); перераховується поле насиченості (за знайденими фільтраційними характеристиками згідно з (3.43) знаходимо перерозподіл насиченості); розраховується поле температури (за знайденими фільтраційними характеристиками та перерахованим полем насиченості згідно з (3.45) знаходимо перерозподіл температури); перевіряються умови зупинки роботи алгоритму при невиконанні яких переходимо до повторного уточнення відповідних величин алгоритму (зокрема, однією з таких умов зупинки, може бути умова перевищення допустимої частки витісняючої рідини в продукції експлуатаційної свердловини).

Для побудови різницевого аналогу задачі введемо в області G_ω рівномірну ортогональну сітку, вузли (φ_i, ψ_j) якої визначаємо так:

$$\varphi_i = \begin{cases} \varphi_* + i \cdot \Delta\varphi_1, & i = \overline{0, n_1}, \Delta\varphi_1 = (\varphi_{H_1} - \varphi_*)/(n_1 + 1), \\ \varphi_{H_1} + (i - n_1 - 1) \cdot \Delta\varphi_2, & i = \overline{n_1 + 1, n}, \Delta\varphi_2 = (\varphi^* - \varphi_{H_1})/(n_2 + 1), \end{cases} \quad (3.46)$$

$$\psi_j^g = j \cdot \Delta\psi_g, \quad j = \overline{\tilde{m}_1, \tilde{m}_2}, \quad \tilde{m}_1 = \sum_{l=0}^{g-1} m_l + g - 1, \quad \tilde{m}_2 = \sum_{l=0}^g m_l + g - 1, \quad (\varphi_i, \psi_j^g) \in G_\omega^g,$$

$$\Delta\psi_g = (Q_g - Q_{g-1})/m_g, \quad g = \overline{1, 2}, \quad Q_0 = 0, \quad m_0 = 0,$$

де $n = n_1 + n_2 + 1$, $m = m_1 + m_2 + 1$, $m_1, m_2, n_1, n_2 \in N$.

Рівняння (3.42) апроксимуємо, використовуючи метод скінченних об'ємів [199] наступним чином:

$$\begin{aligned} x_{i,j} &= (a_n x_{i,j+1} + a_s x_{i,j-1} + a_e x_{i-1,j} + a_s x_{i+1,j})/a_p, \\ y_{i,j} &= (a_n y_{i,j+1} + a_s y_{i,j-1} + a_e y_{i-1,j} + a_s y_{i+1,j})/a_p, \end{aligned} \quad (3.47)$$

де $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$, $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$, $a_n = k_n \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_+}$, $a_s = k_s \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi_-}$, $a_e = \frac{\Delta\psi}{k_e \Delta\varphi_+}$,

$$a_s = \frac{\Delta\psi}{k_w \Delta\varphi_-}, \quad a_p = a_n + a_s + a_e + a_w, \quad \Delta\varphi = (\Delta\varphi_- + \Delta\varphi_+)/2, \quad \Delta\psi = (\Delta\psi_- + \Delta\psi_+)/2,$$

$$k_n = 2 \cdot k_{i,j} k_{i,j+1} / (k_{i,j} + k_{i,j+1}), \quad k_s = 2 \cdot k_{i,j} k_{i,j-1} / (k_{i,j} + k_{i,j-1}), \quad k_e^{-1} = 0.5(k_{i,j}^{-1} + k_{i-1,j}^{-1}),$$

$k_w^{-1} = 0.5 \cdot (k_{i,j}^{-1} + k_{i+1,j}^{-1})$. Вибір величин $\Delta\varphi_-, \Delta\varphi_+, \Delta\psi_-, \Delta\psi_+$ визначається належністю вузла (φ_i, ψ_j^g) тій чи іншій підобласті сіткової області G_ω . Наприклад, якщо $\varphi_i = \varphi_H$, $\psi_j^g = 0$, то $\Delta\varphi_- = \Delta\varphi_1$, $\Delta\varphi_+ = \Delta\varphi_2$, $\Delta\psi_+ = \Delta\psi_1$, $\Delta\psi_- = \Delta\psi_1$. Апроксимації крайових умов запишемо так:

$$\begin{aligned} u_1(x_{0,j}, y_{0,j}) &= 0, j = \overline{0, m_1}, \quad u_2(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, j = \overline{m_1 + 1, m}, \\ u^*(x_{n,j}, y_{n,j}) &= 0, j = \overline{0, m}, \quad \tilde{u}(x_{i,0}, y_{i,0}) = 0, \quad \underline{u}(x_{i,m}, y_{i,m}) = 0, i = \overline{0, n}, \\ x_{i,m_1} &= 0, \quad 2(a + r^0) - a \leq y_{i,m_1} \leq y_{H_1}, \\ x_{i,m_2} &= 0, \quad y_{H_1} \leq y_{i,m_2} \leq 2(a + r^0) + a, i = \overline{0, n_1}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Тут, як і в [19], комплексну спряженість гармонічних функцій $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$, $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$ забезпечують умови ортогональності приграничних нормальних векторів до відповідних дотичних вздовж границі області G_z . Їх різницеві аналоги на контурах свердловин мають вигляд:

$$\begin{aligned} (4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j}) \cdot (x_{0,j+1} - x_{0,j-1}) + (4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j}) \times \\ (y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) = 0, \quad j = \overline{\tilde{m}_1, \tilde{m}_2}, \quad (3x_{n,j} + x_{n-2,j} - 4x_{n-1,j}) \cdot (x_{n,j+1} - x_{n,j-1}) + \\ + (3y_{n,j} + y_{n-2,j} - 4y_{n-1,j}) \cdot (y_{n,j+1} - y_{n,j-1}) = 0, \quad j = \overline{0, m}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Невідомі витрати Q_g ($g = \overline{1, 2}$) та значення потенціалу φ_{H_1} в точці розгалуження ліній течії в процесі ітерацій шукаємо за формулами:

$$\varphi_{H_1} = \varphi_* + (n_1 + 1)\Delta\psi_1\gamma_1^1, \quad Q_g = m_g\Delta\psi_g, \quad \text{де} \quad \Delta\psi_g = \frac{\Delta\varphi_1\gamma_2^g + \Delta\varphi_2\gamma_1^g}{2\gamma_1^g\gamma_2^g}, \quad \text{а} \quad \gamma_l^g$$

одержуємо на підставі умови «квазіконформної подібності в малому» відповідних елементарних чотирикутників двох областей:

$$\begin{aligned} \gamma_1^g &= \sum_{i=0, j=\tilde{m}_1}^{n_1, \tilde{m}_2-1} \frac{\gamma_{i,j}}{m_g(n_1 + 1)}, \quad \gamma_2^g = \sum_{i=n_2+1, j=\tilde{m}_1}^{n, \tilde{m}_2-1} \frac{\gamma_{i,j}}{m_g n_2}, \\ \gamma_{i,j} &= \frac{1}{\bar{k}_{i+1/2, j+1/2}} \frac{a_{i,j} + a_{i,j+1}}{b_{i,j} + b_{i+1,j}}, \end{aligned} \quad (3.50)$$

де $a_{i,j} = \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2}$, $b_{i,j} = \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2}$.

Рівняння (3.43) та (3.45) апроксимуємо різницевою схемою «проти потоку» [202] таким чином:

$$\hat{s}_{i,j} = s_{i,j} - \frac{\tau v_{i,j}^2}{\sigma \bar{k}_{i,j} \Delta \varphi_l} \left(f(s_{i,j}, T_{i,j}) - f(s_{i-1,j}, T_{i-1,j}) \right), \quad (3.51)$$

$$\hat{T}_{i,j} = T_{i,j} - \frac{\tau v_{i,j}^2}{\sigma \bar{k}_{i,j} \Delta \varphi_l} \left(\tilde{f}(\hat{s}_{i,j}, T_{i,j}) - \tilde{f}(\hat{s}_{i-1,j}, T_{i-1,j}) \right), \quad (3.52)$$

де $j = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, n_1 + 1}$, для $l = 1$, $i = \overline{n_1 + 2, n}$, для $l = 2$; τ – крок по часу, $s_{i,j}$, $\hat{s}_{i,j}$ – насиченості у відповідні моменти часу, $\tilde{T}_{i,j} = (\tilde{\alpha} \cdot \hat{s}_{i,j} + \tilde{\beta}) \cdot T_{i,j}$, $\hat{T}_{i,j} = (\tilde{\alpha} \cdot \hat{s}_{i,j} + \tilde{\beta}) \cdot \hat{T}_{i,j}$, $\tilde{f}(\hat{s}_{i,j}, T_{i,j}) = (\tilde{\alpha} \cdot f(\hat{s}_{i,j}, T_{i,j}) + c_1 \rho_1) \cdot T_{i,j}$, $v_{i,j}$ – швидкість фільтрації. Граничну та початкову умови для насиченості та температури в сітковій області запишемо так:

$$s_{0,j} = s_*, \quad j = \overline{1, m}, \quad s(x_{i,j}, y_{i,j}, 0) = s^0(x_{i,j}, y_{i,j}),$$

$$\tilde{T}_{0,j} = (\tilde{\alpha} \cdot s_* + \tilde{\beta}) \cdot T_*, \quad \tilde{T}(x_{i,j}, y_{i,j}, 0) = (\tilde{\alpha} \cdot \tilde{s}(x_{i,j}, y_{i,j}) + \tilde{\beta}) \cdot T^0(x_{i,j}, y_{i,j}).$$

Задавши крок τ , параметри розбиття n_1 , n_2 , m_1 , m_2 області G_ω та точності роботи алгоритму ε_1 , ε_2 , початкові наближення координат граничних вузлів $x_{i,j}^{(0)}$, $y_{i,j}^{(0)}$ (так щоб виконувалися умови (3.48)) і початкові наближення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$ знаходимо за формулами (3.50) наближення величин γ_l^g . Далі проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів гідродинамічної сітки шляхом розв'язання (3.47) відносно $x_{i,j}$ та $y_{i,j}$. Після цього, як і в [37], підправляємо граничні вузли за умов фіксації навколишніх граничних та приграничних, використовуючи умови ортогональності, та знаходимо наближення величин Q_g , φ_{H_1} . Серед умов

завершення алгоритму побудови гідродинамічної сітки (відшукування невідомих фільтраційних параметрів, зокрема, поля швидкості) на даному ітераційному етапі: є стабілізація витрат Q_g ($|Q_g^{(\kappa+1)} - Q_g^{(\kappa)}| < \varepsilon_1$); стабілізація граничних вузлів ($\max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(\kappa)} - x_{i,j}^{(\kappa-1)})^2 + (y_{i,j}^{(\kappa)} - y_{i,j}^{(\kappa-1)})^2} < \varepsilon_2$) тощо. У випадку невиконання якоїсь із цих умов відмічаємо на динамічній сітці ділянки порушення квазіконформності.

Використовуючи побудоване поле швидкостей $v_{i,j}$ та поле насиченості $s_{i,j}$ і температури $\tilde{T}_{i,j}$ з попереднього ітераційного кроку (з врахуванням граничних умов), знаходимо розподіл насиченості $\hat{s}_{i,j}$ у пласті на даному часовому етапі, згідно з (3.51), та, використовуючи (3.52), розраховуємо поле температури $\hat{\tilde{T}}_{i,j}$, після чого перераховуємо поле швидкості і потенціалу.

Використовуючи вище описаний алгоритм, проведемо числові розрахунки поставленої задачі. На рисунку 3.13 а зображено гідродинамічну сітку в елементі симетрії G_z в момент часу $t=8.15$, при $r=0.3$, $a=1.2$,

$$h=5, d=6, \varphi_*=0, \varphi^*=1, k_0=1, k_1=10, \tau=0.01, \sigma=0.2, \mu_1=5 \cdot e^{120 \cdot \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{60}\right)},$$

$$\mu_2 = \frac{9.1787}{1 + 0.0337 \cdot T + 0.000221 \cdot T^2}, \quad \rho_1=800, \quad c_1=1880, \quad \rho_2=1000, \quad c_2=4200,$$

$$\rho_3=2200, \quad c_3=1800, \quad s_*=1, \quad s^0=0, \quad T_*=90, \quad T^0(x,y)=30, \quad \tilde{k}_1(s)=(1-s)^2,$$

$$\tilde{k}_2(s)=s^2, \quad G_z^1 = \{(x,y): (x-h)^2/4 + (y-d/2)^2/0.04 \leq 1\}, \quad n_1 \times n_2 = 3 \times 45,$$

$$m_1 = m_2 = 30.$$

На рисунку 3.13 б-в представлено поле температур та поле насиченості, відповідно, при витісненні нафти водою у випадку неізотермічного процесу фільтрації. Для порівняння ефективності застосування теплового методу витіснення, на рисунку 3.13 г наведено поле насиченості для елемента симетрії пласта із такими ж геометричними параметрами та фізичними

властивостями середовища та нафти у випадку ізотермічного процесу витіснення.

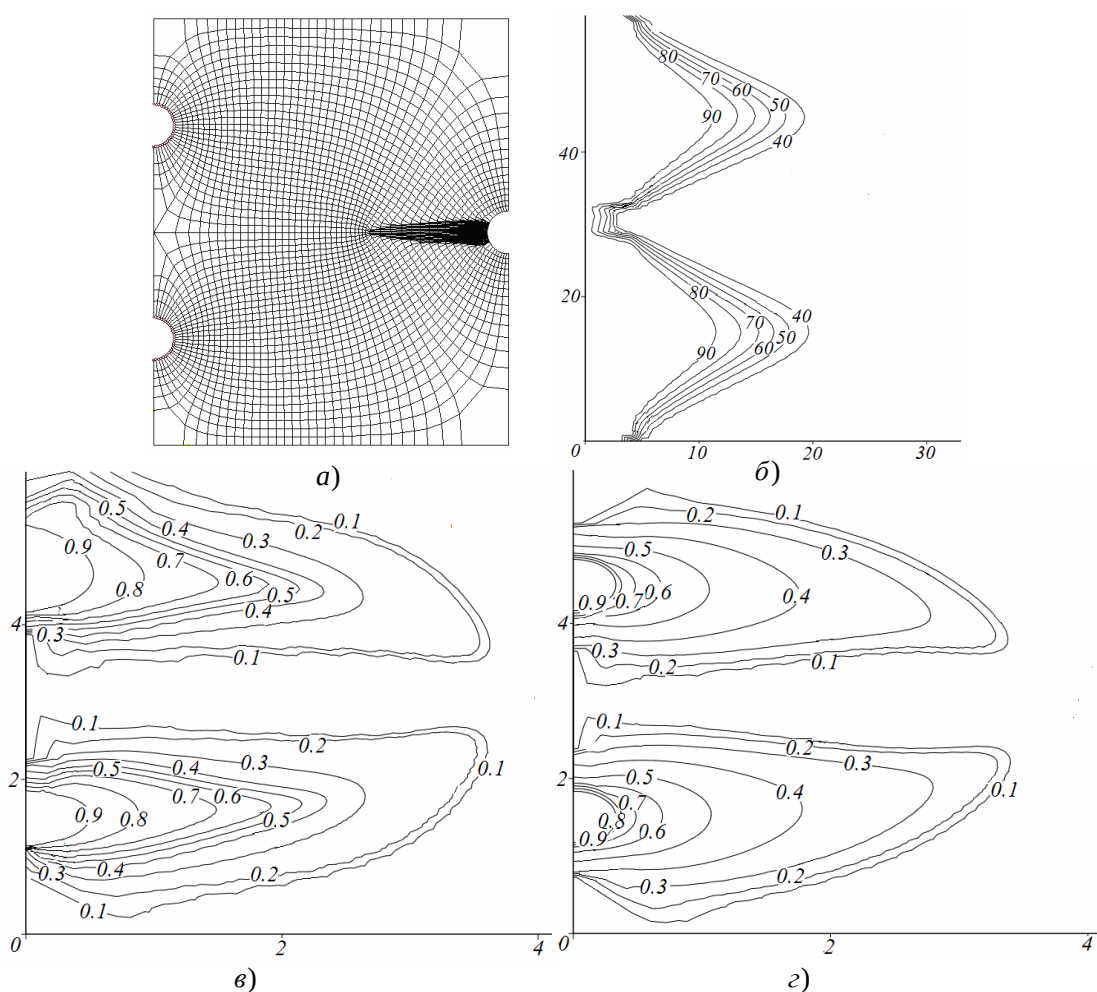


Рис. 3.13. Гідродинамічна сітка (а), розподіл температур (б) і розподіл насиченості в елементі симетрії G_z у випадку неізотермічної (в) та ізотермічної (г) фільтрації у момент часу $t = 8.15$

На рисунку 3.14 представлено графік залежності сумарної фільтраційної витрати від часу у випадку неізотермічного (суцільною лінією) та ізотермічного (штрих пунктирною) процесу витіснення.

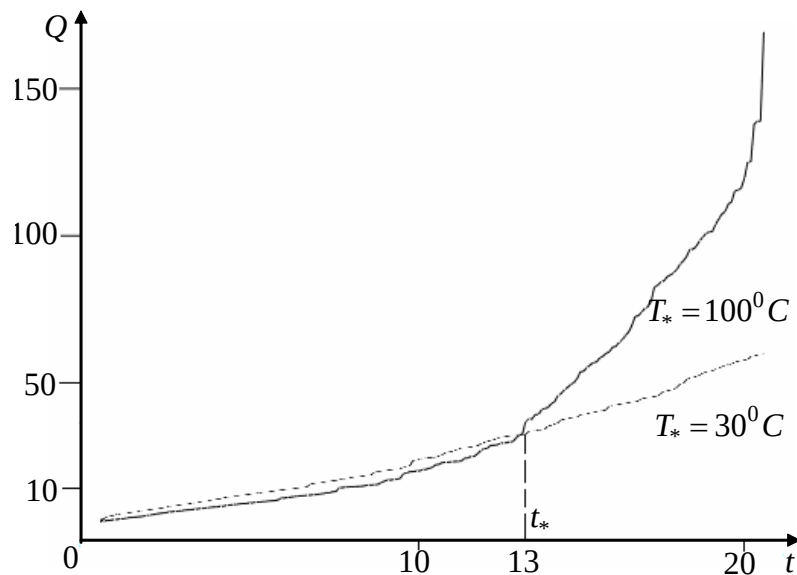


Рис. 3.14 – Графік залежності сумарної фільтраційної витрати від часу при $T_* = 100^\circ\text{C}$ та $T_* = 30^\circ\text{C}$

В результаті проведених числових розрахунків, підтверджується факт значного збільшення дебіту експлуатаційної свердловини при витісненні нафти гарячою водою, так як при збільшенні температури в'язкість нафти зменшується і швидкість фільтрації зростає. При цьому відзначимо, що з початку моменту нагрівання до певного часу t_* (у нашому випадку $t_* = 13$) інтенсивність відбору менша ніж у випадку ізотермічного процесу, це пояснюється тим, що енергія гарячої води затрачається на нагрівання середовища і нафти, що знаходиться в елементі симетрії.

3.4. Висновки до Розділу 3

У даному розділі, на основі ідей методу квазіконформного відображення та поетапної фіксації характеристик середовища і процесу, в рамках теорії Баклея-Лeverетта, модифіковано комплексний підхід до математичного моделювання нелінійних процесів витіснення в елементах площадного заводнення за умов утворення додаткових фільтраційних впливів шляхом утворення та з урахуванням просторової орієнтації тріщин гідророзриву. Проведено відповідні числові розрахунки перерозподілу квазіпотенціалу

швидкості у пласті із паралельним розрахунком інших характеристик, зокрема, фільтраційних витрат, поля насиченості тощо.

Розроблено методику стосовно дослідження поведінки елементів системи «свердловина-тріщина-пласт», зокрема, врахування зміни насиченості при двофазній фільтрації в однорідному горизонтальному пласті, на випадок прогнозування інтенсифікації притоку пластової рідини до свердловини шляхом збурення течії тріщинами гідравлічного розриву пласта скінченної проникності. Підтверджено наявність «ступінчатоподібного» ефекту зміни сумарної витрати на проміжку часу від початку прориву рідини у тріщину ГРП до досягнення критичного значення насиченості. З метою забезпечення можливості керування фільтраційним потоком відповідний програмний комплекс модифіковано на випадок існування у пласті тріщин ГРП, що реалізує запропонований підхід та містить як алгоритм вибору, так і алгоритми розв'язання задачі у кожному із конкретних випадків.

РОЗДІЛ 4

ЧИСЛОВІ МЕТОДИ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ ВИТІСНЕННЯ У ВАЖКОПРОНИКНИХ ОСАДОВИХ ПОРОДАХ

У розділі встановлено особливості протікання процесу витіснення нафти із важкопроникних (зокрема, сланцевих) осадових порід з використанням дії енергії зарядів вибухових речовин та тріщин гідравлічного розриву пласта. На основі модифікованого закону Дарсі, шляхом введення критичного значення градієнта тиску та з використанням ідей методів комплексного аналізу, розроблено алгоритми числового наближення розв'язків відповідних нелінійних крайових задач у горизонтальних і просторово-маловикривлених пластах.

4.1. Методика розв'язання крайових задач інтенсифікації процесу витіснення у нафтових пластах за умов збурення присвердловинної зони пласта шляхом дії вибуху

У параграфі розроблено алгоритм числового розв'язання обернених краєвих задач теорії вибуху із застосуванням методології поетапної фіксації характеристик процесу і середовища та числового методу квазіконформних відображень.

Нехай в деяку область G_z ($z = x + iy$) поміщено заряд заданої форми з постійним квазіпотенціалом на ньому і процес руху частинок описується за допомогою рівняння $\vec{v} = k \cdot \text{grad} \varphi$ (закон Дарсі) та рівняння нерозривності $\text{div} \vec{v} = 0$, де $\vec{v} = (v_x(x, y), v_y(x, y))$ – швидкість руху частинок, $k = k(x, y, \varphi_x, \varphi_y)$ – коефіцієнт провідності середовища, а $\varphi = \varphi(x, y) = -P / \rho$ – квазіпотенціал відповідного поля, $P = \int_0^{t_0} p dt$ – імпульс тиску [58, 87-88], p –

тиск, що діє на протязі часу $t \in [0, t_0]$, ρ – густина середовища. Вважаємо, що область пласта обмежена такими контурами (рис. 1): $L_* = \{z: f_*(x, y) = 0\} = \{x + iy: x = x_*(\theta), y = y_*(\theta), \alpha_* < \theta < \beta_*\}$ – контур заряду, $L^* = \{z: f^*(x, y) = 0\} = \{x + iy: x = x^*(\theta), y = y^*(\theta), \alpha^* < \theta < \beta^*\}$, де $\varphi|_{L_*} = \varphi_*$, $\varphi|_{L^*} = \varphi^*$, $-\infty < \varphi_* < \varphi^* < +\infty$.

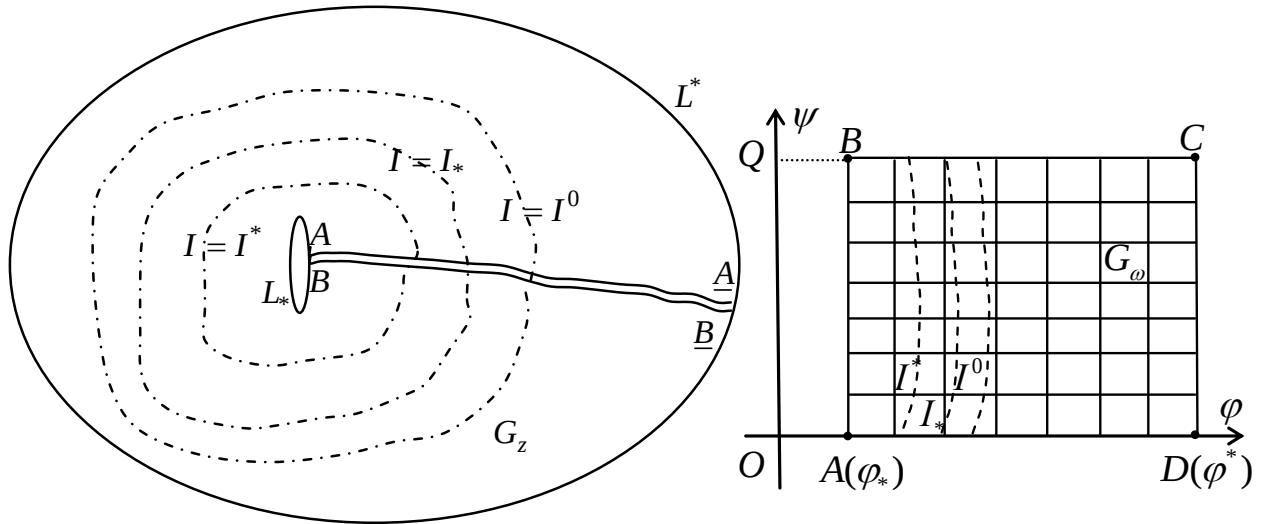


Рис. 4.1. Область пласта із вибуховим зарядом L_*

Один із варіантів моделювання вибуху є врахування взаємовпливу градієнта I квазіпотенціала $\varphi = \varphi(x, y)$ та коефіцієнта провідності k і виділення ділянок (рис. 4.1), в яких проводиться корекція значення коефіцієнта k в залежності від значень I за наступною формулою:

$$k = \begin{cases} k_0 + \beta(I - I^*)(I - I^0), & I > I^0, \\ k_0, & I \leq I^0, \end{cases} \quad (4.1)$$

де $I = \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}$ – величина градієнту, а I^0 , I^* – критичні його значення, які характеризують затримку та відрив частинок (положення лінії розділу), параметр β підбирається виходячи з фізичного експерименту. Залежності коефіцієнта провідності від величини градієнта вздовж однієї з ліній течії

схематично зображено на рис. 4.4, де I_* – критичне значення градієнта, що відповідає значенню коефіцієнта провідності $k_* = k_0 + \beta(I_* - I^*)(I_* - I^0)$.

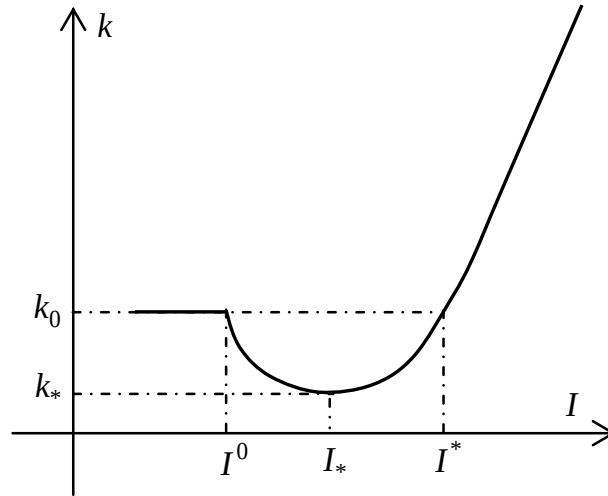


Рис. 4.2. Розподіл коефіцієнта провідності відносно значень градієнту

Аналогічно до [16], ввівши комплексно спряжену до $\varphi = \varphi(x, y)$ функцію $\psi = \psi(x, y)$ (функцію течії) та здійснивши умовний розріз області вибуху вздовж ліній розділу течії (через $\underline{AA}$ та $\underline{BB}$ на рис. 4.2 позначено відповідно верхній та нижній берег розрізу) приходимо до відповідної задачі на квазіконформне відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ [19] утвореної при цьому однозв'язної області $G_z^0 = G_z / \underline{AA}$ на відповідну прямокутну область комплексного квазіпотенціалу $G_\omega = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$ з невідомим параметром Q :

$$k \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad k \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z^0,$$

$$\varphi|_{L_*} = \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi^*, \quad \psi|_{\underline{AA}} = 0, \quad \psi|_{\underline{BB}} = Q = \oint_{L_*} -v_y dx + v_x dy. \quad (4.2)$$

Обернена крайова задача на квазіконформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z^0 та рівняння для дійсної $x = x(\varphi, \psi)$ і уявної $y = y(\varphi, \psi)$ частини (виконання яких вимагатимемо і на розрізі для врахування їх «роздвоєння» при переході від області G_z до G_ω)

функції течії при невідомому положенні розріза та значенні Q одержимо у вигляді:

$$\begin{cases} k(x, y, \frac{y_\psi}{J}, -\frac{x_\psi}{J})y_\psi = x_\varphi, \\ k(x, y, \frac{y_\psi}{J}, -\frac{x_\psi}{J})x_\psi = -y_\varphi, \end{cases} \quad \begin{matrix} (\varphi, \psi) \in G_\omega, \\ J = x_\varphi y_\psi - x_\psi y_\varphi, \end{matrix} \quad (4.3)$$

$$f_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q, \quad (4.4)$$

$$x(\varphi, 0) = x(\varphi, Q), \quad y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q), \quad \varphi_* < \varphi < \varphi^*, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left(k \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \psi} \left(k \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{k} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) = 0. \quad (4.6)$$

Алгоритм числового розв'язання поставленої задачі побудуємо аналогічно до [18]. А саме, різницеві аналоги рівнянь (4.6), крайових умов (4.4), а також додаткові умови для граничних та приграничних вузлів у відповідній рівномірній сітковій області $G_\omega^\gamma = \{(\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \varphi_* + i \cdot \Delta\varphi, i = \overline{0, n}; \psi_j = j \cdot \Delta\psi, j = \overline{0, m}; \Delta\varphi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{n}, \Delta\psi = \frac{Q}{m}, \gamma = \frac{\Delta\psi}{\Delta\varphi}\}$ запишемо

відповідно у вигляді:

$$\begin{cases} \gamma^2 \left(\frac{x_{i+1,j} - x_{i,j}}{k_{i+0.5,j}} - \frac{x_{i,j} - x_{i-1,j}}{k_{i-0.5,j}} \right) + k_{i,j+0.5}(x_{i,j+1} - x_{i,j}) - k_{i,j-0.5}(x_{i,j} - x_{i,j-1}) = 0, \\ \gamma^2 \left(\frac{y_{i+1,j} - y_{i,j}}{k_{i+0.5,j}} - \frac{y_{i,j} - y_{i-1,j}}{k_{i-0.5,j}} \right) + k_{i,j+0.5}(y_{i,j+1} - y_{i,j}) - k_{i,j-0.5}(y_{i,j} - y_{i,j-1}) = 0, \end{cases} \quad (4.7)$$

де $k_{i+0.5,j} = k\left((x_{i+1,j} + x_{i,j})/2, (y_{i+1,j} + y_{i,j})/2, (y_{i+1,j+1} + y_{i,j+1})/(4\Delta\psi J_{i+1/2,j}) - (y_{i,j-1} + y_{i+1,j-1})/(4\Delta\psi J_{i+0.5,j}), (x_{i+1,j-1} + x_{i,j-1} - x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1})/(4\Delta\psi J_{i+0.5,j})\right),$
 $k_{i-0.5,j} = k\left((x_{i-1,j} + x_{i,j})/2, (y_{i-1,j} + y_{i,j})/2, (y_{i-1,j+1} + y_{i,j+1})/(4\Delta\psi \cdot J_{i-0.5,j}) - (y_{i-1,j-1} + y_{i,j-1})/(4\Delta\psi \cdot J_{i-0.5,j}), (x_{i-1,j-1} + x_{i,j-1} - x_{i-1,j+1} - x_{i,j+1})/(4\Delta\psi J_{i-0.5,j})\right),$

$$\begin{aligned}
k_{i,j+0.5} &= k \left((x_{i,j+1} + x_{i,j})/2, (y_{i,j+1} + y_{i,j})/2, (y_{i,j+1} - y_{i,j})/(\Delta\psi \cdot J_{i,j+0.5}), \right. \\
&\left. (x_{i,j} - x_{i,j+1})/(\Delta\psi \cdot J_{i,j+0.5}) \right), \quad k_{i,j-0.5} = k \left((x_{i,j-1} + x_{i,j})/2, (y_{i,j-1} + y_{i,j})/2, \right. \\
&\left. (y_{i,j} - y_{i,j-1})/(\Delta\psi J_{i,j-0.5}), (x_{i,j-1} - x_{i,j})/(\Delta\psi \cdot J_{i,j-0.5}) \right); \quad J_{i+0.5,j} = ((x_{i+1,j} - x_{i,j}) \times \\
&\times (y_{i+1,j+1} + y_{i,j+1} - y_{i+1,j-1} - y_{i,j-1}) - (y_{i+1,j} - y_{i,j})(x_{i+1,j+1} + x_{i,j+1} - x_{i+1,j-1} - \\
&- x_{i,j-1}))/ (4\Delta\psi \cdot \Delta\varphi), \quad J_{i-0.5,j} = ((x_{i,j} - x_{i-1,j})(y_{i-1,j+1} + y_{i,j+1} - y_{i-1,j-1} - y_{i,j-1}) - \\
&- (y_{i,j} - y_{i-1,j})(x_{i-1,j+1} + x_{i,j+1} - x_{i,j-1} - x_{i-1,j-1}))/ (4\Delta\psi \cdot \Delta\varphi), \quad J_{i,j+0.5} = \\
&= ((y_{i,j+1} - y_{i,j})(x_{i+1,j+1} + x_{i+1,j} - x_{i-1,j+1} - x_{i-1,j}) - (x_{i,j+1} - x_{i,j})(y_{i+1,j+1} + y_{i+1,j} - \\
&- y_{i-1,j} - y_{i-1,j+1}))/ (4\Delta\psi \cdot \Delta\varphi), \quad J_{i,j-0.5} = ((y_{i,j} - y_{i,j-1})(x_{i+1,j-1} + x_{i+1,j} - x_{i-1,j-1} - \\
&- x_{i-1,j}) - (x_{i,j} - x_{i,j-1})(y_{i+1,j-1} + y_{i+1,j} - y_{i-1,j} - y_{i-1,j+1}))/ (4\Delta\psi \cdot \Delta\varphi); \\
&\begin{cases} f^*(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, & f^*(x_{n,j}, y_{n,j}) = 0, & j = \overline{0, m}, \\ x_{i,0} = x_{i,m}, & y_{i,0} = y_{i,m}, & i = \overline{0, n}; \end{cases} \quad (4.8) \\
&\begin{cases} (4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j})(x_{0,j+1} - x_{0,j-1}) + (4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j})(y_{0,j+1} - \\ - y_{0,j-1}) = 0, & (3x_{n,j} + x_{n-2,j} - 4x_{n-1,j})(x_{n,j+1} - x_{n,j-1}) + (3y_{n,j} + \\ + y_{n-2,j} - 4y_{n-1,j})(y_{n,j+1} - y_{n,j-1}) = 0, & j = \overline{1, m-1}. \end{cases} \quad (4.9)
\end{aligned}$$

Формулу для наближення величини γ одержимо на підставі умови “квазіконформної подібності” елементарних чотирикутників [3] двох областей:

$$\gamma = \sum_{i,j=0}^{n-1,m-1} \frac{k_{i,j}^*}{nm} \frac{a_{i,j} + a_{i+1,j}}{b_{i,j} + b_{i,j+1}}, \quad (4.10)$$

де

$$\begin{aligned}
k_{i,j}^* &= k \left((x_{i,j} + x_{i+1,j} + x_{i,j+1} + x_{i+1,j+1})/4, (y_{i,j} + y_{i+1,j} + y_{i,j+1} + y_{i+1,j+1})/4, \right. \\
&\left. (y_{i+1,j+1} + y_{i,j+1} - y_{i+1,j} - y_{i,j})/(2\Delta\psi J_{i,j}^*), (x_{i+1,j} + x_{i,j} - x_{i,j+1} - x_{i+1,j+1})/(2\Delta\psi J_{i,j}^*) \right), \\
a_{i,j} &= \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2}, \quad b_{i,j} = \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2},
\end{aligned}$$

$$J_{i,j}^* = \frac{1}{4\Delta\psi\Delta\varphi} ((x_{i+1,j} + x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1} - x_{i,j})(y_{i+1,j+1} + y_{i,j+1} - y_{i+1,j} - y_{i,j}) - (x_{i,j+1} + x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j} - x_{i,j})(y_{i+1,j+1} + y_{i+1,j} - y_{i,j+1} - y_{i,j})).$$

Задавши параметри розбиття області G_ω n та m , параметри ε_1 , ε_2 , ε_3 , що характеризують точність роботи алгоритму розв'язання різницевої задачі, початкові наближення координат граничних вузлів $(x_{0,j}^{(0)}, y_{0,j}^{(0)})$, $(x_{n,j}^{(0)}, y_{n,j}^{(0)})$ (так, щоб виконувались умови (4.8)) та внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$ (наприклад, рівномірно поділивши відрізки із кінцями в точках $(x_{0,j}^{(0)}, y_{0,j}^{(0)})$, $(x_{n,j}^{(0)}, y_{n,j}^{(0)})$), знаходимо за формулою (4.10) початкове наближення $\gamma^{(0)} = \gamma(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$ величини γ . Далі проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j}^{(\alpha)}, y_{i,j}^{(\alpha)})$ із заданою точністю ε_1 (α – номер загальної ітерації) з допомогою ітераційних схем типу “хрест”, отриманих шляхом розв'язання (4.7) відносно $x_{i,j}$ та $y_{i,j}$. При цьому необхідні значення градієнта напору та функції k у вузлах сітки G_ω^γ обчислюються через значення $x_{i,j}$, $y_{i,j}$ з попереднього кроку ітерації. Підправляємо граничні вузли, розв'язуючи наближено систему рівнянь (4.9), наприклад, методом Ньютона. Якщо величина зміщення вузлів на границі за проведену α -ту загальну ітерацію $S = \max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(\alpha)} - x_{i,j}^{(\alpha-1)})^2 + (y_{i,j}^{(\alpha)} - y_{i,j}^{(\alpha-1)})^2}$ ((i,j) – індекси координат граничних вузлів) більша за ε_2 , то повертаємось до уточнення внутрішніх вузлів. В протилежному випадку знаходимо нові наближення $Q^{(L)}$ та $\gamma^{(L)}$ величин Q та γ за формулою (4.10) та умовою зв'язку між ними: $Q = m\Delta\varphi \cdot \gamma$. Якщо $|Q^{(L)} - Q^{(L-1)}| > \varepsilon_3$, то знову повертаємось до уточнення внутрішніх вузлів, інакше – обчислюємо нев'язку “квазіконформності” отриманої сітки $\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$, де δ_1 , δ_2 – нев'язки апроксимацій рівнянь (4.3):

$$\begin{cases} \delta_1 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} |\gamma(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) - k_{i,j} \cdot (y_{i,j+1} - y_{i,j-1})|, \\ \delta_2 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} |\gamma(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) + k_{i,j} \cdot (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})|. \end{cases}$$

Комп'ютерна реалізація алгоритму та числові розрахунки. Відповідний алгоритм числового розв'язання поставленої задачі реалізований у вигляді комп'ютерної програми для ПК IBM PC/AT. Числові розрахунки проведено для області з коефіцієнтом провідності, що визначається вище запропонованим виразом (4.14) при $k_0 = 1$, $\beta = 0.058$, $I^* = 7$, $I^0 = 0.6$; $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$, $n \times m = 20 \times 60$, $L^* = \{x + iy : x_*(\theta) = 0.01 \cos(\theta) - 0.1, y_*(t) = 0.3 \sin(t) \mid 0 \leq \theta < 2\pi\}$, $L_* = \{x + iy : x^*(\theta) = 2 \cos(\theta), y^*(\theta) = 2 \sin(\theta), 0 \leq \theta < 2\pi\}$.

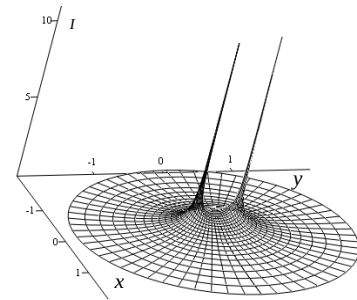
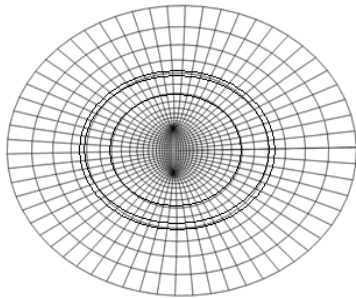


Рис. 4.3. Область вибуху Рис. 4.4. Поле градієнту

На рисунку 4.3 зображено область вибуху, що відповідає еліптичному заряду з півосями 0.01 та 0.3, де виділені відповідні положення границі розділу впресованої, мало впресованої зон. Рисунок 4.4 відображає залежність величини градієнту від координат за умови сталості коефіцієнта провідності $k = 1$. Значення параметрів k_* та Q рівні відповідно: $k_* = 0.4$, $Q = 1.966$, де $I_* = 3.8$.

4.2. Моделювання процесу витіснення у важкопроникних пластах з урахуванням впливу тріщин гідророзриву

Враховуючи особливості будови важкопроникних, типу сланцевих, осадових порід, їх низьку проникність та тріщинуватість, одним із найефективніших методів інтенсифікації витіснення із систем тріщин та

мікротріщин до стовбурів свердловин є гідравлічний розрив пласта (ГРП) [80, 114, 191], який їх об'єднує в деревовидні структури тим самим розширюючи зону впливу, що дренується свердловиною.

У цьому параграфі, на основі ідей методів квазіконформних відображень та поетапної фіксації характеристик середовища й процесу [22-25, 84], розроблено комплексний підхід до розв'язання крайових задач на інтенсифікацію відтоку нафти з важкопроникних тріщинувато-пористих (зокрема, сланцевих) осадових порід з урахуванням суміжних деформаційних процесів у присвердловинній зоні пласта [82-83], коли за умов квазістаціонарності фільтраційної течії досліджуваний процес описується спеціальним чином модифікованим законом Дарсі (відносно критичного значення градієнта тиску).

Розглянемо задачу комплексного дослідження фільтраційних процесів в присвердловинній зоні пласта G_z ($z = x + iy$), що виникають внаслідок витіснення нафти від зовнішнього контуру живлення L_* тріщинувато-пористої осадової породи до контуру експлуатаційної свердловини L^* (рис. 4.5).

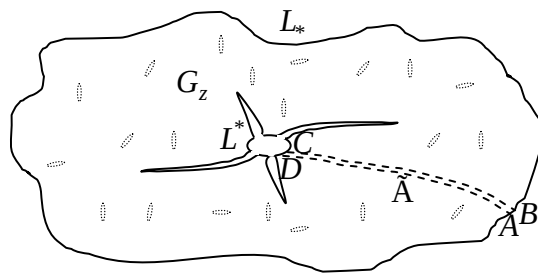


Рис. 4.5. Схематичне зображення фізичної області фільтрації.

Відповідний процес фільтрації, по аналогії з [35-36], опишемо за допомогою рівняння нерозривності та рівняння руху (спеціальним чином модифікованого закону Дарсі, відносно критичного значення градієнту тиску):

$$\operatorname{div} \rho \vec{v} = 0, \quad \vec{v} = -\frac{k \chi(I, I_{kr})}{\mu} \operatorname{grad} p, \quad (4.11)$$

за відповідних умов на контурах пласта: $p|_{L_*} = p_*$, $p|_{L^*} = p^*$ ($p_* > p^*$). Тут

$I = I(x, y) = |\text{grad } p(x, y)| = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}$ – величина градієнта тиску p ; $\rho = \rho(p)$,

μ – густина і в'язкість газу; k – коефіцієнт абсолютної проникності середовища, який у випадку існування тріщин ГРП представимо у вигляді:

$$k(x, y) = \begin{cases} k_\lambda, & (x, y) \in G_z^\lambda, \quad \lambda = 1, 2, \dots, \\ k_0, & (x, y) \in G_z \setminus \bigcup_{\lambda} G_z^\lambda \end{cases}, \quad G_z^\lambda - \text{ділянки пласта, яку займає } \lambda\text{-та}$$

тріщина; χ – коефіцієнт, що характеризує залежність проникності осадової породи (при ускладнених геологічних умовах фільтрації, для яких k_0/μ мала величина) від величини градієнта тиску і визначається наступним співвідношенням

$$\chi(I, I_{kr}) = \begin{cases} 1 + F(I - I_{kr}), & \text{при } I > I_{kr}, \\ 1, & \text{при } I \leq I_{kr}, \end{cases} \quad (4.12)$$

де F – задана монотонно зростаюча функція;

I_{kr} – критичне значення початкового градієнту.

Для побудови наближеного розв'язку задачі введемо квазіпотенціал

швидкості у вигляді функції Лейбензона [12]: $\varphi(p) = \varphi_* + \frac{k}{\mu} \int_p^{p_*} \rho(\alpha) d\alpha$ та

перепишемо відносно нього рівняння (4.11) з відповідними крайовими умовами:

$$\begin{aligned} \text{div}(\chi(\tilde{I}, I_{kr}) \text{grad } \varphi) &= 0, \quad \vec{v} = \frac{\chi(\tilde{I}, I_{kr})}{\tilde{\rho}(\varphi)} \text{grad } \varphi, \\ \varphi|_{L_*} &= \varphi(p_*) = \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi(p^*) = \varphi^*, \quad (\varphi_* < \varphi^*), \end{aligned} \quad (4.13)$$

де $\tilde{\rho}(\varphi) = \rho(p(\varphi))$, $\tilde{I} = \frac{\mu}{k \tilde{\rho}(\varphi)} \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}$.

Аналогічно до [19], ввівши функцію течії $\psi = \psi(x, y)$ комплексно спряжену до $\varphi = \varphi(x, y)$ та здійснивши умовний розріз Γ області G_z вздовж

лінії розділу течії, що визначаються точками $A=B=(x_*, y_*) \in L_*$, $C=D=(x^*, y^*) \in L^*$, поставлена вище задача зводиться до задачі на квазіконформне відображення $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, утвореної при цьому однозв'язної області $G_z^0 = G_z \setminus \Gamma$ на відповідну прямокутну область комплексного квазіпотенціалу $G_\omega = \{\omega: \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$:

$$\begin{aligned} \frac{\chi(\tilde{I}, I_{kr})}{\tilde{\rho}(\varphi)} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\chi(\tilde{I}, I_{kr})}{\tilde{\rho}(\varphi)} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (x, y) \in G_z^0, \\ \varphi|_{AB} &= \varphi_*, \quad \varphi|_{CD} = \varphi^*, \quad \psi|_{AD} = 0, \quad \psi|_{BC} = Q, \\ [\varphi]|_{\partial G_z^\lambda} &= 0, \quad [\nu_n]|_{\partial G_z^\lambda} = 0, \end{aligned} \quad (4.14)$$

де $Q = \oint_{AB} -\nu_y dx + \nu_x dy$ – невідома витрата; $\nu(x, y) = \sqrt{\nu_x^2(x, y) + \nu_y^2(x, y)}$;

$[\bullet]|_{\partial G_z^\lambda}$ – стрибок заданої функції на ∂G_z^λ .

Через геометричну складність області G_z^0 та тривіальність відповідної їй області комплексного квазіпотенціалу G_ω ми розглядатимемо замість прямої задачі на квазіконформне відображення $G_z^0 \rightarrow G_\omega$ обернену до неї [18], яка, включаючи рівняння для дійсної $x = x(\varphi, \psi)$ і уявної $y = y(\varphi, \psi)$ частин відповідної характеристичної функції течії $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ (виконання яких вимагатимемо і на розрізі, що «роздвоюється» при переході від області G_z до G_ω), запишеться у вигляді:

$$\begin{cases} \frac{\chi(\tilde{I}, I_{kr})}{\tilde{\rho}(\varphi)} y_\psi = x_\varphi, \\ \frac{\chi(\tilde{I}, I_{kr})}{\tilde{\rho}(\varphi)} x_\psi = -y_\varphi, \end{cases} \quad \begin{aligned} &(\varphi, \psi) \in G_\omega, \\ &J = x_\varphi y_\psi - x_\psi y_\varphi, \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$f_*(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad f^*(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q \quad (4.16)$$

$$x(\varphi, 0) = x(\varphi, Q), \quad y(\varphi, 0) = y(\varphi, Q), \quad \varphi_* < \varphi < \varphi^*, \quad (4.17)$$

$$[x(\varphi, \psi)]|_{\partial G_\omega^\lambda} = [y(\varphi, \psi)]|_{\partial G_\omega^\lambda} = 0,$$

$$\left[\frac{\chi(\tilde{I}, I_{kr})}{\tilde{\rho}(\varphi)J} \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\right)^2} \cos(\vec{v}, \vec{n}) \right]_{\partial G_\omega^\lambda} = 0, \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\chi(\tilde{I}, I_{kr})}{\tilde{\rho}(\varphi)} \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\tilde{\rho}(\varphi)}{\chi(\tilde{I}, I_{kr})} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\chi(\tilde{I}, I_{kr})}{\tilde{\rho}(\varphi)} \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\tilde{\rho}(\varphi)}{\chi(\tilde{I}, I_{kr})} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Для побудови різницевого аналогу задачі введемо в області G_ω рівномірну ортогональну сітку $G_\omega^\lambda = \{(\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \varphi_* + i \cdot \Delta\varphi, \text{ при } i = \overline{0, n}; \psi_j = j \cdot \Delta\psi, \text{ при } j = \overline{0, m}\}$, де $\Delta\varphi = (\varphi^* - \varphi_*)/n$, $\Delta\psi = Q/m$ – кроки сітки відповідно по змінним φ та ψ , $\gamma = \Delta\varphi/\Delta\psi$ – квазіконформний інваріант, $n, m \in N$ – параметри розбиття області комплексного квазіпотенціалу.

Різницеві аналоги рівнянь (4.19) (з урахуванням умов (4.18)), крайових умов (4.16), а також додаткові умови для граничних та приграничних вузлів (умови ортогональності) запишемо відповідно у вигляді:

$$\left\{ \begin{aligned} &\gamma^2 \left(\frac{\chi(\tilde{I}_{i,j+1/2}, I_{kr})(x_{i,j+1} - x_{i,j})}{\tilde{\rho}(\varphi_{i,j+1/2})} - \frac{\chi(\tilde{I}_{i,j-1/2}, I_{kr})(x_{i,j} - x_{i,j-1})}{\tilde{\rho}(\varphi_{i,j-1/2})} \right) + \\ &+ \frac{\tilde{\rho}(\varphi_{i+1/2,j})(x_{i+1,j} - x_{i,j})}{\chi(\tilde{I}_{i+1/2,j}, I_{kr})} - \frac{\tilde{\rho}(\varphi_{i+1/2,j})(x_{i,j} - x_{i,j-1})}{\chi(\tilde{I}_{i+1/2,j}, I_{kr})} = 0, \\ &\gamma^2 \left(\frac{\chi(\tilde{I}_{i,j+1/2}, I_{kr})(y_{i,j+1} - y_{i,j})}{\tilde{\rho}(\varphi_{i,j+1/2})} - \frac{\chi(\tilde{I}_{i,j-1/2}, I_{kr})(y_{i,j} - y_{i,j-1})}{\tilde{\rho}(\varphi_{i,j-1/2})} \right) + \\ &+ \frac{\tilde{\rho}(\varphi_{i+1/2,j})(y_{i+1,j} - y_{i,j})}{\chi(\tilde{I}_{i+1/2,j}, I_{kr})} - \frac{\tilde{\rho}(\varphi_{i+1/2,j})(y_{i,j} - y_{i,j-1})}{\chi(\tilde{I}_{i+1/2,j}, I_{kr})} = 0; \end{aligned} \right. \quad (4.20)$$

$$\left\{ \begin{aligned} &f_*(x_{0,j}, y_{0,j}) = 0, \quad f^*(x_{n,j}, y_{n,j}) = 0, \quad j = \overline{0, m}, \\ &x_{i,0} = x_{i,m}, \quad y_{i,0} = y_{i,m}, \quad i = \overline{0, n}; \end{aligned} \right. \quad (4.21)$$

$$\begin{cases} (4x_{1,j} - 3x_{0,j} - x_{2,j})(x_{0,j+1} - x_{0,j-1}) + (4y_{1,j} - 3y_{0,j} - y_{2,j}) \times \\ \times (y_{0,j+1} - y_{0,j-1}) = 0, (3x_{n,j} + x_{n-2,j} - 4x_{n-1,j})(x_{n,j+1} - x_{n,j-1}) + \\ + (3y_{n,j} + y_{n-2,j} - 4y_{n-1,j})(y_{n,j+1} - y_{n,j-1}) = 0, j = \overline{0, m-1}, \end{cases} \quad (4.22)$$

$$\text{де } x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j), y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j), \varphi_{i,j\pm 1/2} = \frac{(\varphi_{i,j\pm 1} + \varphi_{i,j})}{2}, \varphi_{i\pm 1/2,j} = \frac{(\varphi_{i\pm 1,j} + \varphi_{i,j})}{2},$$

$$\tilde{I}_{i,j\pm 1/2} = \frac{(\tilde{I}_{i,j\pm 1} + \tilde{I}_{i,j})}{2}, \tilde{I}_{i\pm 1/2,j} = \frac{(\tilde{I}_{i\pm 1,j} + \tilde{I}_{i,j})}{2}, \tilde{I}_{i,j} = \frac{\mu \cdot \beta_{i,j}}{k \cdot J_{i,j} \cdot \tilde{\rho}(\varphi_{i,j}) \cdot \Delta\psi}.$$

Невідому витрату Q наближено шукаємо за формулою $Q = \frac{m\Delta\varphi}{\gamma}$,

величину γ одержуємо на підставі умови «квазіконформної подібності в малому» відповідних елементарних чотирикутників [202] двох областей:

$$\gamma = \frac{1}{mn} \sum_{i,j=0}^{n-1,m-1} \frac{\tilde{\rho}(\varphi_{i+1/2,j+1/2})}{\chi(\tilde{I}_{i+1/2,j+1/2}, I_{kr})} \frac{\alpha_{i,j} + \alpha_{i,j+1}}{\beta_{i,j} + \beta_{i+1,j}}, \quad (4.23)$$

$$\text{де } \alpha_{i,j} = \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2}, \beta_{i,j} = \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2}.$$

Таким чином, алгоритм наближення розв'язку оберненої диференціальної задачі (4.15)–(4.19) різницевою задачею в загальному випадку, побудуємо шляхом поетапної параметризації величини γ , граничних та внутрішніх вузлів сітки з використанням ідей блочної ітерації, для аналітичного обґрунтування його збіжності. А саме: задавши геометричну конфігурацію фізичної області G_z , що обмежена контурами L_* , L^* , кількість вузлів розбиття відповідної області комплексного квазіпотенціалу G_ω (параметри n та m); параметри необхідної точності роботи алгоритму ε_1 , ε_2 та рівень квазіконформності δ_* відображення. Задаємо початкові наближення шуканих координат граничних вузлів так, щоб виконувалися умови (4.21), та координат внутрішніх вузлів гідродинамічної сітки і, використовуючи (4.23), знаходимо початкове наближення квазіконформного інваріанту $\gamma^{(0)}$ та невідому величину витрати

$Q^{(0)} = \frac{(\varphi^* - \varphi_*)m}{n\gamma^{(0)}}.$ Проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів

$(x_{i,j}, y_{i,j})$ за формулами, отриманими шляхом розв'язання (4.20) відносно $x_{i,j}$ та $y_{i,j}$ (з метою прискорення швидкості збіжності всього процесу і економії машинного часу використовуємо лише перший ітераційний крок, при цьому враховуємо періодичність шуканих функцій). Підправляємо граничні вузли (координати даного вузла підправляємо за умови фіксації навколишніх граничних та приграничних), використовуючи різницеві аналоги умов типу Коші-Рімана (4.22). Використовуючи значення квазіконформних інваріантів (4.23), знаходимо нове наближення величини Q , якщо її зміна за останню проведену ітерацію більша за ε_1 , то повертаємося до уточнення вузлів.

Визначаємо величину $S = \max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(k)} - x_{i,j}^{(k-1)})^2 + (y_{i,j}^{(k)} - y_{i,j}^{(k-1)})^2}$ – зміщення

вузлів на границі за проведену k -ту загальну ітерацію, якщо вона більша за ε_2 , то переходимо до уточнення вузлів. У протилежному випадку оцінюємо

ступінь квазіконформності $\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$ отриманого відображення області комплексного квазіпотенціалу на фізичну область із розрізом вздовж лінії течії, де δ_1, δ_2 – нев'язки апроксимацій рівнянь (4.15):

$$\delta_1 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} |(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) - \gamma \frac{\chi(\tilde{I}_{i,j}, I_{kr})}{\tilde{\rho}(\varphi_{i,j})} (y_{i,j+1} - y_{i,j-1})|,$$

$$\delta_2 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} |(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) - \gamma \frac{\chi(\tilde{I}_{i,j}, I_{kr})}{\tilde{\rho}(\varphi_{i,j})} (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})|,$$

якщо $\delta \geq \delta_*$, то змінюємо кількість вузлів розбиття області G_ω та повторюємо кроки алгоритму, інакше задача розв'язана із необхідною точністю.

Проведемо числові розрахунки у випадку існування еліптичної тріщини гідравлічного розриву, що характеризується своїми півосями $a_1 = 0.6$,

$b_1 = 0.05$ і займає область $G_z^1 = \left\{ (x, y) : \left(\frac{x}{a_1} \right)^2 + \left(\frac{y}{b_1} \right)^2 \leq 1 \right\}$ пласта обмеженого контуром свердловини $L^* = \{ x^*(t) = 0.1 \cos(t), y^*(t) = 0.1 \sin(t) \}$ та контуром живлення $L_* = \{ x_*(t) = 2(\cos(t) + 0.1 \cos(2t)), y_*(t) = 2(\sin(t) - 0.1 \sin(4t)) \}$ при $0 \leq t < 2\pi$, $n \times m = 40 \times 60$, $\rho = 0.9$, $\varphi_* = 0$, $\varphi^* = 1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \delta_* = 10^{-5}$, $k_1 = 10$, $k_0 = 0.01$, $\chi(I, I_{kr}) = \begin{cases} 1 + F(I - I_{kr}), & \text{при } I > I_{kr}, \\ 1, & \text{при } I \leq I_{kr}, \end{cases}$ де $F = 1$, $I_{kr} = 0.6$.

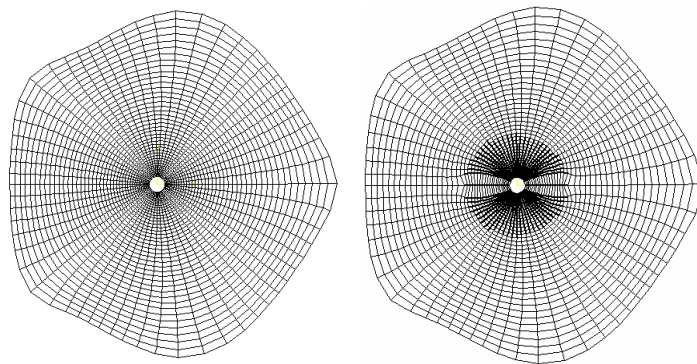


Рис. 4.6. Гідродинамічні сітки, відповідно при відсутності та наявності тріщин ГРП з урахуванням суміжних деформаційних ефектів

На основі отриманих результатів, підтверджено, що у випадку наявності тріщин гідравлічного розриву у сланцевому пласті відбуваються суміжні деформаційні процеси, зокрема, навколо цих тріщин утворюється зона (рис. 4.6), яка характеризується підвищеною проникністю по відношенню до всього пласта і благотворно впливає на дебіт експлуатаційної свердловини: при їх відсутності $Q = 2.104$, а при наявності – $Q = 12.726$.

4.3 Метод комплексного аналізу для моделювання процесів витіснення у просторово-викривлених пластах

У попередніх параграфах модифіковано методи комплексного аналізу, на випадок моделювання нелінійних процесів витіснення в горизонтальних нафтових важкопроникних середовищах за умов збурень фільтраційної течії

тріщинами ГРП скінченної проникності. У даному параграфі узагальнено їх на випадок розв'язання крайових задач однофазної фільтрації у просторово-викривлених пластах [20-21, 147, 148].

Розглянемо процес однофазної ізотермічної фільтрації у просторово-викривленому пласті G_τ ($\tau = (x, y, z)$) обмеженої потужності, за умов збурення течії тріщинами ГРП скінченної проникності (рис. 4.7 а). Введемо апроксимацію тривимірної фільтраційної течії рухом по стаціонарних поверхнях струму в криволінійній (ортогональній) системі координат (ξ, η, ζ) таким чином, щоб рівняння непроникних підосви L_1 та кривлі L_2 пласта можна було записати у вигляді: $\zeta = \zeta_1 = \text{const}$ і $\zeta = \zeta_2 = \text{const}$, відповідно. Як у [19] задамо неперервно-диференційовані функції: $x = X(\xi, \eta, \zeta)$, $y = Y(\xi, \eta, \zeta)$, $z = Z(\xi, \eta, \zeta)$, що пов'язують її із ортогональною (декартовою) системою координат, тоді рівняння решти поверхонь, обмежуючих фільтраційну область, представимо наступним чином: $A^*A_*B_*B^* = \{(\xi, \eta, \zeta): f_*(\xi, \eta) = 0\}$ – контур нагнітальної свердловини, $D^*D_*C_*C^* = \{(\xi, \eta, \zeta): f^*(\xi, \eta) = 0\}$ – контур експлуатаційної свердловини, $\underline{A^*A_*B_*B^*} = \{(\xi, \eta, \zeta): f(\xi, \eta) = 0\}$ – зовнішня непроникна стінка.

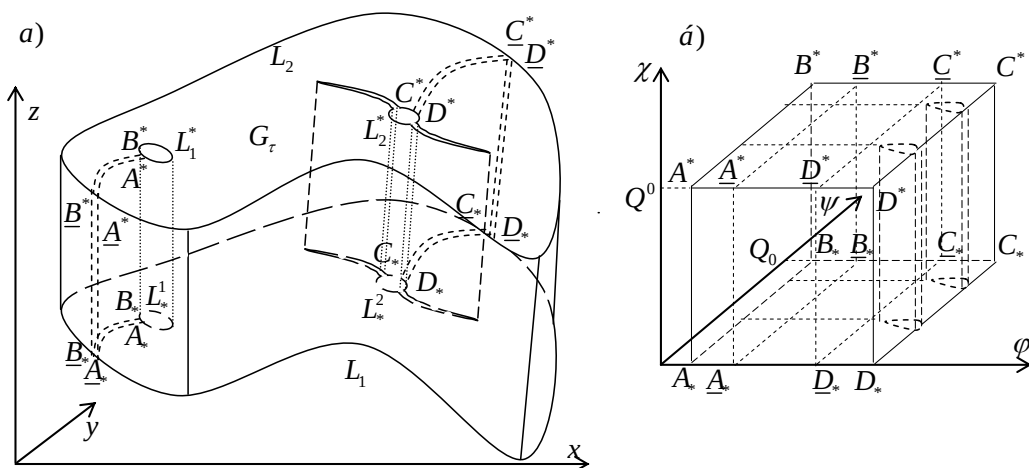


Рис. 4.7. Просторово-маловикривлений пласт (а) та відповідна область комплексного потенціалу (б)

Вважатимемо, що рух флюїду здійснюється по двовимірній поверхні $G_Z = \xi + i\eta$ при $\zeta = \text{const}$. На основі міркувань, закладених у [19], спеціальним чином модифікований закон Дарсі (відносно критичного значення градієнту тиску) та рівняння нерозривності течії матимуть вигляд:

$$\vec{v} = -k\chi(I, I_{kr})\text{grad } p, \quad \text{div} \rho \vec{v} = 0, \quad (4.24)$$

за відповідних умов на контурах свердловин: $p|_{L^*} = p_*$, $p|_{L^*} = p^*$ ($p_* > p^*$) та

зовнішньому непроникному контури $\left. \frac{\partial p}{\partial n} \right|_L = 0$. Тут $I = I(\xi, \eta) = |\text{grad } p(\xi, \eta)| =$

$= \sqrt{p_\xi^2 + p_\eta^2}$ – величина градієнта тиску p ; $\rho = \rho(p)$ – густина нафти; $k =$

$= k(\xi, \eta) = \begin{cases} k_l, & (\xi, \eta) \in G_Z^l, \quad l = 1, 2, 3, \dots \\ k_0, & (\xi, \eta) \in G_Z \setminus \bigcup_l G_Z^l \end{cases}$ – коефіцієнт абсолютної проникності

середовища, де G_Z^l – ділянки пласта, яку охоплює l -та тріщина; $\chi =$

$= \chi(I, I_{kr}) = \begin{cases} 1 + F(I - I_{kr}), & \text{при } I > I_{kr}, \\ 1, & \text{при } I \leq I_{kr}, \end{cases}$ – коефіцієнт, що характеризує

залежність проникності осадової породи від величини градієнта тиску, де F – задана монотонно зростаюча функція, I_{kr} – критичне значення початкового градієнту.

Для побудови наближеного розв'язку задачі введемо квазіпотенціал швидкості у вигляді функції Лейбензона [12]: $\varphi(p) = \varphi_* + k \int_p^{p_*} \rho(\alpha) d\alpha$ та перепишемо відносно нього рівняння (4.24) з відповідними крайовими умовами:

$$\vec{v} = \frac{\chi(\tilde{I}, I_{kr})}{\tilde{\rho}(\varphi)} \text{grad } \varphi, \quad \text{div}(\chi(\tilde{I}, I_{kr}) \text{grad } \varphi) = 0, \quad (4.25)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_L = 0, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi(p_*) = \varphi_*, \quad \varphi|_{L^*} = \varphi(p^*) = \varphi^*, \quad (\varphi_* < \varphi^*), \quad (4.26)$$

$$[\varphi]|_{\partial G_Z^\lambda} = 0, \quad [v_n]|_{\partial G_Z^\lambda} = 0, \quad (4.27)$$

$$\text{де } \tilde{\rho}(\varphi) = \rho(p(\varphi)), \quad \tilde{I} = \frac{1}{k\tilde{\rho}(\varphi)} \sqrt{\varphi_{\xi}^2 + \varphi_{\eta}^2},$$

$[\bullet]_{\partial G_Z^\lambda}$ – стрибок відповідної функції на контурі ∂G_Z^λ .

Границя розділу R_t двох різнокольорових рідин визначається наступним рівнянням з відповідними умовами [24-26]:

$$\sigma \frac{\partial \varsigma}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad} \varsigma = 0, \quad \varsigma_{L^*} = 1, \quad \varsigma(\xi, \eta, t_0) = 0, \quad (4.28)$$

де σ – коефіцієнти пористості ґрунту.

Згідно з [37] задачу (4.25)-(4.28), в криволінійній системі координат (ξ, η, ς) , запишемо у вигляді:

$$\vec{v} = (v_{\xi}, v_{\eta}) = \left(\frac{\chi(\tilde{I}, I_{kr})}{\tilde{\rho}(\varphi)H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \frac{\chi(\tilde{I}, I_{kr})}{\tilde{\rho}(\varphi)H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) \quad (4.29)$$

$$\int_{\varsigma_1}^{\varsigma_2} \left(\frac{\partial(H_2 H_3 \chi(\tilde{I}, I_{kr}) \varphi_{\xi})}{\partial \xi} + \frac{\partial(H_1 H_3 \chi(\tilde{I}, I_{kr}) \varphi_{\eta})}{\partial \eta} \right) d\varsigma = 0, \quad (4.30)$$

$$\int_{\varsigma_1}^{\varsigma_2} \left(\sigma H_1 H_2 H_3 \frac{\partial \varsigma}{\partial t} + \frac{\partial(H_2 H_3 v_{\xi} \varsigma)}{\partial \xi} + \frac{\partial(H_1 H_3 v_{\eta} \varsigma)}{\partial \eta} \right) d\varsigma = 0, \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_{f(\xi, \eta)=0} = 0, \quad \varphi|_{f^*(\xi, \eta)=0} = \varphi^*, \quad \varphi|_{f^*(\xi, \eta)=0} = \varphi^*, \quad [\varphi]_{\partial G_Z^\lambda} = 0, \quad [v_n]_{\partial G_Z^\lambda} = 0,$$

$$\varsigma|_{f^*(\xi, \eta)=0} = \varsigma^*, \quad \varsigma|_{t=0} = \tilde{\varsigma}(\xi, \eta, \varsigma), \quad (4.32)$$

де $H_1 = \sqrt{X_{\xi}^2 + Y_{\xi}^2 + Z_{\xi}^2}$, $H_2 = \sqrt{X_{\eta}^2 + Y_{\eta}^2 + Z_{\eta}^2}$, $H_3 = \sqrt{X_{\varsigma}^2 + Y_{\varsigma}^2 + Z_{\varsigma}^2}$ – параметри Ламе.

Як у [19], підставляючи (4.29) у (4.30)-(4.31) і змінюючи порядок інтегрування та диференціювання, отримаємо систему диференціальних рівняння, яка при відповідних крайових та початкових умовах описує процес витіснення у просторово-викривленому пласті змінної товщини:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(U_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(U_2 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) = 0, \quad U_3 \frac{\partial \varsigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(U_4 \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(U_5 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) = 0, \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned}
\text{де } U_1(\xi, \eta) &= \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \chi(\tilde{I}, I_{kr}) H_2 H_3 d\zeta, \quad U_2(\xi, \eta) = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \chi(\tilde{I}, I_{kr}) H_1 H_3 d\zeta, \quad U_3(\xi, \eta) = \\
&= \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \sigma H_1 H_2 H_3 d\zeta, \quad U_4(\xi, \eta) = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{\varsigma \chi(\tilde{I}, I_{kr}) H_2 H_3}{\tilde{\rho}(\varphi) H_1} d\zeta, \quad U_5(\xi, \eta) = \\
&= \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{\varsigma \chi(\tilde{I}, I_{kr}) H_1 H_3}{\tilde{\rho}(\varphi) H_2} d\zeta - \text{характеристичні коефіцієнти, що відповідають за}
\end{aligned}$$

збереження інформації про геометрію та фільтраційні властивості пласта.

Введемо функцію усередненої течії ψ , що задовольняє співвідношення:

$$U_1 \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad U_2 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \quad (4.34)$$

та здійснивши умовні розрізи Γ_* , Γ^* області G_Z вздовж ліній розділу течії, що визначаються точками «призупинки» потоку $\underline{A} = \underline{B} = (\xi_0^*, \eta_0^*) \in L$, $\underline{C} = \underline{D} = (\xi_0^0, \eta_0^0) \in L$ та точками $A = B = (\xi_*, \eta_*) \in L_*$, $C = D = (\xi^*, \eta^*) \in L^*$, система (4.34) визначатиме деяку функцію $\omega = \omega(\zeta) = \varphi(\xi, \eta) + i\psi(\xi, \eta)$, яка при виконанні умов:

$$\begin{aligned}
\varphi \Big|_{f_*(\xi, \eta)=0} &= \varphi_*, \quad \varphi \Big|_{f^*(\xi, \eta)=0} = \varphi^*, \quad \psi \Big|_{AD} = 0, \quad \psi \Big|_{BC} = Q_0 \\
\nu(\xi_0^*, \eta_0^*) &= 0, \quad \nu(\xi_0^0, \eta_0^0) = 0
\end{aligned} \quad (4.35)$$

здійснює квазіконформне відображення фізичної області $G_Z^0 = G_Z \setminus (\Gamma_* \cup \Gamma^*)$ на відповідну область комплексного квазіпотенціалу $G_\omega = \{\omega : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$, де Q_0 – невідома фільтраційна витрата.

Відповідну нелінійну обернену задачу до (4.34)-(4.35) на квазіконформне відображення $\zeta = \zeta(\omega) = \xi(\varphi, \psi) + i\eta(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_Z отримаємо у вигляді:

$$, \quad U_2 \frac{\partial \xi}{\partial \psi} = -\frac{\partial \eta}{\partial \varphi}, \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega \quad (4.36)$$

$$f_*(\xi(\varphi_*, \psi), \eta(\varphi_*, \psi)) = 0, \quad f^*(\xi(\varphi^*, \psi), \eta(\varphi^*, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q_0,$$

$$f(\xi(\varphi, 0), \eta(\varphi, 0)) = 0, \quad f(\xi(\varphi, Q_0), \eta(\varphi, Q_0)) = 0, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \quad (4.37)$$

$$\xi(\varphi, 0) = \xi(\varphi, Q), \quad \eta(\varphi, 0) = \eta(\varphi, Q), \quad \varphi_* < \varphi \leq \underline{\varphi}, \quad \bar{\varphi} \leq \varphi < \varphi^*, \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} [\xi(\varphi, \psi)]|_{\partial G_\omega^\lambda} &= [\eta(\varphi, \psi)]|_{\partial G_\omega^\lambda} = 0, \\ \left[\frac{\chi(\tilde{I}, I_{kr})}{\tilde{\rho}(\varphi)J} \sqrt{\left(\frac{\partial \xi}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \psi}\right)^2} \cos(\vec{v}, \vec{n}) \right]_{\partial G_\omega^\lambda} &= 0, \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\nu(\xi(\underline{\varphi}, \psi), \eta(\underline{\varphi}, \psi)) = 0, \quad \nu(\xi(\bar{\varphi}, \psi), \eta(\bar{\varphi}, \psi)) = 0, \quad 0 \leq \psi \leq Q_0, \quad (4.40)$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left(U_2 \frac{\partial \xi}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{U_1} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \psi} \left(U_1 \frac{\partial \eta}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{U_2} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} \right) = 0. \quad (4.41)$$

Використавши відповідні формули переходу, $\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{1}{J} \frac{\partial \eta}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{1}{J} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \psi}$,

$$\frac{\partial}{\partial \eta} = -\frac{1}{J} \frac{\partial \xi}{\partial \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{J} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{1}{J} \frac{\partial \eta}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -\frac{1}{J} \frac{\partial \xi}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = -\frac{1}{J} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi},$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \frac{1}{J} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi}, \quad J = \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \frac{\partial \eta}{\partial \psi} - \frac{\partial \xi}{\partial \psi} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi}, \quad \text{умови (4.36) та формули для обчислення}$$

КОМПОНЕНТ	сумарної	швидкості	$\nu_\xi = \frac{\chi(\tilde{I}, I_{kr})}{J(\varphi, \psi) \tilde{\rho}(\varphi) H_1} \frac{\partial \eta}{\partial \psi},$
-----------	----------	-----------	---

$$\nu_\eta = -\frac{\chi(\tilde{I}, I_{kr})}{J(\varphi, \psi) \tilde{\rho}(\varphi) H_2} \frac{\partial \xi}{\partial \psi} \quad \text{задачу для насиченості запишемо так:}$$

$$\begin{aligned} U_3 J \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \eta}{\partial \psi} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{U_4}{J} \frac{\partial \eta}{\partial \psi} \right) - U_1 \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{U_5}{J} \frac{\partial \xi}{\partial \psi} \right) \right) + \\ + \frac{\partial \xi}{\partial \psi} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{U_3}{J} \frac{\partial \xi}{\partial \psi} \right) + U_2 \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{U_2}{J} \frac{\partial \eta}{\partial \psi} \right) \right) = 0, \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\varsigma(\xi(\varphi, \psi), \eta(\varphi, \psi), \zeta(\varphi, \psi), 0) = \tilde{\varsigma}(\xi(\varphi, \psi), \eta(\varphi, \psi), \zeta(\varphi, \psi)),$$

$$\varsigma(\xi(\varphi_*, \psi), \eta(\varphi_*, \psi), \zeta(\varphi_*, \psi), t) = \varsigma_*, \quad 0 \leq \psi \leq Q_0, \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*. \quad (4.43)$$

Для запису різницевого аналогу задачі (4.36)–(4.43) здійснимо побудову сітки у області G_ω , вузли (φ_i, ψ_j) якої визначаються наступним чином:

$$\varphi_i = \begin{cases} \varphi_* + i\Delta\varphi_l, \text{ при } \Delta\varphi_l = \frac{\varphi - \varphi_*}{n_1 + 1}, i = \overline{0, n_1}, l = 1, \\ \underline{\varphi} + (i - n_1 - 1)\Delta\varphi_l, \text{ при } \Delta\varphi_l = \frac{\bar{\varphi} - \underline{\varphi}}{n_2 - 1}, i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}, l = 2, \\ \bar{\varphi} + (i - n_1 - n_2)\Delta\varphi_l, \text{ при } \Delta\varphi_l = \frac{\varphi^* - \bar{\varphi}}{n_3 + 1}, i = \overline{n_1 + n_2 + 1, n}, l = 3, \end{cases} \quad (4.44)$$

$$\psi_j = j\Delta\psi, \quad \Delta\psi = Q_0/m, \quad j = \overline{0, m},$$

де $n = n_1 + n_2 + n_3 + 1$; $n_1, n_2, n_3, m \in N$ – параметри розбиття області комплексного квазіпотенціалу, $\Delta\varphi_l, \Delta\psi$ – кроки сітки.

У зв'язку із загальністю запису коефіцієнта фільтрації (у відповідних рівняннях), що є функцією від координат точки і може бути як неперервною так кусково-неперервною, наприклад, при переході через межу двох середовищ з різними його значеннями, рівняння (4.41) у середині сіткової області G_ω та на розрізах Γ_* , Γ^* апроксимуємо використовуючи метод скінченних об'ємів [199]. Метод скінченних об'ємів забезпечує виконання різницевого аналогу законів збереження та консервативності відповідної різницевої схеми:

$$\left\{ \begin{aligned} & \gamma^2 \left(\frac{\chi(\tilde{I}_{i,j+1/2}, I_{kr})(\xi_{i,j+1} - \xi_{i,j})}{\tilde{\rho}(\varphi_{i,j+1/2})H_2} - \frac{\chi(\tilde{I}_{i,j-1/2}, I_{kr})(\xi_{i,j} - \xi_{i,j-1})}{\tilde{\rho}(\varphi_{i,j-1/2})H_2} \right) + \\ & + \frac{\tilde{\rho}(\varphi_{i+1/2,j})(\xi_{i+1,j} - \xi_{i,j})}{\chi(\tilde{I}_{i+1/2,j}, I_{kr})} - \frac{\tilde{\rho}(\varphi_{i-1/2,j})(\xi_{i,j} - \xi_{i,j-1})}{\chi(\tilde{I}_{i-1/2,j}, I_{kr})} = 0, \\ & \gamma^2 \left(\frac{\chi(\tilde{I}_{i,j+1/2}, I_{kr})(\eta_{i,j+1} - \eta_{i,j})}{\tilde{\rho}(\varphi_{i,j+1/2})H_1} - \frac{\chi(\tilde{I}_{i,j-1/2}, I_{kr})(\eta_{i,j} - \eta_{i,j-1})}{\tilde{\rho}(\varphi_{i,j-1/2})H_1} \right) + \\ & + \frac{\tilde{\rho}(\varphi_{i+1/2,j})(\eta_{i+1,j} - \eta_{i,j})}{\chi(\tilde{I}_{i+1/2,j}, I_{kr})} - \frac{\tilde{\rho}(\varphi_{i-1/2,j})(\eta_{i,j} - \eta_{i,j-1})}{\chi(\tilde{I}_{i-1/2,j}, I_{kr})} = 0; \end{aligned} \right. \quad (4.45)$$

$$\begin{cases} f_*(\xi_{0,j}, \eta_{0,j}) = 0, f^*(\xi_{n,j}, \eta_{n,j}) = 0, j = \overline{0, m}, \\ f(\xi_{i,0}, \eta_{i,0}) = 0, f(\xi_{i,m}, \eta_{i,m}) = 0, i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2} \\ \xi_{i,0} = \xi_{i,m}, \eta_{i,0} = \eta_{i,m}, i = \overline{0, n_1 + 1} \cup \overline{n_1 + n_2, n}; \end{cases} \quad (4.46)$$

$$\begin{cases} (4\xi_{1,j} - 3\xi_{0,j} - \xi_{2,j})(\xi_{0,j+1} - \xi_{0,j-1}) + (4\eta_{1,j} - 3\eta_{0,j} - \eta_{2,j}) \times \\ \times (\eta_{0,j+1} - \eta_{0,j-1}) = 0, (3\xi_{n,j} + \xi_{n-2,j} - 4\xi_{n-1,j})(\xi_{n,j+1} - \xi_{n,j-1}) + \\ + (3\eta_{n,j} + \eta_{n-2,j} - 4\eta_{n-1,j})(\eta_{n,j+1} - \eta_{n,j-1}) = 0, j = \overline{0, m-1}, \end{cases} \quad (4.47)$$

де $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$, $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$, $\varphi_{i,j\pm 1/2} = \frac{(\varphi_{i,j\pm 1} + \varphi_{i,j})}{2}$, $\varphi_{i\pm 1/2,j} = \frac{(\varphi_{i\pm 1,j} + \varphi_{i,j})}{2}$,

$$\tilde{I}_{i,j\pm 1/2} = \frac{(\tilde{I}_{i,j\pm 1} + \tilde{I}_{i,j})}{2}, \tilde{I}_{i\pm 1/2,j} = \frac{(\tilde{I}_{i\pm 1,j} + \tilde{I}_{i,j})}{2}, \tilde{I}_{i,j} = \frac{\mu \cdot \beta_{i,j}}{k \cdot J_{i,j} \cdot \tilde{\rho}(\varphi_{i,j}) \cdot \Delta\psi}.$$

Невідому повну витрату Q та значення квазіпотенціалу $\underline{\varphi}$ та $\bar{\varphi}$ в точках «призупинки» потоку шукаємо в процесі ітераційного розрахунку за

формулами: $Q = m\Delta\psi$, $\underline{\varphi} = \frac{\varphi_* + \tilde{\alpha}\varphi^*}{1 + \tilde{\alpha}}$, $\bar{\varphi} = \frac{\varphi^* + \tilde{\beta}\varphi_*}{1 + \tilde{\beta}}$, де

$$\Delta\psi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{\gamma_1(n_1 + 1) + \gamma_2(n_2 - 1) + \gamma_3(n_3 + 1)}, \quad \tilde{\alpha} = \frac{\gamma_1(n_1 + 1)}{\gamma_2(n_2 - 1) + \gamma_3(n_3 + 1)},$$

$$\tilde{\beta} = \frac{\gamma_3(n_3 + 1)}{\gamma_2(n_2 - 1) + \gamma_1(n_1 + 1)}.$$

Величини квазіконформних інваріантів γ_1

одержуємо на підставі умови «квазіконформної подібності в малому» відповідних елементарних чотирикутників двох областей наступним чином:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{1}{m(n_1 + 1)} \sum_{i,j=0}^{n_1, m-1} \gamma_{i,j}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{m(n_2 - 1)} \sum_{i,j=n_1+1,0}^{n_1+n_2-1, m-1} \gamma_{i,j}, \\ \gamma_3 &= \frac{1}{m(n - n_1 - n_2)} \sum_{i,j=n_1+n_2,0}^{n-1, m-1} \gamma_{i,j}, \end{aligned} \quad (4.48)$$

де $\gamma_{i,j} = \frac{\tilde{\rho}(\varphi_{i+1/2,j+1/2})}{\chi(\tilde{I}_{i+1/2,j+1/2}, I_{kr})} \cdot \frac{\alpha_{i,j} + \alpha_{i,j+1}}{(\beta_{i,j} + \beta_{i+1,j})}$, $\alpha_{i,j} = \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2}$,

$$\beta_{i,j} = \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2}.$$

Алгоритм наближеного розв'язку різницевого аналогу задачі (4.36)–(4.43) побудуємо шляхом поетапної параметризації величини γ_l , граничних та внутрішніх вузлів сітки з використанням ідей блочної ітерації [8], для аналітичного обґрунтування його збіжності. На першому кроці алгоритму задаємо геометричну конфігурацію фізичної області G_z , що обмежена контурами L , L_* , L^* , кількість вузлів розбиття відповідної області комплексного квазіпотенціалу G_ω (параметри n_1 , n_2 , n_3 та m) та параметри необхідної точності роботи алгоритму ε_1 , ε_2 , рівень квазіконформності δ_* відображення. Потім задаємо початкові наближення шуканих координат граничних вузлів, так щоб виконувалися умови (4.46), та координат внутрішніх вузлів гідродинамічної сітки і, використовуючи (4.48), знаходимо початкове наближення квазіконформних інваріантів $\gamma_l^{(0)}$ та невідомих

$$\text{величин} \quad Q^{(0)} = \frac{(\varphi^* - \varphi_*)m}{\gamma_1^{(0)}(n_1 + 1) + \gamma_2^{(0)}(n_2 - 1) + \gamma_3^{(0)}(n_3 + 1)}, \quad \underline{\varphi}^{(0)} = \frac{\varphi_* + \tilde{\alpha}\varphi^*}{1 + \tilde{\alpha}},$$

$$\bar{\varphi}^{(0)} = \frac{\varphi^* + \tilde{\beta}\varphi_*}{1 + \tilde{\beta}}, \quad \text{де} \quad \tilde{\alpha} = \frac{\gamma_1^{(0)}(n_1 + 1)}{\gamma_2^{(0)}(n_2 - 1) + \gamma_3^{(0)}(n_3 + 1)}, \quad \tilde{\beta} = \frac{\gamma_3^{(0)}(n_3 + 1)}{\gamma_2^{(0)}(n_2 - 1) + \gamma_1^{(0)}(n_1 + 1)}.$$

Проводимо уточнення координат внутрішніх вузлів $(x_{i,j}, y_{i,j})$ за формулами, отриманими шляхом розв'язання (4.45) відносно $x_{i,j}$ та $y_{i,j}$ (з метою прискорення швидкості збіжності всього процесу і економії машинного часу використовуємо лише перший ітераційний крок, при цьому враховуємо періодичність шуканих функцій). Підправляємо граничні вузли (за умови фіксації навколишніх граничних та приграничних), використовуючи різницеві аналоги умов типу Коші-Рімана (4.47). Використовуючи значення квазіконформних інваріантів (4.48), знаходимо нове наближення величин Q , $\underline{\varphi}$, $\bar{\varphi}$, якщо їх зміна за останню проведену ітерацію більша за ε_1 , то повертаємося до уточнення вузлів. Визначаємо величину

$$S = \max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(k)} - x_{i,j}^{(k-1)})^2 + (y_{i,j}^{(k)} - y_{i,j}^{(k-1)})^2} \quad \text{зміщення вузлів на границі за}$$

проведену k -ту загальну ітерацію, якщо вона більша за ε_2 , то переходимо до уточнення вузлів. У протилежному випадку оцінюємо ступінь квазіконформності $\delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2}$ отриманого відображення області комплексного квазіпотенціалу на фізичну область із розрізами вздовж ліній течії, де δ_1 , δ_2 – нев’язки апроксимацій рівнянь (4.34):

$$\delta_1 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} |(\xi_{i+1,j} - \xi_{i-1,j}) - \gamma \frac{\chi(\tilde{I}_{i,j}, I_{kr})}{\tilde{\rho}(\varphi_{i,j})} (\eta_{i,j+1} - \eta_{i,j-1})|,$$

$$\delta_2 = \max_{i,j=1}^{n-1,m-1} |(\eta_{i+1,j} - \eta_{i-1,j}) - \gamma \frac{\chi(\tilde{I}_{i,j}, I_{kr})}{\tilde{\rho}(\varphi_{i,j})} (\xi_{i,j+1} - \xi_{i,j-1})|.$$

Якщо $\delta \geq \delta_*$, то змінюємо кількість вузлів розбиття області G_ω та повторюємо кроки алгоритму, інакше задача розв’язана із необхідною точністю. У випадку конформного відображення співвідношення між параметрами n_1 , n_2 , n_3 , m намагаємося вибирати так, щоб, по-перше, виконувалися умови рівності усіх трьох конформних інваріантів і, по-друге, $\gamma_1 \approx \gamma_2 \approx \gamma_3 \approx 1$, що з геометричної точки зору є умовою близькості сітки до квадратної.

Відзначимо, що розроблена методика дозволяє автоматизувати побудову гідродинамічної сітки в умовах гідророзриву, передбачити характеристики пластової систем при спеціальних умовах впливу на неї, оптимізувати різного роду фільтраційні параметри при виборі розміщення нагнітальних та експлуатаційних свердловин, зокрема, встановити положення точок «призупинки», в околі яких виникають зони малих швидкостей і, як наслідок, імовірність утворення так званих застійних зон, значення об’єму відбору нафти за час витіснення та її залишок.

4.4 Висновки до Розділу 4

У даному розділі модифіковано класичний закон Дарсі на випадок врахування критичного значення градієнта тиску, що дозволило в умовах

квазістаціонарності процесу фільтрації (з використанням поетапної фіксації характеристик процесу і середовища) провести моделювання нелінійних фільтраційно-масообмінних процесів у присвердловинній зоні пласта з урахуванням впливу тріщин гідравлічного розриву та вирв (утворених внаслідок дії вибухових зарядів), що є підґрунтям можливого утворення тріщин розриву. Розроблено комплексний підхід до числового розв'язання відповідних крайових задач у горизонтальних та просторово-маловикривлених важкопроникних, зокрема сланцевих, осадових породах.

Висновки

Дисертаційна робота є завершеним дослідженням, у якій розв'язано важливе науково-технічне завдання математичного моделювання процесів витіснення в нафтових пластах за умов збурення фільтраційної течії тріщинами гідравлічного розриву та розвинуто числові методи комплексного аналізу розв'язання відповідних крайових задач, а також створено програмний комплекс, що реалізує розроблені в роботі алгоритми.

Найбільш важливі наукові та практичні результати полягають у наступному:

1. Методи квазіконформних відображень та поетапної фіксації характеристик середовища і процесу розвинуто на випадок математичного моделювання фільтраційних процесів витіснення у нафтогазових пластах з урахуванням впливу тріщин гідравлічного розриву (ГРП) та вирв, утворених внаслідок вибуху зарядів, з метою інтенсифікації притоку пластової рідини до свердловин. На основі цього, розроблено числові алгоритми, що дозволяють враховувати ефективно взаємне розміщення свердловин на продуктивній площі, параметри та розміщення тріщин ГРП.

2. Вперше, з використанням числових методів комплексного аналізу, розроблено методику математичного моделювання процесу витіснення однієї рідини іншою у горизонтальному однорідному та зонально-неоднорідному пласті за умов урахування впливу тріщин гідророзриву та побудовано алгоритми числового розв'язування відповідних крайових задач, зокрема проаналізовано ефективність тріщин та вплив їх просторової орієнтації на значення фільтраційної витрати, моменти часу прориву «витісняючого» флюїду до експлуатаційної свердловини та повного її заводнення, зокрема, запропоновано варіанти знаходження оптимального значення відповідних їх характеристичних параметрів. Відповідний алгоритм адаптовано на випадок визначення усередненого коефіцієнта фільтрації привибійної зони свердловини, з урахуванням відомого дебіту експлуатаційної свердловини

шляхом корекції його відхилення від заданого значення.

3. Вперше, в рамках теорії Баклея-Лeverетта, методику комплексного аналізу узагальнено для моделювання багатофазної фільтрації в елементах площового заводнення у випадку інтенсифікації притоку пластової рідини до свердловини шляхом збурення фільтраційної течії тріщинами гідравлічного розриву пласта, що дозволяє передбачити характеристики пластової системи (значення об'єму відбору нафти за час витіснення та її залишок, моментів часу прориву та повного заводнення експлуатаційних свердловин тощо) при різних умовах впливу на неї та вивчити особливості фільтрації в привибійних ділянках, зокрема, встановити положення точок «призупинки», в околі яких виникають зони малих швидкостей, з метою уникнення формування «застійних» областей.

4. На основі розвинутої методології моделювання ізотермічної багатофазної фільтрації, розроблено алгоритм числового розв'язання крайових задач неізотермічного процесу витіснення в елементах площового заводнення шляхом збурення фільтраційної течії тріщинами ГРП за умов терморезиму, побудовано числовий алгоритм для розрахунку гідродинамічної сітки, відшукування полів температури та насиченості, координат критичних точок, фільтраційних витрат, часу повного заводнення та інших фільтраційних параметрів.

5. Вперше розроблено методику розв'язання крайових задач фільтраційних процесів витіснення із важкопроникних тріщинувато-пористих (напр., сланцевих) осадових порід з урахуванням впливу тріщин гідравлічного розриву та суміжних деформаційних процесів у присвердловинній зоні пласта, коли за умов квазістаціонарності фільтраційної течії досліджуваний процес описується спеціальним чином модифікованим законом Дарсі відносно критичного значення градієнта тиску.

6. Узагальнено методологію розв'язання двовимірних крайових задач однофазної фільтрації у важкопроникних тріщинувато-пористих родовищах

на випадок просторово-викривлених пластів із врахуванням тріщин гідророзриву.

7. Розроблені рекомендації й виконані дослідно-промислові роботи по впровадженню методики розрахунку та моделювання процесів багатофазної фільтрації за умов зворотнього впливу характеристик процесу на вихідні характеристики середовища, спільно з ДП «Науканафтогаз» встановлені експрес методики інтерпретації результатів індикаторних досліджень напрямків фільтраційних потоків при розробці родовищ нафти і газу. Створено програмний комплекс, що реалізує розроблені в роботі алгоритми, які є універсальними, зокрема, придатними для вирішення досить важливої технічної задачі сьогодення – розрахунку ефективності впливу гідравлічного розриву пласта на фільтраційні характеристики процесу витіснення.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Азиз Х. Математическое моделирование пластовых систем / Х. Азиз, Э. Сеттари. – Москва–Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2004. – 416 с.
2. Акульшин А.И. Прогнозирование разработки нефтяных месторождений / А.И. Акульшин. – М. : Недра, 1988. – 239 с.
3. Алишаев М.Г. Неизотермическая фильтрация при разработке нефтяных месторождений / М.Г. Алишаев, М.Д. Розенберг, Е.В. Теслюк. – М. : Недра, 1985. – 271 с.
4. Аметов И.М. Добыча тяжелых и высоковязких нефтей / И.М. Аметов, Ю.Н. Байдинов, Л.М. Рузин и др. – М.: Недра. 1985. – 240 с.
5. Андерсон Д. Вычислительная гидродинамика и теплообмен / Д. Андерсон, Дж. Таннехилл, Р. Плетчер. – 1990. – Т. 1. – 384 с.
6. Астафьев В.И. Моделирование фильтрации жидкости при наличии трещины гидравлического разрыва пласта / В.И. Астафьев, Г.Д. Федорченко // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. – 2007. – № 2(15). – С. 128 – 132.
7. Ахмадишин Р.З. Особенности добычи высоковязкой нефти из малодебитных скважин / Р.З. Ахмадишин // Тр. БашНИПИнефть. – 1989. – Вып.80. – С. 95-104.
8. Баренблатт Г. И. Движение жидкостей и газов в природных пластах / Г. И. Баренблатт, В. Н. Ентов, В. М. Рыжик. – М. : Недра, 1984. – 303 с.
9. Барсегян Р. М. Методы решения задач теории фильтрации в неоднородных средах / Р. М. Барсегян. – Ереван : Изд-во Ереван. ун-та, 1977. – 303 с.
10. Басниев К. С. Подземная гидромеханика / К. С. Басниев, Н. И. Кочина, М. В. Максимов. – М. : Недра, 1993. – 416 с.
11. Басниев К.С. Нефтегазовая гидромеханика / К.С. Басниев, Н.М. Дмитриев, Г.Д. Розенберг. – Москва-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2005. – 544 с.

12. Басниев К. С. Подземная гидромеханика / К. С. Басниев, Н. М. Дмитриенко, Р. Д. Каневская, В. М. Максимов. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований. – 2006. – 488 с.
13. Бахвалов Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков – М. : Наука, 1987. – 451с.
14. Бойко В. С. Разработка и эксплуатация нефтяных месторождений : учеб. по спец. "Разраб. и эксплуатация нефт. и газовых месторождений" / В С. Бойко. – М. : Недра, 1990. – 426 с.
15. Бойко В.С. Підземна гідрогазомеханіка: Підручник / В.С. Бойко, Р.В. Бойко. – Львів: Апріорі, 2005. – 452 с.
16. Бомба А.Я. Чисельне розв'язання обернених нелінійних крайових задач на квазіконформні відображення в двозв'язних деформівних середовищах / А.Я. Бомба, Д.О. Пригорницький // Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика. – 2003. – Вип. 7. – С. 3–10.
17. Бомба А.Я. Чисельне розв'язання нелінійних модельних крайових задач на квазіконформні відображення в умовах взаємовпливу градієнтів потенціалу та характеристик середовища / А.Я. Бомба, Д.О. Пригорницький, В.В. Скопецький // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2003. – Вип.1. – С. 126–135.
18. Бомба А. Я. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки / А. Я. Бомба, В. М. Булавацький, В. В. Скопецький. – К. : Наукова думка, 2007. – 308 с.
19. Бомба А. Я. Методи комплексного аналізу: монографія / А. Я. Бомба, С. С. Каштан, Д. О. Пригорницький, С. В. Ярошак. – Рівне: НУВГП, 2013. – 415 с.
20. Бомба А. Я. Математичне моделювання просторових сингулярно-збурених процесів типу фільтрація-конвекція-дифузія: [монографія] / А. Я. Бомба, Ю. Є. Климюк. – Рівне: ТзОВ фірма «Ассоль», 2014. –273 с.

21. Бомба А.Я. Моделювання ідеальних полів для тонких просторово викривлених пластів / А.Я. Бомба, А.Я. Теревус // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: фізико-математичні науки. – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет, – 2010. – Вип. 4. – С. 31-40.
22. Бомба А. Я. Системный анализ фильтрационных процессов в многосвязных криволинейных областях / А. Я. Бомба, В. В. Скопецкий, С. В. Ярощак // Международный научно-технический журнал <Проблемы управления и информатики>. – 2010.– № 4. – С. 64–72.
23. Бомба А. Я. Метод квазіконформних відображень моделювання нелінійних процесів витіснення у деформівних середовищах / А. Я. Бомба, С. В. Ярощак // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2010. - Вип. 2. - С. 91–96.
24. Бомба А. Я. Метод квазіконформних відображень розв'язання модельних задач двофазної фільтрації / А. Я. Бомба, С. В. Ярощак // Доповіді НАН України. – 2010. – №10 – С. 34–40.
25. Бомба А. Я. Числовий метод квазіконформних відображень моделювання процесів двофазної фільтрації / А. Я. Бомба, С. В. Ярощак // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2010. – №2.– С. 3–13.
26. Бомба А. Я. Числовий метод квазіконформних відображень дослідження двофазної фільтрації в елементах заводнення / А. Я. Бомба, С. В. Ярощак // Труды межд. школ-семинаров МДОЗМФ, вып. 8, изд. Орловского госуд. ун-та. – г. Орел, – 2010 – С. 20–28.
27. Бомба А. Я. Численный метод квазиконформных отображений решения одного класса нелинейных краевых задач двухфазной фильтрации / А. Я. Бомба, С. В. Ярощак // Сеточные методы для краевых задач и приложения: Материалы восьмой всероссийской конференции. – Казань : Казанский федеральный университет. – 2010. – С. 139–149.
28. Бомба А. Я. Застосування квазіконформних відображень до математичного моделювання процесів вибуху / А. Я. Бомба,

- А. М. Сінчук // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 8 (17). – Рівне : РДГУ, 2011. – С. 33 – 43.
29. Бомба А. Я. Метод квазіконформних відображень математичного моделювання нелінійних процесів витіснення за умов існування тріщин гідророзриву пласта / А. Я. Бомба, А. М. Сінчук, С. В. Ярощак // Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ. – 2011. – № 3(40) С. 32 – 36.
 30. Бомба А. Я. Комплексне дослідження поведінки системи «свердловини-тріщини» при витісненні однієї рідини іншою у горизонтальному пласті / А. Я. Бомба, А. М. Сінчук, С. В. Ярощак // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: технічні науки. – Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, – 2012. – Вип.6. – С. 11 – 26.
 31. Бомба А. Я. Математичне моделювання нелінійних процесів витіснення у зонально неоднорідному пласті з урахуванням тріщин гідророзриву / А. Я. Бомба, А. М. Сінчук // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 9 (18). – Рівне : РДГУ, 2012. – С. 22 – 33.
 32. Бомба А. Я. Метод комплексного анализа исследования двухфазной фильтрации в горизонтальных пластах с учетом гидравлического разрыва / А. Я. Бомба, А. М. Сінчук, С. В. Ярощак // Электронное моделирование. – 2013. – Т. 35, № 2. – С. 25–34.
 33. Бомба А. Я. Один підхід до ідентифікації фільтраційно-ємкісних параметрів нафтогазового пласта / А. Я. Бомба, А.М. Сінчук, С.В. Ярощак // Математичне моделювання. – Дніпродзержинськ : ДДТУ, – 2013. – № 1(28). – С. 31–35.
 34. Бомба А. Я. Метод комплексного аналізу дослідження процесу багатозфазної фільтрації у випадку площадного заводнення за умов гідророзриву / А. Я. Бомба, А. М. Сінчук // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. Випуск 10 (19). – Рівне : РДГУ, 2013. – С. 6 – 20.
 35. Бомба А. Я. Комплексний аналіз поведінки системи «свердловини-

- тріщини-пласт» в елементах площадного заводнення / А. Я. Бомба, А. М. Сінчук // Вісник НТУ «ХП». Серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях». – Харків: НТУ «ХП», 2013 – № 54 (1027) – С. 4 – 15.
36. Бомба А. Я. Математичне моделювання впливу тріщин гідравлічного розриву на інтенсифікацію відтоку газу з сланцевих осадових порід / А. Я. Бомба, А. М. Сінчук // Вісник ХНУ. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. АСУ», вип.10. – Харків: ХНУ, 2013. – № 1089. – С. 31 – 38.
 37. Бомба А. Я. Метод комплексного аналізу для моделювання процесів витіснення у просторово-маловикривлених пластах за умов впливу тріщин гідророзриву / А. Я. Бомба, А. М. Сінчук // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2014. - Вип. 20. – С. 36-49.
 38. Бомба А. Я. Математичне моделювання нелінійних процесів витіснення в нафтогазових пластах за умов гідророзриву / А. Я. Бомба, А. М. Сінчук // Труды Международной научно-технической конференции «Компьютерное моделирование в наукоемких технологиях (КМНТ-2014)» - Харків: ХНУ ім. Каразіна, 2014. – с. 37-40.
 39. Бомба А. Я. Методи комплексного аналізу моделювання процесу витіснення нафти теплоносієм з урахуванням ефекту гідророзриву / А. Я. Бомба, А. М. Сінчук, С. В. Ярощак // Міжнародний науково-технічний журнал “Системні дослідження та інформаційні технології”. – Київ: НТУУ «КПІ», 2015р. – №1 – С.130-140.
 40. Бомба А.Я. Математичне моделювання нелінійних процесів витіснення в нафтогазових пластах за умов гідророзриву / А.Я. Бомба, А.М. Сінчук, С.В. Ярощак // XVII Всеукраїнської наукової конференції “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики” – Львів, 2011. – С. 23.
 41. Бомба А.Я. Комплексне дослідження поведінки системи «свердловини-тріщини» при витісненні однієї рідини іншою у горизонтальному пласті / А.Я. Бомба, А.М. Сінчук, С.В. Ярощак // V Міжнародна наукова

- конференція “Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації” Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Технічні науки. – Кам’янець-Подільський, 2012. – С. 19-20.
42. Бомба А. Я. Автоматизація методу квазіконформних відображень математичного моделювання нелінійних процесів витіснення за умов існування тріщин ГРП / А.Я. Бомба, А.М. Сінчук // II Всеукраїнської школи-семінару молодих вчених і студентів «Сучасні комп’ютерні інформаційні технології» - Тернопіль : ТНЕУ, 2012. – С. 15.
 43. Бомба А.Я. Методи комплексного аналізу математичного моделювання нелінійних процесів двофазної фільтрації з урахуванням впливу тріщин гідророзриву / А.Я. Бомба, А.М. Сінчук, С.В. Ярощак // Міжнародна наукова конференція "Обчислювальна та прикладна математика" (до 90-річчя від дня народження академіка І. І. Ляшка) – Київ, 2012 р. – С. 38.
 44. Бомба А.Я. Комп’ютерне моделювання нелінійних процесів витіснення у нафтогазових пластах / А.Я. Бомба, А.М. Сінчук, С.В. Ярощак // II Науково-технічна конференція «Обчислювальні методи і системи перетворення інформації» – Львів, 2012. – С. 10-11.
 45. Бомба А. Я. Методи комплексного аналізу при дослідженні та оптимізації параметрів нелінійних процесів витіснення нафти та газу з осадових порід / А. Я. Бомба, А. М. Сінчук, С. В. Ярощак // Всеукраїнська наукова конференція «Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів» – Рівне, 2013. – С. 36.
 46. Бомба А. Я. Числові методи комплексного аналізу моделювання нелінійних процесів витіснення нафти та газу із складно структурованих осадових порід / А. Я. Бомба, О. М. Гладка, А. М. Сінчук, С. В. Ярощак // 9 Міжнародна науково-практична конференція “Нафта і газ України – 2013” – Яремче: Українська нафтогазова академія, 2013. – С. 74 – 75.
 47. Бомба А. Я. Метод комплексного аналізу дослідження двофазної фільтрації в горизонтальному однорідному пласті за умов гідророзриву /

- А. Я. Бомба, А. М. Сінчук // Усеукраїнської наукової конференції «Математичне моделювання та математична фізика» присвячена 90-річчю від дня народження Віктора Михайловича Глушкова – Кременчук: КНУ ім. М. Остроградського, 2013. – С. 42.
48. Бомба А.Я. Моделювання процесу неізотермічної фільтрації із урахуванням впливу тріщин гідророзриву / А.Я. Бомба, А.М. Сінчук // Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів» – Рівне, 2015. – С. 35.
 49. Брусиловский А. И. Фазовые превращения при разработке месторождений нефти и газа / А.И. Брусиловский. – М. : Грааль, 2002. – 575 с.
 50. Булавацький В. М. Некласичні математичні моделі процесів тепло- та масо переносу / В. М. Булавацький, Ю. Г. Кривонос, В. В. Скопецький // К. : Наук. Думка. – 2005. – 282 с.
 51. Булыгин В.Я. Гидромеханика нефтяного пласта / В.Я. Булыгин. – М. : Недра, 1978. – 230 с.
 52. Булыгин Д. В., Булыгин В. Я. Геология и имитация разработки залежей нефти / Д.В. Булыгин, В.Я. Булыгин. – М. : Недра, 1996. – 382 с.
 53. Бэр Я. Физико-математические основы фильтрации воды / Я. Бэр, Д. Заславски, С. Ирмей. – М. : Мир, 1971. – 452 с.
 54. Вабищевич П.Н. Численное моделирование/ П.Н. Вабищевич. – М. : Изд. МГУ, 1993. – 152 с.
 55. Васильев В.И. Численное моделирование двухфазного течения несжимаемых несмешивающихся жидкостей / В.И. Васильев, Т.С. Тимофеева // Ученые записки ЯГУ. Сер. математика, физика. юбил. вып. – 1994. С. 51–62.
 56. Васильев В.И. Численное решение задачи Баклея-Левеверетта / В.И. Васильев, Т.С. Тимофеева // Математические заметки ЯГУ. – Т.2, N1. – 1995. С. 110–119.
 57. Винников В. А. Гидромеханика / В. А. Винников, Г. Г. Каркашадзе. –

- М. : Издательство Московского государственного университета, 2003. – 302 с.
58. Власов О.Е. О моделировании действия взрыва / О.Е. Власов, С.А. Смирнов // Взрывное дело. – М.: Недра, 1966. – Вып. 59. – С. 109-117.
 59. Власюк А. П. Автоматическое построение конформных и квазиконформных отображений двухсвязных и трехсвязных областей / А.П. Власюк, В.Г. Михальчук. – К. : 1991. – 56 с. – (Препринт АН Украины. Ин-т математики, 91.57).
 60. Габриелов Л.В. Анализ работы установок для подъема высоковязких нефтей при термических методах воздействия на пласт / Л.В. Габриелов // Тематич.научн.-технич.обзор: Сер. Нефтепромысловое дело. – М.: ВНИИОЭНГ, 1988. – С.33.
 61. Гайдуков Л.А. Влияние околоскважинных зон на продуктивность газовых скважин / Л.А. Гайдуков, Н.Н. Михайлов // Газовая промышленность. – 2008. – №6. – С. 31–33.
 62. Газизов А.Ш. Повышение эффективности разработки нефтяных месторождений на основе ограничения движения вод в пластах / А.Ш. Газизов, А.А. Газизов. – М. : ООО "Недра-Бизнесцентр", 1999. – 285 с.
 63. Герольд С.П. Аналитические основы добычи нефти, газа и воды из скважин / С.П. Герольд. – М.-Л.: Нефтеиздат, 1932. – 256с.
 64. Гимаев М. М. О решении оптимальных задач двухфазной фильтрации / М. М. Гимаев, Ф. М. Мухаметзянов, Ю. А. Теплов // Исслед. по подземн. гидромех. – Изд-во Казанского ун-та: Казань, 1979. – №3 – С. 21–35.
 65. Голубева О. В. Курс механики сплошных сред / О. В. Голубева. – М. : Высш. шк., 1972. – 368 с.
 66. Гуревич А.Е. Давление пластовых флюидов / А.Е.Гуревич, М.С.Крайчик, Н.Б.Батыгина, А.И.Тимурзиев и др. – С.-Пб.: Наука. - 1987. – 218 с.

67. Данилов В.Л. Вариационный принцип наименьшей скорости рассеяния энергии при фильтрации жидкостей в пористой среде и его приложения / В.Л. Данилов. – Москва-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2003. – 108 с.
68. Данилов В.Л. Гидродинамические расчеты взаимного вытеснения жидкостей в пористой среде / В.Л. Данилов, Р.М. Кац. – М. : Недра, 1980. – 264 с.
69. Дейк Л. П. Практический инжиниринг резервуаров / Л. П. Дейк. – Москва-Ижевск : Институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. – 668 с.
70. Дейнека В. С. Математические модели и методы расчета задач с разрывными решениями / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий – К. : Наукова думка, 1995. – 262 с.
71. Дейнека В. С. Модели и методы решения задач в неоднородных средах / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко. – К. : Наукова думка, 2001. – 605 с.
72. Ентов В.М. Гидродинамика процессов повышения нефтеотдачи / В.М. Ентов, А.Ф. Зазовський. – М. : Недра, 1989. – 232 с.
73. Ентов В.М. Стационарная фильтрация однородной жидкости в элементе разработки нефтяного пласта с трещиной гидроразрыва / В.М. Ентов, В.В. Мурзенко // Изв. РАН. МЖГ. – 1994. – № 1. – С. 104 - 112.
74. Желтов Ю.П. Разработка нефтяных месторождений / Ю.П. Желтов. – М. : Недра, 1986. – 333 с.
75. Журавчак Л. М. Математичне моделювання процесів поширення теплового і електромагнітного полів у неоднорідних середовищах методами приграничних елементів та скінченних різниць: автореф. дис. на здобуття наук. ступ. д.т.н.: спец. 01.05.02 «Математичне моделювання та обчислювальні методи» / Л. М. Журавчак. – Львів, 2007. – 42 с.
76. Журавчак Л. М. Математичне моделювання розподілу пластового тиску з урахуванням фізичної неоднорідності пласта / Л. М. Журавчак ,

- А. Є. Струк // Науковий вісник Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу. – 2012. – №3. – С. 47-55.
77. Журавчак Л.М. Моделирование розподілу тиску в горизонтально-неоднорідних обмежених пластах з урахуванням різних типів граничних умов та кількості свердловин / Л. М. Журавчак, А. Є. Струк // Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ: Всеукр. наук.-техн. журн. – Івано-Франківськ: Факел. – 2013. – №1. – С. 79-89.
 78. Зазовский А.Ф. О стационарном притоке жидкости к скважине с вертикальной трещиной гидроразрыва большой протяженности / А.Ф. Зазовский, Г.Т. Тодуа // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1990. – № 4 – С. 107-116.
 79. Закиров Э.С. Новые принципы и технологии разработки месторождений нефти и газа / Э.С. Закиров, И.С. Закиров, М.Н. Баганова, А.В. Спиридонов. – М. : 2004. – 520 с.
 80. Закиров С. Н. Проектирование и разработка газовых месторождений / С. Н. Закиров, Б. Б. Лапук. – М. : Недра, 1974. – 374 с.
 81. Закиров С. Н. Новые принципы и технологии разработки месторождений нефти и газа. Часть 2. / С. Н. Закиров, И.М. Индрупский, Э.С. Закиров и др. – Москва-Ижевск : Институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. – 484 с.
 82. Зайцев М.В. Фильтрация в техногенно измененных околоскважинных зонах и производительность скважин / М.В. Зайцев, Н.Н. Михайлов // Георесурсы, геоэнергетика, геополитика.– 2010. – Вып. 2(2). – С. 1–20.
 83. Зайцев М.В. Влияние околоскважинной зоны на продуктивность скважины / М.В. Зайцев, Н.Н. Михайлов // Нефтяное хозяйство. – 2004, – № 1. – С. 64–66.
 84. Иванов В. И. Конформные отображения / В. И. Иванов, В. Ю. Попов. – МГУ, УРСС, 2002. – 167 с.
 85. Иванов С. И. Интенсификация притока нефти и газа к скважинам / С. И. Иванов. – М. : ООО «Недра-Бизнесцентр», 2006. – 565 с.

86. Іващенко А.П. Дослідження одномірного фільтраційного потоку в середовищах, що деформуються під дією градієнтів напору / А.П. Іващенко // Сучасні проблеми теорії фільтрації. Вісник УДАВГ. – Рівне, 1998. – С. 61–65.
87. Ильинский Н.Б. Об одной импульсно-гидродинамической модели взрыва на выброс / Н.Б. Ильинский. – ПМТФ, 1977, – № 2 – С. 115 – 120.
88. Ильинский Н.Б. Краевые задачи теории взрыва / Н.Б. Ильинский, А.В. Поташев– Казань: Изд-во Казанского университета. – 1986. – 180с.
89. Кадет В.В. Фильтрация флюида в среде содержащей эллиптическую трещину гидроразрыва / В.В. Кадет, В.И. Силяков // Изв. вузов. Нефть и газ.– 1988. – №5. – С. 54–60.
90. Каневская Р.Д. О проблемах мониторинга месторождений на поздней стадии разработки / Р.Д. Каневская, А.В. Потапова // Нефтяное хозяйство. Раздел «Геология и геолого-разведочные работы» - 2013. - № 4. – С. 218-233.
91. Каневская Р.Д. Опыт моделирования и мониторинга разработки нефтяного месторождения в условиях массового проведения гидроразрыва пласта / Р.Д. Каневская, С.Ю. Жучков // Технологии нефти и газа – 2011. – №4 (75). – С. 41-47.
92. Каневская Р. Д. Математическое моделирование гидродинамических процессов разработки месторождений углеводородов / Р.Д. Каневская. – Москва-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2003. – 128 с.
93. Каневская Р. Д. Математическое моделирование разработки месторождений нефти и газа с применением гидравлического разрыва пласта / Р.Д. Каневская. – М. : ООО "Недра-Бизнесцентр", 1999. – 212 с.
94. Каневская Р. Д. Аналитические решения задач о притоке жидкости к скважине с вертикальной трещиной гидроразрыва и их использование в численных моделях фильтрации / Р.Д. Каневская // Изв. РАН. Механика жидкости и газа.– 1996. – №6. – С. 69–80.
95. Клейдман Д.М. Расчет поля нефтенасыщенности при большом числе

- скважин / Д. М. Клейдман, Д. В. Шевченко // Матем. моделирование. – 2002. – т. 14. – №9. – С. 19–23.
96. Колдоба А.В. Гиперболичность уравнений изотермической многофазной фильтрации / А. В. Колдоба, Е. В. Колдоба // Матем. моделирование. – 2011. – т.23. – №1. – С. 65–80.
97. Колдоба А.В. Гиперболичность уравнений изотермической многофазной многокомпонентной фильтрации / А.В. Колдоба, Е.В. Колдоба. – М. : Препринт ИПМ, 2008. – № 77. – 28 с.
98. Коллинз Р. Течения жидкостей через пористые материалы / Р. Коллинз. – М. : Мир, 1964. – 350с.
99. Кондрат Р.М. Лабораторні дослідження інтенсифікації роботи свердловин з високов'язкими нафтами застосуванням теплового впливу на пластову продукцію і вуглеводневих розчинів / Р.М. Кондрат, Б.Б. Синюк, І.І. Хомин, О.Р. Кондрат // Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ. – 2004. - № 4(13). – С. 30-34.
100. Кондрат Р.М. Фізико-хімічний вплив на високов'язкі нафти з метою підвищення дебітів свердловин і попередження ускладнень у процесі їх експлуатації / Р.М. Кондрат, О.Р. Кондрат, Б.Б. Синюк, І.І. Хомин // Науковий вісник ІФНТУНГ. – 2006. - № 2(14). – С. 49-55.
101. Кондрат Р.М. Удосконалення технології експлуатації свердловини з високов'язкими нафтами / Р.М. Кондрат, Б.Б. Синюк, І.І. Хомин, О.Р. Кондрат, Л.Р. Смолівик // Науковий вісник ІФНТУНГ. – 2007. - № 1(15). – С. 27-34.
102. Коновалов А. Н. Задачи фильтрации многофазной несжимаемой жидкости / А. Н. Коновалов. – Новосибирск : Наука, СО РАН, 1988. – 168 с.
103. Коновалов А. Н. О некоторых моделях фильтрации многофазных жидкостей / А.Н. Коновалов, В.Н. Монахов // Динамика сплошной среды. – 1976. – Вып.27. – С. 51–65.
104. Крэйг Ф. Ф. Разработка нефтяных месторождений при заводнении /

- Ф. Ф. Крэйг. – М. : Недра, 1974. – 192 с.
- 105.Кривоносов И.В. Расчет дебитов скважин с трещиноватой призабойной зоной пласта / И.В. Кривоносов, И.А. Чарный // Нефтяное хозяйство. – 1955. - № 7. – С. 40-47.
 - 106.Кричлоу Б. Г. Современная разработка нефтяных месторождений - проблемы моделирования / Б. Г. Кричлоу. – М. : Недра, 1979. – 305 с.
 - 107.Крылов А. П. Научные основы разработки нефтяных месторождений / А.П. Крылов, М.М. Глоговский, М.Ф. Мирчинк, Н.М. Николаевский, И.А. Чарный. – Москва-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2004. – 416 с.
 - 108.Кузнецов В. М. Математические модели взрывного дела. / В. М. Кузнецов. – Новосибирск : Наука, 1977. – 264.
 - 109.Лаврентьев М.А. Методы теории функции комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М. : Наука, 1973. – 736с.
 - 110.Лаврентьев М. А. Проблемы гидродинамики и их математические модели / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – М. : Наука, 1977. – 407 с.
 - 111.Лаврик В. И. Математическое моделирование в гидроэкологических системах / В. И. Лаврик, Н. А. Никифорович – К. : Фитосоциоцентр, 1998. – 288 с.
 - 112.Лаврик В. И. Конформные отображения физико-топологических моделей / В. И. Лаврик, В. П. Фильчакова, А. А. Яшин – К. : Наукова думка, 1990. – 374 с.
 - 113.Логинов Б. Г. Гидравлический разрыв пласта / Б. Г. Логинов, В. А. Блажевич. – М.: Недра, 1966. – 148с.
 - 114.Лысенко В.Д. Разработка малопродуктивных нефтяных месторождений / В.Д. Лысенко, В.И. Грайфер. – М. : ООО «Недра-Бизнесцентр», 2001. – 526 с.
 - 115.Ляшко И. И. Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации / И. И. Ляшко, И. М. Великоиваненко. – К. : Наукова думка, 1973. – 264 с.

- 116.Ляшко И. И. Метод мажорантных областей в теории фильтрации / И.И. Ляшко, И. М. Великоиваненко, В. И. Лаврик, Г. Е. Мистецкий. – К. : Наук. думка, 1974. – 200 с.
- 117.Ляшко И. И Вопросы автоматизации решения задач фильтрации на ЭВМ / И.И. Ляшко, И. В. Сергиенко, Г. Е. Мистецкий, В. В. Скопецкий. – К. : Наукова думка, 1977. – 288 с.
- 118.Максимов М.М. Математическое моделирование процессов разработки нефтяных месторождений / М.М. Максимов, Л.П. Рыбицкая. – М. : Недра, 1976. – 264 с.
- 119.Марченко Н.А. Иерархия явно-неявных разностных схем для решения задач многофазной фильтрации / Н.А. Марченко, А.Х. Пергамент, С.Б. Попов, В.А. Семилетов, П.Ю. Томин. – М.: Препринт ИПМ, 2008. – № 97. – 17 с.
- 120.Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде / М. Маскет. – Москва-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2004. – 628 с.
- 121.Маскет М. Физические основы технологии добычи нефти / М. Маскет. – Москва-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2004. – 606 с.
- 122.Мирзаджанзаде А.Х. Моделирование процессов нефтегазодобычи. Нелинейность, неравновесность, неопределенность / А.Х. Мирзаджанзаде, М.М. Хасанов, Р.Н. Бахтизин. – Москва-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2004. – 368 с.
- 123.Михайлов В.В. Исследование двухфазной фильтрации в элементах площадного заводнения / В. В. Михайлов, А. Н. Чекалин // Исслед. по подземн. гидромех. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1987. – №9 – С. 115–133.
- 124.Монахов В.Н. Новые компьютерные технологии в нефтедобыче / В.Н. Монахов, Б.Т. Жумагулов, Н.В. Зубов, Ш.С. Смагулов. – Алма-Аты : Гылым, 1996. – 166 с.
- 125.Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. I. / Р.И. Нигматулин –

- М. : Наука, 1972. – 464 с.
126. Нигматулин Р.И. Динамика многофазных сред. Ч. 2. / Р.И. Нигматулин. – М. : Наука, 1987. – 360 с.
 127. Никифоров А. И. Численное решение задачи прослеживания границы раздела двух жидкостей в неоднородном пласте / А. И. Никифоров // Исслед. по подземн. гидромех. – 1979. – Выпуск 3. – С. 63–68.
 128. Никифоров А. И. Задача управления движением контура нефтеносности / А. И. Никифоров, В. Д. Чугунов // Исслед. по подземн. гидромех. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1976. – № 1 – С. 175–184.
 129. Никифоров Г.А. Применение метода контрольных объемов для решения задач двухфазной фильтрации в переменных "скорость-насыщенность" / Г.А. Никифоров // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. – 2006. – Т. 7. – № 1. – С. 224–228.
 130. Николаевский В.Н. Механика насыщенных пористых сред / В.Н. Николаевский, К.С. Басниев, А.Т. Горбунов, Г.А. Зотов. – М. : Недра, 1970. – 339 с.
 131. Николаевский В.Н. Геомеханика и флюидодинамика / В.Н. Николаевский. – М. : Недра, 1996. – 447 с.
 132. Николаевский В.П. Движение углеводородных смесей в пористой среде / В.П. Николаевский, Э.А. Бондарев, М.И. Миркин и др.. – М. : Недра, 1968. – 189 с.
 133. Никольский Д.Н. Математическое моделирование работы системы скважин в однородных и неоднородных слоях с подвижной границей раздела жидкостей различной вязкости. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Орел, 2001.
 134. Нифапов А В. Современное состояние математического моделирования пластовых систем / А В. Нифапов // Обз. инф. Сер. : Разработка газовых и газоконденсатных месторождений. – М. : ООО «ИРЦ Газпром», 2004. – 80 с.
 135. Павловский Н. Н. Движение грунтовых вод. Соб. сочинений в 2 т.

- / Н. Н. Павловський. –Л : Изд-во АН СССР, 1956. – 771 с.
- 136.Пергамент А.Х. Двумерные задачи двухфазной фильтрации / А. Х. Пергамент, С. Б. Попов // Матем. моделирование. – 1998. – т.10. – №2. – С. 48–70.
 - 137.Пивень В. Ф. Теория и приложения математических моделей фильтрационных течений жидкости / В. Ф. Пивень – Орёл : Издательство ГОУ ВПО «Орловский государственный университет», Полиграфическая фирма «Картуш», 2006. – 508 с.
 - 138.Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод / П.Я. Полубаринова-Кочина. – М. : Наука, 1977. – 664с.
 - 139.П'янило Я.Д. Неусталений рух газу в трубопроводах і пористих середовищах / Я.Д. П'янило, М.Г. Притула, Н.М. Притула, // Фізико–математичне моделювання та інформаційні технології. –2006. –Вип. 4. – С. 69–77.
 - 140.Радыгин В. М. Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники: Учеб. пособие для пед. вузов / В. М. Радыгин, О. В. Голубева. – М. : Высш. школа, 1983. – 160 с.
 - 141.Салимьянов И.Т. Оценка эффективности гидравлического разрыва пласта на основе гидродинамических исследований вертикальных скважин / М. Х. Хайруллин, Р. С. Хисамов, М. Н. Шамсиев, П. Е. Морозов, Е. Р. Батертдинов, И. Т. Салимьянов // Нефтяное хозяйство. – 2009. - №7. – С. 56-59.
 - 142.Самарский А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. – М. : Наука, 1983. – 616с.
 - 143.Сінчук А. М. Комплексне математичне моделювання нелінійних процесів витіснення з урахуванням включень / А. М. Сінчук // Вісник ТНТУ. – 2012. – № 4(68). – С. 209-219.
 - 144.Скворцов Э. В. О движении границы раздела двух жидкостей в бесконечном пласте / Э. В. Скворцов // Уч. зап. КГУ. – 1967. – т. 127, кн. 5. – С. 44–48.

145. Таранчук В.Б. К анализу застойных зон вязкопластической нефти в пористой среде / В.Б. Таранчук // Численные методы решения задач фильтрации и оптимизации нефтедобычи. – Казань, 1990. – С. 107–113.
146. Телков А.П. Гидромеханика пласта применительно к задачам разработки нефтяных и газовых месторождений: учебное пособие. В 2 ч. Ч. II / А.П. Телков, С.И. Грачёв. – Тюмень : ТюмГНГУ, 2009. – 352 с.
147. Толпаев В. А. Математическая модель линейного упругого режима фильтрации в искривленных пластах переменной толщины / В. А. Толпаев, Д. В. Баско // Нефтепромысловое дело. – М.: ОАО "ВНИИОЭНГ", – 2008. – № 12. – С. 9–13.
148. Толпаев В. А. Двумерные математические модели линейной фильтрации жидкости и газа в искривленных пластах конечной толщины / В. А. Толпаев, В. В. Палиев, Д. В. Баско // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2008. – №2. – С. 43–47.
149. Трапезникова М.А. Моделирование процесса нефтедобычи явными и неявными численными методами / М. А. Трапезникова, Н. Г. Чурбанова // Матем. моделирование – 1997. – т.9. – №6. – С. 53–66.
150. Уоллис Г. Одномерные двухфазные течения / Г. Уоллис. – М. : Мир, 1972. – 440 с.
151. Уолш М. Первичные методы разработки месторождений углеводородов / М. Уолш, Л. Лейк. – Москва–Ижевск : Институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008. – 672 с.
152. Фазлыев Р.Т. Площадное заводнение нефтяных месторождений / Р.Т. Фазлыев. – М. : Ижевск, ИКИ, НИЦ РХД, 2008. – 256 с.
153. Хайруллин М. Х. Гидродинамические методы исследования вертикальных скважин с трещиной гидроразрыва пласта. Монография / М. Х. Хайруллин, Р.С. Хисамов Р.С., М.Н. Шамсиев, Е.Р. Бадертдинова. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2012. – 84 с.
154. Халимов Э. М. Технология повышения нефтеотдачи пластов /

- Э. М. Халимов, Б. И. Леви, В. И. Дзюба, С. А. Пономарев. – М.: Недра, 1984. – 271 с.
155. Хейфец Л.И. Многофазные процессы в пористых средах / Л.И. Хейфец, А.В. Неймарк. – М. : Химия, 1982. – 320 с.
 156. Хлапук М.М. Особливості моделювання нелінійних процесів фільтрації із зволожувача в середовище, що деформується / М.М. Хлапук // Сучасні проблеми теорії фільтрації. Вісник УДАВГ. – Рівне, 1998. – С. 151–157.
 157. Холодовский С. Е. Метод рядов Фурье для решения задач в кусочно-неоднородных средах с прямолинейной трещиной (завесой) / С. Е. Холодовский // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2008. – Т. 48. № 7. – С. 1209-1213.
 158. Холодовский С. Е. О фильтрации в слоистых средах с пересекающимися трещинами и завесами / С. Е. Холодовский // Докл. РАН. – 1994. – Т. 338. – № 5. – С. 622-624.
 159. Чапля Є. Я. Фізико-математичне моделювання гетеродифузійного масопереносу / Є. Я. Чапля, О. Ю. Чернуха. – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 128с.
 160. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика / И. А. Чарный. – Москва-Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2006. – 436 с.
 161. Чекалюк Э. Б. Термодинамика нефтяного пласта / Э. Б. Чекалюк. – М. : Недра, 1965. – 238 с.
 162. Швидлер М.И. Статистическая гидродинамика пористых сред. – М. : Недра, 1985. – 288с.
 163. Шестерин Д.Е. Математическое моделирование продвижения двумерной границы разноцветных жидкостей в неоднородно-анизотропном грунте / Д.Е. Шестерин // Вісник ХНУ. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – 2007. – №780. – С. 186–192.
 164. Шехтман Ю.М. Приток жидкости к горизонтальной трещине при

- конечной мощности пласта / Ю.М. Шехтман. – Изв. АН СССР ОТН. Механика и машиностроение, 1961. – С.142-149.
165. Экономидес М. Унифицированный дизайн гидроразрыва пласта: от теории к практике / М. Экономидес, Р. Олини, П. Валько. – Ижевск, Изд-во «ИКИ», 2007. – 234 с.
 166. Bangerth W. An automatic reservoir framework for the stochastic optimization of well placement / W. Bangerth, H. Klie, V. Matossian // Center for Subsurface Modeling, The University of Texas at Austin. – 2006. – P. 255–269.
 167. Bittencourt A. C. Reservoir development and design optimization / A. C. Bittencourt, R.N. Home // SPE 38895. – 1997. – P.14.
 168. Blanco E.R. Hydraulic fracturing requires extensive disciplinary interaction / E.R. Blanco // Oil and Gas J. –1990. – № 12. – P. 112–118.
 169. Bomba A. Complex mathematical modeling of nonlinear processes of displacement considering inclusions / A. Bomba, A. Sinchuk, S. Yaroshchak // VIII International Conference POROUS MATERIALS. Theory and Experiment (INTERPOR'12) – L'viv, 2012. – С. 21-22.
 170. Briggs P.J. Development of heavy-oil reserves / P.J. Briggs, R.P. Baron, R.J. Fulleylove, M.S. Wright // J.Petrol.Technjl. – 1988. – Vol.40.numb.2. – P.206 -214.
 171. Buckley S. Mechanism of fluid displacement in sands / S Buckley, M.C. Leverett // Trans. AIME.– 1942. – V. 146. – P. 107–116.
 172. Carlson M. Practical Reservoir Simulation / M. Carlson // PennWell. – 2003. – 540 p.
 173. Chen C.-C. Modeling a fractured well in a composite reservoir / C.-C. Chen, R. Raghavan // SPE Form. Eval.– 1995.– V. 10.– № 4.– P. 241–246.
 174. Chu W. A new model for a fractured well in a radial composite reservoir / W. Chu, G.D. Shank // SPE Form. Eval.– 1993. – V. 8.– № 3.– P. 225– 233.
 175. Cinco-Ley H. Evaluation of hydraulic fracturing by transient pressure analysis methods / H. Cinco-Ley // SPE Form. Eval. – 1982. – V. 4.– № 1.– P. 25– 33.

176. Currie I. G. Fundamental Mechanics of Fluids. 3rd edition. / I. G Currie. – Marcel Dekker, Inc., New. York, – 2003. - 525 p.
177. Dahi-Taleghani A. Analysis of hydraulic fracture propagation in fractured reservoirs: an improved model for the interaction between induced and natural fractures, PhD Dissertation, University of Texas at Austin, pp. 216, 2009.
178. Darcy H. Les fontains publiques de la ville de Dijon / H. Darcy. – Paris, 1856. – 647 p.
179. Das D.B. Upscaling Multiphase Flow in Porous Media From Pore to Core and Beyond / D.B. Das, S.M. Hassanizadeh. // Springer. – 2005. – 257 p.
180. Dilts G.A. Moving-least-squares-particle hydrodynamics II: conservation and boundaries / G. A. Dilts // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2000. – 48(10). – P. 1503 – 1524.
181. Dupuit J. Etudes theoretiques et pratiques sur le mouvement des eaux / Dupuit J. – 1863. – 247 p.
182. Economides M.J. Reservoir Stimulation / M.J. Economides, K.G. Nolte. – Eglewood Cliffs: New Jersey. – 1989. – 430 p.
183. Elbel J.L. Considerations for optimum fracture geometry design / J.L. Elbel // SPE Prod. Eng. – 1988. – V. 3. – № 3. – P. 323–327.
184. Geertsma J. A rapid method of predicting width and extent of hydraulically induced fractures / J. Geertsma, F. de Klerk // J. Petrol. Technol. – 1969. – № 12. – P. 1571–1581.
185. Guyaguler B. Optimization of well placement and assessment of uncertainty. A dissertation for the degree of doctor of philosophy / B. Guyaguler. – Stanford University, 2002. – 137 p.
186. Haber S. Boundary Conditions for Darcy' s Flow Through Porous Media / S. Haber, R. Mauri // J. Multiphase Flow. – 1983. – 9, №5. – P. 561–574.
187. Hoteit H. Numerical modeling of two-phase flow in heterogeneous permeable media with different capillarity pressures / H. Hoteit, A. Firoozabadi // Advances in Water Resources. – 2008. – Volume 31, Issue 1. – P. 56-73.
188. Lacy L.L. Comparison of hydraulic-fracture orientation techniques / L.L. Lacy

- // SPE Form. Eval.– 1987.– V. 2.– № 1.– P. 66–76.
189. Malekzadeh D. Analysis of pressure behaviour of hydraulically fractured vertical wells by the effective hydraulic fracture length concept / D. Malekzadeh, F.U. Khan, J.J. Day // J. Canad. Petrol. Technol.– 1996.– V. 35.– № 3.– P. 36–43.
 190. Meehan D.N. Optimization of fracture length and well spacing in heterogeneous reservoirs / D.N. Meehan // SPE Prod. and Fac. – 1995. – V. 10. – № 2.– P. 82–88.
 191. Nield D.A. Convection in porous media / D.A. Nield, A. Bejan. – Springer, 2006. – 653 p.
 192. Perkins T.K. The effect of thermoelastic stresses on injection well fracturing / T.K. Perkins, J.A. Gonzalez // Soc. Petrol. Eng. J. – 1985.– V. 25. – № 2.– P. 78–87.
 193. Perkins T.K. Widths of hydraulic fracturing / T.K. Perkins, L.R. Kern // J. Petrol. Technol. – 1961.– № 9.– P. 937–949.
 194. Prats M. Effect of vertical fractures on reservoir behavior – incompressible fluid case / M. Prats // Soc. Petrol. Eng. Journal.– 1961.– V. 1.– № 2.– P. 105–118.
 195. Rappoport L.A. Properties of linear waterfloods / L.A. Rappoport, W.I. Leas // Trans. AIME. – 1953. – Vol.198. – P.139-148.
 196. Roupert R. Construction of three-phase data to model multiphase flow in porous media: Comparing an optimization approach to the finite element approach / R. Roupert, G. Schäfer, P. Ackerer // Comptes Rendus Geoscience. – 2010. – Volume 342, Issue 11. – P 855-863.
 197. Thompson J.F. Numerical Grid Generation / J.F. Thompson, Z.A. Warsi, C.W. Mastin // Foundation and Applications. – New York: Elsevier, 1985. – 931 p.
 198. Vafai K. Handbook of porous media / K. Vafai. – Taylor & Francis Group, 2005. – 747 p.
 199. Versteeg H. K. An introduction to computational fluid dynamics. The finite

- volume method / H. K. Versteeg, W. Malalasekera - Longman Scientific & Technical. New York, 1995. - 267 c.
200. Whitaker. S. Advances in theory of fluid motion in porous media / S. Whitaker // Indust. and Engineering Chemistry. – 1969 №. 12. – p. 14-28.
201. Zaitsev M.V. Effect of residual oil saturation on the flow through a porous medium in the neighborhood of an injection well / M.V. Zaitsev, N.N. Mikhailov // J. Fluid Dynamics. – 2006. – vol. 41. – №4 – p. 568-573
202. Zhangxin C. Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media (CSE) / C. Zhangxin, H. Guanren, M. Yuanle. // Paperback. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2006. - 531 pp.

Додатки

ЗАТВЕРДЖУЮ

Заступник директора з наукової роботи
Дочірнього підприємства «Науково-
дослідний інститут нафтогазової
промисловості» Національної
акціонерної компанії «Нафтогаз
України», к.т.н.



Гришаненко В.П.

"20" лютого 2014 р.

АКТ

про впровадження (використання) результатів дисертаційного дослідження за темою: "Комплексне математичне моделювання фільтраційних процесів в умовах гідравлічного розриву пласта" на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

Сінчук Алесі Михайлівни

Комісія у складі:

Голова – завідувач відделення супервізії та інформаційного супроводу геологорозвідувальних робіт Центру сейсмічних досліджень та комплексування нафтогазопошукових методів, к.г.н. Коваль А.М.

Члени комісії – старший науковий співробітник відділу видобутку та буріння свердловин, к.т.н., Драчук О.Г.; старший науковий співробітник відділу моніторингу та техніко-економічних досліджень ефективності розробки родовищ, к.т.н., Карпенко В.М.

цим Актом засвідчує, що результати дисертаційного дослідження Сінчук Алесі Михайлівни на тему: «Комплексне математичне моделювання фільтраційних процесів в умовах гідравлічного розриву пласта» використані співробітниками Інституту Доірнього підприємства «Науково-дослідний інститут нафтогазової промисловості» Національної акціонерної компанії «Нафтогаз України» під час проектування та аналізу ефективності розробки родовищ нафти і газу з урахуванням впливу гідравлічного розриву пласта на основні технологічні показники розробки.

Використання вищевказаних результатів дозволяє встановити закономірності нелінійних процесів витіснення за умови збурення фільтраційної течії тріщинами гідравлічного розриву пласта, які дозволяють забезпечити оптимізацію експлуатації

свердловин, зокрема, з метою уникнення формування так званих «застійних» зон, підвищити якість проектування та ефективність розробки родовищ нафти та газу,

Голова комісії

Завідувач відділення супервізії та інформаційного супроводу геологорозвідувальних робіт Центру сейсмічних досліджень та комплексування нафтогазопошукових методів, к.г.н.



А.М. Коваль

Члени комісії

Старший науковий співробітник відділу видобутку та буріння свердловин, к.т.н.



О.Г. Драчук

Старший науковий співробітник відділу моніторингу та техніко-економічних досліджень ефективності розробки родовищ, к.т.н.



В.М. Карпенко

«20» лютого 2014 р.

ЗАТВЕРДЖУЮРектор Рівненського державного
гуманітарного університету

проф. Постоловський Р.М.

"23" травня 2014 р.

АКТ

про впровадження (використання) у навчальний процес результатів дисертаційного дослідження на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи Сінчук Алесі Михайлівни

Комісія у складі: голова комісії – декан факультету математики та інформатики, кандидат фізико-математичних наук, доцент Шахрайчук М. І.; члени комісії – завідувач кафедри інформатики та прикладної математики, доктор технічних наук, професор Бомба А. Я., викладач кафедри інформатики та прикладної математики, кандидат технічних наук Ярошак С. В., цим Актом засвідчує, що викладені в дисертаційній роботі Сінчук Алесі Михайлівни на тему: "Комплексне математичне моделювання фільтраційних процесів в умовах гідравлічного розриву пласта" методи комплексного аналізу моделювання фільтраційних процесів витіснення в горизонтальних схильних до деформації нафтогазових пластах в умовах збурення течії тріщинами гідравлічного розриву, використовуються при читанні спецкурсів "Методи комплексного аналізу", "Проблеми оптимізації і керування процесами і системами" та "Сучасні проблеми прикладної математики", а також є основою для написання курсових та дипломних робіт по кафедрі інформатики та прикладної математики Рівненського державного гуманітарного університету.

Результати роботи використовувались при виконанні науково-дослідних робіт "Системне математичне моделювання нелінійних збурень процесів типу "фільтрація-конвекція-дифузія" з післядією при неповних даних" (номер державної реєстрації 0109U001065, 2009 – 2011р.), "Просторові аналоги крайових задач на квазіконформні відображення і проблеми моделювання нелінійних процесів у пористих середовищах" (номер державної реєстрації 0112U001014, 2012 – 2014 р.).

Голова комісіїДекан факультету математики та інформатики  к.ф.-м.н., доц. Шахрайчук М. І.**Члени комісії**

Завідувач кафедри інформатики та ПМ

 д.т.н., проф. Бомба А. Я.

Викладач кафедри інформатики та ПМ

 к.т.н., Ярошак С. В.

«23» травня 2014 р.

З А Т В Е Р Д Ж У Ю
В. о. ректора НУВГП

проф. Мошинський В. С.

« 28 » Т Р А В Н Я 2014 р.

АКТ

про впровадження у навчальний процес результатів дисертаційного дослідження на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук Сінчук Алесі Михайлівни за спеціальністю 01.05.02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

Комісія у складі:

голова – директор навчально-наукового інституту автоматики, кібернетики та обчислювальної техніки, д. п. н., проф. Тадеєв П.О.;

члени комісії –

заступник директора навчально-наукового інституту автоматики, кібернетики та обчислювальної техніки з наукової роботи, канд. т. н. Степанченко О.М.; в. о. завідувача кафедри прикладної математики, канд. фіз.-мат. н., доц. Турбал Ю.В.

цим Актом засвідчує, що викладені в дисертаційній роботі методи комплексного аналізу моделювання фільтраційних процесів витіснення в горизонтальних схильних до деформації нафтогазових пластах в умовах гідравлічного розриву використовуються в Національному університеті водного господарства та природокористування при читанні спецкурсу “Чисельні методи конформних і квазіконформних відображень”, а також є основою для написання курсових та дипломних робіт для студентів спеціальності “Прикладна математика”.

Голова комісії:

директор навчально-наукового інституту
автоматики, кібернетики та
обчислювальної техніки, д. п. н., проф.



Тадеєв П.О.

Члени комісії:

заступник директора навчально-наукового
інституту автоматики, кібернетики та
обчислювальної техніки з наукової роботи,
канд. т. н..



Степанченко О.М.

в. о. завідувача кафедри прикладної
математики, канд. фіз.-м. н., доц.



Турбал Ю.В.

« 28 » Т Р А В Н Я

2014 р.