

**Національний університет водного господарства та
природокористування**

На правах рукопису

МАРТИНЮК Петро Миколайович

УДК 519.633.2

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОНСОЛІДАЦІЇ
ГРУНТІВ З УРАХУВАННЯМ ТЕХНОГЕННОГО
ВПЛИВУ ТА КОМПЛЕКСУ ФІЗИКО-ХІМІЧНИХ
ПРОЦЕСІВ**

01.05.02. Математичне моделювання та обчислювальні методи

**Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора
технічних наук**

**Науковий консультант:
Власюк Анатолій Павлович
д.т.н., професор**

Рівне – 2014

ЗМІСТ

СПИСОК ПОЗНАЧЕНЬ ТА УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ.....	6
ВСТУП.....	9
РОЗДІЛ 1. Математичні моделі процесів консолідації та фільтраційного руйнування ґрунтів (огляд літератури та постановки задач дослідження)	23
1.1. Ґрунти як основи та матеріал для зведення інженерних споруд	23
1.2. Математичні моделі процесів консолідації ґрунтів: огляд літератури	33
1.3. Проблеми фільтраційного руйнування ґрунтів та математичне моделювання цих процесів: огляд літератури..	43
1.4. Висновки та постановка задач дослідження	50
РОЗДІЛ 2. Математичні моделі процесів фільтраційної консолідації та фільтраційного руйнування ґрунтів в умовах впливу техногенних факторів	53
2.1. Узагальнений нелінійний закон Дарсі-Герсеванова	53
2.2. Рівняння нерозривності рідкої та твердої фаз ґрунту з урахуванням гетерогенних масообмінних процесів та термічного розширення.....	56
2.3. Рівняння фільтраційної консолідації з урахуванням впливу взаємозв'язаних процесів перенесення тепла та солей в гетерогенному пористому середовищі.....	58
2.4. Математичне моделювання процесів теплосоле-перенесення та масообміну в пористих середовищах	63
2.5. Початкові та граничні умови для напору в масиві ґрунту, який консолідується.....	67
2.6. Кінематична гранична умова на верхній рухомій межі області пористого середовища у випадку урахування просідань в процесі консолідації	71

2.7.	Математичні моделі взаємозв'язаних процесів фільтраційної консолідації та контактного розмиву гетерогенних пористих середовищ.....	75
2.8.	Основні рівняння математичної моделі взаємозв'язаних процесів фільтраційної консолідації та багатofракційної контактної суфозії гетерогенних пористих середовищ	81
2.9.	Висновки до Розділу 2	88
РОЗДІЛ 3.	Математичне моделювання фільтраційної консолідації ґрунтів з урахуванням впливу теплосолеперенесення ...	91
3.1.	Математичні моделі процесів фільтраційної консолідації ґрунтів в умовах впливу техногенних факторів	91
3.2.	Чисельний розв'язок крайової задачі фільтраційної консолідації в умовах впливу теплосолеперенесення методом скінченних елементів	95
3.3.	Метод радіальних базисних функцій та його застосування для чисельного розв'язання нелінійної крайової задачі фільтраційної консолідації в умовах впливу теплосолеперенесення	110
3.4.	Результати чисельних експериментів та аналіз впливу теплосолеперенесення на процеси фільтраційної консолідації ґрунтів	120
3.5.	Прогнозування зсувних процесів ґрунтів в умовах впливу техногенних факторів	184
3.6.	Висновки до Розділу 3	191
РОЗДІЛ 4.	Дослідження процесів фільтраційної консолідації шаруватих ґрунтів та ґрунтів з неоднорідностями в умовах впливу техногенних факторів.....	195
4.1.	Математичні моделі фільтраційної консолідації ґрунтів при наявності природної і штучної шаруватості та напівпроникних включень	195

4.2.	Застосування методу скінченних елементів для чисельного розв'язання крайової задачі фільтраційної консолідації шаруватих ґрунтів, які містять напівпроникні включення в умовах впливу теплосолеперенесення	207
4.3.	Аналіз чисельних експериментів фільтраційної консолідації шаруватих ґрунтів з напівпроникними включеннями	218
4.4.	Висновки до Розділу 4.....	228
РОЗДІЛ 5.	Математичне моделювання фільтраційної консолідації ґрунтів в областях з рухомими межами	231
5.1.	Математичні моделі процесів фільтраційної консолідації ґрунтів в змінних областях	231
5.2.	Чисельний розв'язок нелінійної крайової задачі фільтраційної консолідації в області з вільними межами в умовах впливу теплосолеперенесення методом скінченних елементів	237
5.3.	Безсітковий метод радіальних базисних функцій для чисельного розв'язання нелінійної крайової задачі фільтраційної консолідації в області з рухомими межами ...	247
5.4.	Визначення зміщень вузлів розрахункових сіток при чисельному розв'язанні крайової задачі фільтраційної консолідації в областях з рухомими межами	252
5.5.	Алгоритм чисельного розв'язання задачі фільтраційної консолідації тіла ґрунтової греблі та алгоритм апроксимації депресійної поверхні	253
5.6.	Результати чисельних експериментів та аналіз впливу техногенних факторів на процеси консолідації ґрунтів в областях з рухомими межами	255
5.7.	Висновки до Розділу 5.....	280

РОЗДІЛ 6. Математичне моделювання взаємозв'язаних процесів фільтраційної консолідації та контактного розмиву ґрунтів з урахуванням наявності зосереджених шляхів фільтрації та впливу техногенних факторів	283
6.1. Математичні моделі фільтраційної консолідації та контактного розмиву гетерогенних пористих середовищ....	283
6.2. Схема застосування методу радіальних базисних функцій в математичних моделях взаємозв'язаних процесів фільтраційної консолідації та контактного розмиву гетерогенних пористих середовищ	293
6.3. Апроксимація межі контактного розмиву та депресійної кривої тіла ґрунтової греблі за методом радіальних базисних функцій	306
6.4. Результати чисельних експериментів з дослідження взаємозв'язаних процесів фільтраційної консолідації та фільтраційного руйнування гетерогенних пористих середовищ	307
6.5. Висновки до Розділу 6.....	317
ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ РОБОТИ ТА ВИСНОВКИ	320
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	325
ДОДАТОК А.....	369
ДОДАТОК В.....	371
ДОДАТОК С.....	373
ДОДАТОК D.....	376

СПИСОК ПОЗНАЧЕНЬ ТА УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ

ДРЧП	диференціальне рівняння в частинних похідних
СЛАР	система лінійних алгебричних рівнянь
РБФ	радіальна базисна функція
метод РБФ	метод радіальних базисних функцій
МСЕ	метод скінченних елементів
СЕ	скінченний елемент
МСП	метод скінченних різниць
а.п.	абсолютна похибка
в.п.	відносна похибка
H	Гільбертовий простір
$\{\varphi_i\}_{i=1}^n, \{\varphi_i^{(n)}\}_{i=1}^n$	система базисних функцій проекційного методу та його модифікацій
$\{\psi_i\}_{i=1}^n, \{\psi_i^{(n)}\}_{i=1}^n$	система пробних функцій проекційного методу та його модифікацій
$L_2(\Omega)$	простір функцій інтегрованих з квадратом в області Ω
$W_2^1(\Omega)$	простір Соболева функцій інтегрованих з квадратом разом з першими похідними в області Ω
$\delta(\mathbf{X})$	дельта-функція Дірака
$\ \bullet\ _2$	норма Евклідового простору
$r = \ \bullet\ _2$	відстань в Евклідовому просторі
$r_j = \ \mathbf{X} - \mathbf{X}_j\ _2$	відстань до вузла $\mathbf{X}_j$
$r_{ij} = \ \mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j\ _2$	відстань між вузлами $\mathbf{X}_i$ та $\mathbf{X}_j$
$\delta_j(\mathbf{X}) = \delta(r_j)$	дельта-функція Дірака з центром у вузлі $\mathbf{X}_j$
n	об'єм рідини в одиниці об'єму ґрунту (для двофазного ґрунту – пористість)
h	надлишковий або п'єзометричний напір в поровій рідині
p	надлишковий або гідростатичний тиск в поровій рідині
$e, e^{(0)}$	коефіцієнт пористості ґрунту без урахування суфозійних частинок

β	коефіцієнт об'ємної стискуваності газу
s_{Γ}	об'єм газу в одиниці об'єму ґрунту
c	концентрація солей в поровому розчині
s	концентрація твердих частинок ґрунту в одиниці об'єму середовища
μ_{Γ}	коефіцієнт розчинності газу
α_p	коефіцієнт об'ємного термічного розширення рідкої фази ґрунту
α_s	коефіцієнт об'ємного термічного розширення твердої фази ґрунту
α	коефіцієнт об'ємного термічного розширення ґрунту як пористого матеріалу
p_a	атмосферний тиск
$\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}$	компоненти напружень в ґрунті
Θ	сума головних напружень в скелеті ґрунту
R	розмірність простору, в якому розглядається задача
ξ	коефіцієнт бічного тиску ґрунту
a_0, a_1, β_1	параметри повзучості скелету ґрунту
p^*, Θ^*	тиск в поровій рідині та сума головних напружень в скелеті ґрунту в умовах повної стабілізації
γ	питома вага порової рідини
$\mathbf{u}$	вектор швидкості фільтрації
$\mathbf{v}$	вектор швидкості руху твердих частинок ґрунту
$\mathbf{w}$	вектор швидкості осідання твердих частинок суспензії
$\mathbf{K}_h$	тензор коефіцієнтів фільтрації
$\mathbf{K}_c$	тензор коефіцієнтів хімічного осмосу
$\mathbf{K}_T$	тензор коефіцієнтів термічного осмосу
$\mathbf{q}_c$	вектор потоку розчинених солей
$\mathbf{q}_T$	вектор потоку тепла
$\mathbf{q}_i$	вектор потоку суфозійних частинок i -ї фракції
$\mathbf{D}_c, \mathbf{D}_T$	тензори коефіцієнтів конвективної дифузії та термодифузії

$\mathbf{D}_s$	тензор коефіцієнтів дисперсії суспензії
λ	тензор коефіцієнтів ефективної теплопровідності вологого ґрунту
ρ	густина порового розчину
c_ρ	питома теплоємність порового розчину
N	концентрація солей в твердій фазі ґрунту
c_T	об'ємна теплоємність ґрунту
C_m	концентрація граничного насичення солей в рідкій фазі
γ_m	константа швидкості масообміну
g	прискорення вільного падіння
ν	кінематична в'язкість
k_{er}	коефіцієнт розмиву ґрунту
$\sigma^{(i)}, m^{(i)}$	концентрація та відносний вміст суфозійних частинок i -ї фракції в одиниці об'єму пористого середовища
$u_{kr}^{(i)}$	критична швидкість розмиву для суфозійних частинок i -ї фракції
$m, m^{(0)}$	відносний вміст твердих частинок, що формують «скелет» пористого середовища в одиниці об'єму цього середовища
$\mathbf{D}^{(i)}$	тензор коефіцієнтів дисперсії суфозійних частинок i -ї фракції
w_i	швидкість осідання твердих часток i -ї фракції в вертикальному напрямку
η	коефіцієнт пружної ємності ґрунту
$\mathbf{n}$	вектор напрямних косинусів зовнішньої нормалі до межі області
$\mathbf{d}$	вектор напрямних косинусів дотичної до межі області

ВСТУП

Актуальність роботи. При проведенні робіт з будівництва цивільних та промислових об'єктів на ґрунтові основи прикладаються значні навантаження. Особливо великі труднощі пов'язані з проведенням будівельних робіт на глинистих ґрунтах. Про це свідчать численні деформації будівель в результаті ущільнення та набухання глинистих порід в їх основах. За даними Геологічної служби США прямі та побічні збитки, викликані даними явищами в різних державах світу, досягають сотень мільярдів доларів і співрозмірні з втратами від великих катастроф (землетрусів та повеней). Прикладені навантаження змінюють напружено–деформований стан ґрунтового пористого середовища. Якщо ґрунт є насиченим деякою рідиною (в найпростішому випадку – водою), то відповідні напруження спричиняють появу надлишкових тисків в поровій рідині ґрунту. Дані надлишкові тиски негативно впливають як на самі ґрунтові основи, так і на споруди, що зведені на них. Зокрема, збільшується ймовірність зсувів, нерівномірних просідань ґрунту, втрат стійкості ґрунтових основ та зведених будівель, аж до повного їх руйнування. Сам процес розсіювання надлишкових напорів в ґрунті призводить до зближення частинок ґрунту і, в результаті, до ущільнення ґрунтової основи під впливом прикладеного навантаження. Даний процес відомий в науковій літературі, як консолідація насиченого ґрунту.

Глини володіють властивостями напівпроникних мембран через які може фільтруватись вода і лише частково можуть проникати асоційовані в поровій воді хімічні речовини. До того ж, при будівництві сховищ відходів спеціально створюються напівпроникні екрани з глинистих матеріалів, які затримують поширення забруднень. Так само при зведенні ґрунтових гребель створюються протифільтраційні глинисті екрани (ядра). Якщо відбувається фільтрація не чистої води, а сольового розчину, то дані екрани можуть спрацьовувати як напівпроникні мембрани і бути причиною виникнення аномальних осмотичних тисків в тілі греблі.

Одним із техногенних факторів впливу на процеси в ґрунтах також є зміна температурного режиму навколишнього середовища та зведених будівель, що позначається на температурі самого ґрунту. Один із прикладів – будівництво атомних електростанцій на глинистих ґрунтах та водойм–охолоджувачів поблизу них. На даний час широко використовується технологія захоронення рідких токсичних речовин в глибокозалягаючі пласти–колектори, в тому числі і піщані. Піщані сховища–колектори містять тонкі включення у вигляді лінз глинистих ґрунтів. Радіоактивні відходи змінюють тепловий режим пластів–колекторів та прилягаючих ґрунтів.

Досягнення максимальної безпеки та надійності роботи гідротехнічних споруд (ГТС), зокрема ґрунтових гребель, є важливою практичною проблемою, якій приділяють багато уваги при проектуванні, будівництві та в процесі експлуатації ГТС. Надлишкові напори, якими характеризується фільтраційна консолидація можуть спричинити фільтраційне руйнування ґрунтових гідротехнічних споруд, а також ґрунтових основ цивільних та промислових об'єктів, що знаходяться в стані фільтраційної консолидації. На Міжнародному семінарі з фільтраційної міцності гребель та їх основ (27–29 квітня 2009 р., м. Санки–Петербург) виділено чотири основні типи фільтраційного руйнування ґрунтів: випір під дією висхідного фільтраційного потоку; суфозія; контактний випір; контактний розмив. На 20–му Конгресі з великих гребель (20th Congress on Large Dams, Beijing, 2000) вказано, що на 2% великих ґрунтових гребель (висотою більше 15 метрів) траплялись інциденти, пов'язані з розмивом та утворенням зосереджених шляхів фільтрації (статистичні дані наведені до 1986–го року). При цьому половина із інцидентів пов'язані з фільтраційним руйнуванням тіла греблі, 40 % – основи греблі, 10% – з фільтрацією з тіла в основу греблі. Час від зафіксованого початку розмиву до руйнування греблі в 20% випадків становить менше 12–ти годин, а в 18% – менше 6–ти годин. Тобто, якщо процес руйнування розпочався, то його зупинити практично неможливо. А тому на перший план виходить прогнозування, в тому числі на

основі математичного моделювання, для передбачення і недопущення критичних ситуацій при експлуатації гідротехнічних споруд.

До математичного описання процесів консолідації ґрунтів розроблено кілька підходів. Одним з таких підходів є фільтраційна теорія. Незважаючи на значні успіхи в даному напрямку, надалі залишаються нерозв'язаними ряд важливих науково–технічних проблем. Враховуючи, що характеристики ґрунтів та фільтруючого сольового розчину значно залежать від температурного режиму пористого середовища, актуальною є задача дослідження процесів фільтраційної консолідації в неізотермічних умовах. Також відомі математичні моделі консолідації досліджені у фіксованих областях – ефект просідання (набухання) пористого середовища в процесі консолідації не враховувався. Урахування цього ефекту приводить до крайової задачі, якою описується математична модель фільтраційної консолідації, в області з рухомими межами. Крім того, відсутній аналіз просторових задач фільтраційної консолідації. Також в математичних моделях фільтраційної консолідації ґрунтів не враховано процесів фільтраційного руйнування загалом і, зокрема, процесів контактного розмиву та контактної суфозії. Хоча для ґрунтів, які перебувають в нестабілізованому стані, особливо гостро стоїть проблема їх фільтраційного руйнування. Тому є актуальною розробка нових математичних моделей взаємозв'язаних процесів фільтраційної консолідації та фільтраційного руйнування.

Складність в математичному моделюванні взаємозв'язаних процесів фільтраційної консолідації, фільтраційного руйнування та теплосолеперенесення в пористих середовищах обумовлюється ще й необхідністю дослідження відповідних нелінійних крайових задач в областях з рухомими межами. Тому є актуальною задача розвитку та ефективного використання відомих числових методів математичної фізики (метод скінченних елементів, метод скінченних різниць, безсіткові методи) для розв'язування задач таких типів.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконана в рамках держбюджетних тематик кафедри прикладної математики

Національного університету водного господарства та природокористування в яких здобувач був виконавцем. Результати досліджень увійшли до наукових звітів за темами: “Математичне та комп’ютерне моделювання природних, техногенних і інформаційних систем” (термін виконання з 01.01.2004 по 31.12.2006 р.р., № ДР 0104U003122); “Математичне та комп’ютерне моделювання впливу природних та техногенних факторів на стан ґрунтових основ енергетичних об’єктів” (термін виконання з 01.01.2007 по 31.12.2009 р.р., № ДР 0107U004173); “Математичне та комп’ютерне моделювання фізико–хімічних процесів підземної гідромеханіки під впливом природних, техногенних і соціальних факторів” (термін виконання з 01.01.2010 по 31.12.2012 р.р., № ДР 0110U000816). Результати досліджень увійшли до проміжного наукового звіту за темою “Математичне і комп’ютерне моделювання нелінійних фізико–хімічних процесів гідромеханіки в багатокомпонентних середовищах пористої та нанопористої структури” (термін виконання з 01.01.2013 по 31.12.2015 р.р., № ДР 0113U004052), в якій здобувач є співкерівником. У рамках виконання цих науково–дослідних робіт здобувачем отримано всі результати, які становлять наукову новизну дисертаційного дослідження.

Мета і задачі дослідження. Метою роботи є побудова нових математичних моделей взаємозв’язаних процесів фільтраційної консолідації та фільтраційного руйнування гетерогенних пористих середовищ (на прикладі ґрунтів) в умовах впливу техногенних факторів, розробка алгоритмів для відшукування наближених розв’язків відповідних нелінійних крайових задач в областях з рухомими межами, встановлення, засобами комп’ютерного моделювання, закономірностей і ступеня впливу комплексу одночасно функціонуючих фізико–хімічних процесів на перебіг та зміну досліджуваних станів та явищ.

Для досягнення сформульованої мети у дисертації визначені наступні основні завдання дослідження:

- сформулювати постановки задач фільтраційної консолідації ґрунтів в умовах впливу техногенних факторів та комплексу одночасно функціонуючих взаємозв'язаних фізико–хімічних процесів з метою подальшого виведення математичних моделей, а саме: хімічного та термічного осмосів, залежності коефіцієнта фільтрації від фізико–хімічного стану пористого середовища (концентрації розчинених солей, температури, надлишкових напорів, концентрації суфозійних частинок), гетерогенних хімічних реакцій (розчинення та випадання солей в осад), теплового розширення фаз ґрунту, просідання ґрунту, виникнення та поширення областей контактного розмиву, зосереджених шляхів фільтрації, а також явищ багатofракційної контактної суфозії;
- сформувати математичні моделі взаємозв'язаних процесів фільтраційної консолідації та фільтраційного руйнування ґрунтів з урахуванням впливу техногенних факторів, хімічних масообмінних процесів, фізичних процесів просідання та розмиву ґрунту, багатofракційної контактної суфозії з метою підвищення їх (моделей) адекватності;
- сформулювати та обґрунтувати кінематичні граничні умови на рухомих межах з метою прогнозування величини просідань (набухань) та величини області розмиву, а також забезпечення коректності постановок відповідних нелінійних крайових задач;
- розробити обчислювальні алгоритми та розрахункові схеми наближеного розв'язання нелінійних крайових задач фільтраційної консолідації, контактного розмиву ґрунтів та багатofракційної контактної суфозії за наявності рухомих меж;
- розвинути та адаптувати для ефективного використання відомі чисельні методи (метод скінченних різниць, метод скінченних елементів, безсітковий метод радіальних базисних функцій) з метою наближеного розв'язання нелінійних задач фільтраційної консолідації та фільтраційного руйнування ґрунтів в умовах впливу техногенних факторів. Програмно реалізувати розроблені алгоритми та створити комплекс програмного забезпечення з

метою дослідження вищевказаних процесів в одно-, дво-, та тривимірному випадках та здійснення прогнозних розрахунків;

- методами обчислювального експерименту виявити ступінь впливу техногенних факторів на проходження процесів консолідації ґрунтів та їх фільтраційного руйнування;
- обґрунтувати та оцінити якісні характеристики наближених розв'язків нелінійної задачі фільтраційної консолідації шляхом їх відшукування та порівняння різними числовими методами.

Об'єкт дослідження – процеси фільтраційної консолідації та фільтраційного руйнування гетерогенних пористих середовищ в умовах впливу техногенних факторів.

Предмет дослідження – математичні моделі процесів фільтраційної консолідації та фільтраційного руйнування гетерогенних пористих середовищ (на прикладі ґрунтів) з урахуванням залежності коефіцієнта фільтрації від одночасного впливу фізичного та хімічного режимів пористого середовища, явищ хімічного та термічного осмосів, присутності солей в рідкій та твердій фазах, гетерогенних масообмінних процесів, а також термічного розширення фаз пористого середовища.

Методи дослідження. Основою проведених досліджень є методи математичної фізики, механіки ґрунтів, термодинаміки нерівноважних процесів, підземної гідромеханіки, гідродинаміки та ґрунтознавства. Для побудови математичних моделей процесів фільтраційної консолідації, теплосолеперенесення, фільтраційного руйнування гетерогенних пористих середовищ застосовано закони збереження. Числові методи (метод скінченних різниць, метод скінченних елементів, метод радіальних базисних функцій) використано для відшукування наближених розв'язків відповідних нелінійних крайових задач. Для відшукування скінченноелементних розв'язків крайових задач для рівнянь тепломасоперенесення застосовано стабілізаційну протипотокову схему Петрова–Гальоркіна. Метод радіальних базисних функцій ґрунтувався на методі колокації в точці. Для числового інтегрування

застосовано метод квадратурних формул Гауса. Для апроксимації залежності коефіцієнта фільтрації від теплового та сольового стану пористого середовища згідно з експериментальними даними використано метод радіальних базисних функцій та метод найменших квадратів для розв'язування відповідних перевизначених систем лінійних алгебричних рівнянь. Також для розв'язування систем лінійних алгебричних рівнянь застосовувались методи Гауса та Крейга. Використано метод лінеаризації за Ньютоном.

Наукова новизна одержаних результатів:

1. Вперше побудовано нову математичну модель фільтраційної консолідації ґрунту за наявності та поширення зони контактного розмиву, з урахуванням зосереджених шляхів фільтрації, можливості багатofракційної контактної суфозії, а також впливу теплосолеперенесення. Вперше враховано топологічну складність ґрунтів, як гетерогенних пористих середовищ для адекватного математичного описання динаміки станів та явищ, що мають місце в такого типу середовищах. З цією ж метою узагальнено закон Дарсі–Герсегова руху рідин в гетерогенних деформівних пористих середовищах (на прикладі ґрунтів) щодо комплексного урахування та формалізації дії фізичних законів та явищ термічного і хімічного осмосів, залежності параметрів фільтрації від теплового та хімічного режимів ґрунту та нелінійної залежності коефіцієнта фільтрації від функції самих надлишкових напорів.
2. Вперше сформульовано та обґрунтовано кінематичну граничну умову, яка дозволяє враховувати в математичній моделі фільтраційної консолідації явище просідання поверхні масиву ґрунту. Вперше виведено кінематичну граничну умову, яка допускає прийняття довільної залежності для швидкості руху твердих частинок (критерій розмиву) на рухомій межі контактної розмиву ґрунту фільтраційним потоком.
3. Вперше при побудові математичних моделей фільтраційної консолідації гетерогенного пористого середовища враховано явище термічного розширення фаз ґрунту. Також набув подальшого розвитку підхід, вперше

запропонований М. М. Веригінім, щодо урахування наявності солей в рівняннях нерозривності рідкої та твердої фаз ґрунту.

4. Дістало подальшого розвитку дослідження процесів фільтраційної консолідації шаруватих ґрунтів (природна шаруватість або випадок поступового зведення ґрунтової споруди) та ґрунтів з тонкими напівпроникними включеннями (включення із природних ґрунтів, які мають властивості напівпроникних мембран) в умовах впливу техногенних факторів. Запропоновано в умову спряження неідеального контакту для концентрації порового сольового розчину на включенні увести коефіцієнт, числове значення якого дорівнює ступеню ідеальності напівпроникного включення.

Вперше побудована математична модель взаємозв'язаних процесів фільтраційної консолідації шаруватих ґрунтів та контактної багатofракційної суфозії. В отриманій кінематичній граничній умові вперше враховано ефект просідання верхньої межі ґрунту не лише за рахунок процесів консолідації, але і процесів контактної суфозії.

5. Базуючись на новій математичній моделі фільтраційної консолідації вперше досліджено вплив техногенних факторів на швидкості зсувних зміщень ґрунтів. Ідею визначення швидкості зсувних зміщень з використанням математичної моделі фільтраційної консолідації ґрунтів взято з робіт М. О. Цитовича, З. Г. Тер–Мартиросяна та А. Б. Лейкам.
6. Вперше числовий розв'язок нелінійної задачі фільтраційної консолідації в умовах впливу техногенних факторів знайдено в тривимірному випадку. До цього в механіці ґрунтів та математичному моделюванні вказаних процесів в числових дослідженнях, як правило, обмежувались одно– та двовимірними випадками. Проведені числові експерименти з використанням створеного комплексу програм дозволили виявити нові закономірності при розгляді задач з однаковими вхідними параметрами в одно–, дво– та тривимірному випадках.

Практичне значення одержаних результатів. Проведені в дисертаційній роботі дослідження по розрахунку полів надлишкових та п'єзометричних напорів, розподілу концентрації хімічних речовин, температури, форми та розмірів областей розмиву фільтраційним потоком можуть бути використані при зведенні будівель, енергетичних та гідротехнічних об'єктів, а також при розрахунку стійкості ґрунтових споруд і для прогнозування величини та швидкості осідань основ будівель в умовах фільтрації сольових розчинів в неізотермічних умовах та факторів контактного розмиву і контактної суфозії. Результати розв'язання задачі фільтраційної консолідації можуть бути використані для прогнозування швидкості зміщень зсувонебезпечних ґрунтових масивів, які попадають в зону впливу техногенних факторів.

Проведені розрахунки дають змогу уточнити прогнозні характеристики протікання процесу фільтраційної консолідації ґрунтових об'єктів у випадку промислових або природних забруднень ґрунтових вод (включно із засоленістю самих ґрунтів), а також при впливі теплових полів (захоронені промислові відходи; фундаменти промислових споруд; сезонні коливання температури; дамби водойм—охолоджувачів атомних електростанцій).

На основі побудованої математичної моделі розроблений програмний комплекс, який використаний при:

- прогнозуванні протікання процесів фільтраційної консолідації з урахуванням впливу теплосолеперенесення для визначення можливого просідання верхньої межі ґрунту при проектуванні та будівництві очисних споруд науково—виробничим підприємством товариством з обмеженою відповідальністю—фірмою «АКВА—U», колективним членом Міжнародної академії наук екології та безпеки життєдіяльності (МАНЕБ) асоційованої при ООН (підтверджено актом впровадження);
- проектуванні каналізаційної насосної станції з вбудованим блоком біологічного очищення стічних вод бази відпочинку «Феміда» (с.м.т. Затока) Національного університету «Одеська юридична академія» (підтверджено актом впровадження).

Результати наукових досліджень використано в навчальному процесі при виконанні кваліфікаційних, дипломних та магістерських робіт студентами напряму підготовки і спеціальності «Прикладна математика» та відображено в робочих програмах дисциплін «Математичне і комп'ютерне моделювання природних та техногенних систем», «Чисельні методи прикладної математики», «Теорія систем та математичне моделювання», «Механіка ґрунтів, основи та фундаменти» (для студентів напрямів підготовки «Гідротехніка» та «Будівництво») в Національному університеті водного господарства та природокористування (м. Рівне). Також результати дисертації використано при проведенні експериментальних досліджень з консолідації насичених ґрунтів в геотехнічній лабораторії кафедри автомобільних доріг, основ та фундаментів цього ж університету (підтверджено актом впровадження).

Особистий внесок здобувача. Всі найважливіші нові теоретичні та прикладні результати, що складають зміст дисертаційної роботи, отримані автором самостійно. У роботах, опублікованих у співавторстві, здобувачеві належать: побудова нових математичних моделей процесів консолідації ґрунтів з урахуванням впливу техногенних факторів, дослідження відповідних нелінійних крайових задач з використанням чисельних методів (скінченних елементів та скінченних різниць) [65]; побудова нових математичних моделей процесів консолідації ґрунтів та їх контактного розмиву з урахуванням впливу техногенних факторів, їх дослідження з використанням безсіткового чисельного методу радіальних базисних функцій та порівняння наближених розв'язків різними числовими методами [70]; побудова нової математичної моделі процесу фільтраційної консолідації засолених ґрунтів в неізотермічному режимі при урахуванні наявності солей у рідкій та твердій фазах [398, 90]; застосування безсіткового методу радіальних базисних функцій для знаходження наближеного розв'язку крайової задачі, якою описується математична модель процесу фільтраційної консолідації у тривимірній області [399, 66, 57]; побудова нової математичної моделі фільтраційної консолідації масиву трифазного ґрунту з урахуванням масоперенесення солей в

неізотермічному режимі [72]; побудова нової математичної моделі взаємозв'язаних процесів контактного розмиву і фільтраційної консолідації ґрунтів з урахуванням впливу техногенних факторів та наявності суспензії в області розмиву, виведення кінематичної граничної умови на межі контактного розмиву [80]; спеціальний алгоритм коригування нумерації вузлів скінченноелементної сітки, алгоритм видалення трикутників у випадку триангуляції неопуклих областей, алгоритми для вузлового покриття опуклих багатогранних областей в тривимірному випадку, алгоритм вузлації межі опуклої багатогранної області на основі повороту площини [194–197]; побудова нової математичної моделі процесу фільтраційної консолідації ґрунту з урахуванням впливу техногенних факторів в одновимірному випадку [39–41]; чисельне розв'язання та порівняння наближених розв'язків двовимірної задачі фільтраційної консолідації ґрунту з урахуванням впливу перенесення солей в неізотермічному режимі методами скінченних різниць та скінченних елементів [43, 45]; побудова нової математичної моделі задачі фільтраційної консолідації масиву ґрунту, який містить тонке напівпроникне включення з урахуванням впливу техногенних факторів [42, 47]; побудова нових математичних моделей двовимірних задач фільтраційної консолідації тіла ґрунтової греблі та масиву ґрунту з урахуванням масоперенесення солей в неізотермічному режимі [44, 49, 54, 69]; побудова нових математичних моделей одновимірної задачі фільтраційної консолідації зростаючого в часі ґрунтового масиву та зростаючого тіла ґрунтової греблі з урахуванням впливу техногенних факторів [48, 55, 56]; використання для математичного моделювання фільтраційної консолідації ґрунтів в неізотермічних умовах рівнянь нерозривності з урахуванням теплового розширення фаз пористого середовища [51, 58]; урахування просідань в математичній моделі процесу фільтраційної консолідації ґрунту, виведення кінематичної граничної умови на рухомій межі [83–85]; побудова нової математичної моделі процесу фільтраційної консолідації ґрунту з урахуванням повзучості його скелету та впливу техногенних факторів [87–89]; побудова нової математичної моделі

контактного розмиву неоднорідного масиву ґрунту фільтраційним потоком [53, 62, 60]; побудова нової математичної моделі фільтраційної консолідації ґрунту під плоским флютбетом з урахуванням контактного розмиву фільтраційним потоком [59, 63]; числове розв'язання одновимірної задачі фільтраційної консолідації масиву ґрунту в умовах впливу тепломасоперенесення методом радіальних базисних функцій, порівняння отриманих результатів з числовими розв'язками згідно методів скінченних елементів та скінченних різниць [64]; побудова нових математичних моделей фільтраційної консолідації ґрунтів з урахуванням контактного розмиву, впливу техногенних факторів та руху суспензії в області розмиву [61, 67, 71, 74, 75]; побудова нової математичної моделі фільтраційної консолідації тіла ґрунтової греблі із зосередженим шляхом фільтрації в її ядрі в умовах впливу техногенних факторів [77]; відшукування та порівняльний аналіз числових розв'язків математичної моделі фільтраційної консолідації з урахуванням повзучості скелету ґрунту та впливу тепло–масоперенесення методами радіальних базисних функцій та скінченних елементів [78, 68]; побудова математичної моделі фільтраційної консолідації ґрунту з урахуванням нелінійного закону Дарсі–Герсеванова та впливу техногенних факторів [79]; побудова нової математичної моделі фільтраційної консолідації двофазного ґрунту з урахуванням повзучості та просідань його скелету в умовах впливу теплосолеперенесення [81, 92]; побудова нової математичної моделі взаємозв'язаних процесів фільтраційної консолідації та багатofракційної контактної суфозії, виведення кінематичної граничної умови [191]; розробка модулів програм, які увійшли в програмний комплекс «Фільтраційна консолідація ґрунтів з урахуванням впливу техногенних факторів» [193]; розробка програмного забезпечення та проведення числових експериментів з дослідження фільтраційної консолідації ґрунтової греблі хвостосховища Стебницького Державного гірничо–хімічного підприємства «Полімінерал» [123]; огляд експериментальних залежностей характеристик ґрунтів від різних факторів (концентрація порового сольового розчину; температура; пористість), побудова апроксимаційних поліномів методом

найменших квадратів [86]; для оцінки якісних характеристик порівняння числових розв'язків крайових задач для рівнянь параболічного типу методами радіальних базисних функцій та скінченних елементів [188, 192]; використання моделі фільтраційної консолідації ґрунтів з урахуванням впливу тепломасоперенесення для прогнозування зсувних процесів [189, 190]; побудова математичної моделі фільтраційної консолідації ґрунту під плоским флютбетом з урахуванням контактного розмиву згідно однофазної задачі Стефана [73, 76, 91].

В усіх роботах, написаних у співавторстві, здобувачеві належать постановки крайових задач, формулювання алгоритмів та розрахункових схем відшукування числових розв'язків нелінійних крайових задач методами скінченних елементів, скінченних різниць та радіальних базисних функцій, проведення всіх числових експериментів та їх аналіз. В роботі [205] здобувачем запропоновано врахувати неізотермічні умови та наявність солей в рівняннях нерозривності рідкої та твердої фаз пористого середовища при побудові нових математичних моделей консолідації засолених ґрунтів.

Протягом всього періоду роботи над дисертаційним дослідженням д. т. н., проф. А. П. Власюк здійснював ефективне наукове консультування, яке полягало в обговоренні та постановках задач з дослідження технічних об'єктів, участь в обговоренні теоретичних результатів та результатів числових експериментів, підготовка рукописів наукових робіт, обговорення та визначення напрямків досліджень.

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертації доповідались та обговорювались на 19-ти міжнародних та вітчизняних наукових конференціях, зокрема: на Всеукраїнських наукових конференціях "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики" (2002–2009 рр., м. Львів); на Міжнародних наукових конференціях ім. акад. М.Кравчука (2004, 2008, 2010 рр., м. Київ); на Всеукраїнській науково-методичній конференції "Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації" (2004 р., м. Кам'янець–Подільський); на International Conferences "Problems of

decision making under uncertainties" (2005–2010); на III-й Міжнародній конференції “Обчислювальна та прикладна математика” присвяченій пам’яті академіка НАН України І. І. Ляшка (2009 р., м. Київ). В повному обсязі робота доповідалась на міжкафедральному науковому семінарі факультету прикладної математики та інформатики Львівського національного університету імені Івана Франка, м. Львів; на розширеному науковому семінарі кафедри системного аналізу та теорії прийняття рішень Київського національного університету імені Тараса Шевченка, м. Київ; на розширеному науковому семінарі Центру математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, м. Львів; на розширеному науковому семінарі відділу чисельних методів та комп’ютерного моделювання Інституту кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України; на розширеному науковому семінарі кафедри прикладної математики Національного університету водного господарства та природокористування, м. Рівне.

Публікації. За темою дисертації опублікована 71 наукова праця, у тому числі: 2 монографії; 49 статей, з них 6 у наукових виданнях, які входять до наукометричних баз (Scopus, MathSciNet, zbMATH, РИНЦ(eLibrary.ru), MathNet.ru), 22 статті у наукових фахових виданнях з технічних наук, 7 статей у наукових фахових виданнях з фізико–математичних наук; 1 свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір; 19 публікацій в матеріалах міжнародних та національних конференцій; 7 праць опубліковано без співавторів.

Користуючись нагодою хочу висловити щире подяку своєму науковому консультанту доктору технічних наук, професору, завідувачу кафедри інформаційних систем та обчислювальних методів Міжнародного економіко–гуманітарного університету ім. академіка Степана Дем’янчука, м. Рівне, Анатолію Павловичу Власюку за постановку задач, цінні поради і постійну увагу до роботи.

РОЗДІЛ 1

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ПРОЦЕСІВ КОНСОЛІДАЦІЇ ТА ФІЛЬТРАЦІЙНОГО РУЙНУВАННЯ ҐРУНТІВ (ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ)

1.1. Ґрунти як основи та матеріал для зведення інженерних споруд

Згідно твердження П. Я. Полубаринової–Кочиної [222] ґрунт потрібно розглядати як єдину систему, яка складається із мінеральних частинок, колоїдних частинок, води, яка їх оточує, з розчиненими в ній солями та газоподібної фази (повітря, водяна пара). Ґрунти класифікують на скельні та нескельні (рихлі). Нескельні ґрунти поділяються на два типи: піщані (незв'язні) (рис. 1.1) та глинисті (зв'язні) (рис. 1.2). Проміжне положення у такій класифікації займають супіски та суглинки залежно від відсоткового співвідношення вмісту піску та глини в них. Піщані ґрунти складаються з об'ємних дискретних частинок, а глинисті – з пластинок. Форма частинок впливає на сили взаємодії між ними і є визначальною у властивостях ґрунтів різних типів. Детально про властивості глинистих порід з точки зору їх структури описано в роботі В. І. Осипова, В. М. Соколова, Н. А. Румянцевої [213]. Детально про властивості ґрунтів та історичну еволюцію наукових уявлень про них описано в роботах [113, 114].

Ґрунти є об'єктом наукових досліджень, оскільки в будівництві інженерних споруд використовуються як основи і як матеріал.

В історичній ретроспективі механіка ґрунтів, як самостійна наукова дисципліна, виокремилась в першій половині XX-го століття. Тому зі спорудами, зведеними до вказаного періоду, досить часто виникали і виникають критичні ситуації. Пов'язані вони в основному з неврахуванням особливостей та властивостей ґрунтів на яких зводились споруди, що призводило до нерівномірних просідань та деформацій їх ґрунтових основ. Результатом таких прогалин в попередній оцінці ґрунтової основи є аварійний

стан зведеної споруди, аж до повного її руйнування. Показовий приклад, який зберігся до наших часів, – Пізанська вежа (рис. 1.3).

«Падаючі» вежі характерні для багатьох країн світу. Наприклад, «падаюча» вежа в Ірландії Kilmacduagh Monastery's Round Tower в графстві Галвей (рис. 1.4, а) відхилилась від власної осі приблизно на 50 см. Церква Suurhusen побудована в Німеччині в 1450–му році (рис. 1.4, б). Її верхня частина відхилилась на 5.19 градуси при загальній висоті вежі близько тридцяти метрів. В Україні відомою «падаючою» вежею є велика дзвіниця Києво–Печерської Лаври. Її відхилення від вертикалі на даний час складає 62 см.



Рис. 1.1. Пісок (<http://investments.academic.ru/1268/песок>)

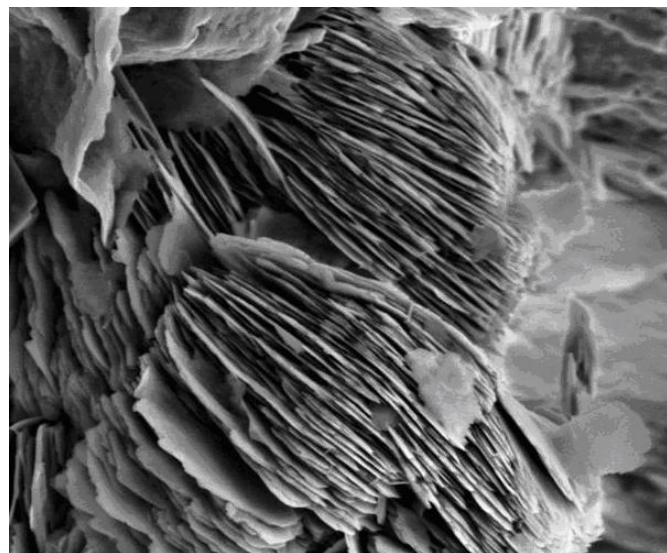


Рис. 1.2. Каолін (біла глина) під електронним мікроскопом (<http://community.ceramicartsdaily.org/gallery/image/3409-kaolin-electron-micrograph/>)

Незважаючи на значний інженерний досвід та наукові здобутки в механіці ґрунтів, будівництві, математичному моделюванні процесів в гетерогенних пористих середовищах, аварійні ситуації, пов'язані із нерівномірними деформаціями промислових та цивільних споруд трапляються і в ХХІ–му столітті. Не оминають проблеми аварійних та критичних станів споруд в результаті нерівномірних деформацій їх ґрунтових основ і Україну. Один із

типових прикладів – аварійний стан середньої школи №36 в м. Миколаїв (рис. 1.5). Основна причина аварійного стану – нерівномірні просідання ґрунтів під фундаментом споруди. В селі Сапежанка (Вінницька область) прийшли в аварійний стан близько десяти приміщень в результаті нерівномірних просідань ґрунтової поверхні (рис. 1.6). Однією з причин нерівномірних просідань поверхні ґрунту є його ущільнення (консолідація) під впливом змінних гідрогеологічних та фізико-хімічних умов. Необхідність урахування процесів консолідації ґрунтів на етапі проектування інженерних споруд в Україні закріплено на законодавчому та нормативному рівні (ДБН А.2.1–1–2008 «Інженерні вишукування для будівництва», пункти 3.2.6.6.3, 3.2.6.6.6; ДБН В.2.1–10–2009 «Основи та фундаменти споруд», пункти 7.10.4, 9.3.1, 9.6.8; ДБН В.2.4–Х:201Х (проект) «Греблі з ґрунтових матеріалів», пункти 5.1.6, 6.6.1, 6.6.14, 9.1, 9.12).



Рис. 1.3. Пізанська вежа

(<http://nnm.me/blogs/Ser-ser/ne-pizoy-edinoy-naklonnye-i-padayushie-bashni/>)



а



б

Рис. 1.4. «Падаючі» вежі
Kilmacduagh Monastery's Round Tower (а) та церква Suurhusen (б)
(<http://nnm.me/blogs/Ser-ser/ne-pizoy-edinoy-naklonnyye-i-padayushie-bashni/>)



Рис. 1.5. Фрагмент фасаду аварійного приміщення школи №36 м. Миколаїв
(<http://podrobnosti.mk.ua/2013/08/20/foto-uchenikov-avarijnoj-shkoly-36-razbrosali-po-dvum-uchebnym-zavedeniyam-nikolaeva.html>)



Рис. 1.6. Нерівномірні деформації ґрунтової поверхні в с. Сапежанка (Вінницька обл.) (<http://ruslentanews.com/news/kriminal/47616-v-vinnickoy-oblasti-v-rezultate-prosedaniya-pochvy-povrezhdeny-tri-doma.html>)

Якщо аварійні стани приміщень та промислових споруд в основному пояснюються нерівномірними просіданнями їх ґрунтових основ, що є прямим наслідком їх нерівномірного ущільнення, набухання або(та) фільтраційного руйнування, а також їх неоднорідною структурою на макрорівні, то аномальні провали ґрунту в різних місцях світу (рис. 1.7) з'ясовані не до кінця. В більшості випадків – це руйнівна «робота» підземних вод, витoki із міських аварійних підземних комунікацій, людська діяльність з видобування корисних копалин без належного урахування подальших наслідків цих робіт для навколишнього середовища.

Природна неоднорідність ґрунтових масивів на макрорівні (шаруватість, наявність тонких включень) досить часто є причиною їх розмиву ґрунтовими водами вздовж межі контакту [366] (рис. 1.8). Дане явище і процес називають контактним розмивом. Неоднорідність ґрунтів може бути і штучною. Це стосується інженерних конструкцій, в яких ґрунт є матеріалом – ґрунтових гребель з протифільтраційними ядрами та екранами (рис. 1.9). При виникненні тріщин в глинистому ядрі греблі можливий подальший розмив її ґрунту з утворенням зосереджених шляхів фільтрації. Також можливий контактний розмив вздовж межі контакту глинистого ядра та ґрунту греблі. Це може призвести до критичних ситуацій під час експлуатації гідротехнічної споруди, аж до повного її руйнування (рис. 1.10).

Одна з найбільш відомих та масштабних аварій на ґрунтових греблях в XX-му столітті – це руйнування 93-метрової греблі Тетон (штат Айдахо, США) в 1976 році (рис. 1.11). Причина розмиву – підвищена фільтрація через основу греблі, неврахування даного фактору на етапі проведення проектних робіт та під час самого будівництва гідротехнічної споруди. Лише повільне протікання процесу дозволило завчасно провести евакуацію населення, але економічні збитки склали 1 мільярд доларів США.



а



б



в



г



д

Рис. 1.7. Аномальні провали ґрунтової поверхні
в м. Березники (Пермський край, Росія) (а) (<http://kratko-news.com/2012/09/30/anomalnyj-proval-grunta-v-bereznikah-uchenye-v-pedoumenii/>); в м. Галліполі (Італія) (б);
в м. Сан-Дієго (США) (в); в м. Шмалькальден (Німеччина) (г);
в м. Гватемала-Сіті (Гватемала) (д) (<http://politicon1.at.ua/forum/38-3269-1>)



Рис. 1.8. Контактний розмив ґрунту (Міссісіпі, США)

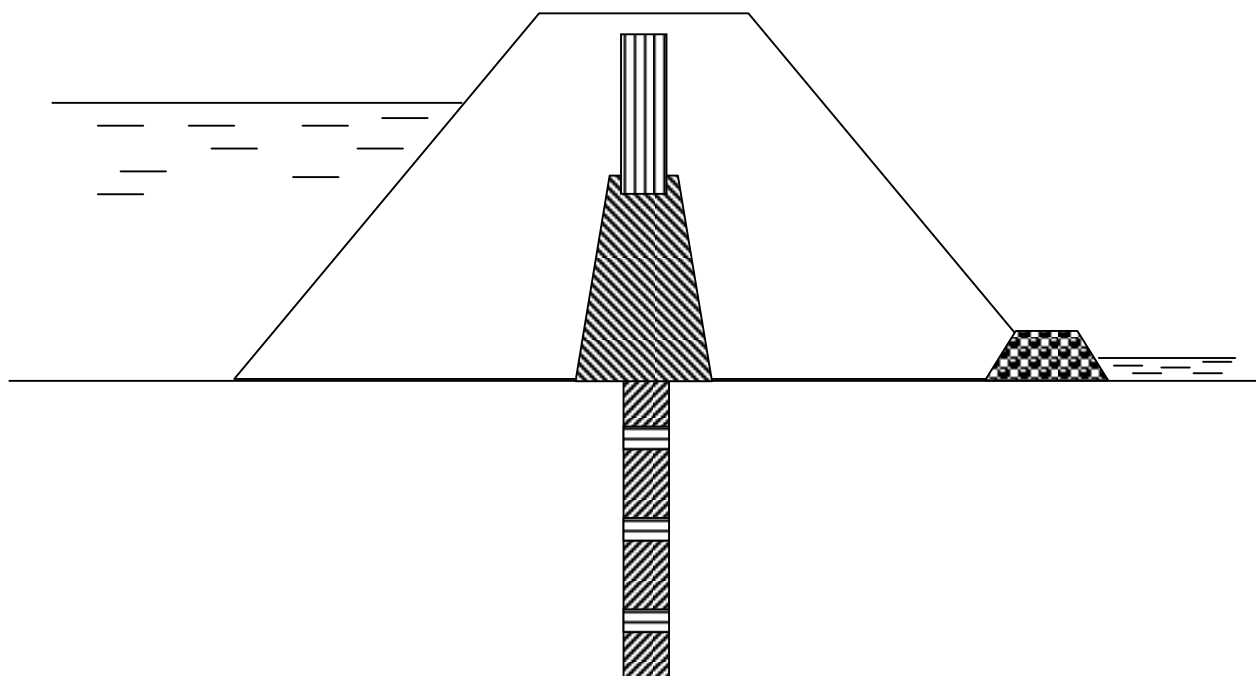
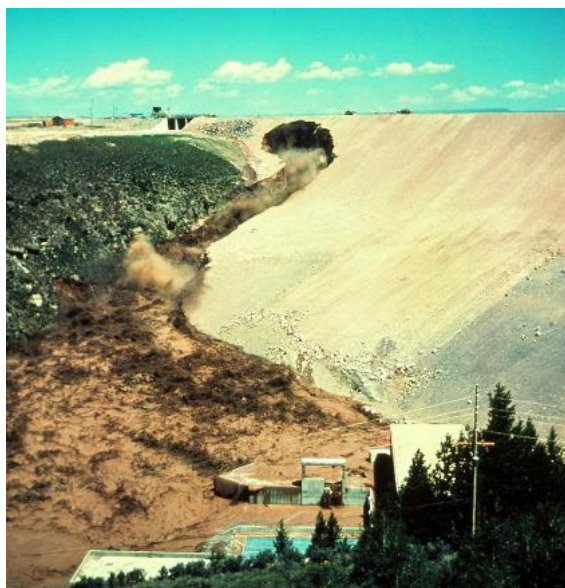


Рис. 1.9. Схема ґрунтової греблі з глинистим ядром в тілі та протифільтраційним екраном в основі [144]



Рис. 1.10. Зруйнована ґрунтова дамба під залізничним полотном [376]



а



б

Рис. 1.11. Руйнування ґрунтової греблі Тетон
(http://copypast.ru/2007/07/16/proryv_damby_teton_19_foto.html):
початок процесу (а); прорив греблі (б)

В наукових дослідженнях значна увага приділяється експериментальному вивченню процесів фільтраційного руйнування ґрунтів. Наприклад, в роботі [295] досліджено зразки каоліну на розмив при наявності зосередженого шляху фільтрації (рис. 1.12). Аналогічно для прикладу на рис. 1.13 наведено

проміжний етап натурних досліджень розмиву ґрунту в модельній греблі через зосереджений шлях фільтрації.



Рис. 1.12. Зразки експериментального дослідження каоліну на розмив через зосереджений шлях фільтрації



Рис. 1.13. Розмив тіла модельної ґрунтової греблі через зосереджений шлях фільтрації [400]

Однак, проведення натурних експериментів з фільтраційного руйнування ґрунтів вимагає значних затрат ресурсів та часу. Тому в багатьох випадках доцільніше застосовувати математичне та комп'ютерне моделювання. Особливо це стосується тих об'єктів та процесів, де проведення натурних експериментів неможливе або занадто трудомістке.

Згідно роботи О. А. Самарського, О. П. Михайлова [245] сутність методології математичного моделювання полягає в заміні вихідного об'єкта його «образом» – математичною моделлю – та подальшим вивченням моделі за

допомогою реалізованих на комп'ютерах обчислювально–логічних алгоритмів. Також О. А. Самарський, О. П. Михайлов відмічають, що зараз (станом на 2001 рік) математичне моделювання вступає в третій принципово важливий етап свого розвитку, вбудовуючись в структури інформаційного суспільства. Історія методології математичного моделювання переконує: вона (методологія) може і повинна бути інтелектуальним ядром інформаційних технологій, всього процесу інформатизації суспільства.

В роботі І. І. Блехмана, А. Д. Мишкіса, Я. Г. Пановко [15] дане наступне визначення: «Будемо говорити, що об'єкт a' є моделлю об'єкта a відносно деякої системи S характеристик (властивостей), якщо a' будується для імітації a по цих характеристиках». Також авторами вказується, що математична модель формулюється на мові математики. А. В. Катренко [146, ст. 76] дещо уточнює наведене визначення. Зокрема, модель – це заміщував об'єкта дослідження, що перебуває з ним в такій відповідності, яка дозволяє отримати нове знання про цей об'єкт. Тобто, ціллю моделювання є отримання нових знань. Подібне означення моделі наведено також в роботі Б. Я. Советова, С. О. Яковлева [250].

К. Е. Плохотніков наводить наступні два означення [221]: «Означення №1. Під математичним моделюванням деякої предметної області розуміється специфічна людська діяльність, яка розгортається поетапно ... і яка приводить до створення супермоделі, яка є системним об'єднанням окремих моделей об'єктів.

Означення №2. Математичною моделлю об'єкта дослідження є така конструкція, яка містить: 1) специфічні для даного об'єкта дослідження: визначення об'єкта дослідження в цілому, дискретного елемента об'єкта і, відповідно, ансамблю дискретних елементів; 2) математичний апарат, який описує: окремий елемент об'єкта дослідження, ансамбль елементів, а також переходи між ними». При цьому автор вводить поняття супермоделі: «Поява супермоделі дає можливість подати множину моделей предметної області з

точки зору багатогранності її цілісних властивостей і різноманітних представлень дискретних елементів об'єктів дослідження».

В роботі [243] О. А. Самарським та П. М. Вабіщевичем відмічається, що моделювання в широкому розумінні являє собою двоєдиний процес створення моделей та дослідження моделей після їх побудови. Авторами пояснене розуміння терміну «обчислювальний експеримент», який був вперше введений О. А. Самарським. В методологічному сенсі під обчислювальним експериментом розуміється нова технологія наукових досліджень, основні етапи якої наведено на рис. 1.14. Авторами виділено три типи обчислювальних експериментів – пошуковий, оптимізаційний та діагностичний. При цьому для пошукового обчислювального експерименту ставиться у відповідність пряма задача, оптимізаційному – задача оптимізації, а діагностичному – обернена задача. В дисертаційному дослідженні використане саме таке визначення математичного моделювання, а для деяких задач реалізовано повну схему пошукового обчислювального експерименту.

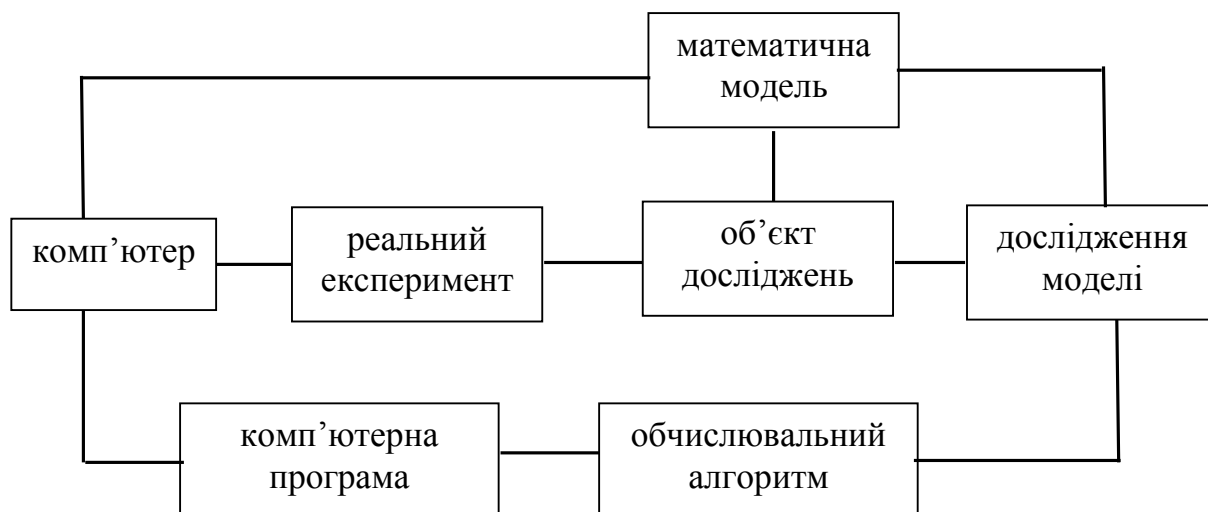


Рис. 1.14. Схема обчислювального експерименту за О. А. Самарським

1.2. Математичні моделі процесів консолідації ґрунтів: огляд літератури

В процесі будівництва цивільних і промислових об'єктів на ґрунтові основи прикладаються значні навантаження. Ці навантаження змінюють напружено-деформований стан пористого ґрунтового середовища. Якщо ґрунт насичений деякою рідиною (в найпростішому випадку – водою), то відповідні напруження

спричиняють появу надлишкового тиску в поровій рідині. Цей надлишковий тиск негативно впливає як на самі ґрунтові основи, так і на зведені споруди. Зокрема, збільшується ймовірність зсувів, нерівномірних просіданні ґрунту, зменшення несучої здатності ґрунтових основ і втрат стійкості зведених будівель, аж до повного їх руйнування. Сам процес розсіювання надлишкових тисків в ґрунті приводить до зближення твердих частинок ґрунту і, в результаті, до ущільнення ґрунтової основи під впливом прикладеного навантаження. Цей процес відомий в науковій літературі, як консолідація насиченого ґрунту. Завчасне прогнозування протікання процесів консолідації ґрунтів дозволяє передбачити критичні ситуації і своєчасно їм запобігти. Тому проблема консолідації ґрунтів, хоча їй і приділено багато наукових праць, залишається достатньо актуальною. Про це свідчать численні деформації будівель в результаті ущільнення і набухання, наприклад, глинистих порід в їх основах [112, 131, 135, 136]. За даними Геологічної служби США прямі і побічні збитки, викликані даними явищами в різних державах світу, досягають сотень мільярдів доларів і співрозмірні з втратами від великих катастроф (землетрусів і повеней) [251]. Тому задача консолідації фільтрації ґрунтів пов'язана з безпекою і безаварійністю експлуатації гідротехнічних, енергетичних, промислових і цивільних споруд, які побудовані на даних ґрунтах.

До математичного моделювання процесів консолідації ґрунтів існує кілька підходів. Однією з теорій консолідації ґрунтів є фільтраційна теорія консолідації Терцагі–Герсєванова–Флоріна. Вперше зробив постановку одновимірної задачі ущільнення ґрунту відомий німецький вчений К.Терцагі [393]. Подальшого розвитку теорія консолідації набула в роботах М.М.Герсєванова [100]. В.А.Флорін [137, 262, 263] систематизував фільтраційну теорію консолідації ґрунтів та сформулював ряд задач з урахуванням окремих факторів: повзучість скелету ґрунту, структурна міцність ґрунтів та початковий градієнт напору, стискуваність порової води та затиснутого скелетом повітря. В.А.Флорін вперше врахував газову фазу та запропонував для зв'язку між об'ємом повітряної фази та зміною тиску

використовувати закон Бойля–Маріотта, а для характеристики розчинення газу в поровій воді – закон Генрі. Він дав постановку плоскої та просторової задач консолідації, виходячи з моделі ґрунту (так званої “основної розрахункової” моделі), яка допускає прийняття будь–яких деформаційних властивостей скелету ґрунту. Основна розрахункова модель ґрунту В.А.Флоріна базується на серйозному припущенні, що напружений стан насиченого ґрунтового середовища в цілому в будь–який момент часу t співпадає з напруженим станом насиченого ґрунтового середовища в припущенні його миттєвої консолідації. Основою математичної моделі фільтраційної консолідації масиву трифазного ґрунту є рівняння в частинних похідних параболічного типу відносно невідомої функції надлишкових напорів.

Далі значного розвитку теорія фільтраційної консолідації набула в працях М. О. Цитовича, Ю. К. Зарецького, М. М. Веригіна, З. Г. Тер–Мартиросяна, В. В. Скопечького, В. С. Дейнеки, В. М. Булавацького, В. І. Лаврика, А. Ф. Клементьєва, І. А. Лучко, О. Я. Олійника, В. М. Ніколаєвського, О. Л. Гольдіна, Л. В. Горелика, Й. Й. Лучко, Б. М. Нуллера, Т. Ш. Ширинкулова, О. В. Школи, М. Р. Петрика та ін. [22–27, 33, 108–111, 122, 130, 148, 149, 169, 212, 232, 233, 249, 284, 285].

В. А. Флорін [262] висунув більш загальну теорію консолідації ґрунтів – так звану “теорію об’ємних сил”. Основна відмінність даної теорії від теорії Терцагі–Герсєванова–Флоріна полягає в тому, що взаємодія фаз ґрунту представлена дією порової рідини на скелет ґрунту у вигляді об’ємних сил. Подібну модель ґрунту запропонував також М. Biot [296]. Відповідну теорію консолідації ґрунтів називають теорією Флоріна–Біо і в ній до пористих водонасичених матеріалів застосовуються принципи теорії пружності. Дана теорія отримала подальший розвиток в роботах Ю. К. Зарецького, М. І. Дроботенко, А. В. Костерина, О. П. Березіної, В. В. Орєхова, М. Biot, L. Laloui, R. Lancellotta, L. Preziosi і ін. [122, 130, 158, 356, 357].

Однак, як відмічено П. Л. Івановим [137], складність математичної моделі консолідації ґрунтів згідно теорії об’ємних сил значно ускладнює її широке

застосування, оскільки теорія Флоріна–Біо вимагає одночасного визначення напружено–деформованого стану ґрунтового середовища та порового тиску, як функції координат та часу. Фільтраційна теорія консолідації на основі основної розрахункової моделі Флоріна вільна від вказаних недоліків, оскільки дану задачу вдалося розділити на дві окремі – задачу визначення стабілізованих напружень та задачу лише самого процесу консолідації (задачу визначення порового тиску).

В роботах О.В. Школи та його учнів започатковано дослідження процесів фільтраційної консолідації в рамках нелінійної моделі [284, 285]. Головна передумова рівняння нелінійної консолідації: залежність коефіцієнта консолідації c_v від функції $h^n(x,t)$, де $h(x,t)$ – надлишкові напори в поровій воді, $n > 0$ – параметр, який виражає інтенсивність впливу порового тиску на процес консолідації [285].

В роботах М. Р. Петрика [217–219] побудовано і досліджено математичні моделі фільтраційної консолідації неоднорідних середовищ, що містять вологовмісті пористі частинки.

Але результати всіх вищевказаних робіт отримані виходячи з припущення, що поровою рідиною є чиста вода. В роботах А. П. Власюка, О. В. Жеребятьєва, П. М. Мартинюка [36, 38, 46, 179, 180] вперше зроблено спробу при математичному моделюванні консолідації ґрунтів урахувати наявність в поровій воді розчинених солей. Актуальність вказаної задачі обґрунтована в роботах [46, 180]. Відмінність математичної моделі фільтраційної консолідації ґрунту з урахуванням впливу переносу солей від моделі класичної теорії полягає в урахуванні залежності коефіцієнта фільтрації від концентрації порового сольового розчину та наявності хімічних осмотичних явищ.

Експериментальні залежності коефіцієнта фільтрації, а отже і швидкості фільтрації, від концентрації розчинених у воді солей наведені в роботах Б. Б. Бакенова, А. П. Власюка, М. Т. Кузло, А. А. Мустафаєва, В. П. Петрухіна, Л. І. Кульчицького, В. М. Гольдберга, О. Й. Фіалко, Ф. О. Руденко, С. Б. Ухова,

В. М. Павілонського, Л. В. Чиндиної та ін. [8, 37, 105, 164, 207, 214, 220, 258, 259]. Наприклад, для вивчення фізико–хімічних процесів, що проходять при фільтрації сольових розчинів і встановлення кількісної оцінки їх впливу на проникливість ґрунтів А. П. Власюком та М. Т. Кузлом [37] в геотехнічній лабораторії кафедри механіки ґрунтів, основ і фундаментів Національного університету водного господарства та природокористування (НУВГП) виконано серію експериментів з визначення коефіцієнта фільтрації для піщаних ґрунтів. Результати проведених досліджень коефіцієнта фільтрації від концентрації фільтруючого розчину для одиничного градієнта напору наведені в табл. 1.1.

Табл. 1.1. Результати досліджень коефіцієнта фільтрації сольових розчинів в піщаних ґрунтах [37]

концентрація фільтраційного розчину c , %								
коефіцієнт фільтрації k , м/доба								
0	1	2	3	4	5	6	7	8
18,4	20,7	25,3	29	30,4	31	23	19,8	18,4

концентрація фільтраційного розчину c , %							
коефіцієнт фільтрації k , м/доба							
9	10	11	12	13	14	15	16
17,5	16,1	15,2	13,8	12,9	12,4	11,5	10,2

Як відмічається в роботі [37], фільтрація сольового розчину з хімічної точки зору являє собою рух електроліту в поровому просторі скелета ґрунту. При цьому, в умовах описаних експериментів, мінеральні частинки скелета ґрунту заряджені негативно, а сольового розчину – позитивно. Як видно з табл. 1.1, при збільшенні концентрації сольового розчину NaCl від 0% до 5% коефіцієнт фільтрації різко зростає. При концентрації 5% коефіцієнт фільтрації досягає максимуму. Зростання коефіцієнта фільтрації при збільшенні концентрації фільтруючого сольового розчину до 5% відбувається внаслідок дії електростатичних сил. При фільтрації сольового розчину невеликих концентрацій відбувається стиснення дифузійних шарів рихлозв'язної води навколо мінеральних частинок скелету ґрунту. В результаті чого відбувається

збільшення ефективного діаметра пор скелету ґрунту, а отже і його проникності.

При подальшому збільшенні концентрації сольового розчину спостерігається так зване явище осолонцювання ґрунтів, що призводить до різкого зменшення його проникності, а відповідно і коефіцієнта фільтрації сольового розчину.

Досить повні результати досліджень впливу мінералізації водних розчинів на коефіцієнт проникливості та коефіцієнт фільтрації гірських порід наведені в роботі О. Й. Фіалко, Ф. О. Руденко [259]. Встановлено, що з підвищенням ступеня мінералізації водних розчинів коефіцієнт водопроникливості збільшується до тих пір, поки концентрація солей в розчині не досягне певної величини C_m , яка залежить від типу дослідженої гірської породи. Зменшення або збільшення концентрації порового сольового розчину зменшує фільтраційні властивості породи.

Відомо, що глинисті ґрунти, для яких особливо гостро стоїть проблема консолідації, мають властивості напівнепроникних мембран [322, 323]. Тому в нерівномірно засолених глинистих ґрунтах можуть спостерігатись аномальні тиски, які спричиняються осмотичними явищами [293, 370, 377]. Зокрема, в роботі С. Е. Neuzil [371] наведено результати спостереження таких явищ в природних геологічних формаціях. Ще більше досліджень хімічного осмосу проведено в лабораторних умовах [97, 98, 237, 348–351, 364].

В роботі Б. Ф. Рельтова, Н. А. Новицької, Ю. С. Большакової [237] відмічається спостереження нормальної осмотичної фільтрації, коли розчинник (вода) рухається від зони з меншою концентрацією сольового розчину до зони з більшою концентрацією сольового розчину та аномальної осмотичної фільтрації (протилежної до нормальної). Також вказується, що для деяких ґрунтів при малих концентраціях електролітів спостерігається фільтрація, напрямлена в сторону меншої концентрації солі. Швидкість цієї фільтрації закономірно збільшується зі збільшенням концентрації солі до 10%, а потім зменшується, і при 20% спостерігається нормальна осмотична фільтрація.

Вплив фільтрації сольових розчинів на процеси фільтраційної консолідації ґрунтів досліджено в роботах В. В. Скопечького, В. М. Булавацького, В. І. Лаврика, Ю. Г. Кривоноса, І. В. Рogaля [22–27, 249], де відповідні математичні моделі побудовано з урахуванням релаксаційних ефектів.

Однак, техногенний вплив людської діяльності на навколишнє середовище полягає не лише в зміні хімічного складу порової рідини, але і в зміні теплового стану пористого середовища. Всі вищезгадані дослідження фільтраційної консолідації проведено у випадку ізотермічних умов. Враховуючи, що характеристики ґрунтів та фільтруючого сольового розчину значно залежать від температурного режиму пористого середовища [157, 280], і навпаки [161], актуальною є задача дослідження процесів фільтраційної консолідації в неізотермічних умовах.

На даний час відомі експериментальні дослідження, в яких вказується на залежність коефіцієнта фільтрації від температури [21, 170]. На рис 1.15 [21] наведені графіки залежностей коефіцієнта фільтрації від температури для каоліну та гумбрину. Як видно, для гумбрину в інтервалі температур від 3⁰С до 70⁰С коефіцієнт фільтрації зростає на чотири порядки.

Дослідженню впливу підвищених температур та тиску на фільтраційні властивості глинистих ґрунтів присвячені роботи О.Й. Фіалко та А. В. Шостака [286, 287]. Зокрема відмічається [286], що при зростанні температури від 20⁰С до 60⁰С об'єм профільтрованої через ґрунт води зростає на 70÷80%. Результати експериментів засвідчують про загальне зростання величини коефіцієнта фільтрації при підвищенні температури у вищевказаних межах у всіх різновидів пілуватоглинистих ґрунтів. Також потрібно відмітити, що в глинистих ґрунтах монтморилонітового складу збільшення температури від 20⁰С до 45⁰С призводить до зростання коефіцієнта фільтрації в 2÷3 рази [286]. Такі дані ще раз засвідчують про недопустимість нехтування у прогностичних розрахунках залежностей параметрів фільтрації від теплового стану пористого середовища.

Залежність величини потоку відфільтрованої води від температури засвідчують і результати роботи F. Zhang, R. Zhang, S. Kang [403]. Показано, що

при зростанні температури від 20°C до 35°C величина потоку води, яка фільтрується через ґрунт, може зрости в $1,5\div 2$ рази. Також відмічено, що вплив температури на потік води зростає при збільшенні частини глинистої фракції в ґрунті, а також при збільшенні водонасиченості ґрунту. Також дані про збільшення проникливості глин при зростанні температури наведено в роботі В. М. Гольдберга [105]. Збільшення проникливості відбувається особливо інтенсивно від температур $40\div 60^{\circ}\text{C}$ і продовжується до $80\div 90^{\circ}\text{C}$. Автори дане явище пояснюють руйнуванням шарів рихлозв'язної води. Аналогічні дані по залежності коефіцієнта проникливості глинистих ґрунтів від температури наведені в роботах В. М. Гольдберга та М. П. Скворцова [106, 107].

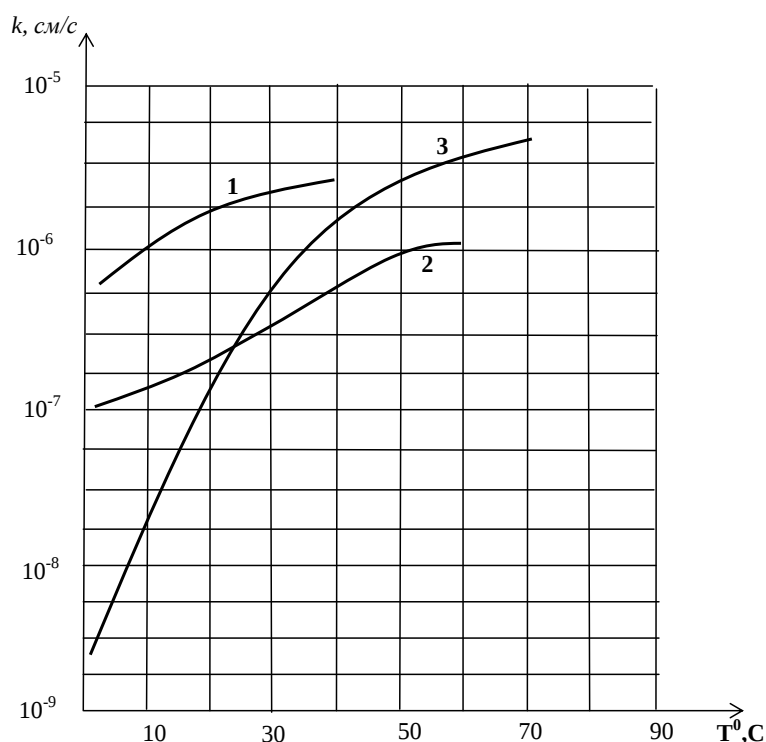


Рис. 1.15. Залежність коефіцієнта фільтрації від температури:
1, 2 – каолін на верхній та нижній межах пластичності;
3 – гумбрин на верхній межі пластичності.

Наявність градієнта температури в ґрунті може викликати фільтрацію порової рідини або сольового розчину. Це пояснюється явищем термічного осмосу – рухом рідини під впливом градієнта температури [117, 277, 329, 332, 341, 386, 387]. С. Dirksen [309] швидкість фільтрації, зумовленої термічним осмосом, запропонував записати у вигляді, аналогічному до закону Дарсі –

швидкість фільтрації прямо пропорційна до градієнта температури в пористому середовищі. Аналогічний запис закону руху рідини під впливом градієнта температури запропоновано Б. В. Дерягіним, Ф. Є. Колясєвим, М. К. Мельниковою [117] (див. також наведену бібліографію в даній роботі). Спостереження явищ термічного осмосу також відмічено в роботах [102, 208, 329, 341]. J. M. Soler [387] визначив порядок величини коефіцієнта термічного осмосу в межах $10^{-9} \dots 10^{-5} \text{ м}^2 / \text{К} \cdot \text{доба}$.

Зауважимо, що явища хімічного та термічного осмосу теоретично пояснюються через нерівноважну термодинаміку [332, 348, 356, 386, 387, 389, 369].

Явища термічного та хімічного осмосу та їх урахування при математичному моделюванні процесів підземної гідромеханіки особливого значення набувають в даний час. Розвиток промислового виробництва, в тому числі хімічного та атомної енергетики [143], зумовлює зростаючий техногенний вплив на навколишнє середовище. Біля великих підприємств створюються сховища відходів виробництва – так звані хвостосховища, які містять висококонцентровані розчини солей в рідкому вигляді, або сховища твердих відходів. Наявність твердих відходів не зменшує ризику забруднень – вони розчиняються і попадають в ґрунтові води, тим самим створюючи джерела забруднень, а також осередки градієнтів хімічних речовин. Поблизу атомних електростанцій створюються водойми–охолоджувачі, які суттєво впливають на температурний режим навколишнього середовища [7].

Захоронення радіоактивних відходів в підземних пластах колекторах зумовлює прецедент появи термоосмосу. Дані відходи виділяють енергію, в результаті чого температура прилеглих ґрунтових масивів підвищується, що впливає на їх стан та змінює властивості даних ґрунтів [133, 138, 209, 255, 304, 306, 307, 326, 356, 386, 387, 391, 403].

Також в раніше відомих математичних моделях фільтраційної консолідації ґрунтів не враховано ефекту термічного розширення. Відомо, що зміна

теплого режиму будь-якого матеріалу призводить до зміни його об'єму [291]. Для підвищення адекватності математичних моделей фільтраційної консолідації є актуальним урахування термічного розширення порової рідини та твердого скелету ґрунту. Підтвердженням можливості впливу даного явища на розподіл напорів в поровій рідині пористого середовища є накопичений експериментальний матеріал. В роботі R. L. Plum, M. J. Esrig [375] наведено результати експериментальних досліджень, згідно яких, в умовах відсутності дренажу, нагрівання призводить до значного зростання тиску в поровій рідині насиченого ґрунтового середовища. Згідно R. G. Campanella, J. K. Mitchell [303] зміна температури на один градус може призвести до збільшення порового тиску приблизно на 1.5% в порівнянні з ефективним тиском.

Також на коефіцієнт фільтрації значно впливає пористість ґрунтового середовища. Для вивчення параметрів фільтрації сольових розчинів в піщаних ґрунтах і встановлення кількісної оцінки їх впливу на проникливість ґрунтів в геотехнічній лабораторії кафедри основ і фундаментів Національного університету водного господарства і природокористування (НУВГП) М. Т. Кузла та І. А. Філатовою виконано серію експериментів з визначення коефіцієнта фільтрації з урахуванням параметрів ґрунтового середовища і концентрації сольового розчину [163]. Результати проведених досліджень коефіцієнта фільтрації залежно від концентрації фільтруючого розчину і пористості ґрунтового середовища для одиничного градієнта напору наведені в таблиці 1.2.

Також в усіх попередніх роботах математичні моделі консолідації досліджені у фіксованих областях – ефект просідання (набухання) пористого середовища в процесі консолідації не враховувався. Крім вказаного, в математичних моделях фільтраційної консолідації ґрунтів не враховано процесів фільтраційного руйнування загалом і, зокрема, процесів контактного розмиву та контактної суфозії. Хоча для ґрунтів, які перебувають в нестабілізованому стані, особливо гостро стоїть проблема їх фільтраційного руйнування.

Табл. 1.2. Результати досліджень коефіцієнта фільтрації сольових розчинів в піщаних ґрунтах при різних значеннях пористості

Пористість n	Концентрація сольового розчину %																
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
	Коефіцієнт фільтрації, м / добу																
0,50	5,3	–	–	7,2	–	8,0	–	6,4	5,1	4,8	–	4,1	–	–	3,5	–	3,5
0,52	5,6	7,3	–	7,8	–	8,4	–	6,6	6,1	5,5	–	4,6	–	4,5	4,0	–	4,0
0,55	6,6	8	–	8,8	–	9,3	–	8,0	–	6,3	–	5,3	–	5,0	4,5	–	4,5

1.3. Проблеми фільтраційного руйнування ґрунтів та математичне моделювання цих процесів: огляд літератури

Л. К. Малік [177] відмічає, що за даними Міжнародної комісії з великих гребель на даний час в світі побудовано більше 45 тис. великих гребель. Причому, більше 60% із них – ґрунтові. Приблизно на 40% гребель різних типів фіксувались аварії.

В роботі [210] відмічається, що з 9248 гідротехнічних споруд, зареєстрованих в 1965 році Міжнародною комісією по великих греблях, на 535 греблях мали місце аварії та інциденти. В результаті аварій на 10 греблях загинуло близько 10 тисяч людей і матеріальні збитки склали кілька мільярдів доларів. При цьому, через зосереджену фільтрацію в основі та тілі греблі сталося 38% всіх аварій ґрунтових гребель із місцевих матеріалів.

М. Foster, R. Fell [315] вказують, що на 2% великих ґрунтових гребель (висотою більше 15 метрів) траплялись інциденти, пов'язані з розмивом ґрунту та утворенням зосереджених шляхів фільтрації (статистичні дані наведено до 1986–го року). При цьому половина із інцидентів пов'язані з фільтраційним руйнуванням тіла греблі, 40 % – основи греблі, 10 % з фільтрацією з тіла в основу греблі. Також є цікавим факт, що час від зафіксованого початку розмиву до руйнування греблі в 20 % випадків становить менше 12–ти годин, а в 18 % – менше 6–ти годин. Тобто, дані процеси пов'язані зі швидким перебігом подій. Отже, якщо процес руйнування розпочався, то його зупинити практично неможливо. А тому першочерговим є прогнозування, в тому числі з

використанням методології математичного моделювання, для передбачення і недопущення критичних ситуацій на гідротехнічних спорудах.

Руйнування гідротехнічних ґрунтових споруд та масивів ґрунтів в їх основах фільтраційними потоками ґрунтових вод є складною проблемою, вирішення та прогнозування якої пов'язане з безпекою життєдіяльності людей, екологічною безпекою та зменшенням економічних затрат. В роботі [200] наведено класифікацію видів фільтраційного руйнування ґрунтів. Зокрема, виділено наступні основні види таких руйнувань: випір під дією висхідного фільтраційного потоку; суфозія; контактний випір; контактний розмив.

А. А. Гельфер [99] детально проаналізував причини та форми руйнувань ґрунтових гідротехнічних споруд, а також провів огляд фактичного матеріалу щодо руйнування таких споруд, виявлення їх причин та наслідків.

Р. Р. Чугаєв [273] фільтраційними назвав такі деформації твердої фази ґрунту, які виникають в основному під впливом гідравлічних сил. До таких сил автор відніс дві: питома сила гідродинамічного зважування (Архімедова сила) та питома фільтраційна сила. Р. Р. Чугаєв також ввів поняття нормальної та казуальної стійкості гідротехнічних споруд [272, ст. 100–104]. Нормальна фільтраційна стійкість ґрунту може бути точно оцінена згідно залежностей та законів механіки ґрунтів, оскільки вона пов'язана з розв'язанням задачі з повними даними: нам повністю відомі найбільш слабкі місця ґрунтового масиву, де його стійкість може порушитись. І саме ці місця досліджуються. Казуальна фільтраційна стійкість ґрунту пов'язана з випадковим утворенням місця можливого порушення стійкості ґрунту, а тому вона може бути оцінена і обчислена лише з певною долею ймовірності. Відразу зазначимо, що в дисертаційній роботі розглядаються лише питання, пов'язані з нормальною фільтраційною стійкістю ґрунту.

Р. Р. Чугаєв в роботі [274] також відмітив небезпеку утворення контактної фільтрації при будівництві бетонних водозливних гребель. Така фільтрація може виникнути коли на контакті ґрунту та бетону утворюються щілини або з'являються області розущільненого ґрунту. К. Н. Анахаєв, К. А. Гегієв,

Б. Х. Амшоков відмітили [5], що основною причиною аварій ґрунтових гребель з водоводами є виникнення контактної зосередженої фільтрації вздовж водоводу, що супроводжується розмивом ґрунту тіла та основи греблі, а другою причиною є суфозія ґрунту тіла греблі при пошкодженні напірного водоводу.

Г. Х. Праведний, В. Г. Радченко [230] розглянули умови, які приводять до фільтраційного руйнування ґрунтових гребель на скельній основі. В роботі цих же авторів [231] на основі проведених експериментів стверджується, що зона контакту матеріалу ядра (екрану) греблі зі скельною основою є одним із найслабших місць щодо фільтраційної стійкості. Одним із видів фільтраційного руйнування, які можуть мати місце в такому випадку, є контактний розмив.

В роботі [234] розглянуто фактичні матеріали аварій на греблях і зроблено висновки про їх основні причини.

В. П. Хоменко [266] детально проаналізував та класифікував суфозійні процеси в пісках. А. М. Патрашев [216] дослідив практичні питання суфозії. Відмічено, що винесення частинок розпочинається, коли швидкість фільтрації перевищує деяке критичне значення. Автором проаналізовано формули, отримані для критичних значень швидкості фільтрації іншими науковцями. В самій роботі досліджено ґрунтове середовище, в якому тверда фаза складається з нерухомих та рухомих частинок. Причому, обидві фракції вважаються близькими до сферичної форми. Для умов руху мілкої фракції запропоновано геометричний та механічний критерії.

Н. П. Затенацька, І. А. Сафохіна [132] дослідили дифузійне вилуговування глин. Дане питання є важливим, оскільки дифузійне вилуговування впливає на інженерно-геологічні властивості глин, а отже і на умови фільтраційного руйнування цих ґрунтів.

С. S. P. Ojha, V. P. Singh, D. D. Adrian [372] проаналізували залежності критичних градієнтів напорів від пористості ґрунту. Зокрема, аналізуючи роботи своїх попередників, автори зробили узагальнюючі висновки про пропорційність критичного градієнта напору величині $\frac{(1-n)^p}{n^q}$, де n –

пористість ґрунту, а показники степенів p , q встановлюються експериментально–теоретичним шляхом.

Є. А. Лубочков [162] поставив і вирішив проблему визначення складу незв'язних ґрунтів, які б володіли властивістю несупрозимності.

В. М. Жиленков, Н. І. Шевченко [129] ґрунтуючись на проведених експериментах, сформулювали гідродинамічний критерій контактної розмиву глинистого ґрунту – порушення ламінарного режиму фільтрації. Згідно даного критерію і запропоновано оцінювати стійкість будь-якого глинистого ґрунту в умовах контактної розмиву. В роботі [127] вказується, що для виникнення контактної розмиву глинистих ґрунтів повинні виконуватись дві умови. По–перше, частинки ґрунту, який розмивається, повинні вільно проходити через пори великозернистого ґрунту. По–друге, згідно експериментальних досліджень автора, фільтраційний потік повинен мати достатньо розвинену турбулізацію, при якій в ньому з'являються пульсації швидкостей та тисків, які руйнують структурні зв'язки між частинками ґрунту, що розмивається. Тому, згідно висновків автора, основним критерієм фільтраційної стійкості глинистих ґрунтів стосовно контактної розмиву є критична швидкість руху рідини в порах або тріщинах колектора.

Вищенаведений огляд робіт вказує на значний накопичений інженерний досвід та матеріал щодо фільтраційного руйнування ґрунтів. Його цінність полягає в створенні передумов для побудови математичних моделей процесів фільтраційного руйнування ґрунтів. Елементи таких досліджень також наведено в роботах [125, 126, 140–142, 145, 178, 229, 252, 311, 352, 368].

Існують роботи по розвитку математичного моделювання окремих видів фільтраційного руйнування ґрунтів.

М. М. Верігіним [32] розглянута задача про кольматаж призабійної зони свердловини. Дане явище впливає на зменшення проникливості ґрунту в призабійній зоні, в результаті чого знижується дебет свердловини. Кольматаж відбувається в результаті випадання з води в осад зважених та розчинених речовин під впливом зміни тиску. Незважаючи на деяку фізичну відмінність,

але побудована автором математична модель може бути використана при математичному моделюванні суфозійних процесів. Математична модель вищевказаного процесу будувалась згідно наступних припущень: 1) швидкість дифузії кольматуючих речовин нескінченно мала в порівнянні зі швидкістю кольматації; 2) випадання кольматуючих речовин із води в осад відбувається миттєво, відразу при досягненні ними зовнішньої межі зони кольматажу. З цих припущень випливає, що поза зоною кольматажу дані речовини рухаються з природною їх концентрацією C_2 , скрізь однаковою та постійною в часі (дифузія відсутня). Як тільки кольматуючі речовини підходять до межі зони кольматажу, вони миттєво випадають на цій межі в осад. Тому в зоні кольматажу концентрація цих речовин також скрізь однакова, постійна в часі і дорівнює C_1 ($C_1 < C_2$). При вказаних припущеннях М. М. Веригіним побудована математична модель, яка описується крайовою задачею для системи еліптичних рівнянь в області з рухомою межею зони кольматажу. Подібна крайова задача досліджена автором в праці [31].

В роботі В. Л. Полякова [224], ґрунтуючись на роботі М. М. Хлапука [264], розглянуто сумісний осесиметричний рух суфозійних частинок і води в ґрунті, тверда фаза якого складається з двох фракцій: однієї нерухомої, з якої формується «скелет» пористого середовища, а іншої – рухомої, власне суфозійних частинок. Побудована автором математична модель описується крайовою задачею для системи диференціальних рівнянь в частинних похідних першого порядку. Знайдено точний розв'язок відповідної крайової задачі і проаналізована його поведінка при $t \rightarrow +\infty$. При аналізі розрахунків враховано зміну коефіцієнта проникливості ґрунту залежно від концентрації суфозійних частинок. Потрібно відзначити і інші роботи В. Л. Полякова з даного напрямку [211, 223, 225–228].

В. С. Кремезом [160] запропонована математична модель фільтрації ґрунтових вод в пористих середовищах з урахуванням залежності коефіцієнта фільтрації від концентрації осаду. Математична модель описується крайовою задачею для системи диференціальних рівнянь в частинних похідних

параболічного типу. Перше рівняння системи описує нестационарний процес фільтрації води в масиві пористого середовища, друге – зміну концентрації зважених у воді частинок. Використовуючи запропоновану математичну модель, автором досліджено вплив кольматації та суфозії на фільтрацію в районі сховища–охолоджувача проектової АЕС. Також досліджені процеси зволоження ґрунтових схилів в районах аварій на трубопроводах міста Києва.

В монографії А. Ф. Дмитрієва, М. М. Хлапука, Д. А. Дмитрієва [121] наведені результати експериментальних досліджень радіальної фільтрації в незв'язних ґрунтах. На основі результатів проведених експериментів побудовано математичну модель фільтрації з урахуванням суфозійних процесів в придренній зоні.

Математичні моделі фільтрації та фільтраційних деформацій в суфозійних ґрунтах комплексно та системно досліджені в роботах А. Я. Бомби та представників його наукової школи [17–20, 147, 246, 248]. Однак, в роботах з математичного моделювання суфозійних процесів можна виділити наступні ще не вирішені задачі: 1) припускається наявність суфозійних частинок лише однієї фракції; 2) не досліджено взаємовпливу надлишкових напорів та суфозійних процесів і не побудовано відповідних математичних моделей; 3) при формулюванні та числовому розв'язанні відповідних крайових задач не враховано впливу динаміки суфозійних деформацій на просідання поверхні ґрунту; 4) не врахована можлива шаруватість ґрунтів і, як результат, можливість виникнення контактної суфозії; 5) не враховано впливу техногенних факторів на процеси фільтраційного руйнування загалом і на суфозійні процеси зокрема.

В роботах [283–385] J. B. Sellmeijer дослідив процеси контактного розмиву ґрунту в основі ґрунтової греблі, в результаті чого утворюється зона розмиву у вигляді щілини (рис. 1.16). Для описання процесів фільтрації в основі греблі використано рівняння Лапласа, доповнене граничними умовами для функції п'єзометричного напору. Для описання процесів руху рідини в зоні розмиву використано лінеаризовану систему рівнянь Нав'є–Стокса. Припускаючи

досліджувані процеси стаціонарними, J. B. Sellmeijer вивів умови для стійкості піщаного наносу та стійкості зони розмиву. Як свідчить історичний огляд питання розмиву ґрунтів, наведений в [383], дослідження автора є одними з перших в даному напрямку стосовно їх математичного моделювання.

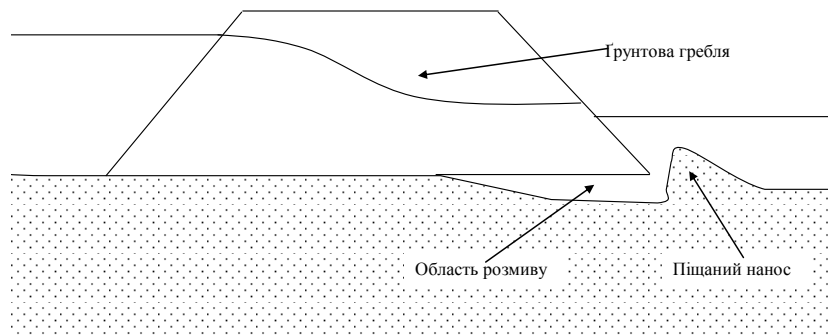


Рис. 1.16. Контактний розмив основи греблі

Одним із наслідків фільтраційного руйнування ґрунтів є утворення зосереджених шляхів фільтрації. Питання щодо механізмів та причин утворення зосереджених шляхів фільтрації, їх негативного впливу на гідротехнічні споруди, деякі аспекти математичного моделювання цих процесів досліджено в роботах С. S. P. Ojha, V. P. Singh, D. D. Adrian, D. Lachouette, F. Golay, S. Bonelli, H. Mattsson, J. G. I. Hellstrom, T. S. Lundstrom, Y. Jianhua [297, 339, 342, 355, 365, 372, 373]. В роботах [297, 311, 339, 355] побудовано математичні моделі розмиву та збільшення діаметру зосередженого шляху фільтрації, використовуючи встановлений авторами критерій розмиву. Зокрема, рух рідини в області зосередженого шляху фільтрації запропоновано описувати системою рівнянь Нав'є–Стокса.

У всіх вищезгаданих роботах не враховано вплив нестабілізованого стану пористого середовища на процеси фільтраційного руйнування. Оскільки процеси фільтраційної консолідації супроводжуються наявністю надлишкових напорів, що в свою чергу може спричинити активізацію процесів фільтраційного руйнування пористого середовища, то є досить актуальним побудова математичних моделей взаємозв'язаних процесів фільтраційної консолідації та фільтраційного руйнування. Крім того, зростаючий техногенний вплив людської діяльності на навколишнє середовище вказує на актуальність

математичного моделювання вказаних процесів з урахуванням впливу теплового та хімічного режимів пористого середовища.

Складність в математичному моделюванні взаємозв'язаних процесів фільтраційної консолідації, фільтраційного руйнування та теплосолеперенесення в пористих середовищах обумовлюється ще й тим, що виникає необхідність дослідження відповідних нелінійних крайових задач в областях з рухомими межами та побудови ефективних числових схем їх розв'язання. Тому є актуальною задача адаптації, розвитку та ефективного використання відомих числових методів математичної фізики для розв'язування вказаного класу крайових задач.

1.4. Висновки та постановка задач дослідження

Аналіз, проведений вище, показав, що існують математичні моделі фільтраційної консолідації ґрунтів, але не вирішеними залишаються ще ряд проблем, зокрема:

- 1) всі попередні дослідження фільтраційної консолідації проведено у випадку ізотермічних умов;
- 2) математичні моделі консолідації побудовані і досліджені у фіксованих областях – ефект просідання (набухання) гетерогенного пористого середовища в процесі консолідації не враховувався;
- 3) відсутній аналіз просторових задач фільтраційної консолідації;
- 4) не враховано ступінь впливу техногенних факторів на швидкості зсувних зміщень масивів ґрунтів, використовуючи отримані розв'язки відповідних задач консолідації;
- 5) в математичних моделях фільтраційної консолідації ґрунтів не враховано процесів фільтраційного руйнування загалом і, зокрема, процесів контактного розмиву та контактної суфозії. Хоча, для ґрунтів, які перебувають в нестабілізованому стані, особливо гостро стоїть проблема їх фільтраційного руйнування. В існуючих математичних моделях механічної суфозії рухомі частинки вважаються належними до однієї фракції;

- б) складність в математичному моделюванні взаємних процесів фільтраційної консолідації, фільтраційного руйнування та теплосолеперенесення в пористих середовищах обумовлюється ще й тим, що виникає необхідність дослідження відповідних нелінійних крайових задач в областях з рухомими межами та побудови ефективних числових схем їх розв'язання.

Отже метою дисертаційної роботи має стати побудова нових математичних моделей взаємозв'язаних процесів фільтраційної консолідації та фільтраційного руйнування гетерогенних пористих середовищ (на прикладі ґрунтів) в умовах впливу техногенних факторів, розробка алгоритмів для відшукування наближених розв'язків відповідних нелінійних крайових задач в областях з рухомими межами, встановлення, засобами комп'ютерного моделювання, закономірностей і ступеня впливу комплексу одночасно функціонуючих фізико–хімічних процесів на перебіг та зміну досліджуваних станів та явищ.

Для досягнення сформульованої мети у дисертації потрібно визначити наступні основні завдання дослідження:

- сформулювати постановки задач фільтраційної консолідації ґрунтів в умовах впливу техногенних факторів та комплексу одночасно функціонуючих взаємозв'язаних фізико–хімічних процесів з метою подальшого виведення математичних моделей, а саме: хімічного та термічного осмосів, залежності коефіцієнта фільтрації від фізико–хімічного стану пористого середовища (концентрації розчинених солей, температури, надлишкових напорів, концентрації суфозійних частинок), гетерогенних хімічних реакцій (розчинення та випадання солей в осад), теплового розширення фаз ґрунту, просідання ґрунту, виникнення та поширення областей контактного розмиву, зосереджених шляхів фільтрації, а також явищ багатofракційної контактної суфозії;
- сформувати математичні моделі взаємозв'язаних процесів фільтраційної консолідації та фільтраційного руйнування ґрунтів з урахуванням впливу техногенних факторів, хімічних масообмінних процесів, фізичних процесів

просідання та розмиву ґрунту, багатофракційної контактної суфозії з метою підвищення їх (моделей) адекватності;

- сформулювати та обґрунтувати кінематичні граничні умови на рухомих межах з метою прогнозування величини просідань (набухань) та величини області розмиву, а також забезпечення коректності постановок відповідних нелінійних крайових задач;
- розробити обчислювальні алгоритми та розрахункові схеми наближеного розв'язання нелінійних крайових задач фільтраційної консолідації та фільтраційного руйнування ґрунтів за наявності рухомих меж;
- розвинути та адаптувати для ефективного використання відомі чисельні методи (метод скінченних різниць, метод скінченних елементів, безсітковий метод радіальних базисних функцій) з метою наближеного розв'язання нелінійних задач фільтраційної консолідації та фільтраційного руйнування ґрунтів в умовах впливу техногенних факторів. Програмно реалізувати розроблені алгоритми та створити комплекс програмного забезпечення з метою дослідження вищевказаних процесів в одно-, дво-, та тривимірному випадках та здійснення прогнозних розрахунків;
- методами обчислювального експерименту виявити ступінь впливу техногенних факторів на проходження процесів консолідації ґрунтів та їх фільтраційного руйнування;
- обґрунтувати та оцінити якісні характеристики наближених розв'язків нелінійної задачі фільтраційної консолідації шляхом їх відшукування та порівняння різними числовими методами.

РОЗДІЛ 2

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ПРОЦЕСІВ ФІЛЬТРАЦІЙНОЇ КОНСОЛІДАЦІЇ ТА ФІЛЬТРАЦІЙНОГО РУЙНУВАННЯ ҐРУНТІВ В УМОВАХ ВПЛИВУ ТЕХНОГЕННИХ ФАКТОРІВ

2.1. Узагальнений нелінійний закон Дарсі–Герсеванова

Як добре відомо [170–172, 202, 203, 236, 247, 278, 282], закон руху рідини в недеформівному нестискуваному пористому середовищі має вигляд

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}_h \nabla h,$$

де $\mathbf{u}$ – вектор швидкості фільтрації; h – напір; $\mathbf{K}_h$ – тензор коефіцієнтів фільтрації.

Згідно [100, 137, 262, 263], рух рідини в деформівному пористому двофазному середовищі описується законом Дарсі–Герсеванова

$$\mathbf{u} - e\mathbf{v} = -\mathbf{K}_h \nabla h,$$

де e – коефіцієнт пористості ґрунту; $\mathbf{v}$ – вектор швидкості руху твердих частинок ґрунту.

А.П.Власюк та О.В.Жеребятєв [36] звернули увагу на можливість впливу осмотичних явищ при нерівномірній концентрації порового розчину солі на процеси фільтраційної консолідації глинистих ґрунтів та запропонували узагальнений закон Дарсі–Герсеванова на випадок руху сольових розчинів для двофазного ґрунту при врахуванні нормальної осмотичної фільтрації

$$\mathbf{u} - e\mathbf{v} = -\mathbf{K}_h \nabla h + \mathbf{K}_c \nabla c,$$

де $\mathbf{K}_c$ – тензор коефіцієнтів хімічного осмосу.

Даний закон можна узагальнити на випадок залежності коефіцієнта хімічного осмосу від концентрації солей та наявності в ґрунті термічного осмосу. Також, як показано в розділі 1 дисертаційного дослідження (див. пункт 1.1), коефіцієнт фільтрації, окрім концентрації солей в поровій рідині, ще й залежить від температури пористого середовища. Тоді, узагальнений закон Дарсі–Герсеванова набуває вигляду [65, 70, 72]

$$\mathbf{u} - e\mathbf{v} = -\mathbf{K}_h(c, T)\nabla h + \mathbf{K}_c(c)\nabla c + \mathbf{K}_T\nabla T,$$

де $\mathbf{K}_T$ – тензор коефіцієнтів термічного осмосу.

При дослідженні процесів фільтраційної консолідації насичених пористих середовищ, коефіцієнт фільтрації ґрунтів залежить від їх коефіцієнта пористості e [1, 111, 125, 128, 263]. В свою чергу, згідно принципу гідроємності М. М. Герсєванова, коефіцієнт пористості є функцією суми головних напружень Θ в скелеті ґрунту [137, 263]. Далі – згідно основної розрахункової моделі Флоріна [137, 263] сума головних напружень в ґрунті, який перебуває в стані консолідації, визначається через надлишкові напори в поровій рідині. Тобто, коефіцієнт фільтрації ще залежить, крім того, і від напорів. Тоді вищенаведений закон набуває вигляду

$$\mathbf{u} - e\mathbf{v} = -\mathbf{K}_h(c, T, h)\nabla h + \mathbf{K}_c(c)\nabla c + \mathbf{K}_T\nabla T. \quad (2.1)$$

Як свідчить аналіз експериментальних залежностей коефіцієнта фільтрації від концентрації солей та температури, закон (2.1) доцільно застосовувати, якщо концентрація солей в поровій рідині стає більшою за 5 г/літр, а зміна температури гетерогенного пористого середовища перевищує 10^0C .

Узагальнення закону Дарсі полягає в припущенні, що градієнт напору і швидкість фільтрації не пов'язані прямо пропорційною залежністю [247, 267, 302]. Згідно роботи [302] на даний час найчастіше використовуються наступні нелінійні закони Дарсі:

$$\mathbf{u} + \alpha_1|\mathbf{u}| \cdot \mathbf{u} = -\mathbf{K}_h\nabla h,$$

$$\mathbf{u} + \alpha_2|\mathbf{u}|^{\beta-1} \cdot \mathbf{u} = -\mathbf{K}_h\nabla h, \quad 1 \leq \beta \leq 2,$$

$$\mathbf{u} + \alpha_3|\mathbf{u}| \cdot \mathbf{u} + \alpha_4|\mathbf{u}|^2 \cdot \mathbf{u} = -\mathbf{K}_h\nabla h,$$

де α_i , $i = \overline{1,4}$, – коефіцієнти, які визначаються експериментальним шляхом. Загалом, вищенаведені закони можна записати у вигляді $\mathbf{u} = -\tilde{\mathbf{K}}_h(\mathbf{u})\nabla h$, де функцію $\tilde{\mathbf{K}}_h$ умовно називають “коефіцієнтом фільтрації” [247, 267]. Однак, дані закони виконуються, якщо градієнт напору стає більшим за певне критичне значення. І характерні ці закони для сильно проникних порід [247,

ст. 8]. Глини та суглинки, для яких особливо гостро стоїть проблема фільтраційної консолідації, відносяться до слабо проникних порід. Швидкість фільтрації в цих ґрунтах дуже мала. А тому нелінійні члени відіграють незначну роль в законах фільтрації (мають своїм співмножником $|u|$) і ними можна знехтувати.

Інша проблема для глин та суглинків – це фільтрація при малих градієнтах напору. Тут є два, загалом ще не вирішених, питання – наявність початкового градієнта напору і справедливість закону Дарсі.

Наявність початкового градієнта напору досліджували багато вчених, зокрема Б.Ф.Рельтов, С.А.Роза, В.М.Гольдберг, М.П.Скворцов, А.І.Котов, С.В.Нерпін, С.Р.Месчан, Т.Л.Петросян і ін. В роботі [159] наведено експериментальні дані, які засвідчують наявність в ґрунтах початкових градієнтів напору. В роботі [201], ґрунтуючись на натурних експериментах, показано, що в глинистих ґрунтах початковий градієнт напору відсутній. Також в діапазоні градієнтів напору від 0.25 до 3.73 для цих ґрунтів показана справедливість закону Дарсі. Твердження деяких науковців про наявність початкового градієнта напору та порушення закону Дарсі при малих його градієнтах автори пояснюють недосконалістю експериментів та великою похибкою вимірювань.

Заперечується наявність початкового градієнта напору для глин і в роботі [128]. Автор не спостерігав відхилень від закону Дарсі в діапазоні градієнтів напору від 0.24 до 3.00. Також є цікавим огляд праць інших науковців, наведений в [128], які також заперечують відхилення від закону Дарсі при малих градієнтах напору для води. Висновок про відсутність початкового градієнта напору в глинах та суглинках при фільтрації в них ньютонівської рідини зроблено і в роботі [101, ст. 20].

Зважаючи на вищесказане, закон фільтрації приймемо у вигляді (2.1), де коефіцієнт фільтрації є функцією теплового та хімічного стану пористого середовища, а також залежить від самого напору. З математичної точки зору не складає принципових труднощів у всіх нижченаведених математичних моделях

врахувати початковий градієнт напору, однак, з фізичної точки зору, його наявність може значно змінити картину розподілу надлишкових напорів у ґрунті, який консолидується.

2.2. Рівняння нерозривності рідкої та твердої фаз ґрунту з урахуванням гетерогенних масообмінних процесів та термічного розширення

В роботі [202] запропоновано застосовувати рівняння нерозривності рідкої фази ґрунту, в якому враховується зміна концентрації солей в поровій воді

$$\nabla \cdot (\rho_p \mathbf{u}) + \frac{\partial \left(n \rho_p \left[1 - \frac{c}{\rho_c} \right] \right)}{\partial t} = 0, \quad (2.2)$$

де $\mathbf{u}$ – вектор швидкості фільтрації; ρ_p – густина порової рідини; n – пористість ґрунту; t – час; c – концентрація солей в поровій воді; ρ_c – густина солей в твердій фазі.

Аналогічно, можна запропонувати використовувати рівняння нерозривності твердої фази ґрунту у вигляді

$$\nabla \cdot (\rho_T \mathbf{v}) + \frac{\partial \left(m \rho_T - \frac{\rho_T N}{\rho_c} \right)}{\partial t} = 0. \quad (2.3)$$

Тут $\mathbf{v}$ – вектор швидкості руху твердих частинок ґрунту; m – об'єм твердих частинок в одиниці об'єму ґрунту; ρ_T – густина твердих частинок ґрунту. Оскільки N – це концентрація солей твердої фази в одиниці об'єму ґрунту (на відміну від c – це концентрація солей рідкої фази в одиниці об'єму порового розчину), то в рівнянні (2.3) біля члена $\frac{\rho_T N}{\rho_c}$ відсутній множник m .

Вищенаведені рівності зручно записати у вигляді

$$\nabla \cdot (\rho_p \mathbf{u}) + \frac{\partial \left(n \rho_p \left[1 - \varepsilon \cdot \frac{c}{\rho_c} \right] \right)}{\partial t} = 0, \quad \nabla \cdot (\rho_T \mathbf{v}) + \frac{\partial \left(m \rho_T - \varepsilon \cdot \frac{\rho_T N}{\rho_c} \right)}{\partial t} = 0, \quad (2.4)$$

з яких при $\varepsilon = 1$ отримуємо (2.2), (2.3), а при $\varepsilon = 0$ маємо рівняння у випадку нехтування вказаними явищами.

В неізотермічному режимі зміна маси твердої та рідкої фаз в елементарному об'ємі $dx dy dz$ пористого середовища може відбуватись не лише за рахунок швидкостей $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ та зміни величин n , m в часі, але і за рахунок теплового розширення фаз ґрунту. Припустимо, що величина теплового розширення рідкої та твердої фаз ґрунту прямо пропорційна до зміни температури T в часі з коефіцієнтами об'ємного розширення α_p та α_s відповідно. Нехай відносна частина q ($0 \leq q \leq 1$) об'єму твердого скелету, що утворилась за рахунок теплового розширення, залишається в межах розглядуваного елементарного об'єму $dx dy dz$. Це означає, що в межах елементарного об'єму $dx dy dz$, за рахунок теплового розширення скелету ґрунту буде здійснюватись додатковий тиск на порову рідину. Тоді рівняння (2.4) набувають вигляду

$$\nabla \cdot (\rho_p \mathbf{u}) + \frac{\partial(n\rho_p[1 - \varepsilon \frac{c}{\rho_c}])}{\partial t} - (\alpha_p + q\alpha_s)n\rho_p \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot (\rho_T \mathbf{v}) + \frac{\partial(m\rho_T - \varepsilon \frac{\rho_T N}{\rho_c})}{\partial t} - \alpha_s(1 - q)m\rho_T \frac{\partial T}{\partial t} = 0. \quad (2.6)$$

В роботі [390] окрім коефіцієнтів α_s та α_p розглядається ще і α – коефіцієнт об'ємного термічного розширення ґрунту, як пористого матеріалу.

Тоді, використовуючи введене означення коефіцієнта q , маємо $q = \frac{\alpha_s - \alpha}{\alpha_s}$.

У випадку дослідження трифазних ґрунтів до рівнянь нерозривності (2.5), (2.6) потрібно додати ще рівняння нерозривності газової компоненти [137, 263]

$$\nabla \cdot (\rho_g \mathbf{w}) + \frac{\partial((s_g + \mu_g n)\rho_g)}{\partial t} = 0;$$

де n – об'єм рідини в одиниці об'єму ґрунту; $\mathbf{w}$ – вектор швидкості руху газових бульбашок; s_g – об'єм защемленого газу в одиниці об'єму ґрунту; μ_g – коефіцієнт розчинності газу; ρ_g – густина газу. Зауважимо у відмінності між параметром n для дво- та трифазних ґрунтів. Для двофазних ґрунтів цей параметр дорівнює пористості, оскільки ґрунт моделюється повністю насиченим

рідиною. Ми будемо для даних величин використовувати одне та теж позначення, пам'ятаючи їх різний фізичний зміст залежно від врахування чи неврахування наявності газової компоненти.

2.3. Рівняння фільтраційної консолідації з урахуванням впливу взаємозв'язаних процесів перенесення тепла та солей в гетерогенному пористому середовищі

Основне рівняння фільтраційної консолідації трифазного ґрунту без урахування початкового градієнта напору в умовах фільтрації сольових розчинів в неізотермічному режимі виводиться на основі залежностей (2.1), (2.5), (2.6) і має вигляд

$$(1+e)[\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c, T, h) \nabla h) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_c(c) \nabla c) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla T)] + (\alpha_p + (2q-1)\alpha_s)e \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{\rho_c}(1+e) \left[\frac{\partial(nc)}{\partial t} - e \frac{\partial N}{\partial t} \right] = \frac{\partial e}{\partial t} + \beta(1+e) \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (2.7)$$

де β – коефіцієнт об'ємної стискуваності газу, який визначається за формулою

$$\beta = \frac{(s_\Gamma + \mu_\Gamma n)}{(p_a + p)},$$

p_a – атмосферний тиск; p – надлишковий тиск у поровій рідині.

Виведення рівняння (2.7) відрізняється від виведення аналогічних рівнянь без урахування впливу переносу солей та температури [137, 262, 263] лише використанням закону фільтрації (2.1) та рівнянь нерозривності (2.5) та (2.6). Рівняння нерозривності газової компоненти використовується аналогічно, як і в класичній теорії фільтраційної консолідації ґрунтів.

Для розв'язання прикладних задач є необхідним перехід до напружено–деформованого стану середовища, що консолідується. Тому виникає необхідність у прийнятті додаткових фізичних припущень щодо процесу консолідації. Таким суттєвим фізичним припущенням є принцип гідроємності М. М. Герсєванова [100, 137, 262, 263]: зміна коефіцієнта пористості ґрунту визначається лише зміною суми головних напружень Θ в скелеті ґрунту, тобто

$e = f(\Theta)$. Тоді, враховуючи, що $\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{de}{d\Theta} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial t}$, основне рівняння фільтраційної консолидації (2.7) запишеться у вигляді

$$\begin{aligned} & \frac{(1+e)}{\frac{de}{d\Theta}} [\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c, T, h) \nabla h) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_c(c) \nabla c) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla T)] + \\ & + \frac{(\alpha_p + (2q-1)\alpha_s)e}{\frac{de}{d\Theta}} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\varepsilon(1+e)}{\rho_c \frac{de}{d\Theta}} \left[\frac{\partial(nc)}{\partial t} - e \frac{\partial N}{\partial t} \right] = \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \beta \cdot \frac{1+e}{\frac{de}{d\Theta}} \cdot \frac{\partial p}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Рівняння (2.8) дозволяє використовувати будь-яку розрахункову модель напружено-деформованого стану ґрунту, тобто будь-яку залежність $e = f(\Theta)$.

У найпростішому випадку лінійної залежності між напруженнями та деформаціями, наприклад, зв'язку коефіцієнта пористості з сумою головних напружень у вигляді спрямленого відрізка компресійної кривої

$$e = -a \frac{\Theta}{1 + (R-1)\xi} + b, \quad (2.9)$$

де $b = \text{const}$, рівняння (2.8) набуває вигляду

$$\begin{aligned} & - \frac{(1+e)(1+(R-1)\xi)}{a} [\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c, T, h) \nabla h) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_c(c) \nabla c) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla T)] - \\ & - \frac{(\alpha_p + (2q-1)\alpha_s)(1+(R-1)\xi)e}{a} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\varepsilon(1+e)(1+(R-1)\xi)}{\rho_c a} \left[\frac{\partial(nc)}{\partial t} - e \frac{\partial N}{\partial t} \right] = \\ & = \frac{\partial \Theta}{\partial t} - \beta \frac{(1+e)(1+(R-1)\xi)}{a} \frac{\partial p}{\partial t}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

де R – розмірність задачі; a – коефіцієнт стисливості ґрунту; ξ – коефіцієнт бічного тиску ґрунту.

Природно, скелет ґрунту володіє властивостями повзучості, тобто здатністю деформуватись в часі при постійних напруженнях [6, 199]. У відповідності з уявленнями теорії спадкової лінійної повзучості, зміну коефіцієнта пористості в часі можна подати у вигляді [137, 263]

$$e(t) = e(\tau_1) - \frac{\Theta(\tau_1)}{1 + (R-1)\xi} \alpha(t, \tau_1) - \frac{1}{1 + (R-1)\xi} \int_{\tau_1}^t \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} \alpha(t, \tau_1) d\tau, \quad (2.11)$$

де $e(\tau_1)$ – коефіцієнт пористості ґрунту до прикладення навантаження;

$\frac{\Theta(\tau_1)}{1+(R-1)\xi} \alpha(t, \tau_1)$ – зміна коефіцієнта пористості до моменту часу t від

постійного навантаження $\Theta(\tau_1)$, прикладеного в момент часу τ_1 ;

$\frac{1}{1+(R-1)\xi} \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} \alpha(t, \tau_1) d\tau$ – зміна коефіцієнта пористості до моменту часу t від

навантаження $\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} d\tau$, прикладеного в момент часу τ .

Величина $\alpha(t, \tau)$ зміни коефіцієнта пористості до моменту часу t від одиничного навантаження, прикладеного в момент часу τ , в загальному випадку може бути записана у вигляді [137]

$$\alpha(t, \tau) = a_0 + \sum_{i=1}^{n_1} a_i \{1 - \exp[-\beta_i(t - \tau)]\},$$

де a_0 характеризує ту частину деформації, яку вважають “миттєво” виникаючою в момент прикладення навантаження, а другий член в правій частині вищенаведеної залежності, який називається мірою повзучості, характеризує поступово наростаючу в часі частину деформації. Параметр миттєвої деформації a_0 та параметри повзучості a_i , β_i , $i = \overline{1, n_1}$ визначаються експериментальним шляхом.

Як показують досліди [137], в багатьох випадках можна обмежитись мірою повзучості з одним членом ряду, тобто

$$\alpha(t, \tau) = a_0 + a_1 \{1 - \exp[-\beta_1(t - \tau)]\}. \quad (2.12)$$

Параметр повзучості β_1 характеризує швидкість наростання деформацій повзучості і зі збільшенням β_1 ця швидкість зростає. При $\beta_1 \rightarrow \infty$ з (2.12) та (2.11) отримаємо залежність (2.9).

Враховуючи (2.11) та (2.12), з рівняння (2.8) маємо

$$\begin{aligned} & (1+e)[\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c, T, h) \nabla h) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_c(c) \nabla c) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla T)] + \\ & + (\alpha_p + (2q-1)\alpha_s)e \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{\rho_c} (1+e) \left[\frac{\partial(nc)}{\partial t} - e \frac{\partial N}{\partial t} \right] = - \frac{a_0}{1+(R-1)\xi} \frac{\partial \Theta(t)}{\partial t} + \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$+ \frac{a_1 \beta_1^2}{1 + (R-1)\xi} \int_{\tau_1}^t \Theta(\tau) \exp[-\beta_1(t-\tau)] d\tau - \frac{a_1 \beta_1}{1 + (R-1)\xi} \Theta(t) + \beta(1+e) \frac{\partial p}{\partial t}.$$

В рівнянні (2.13) можна звільнитись від інтеграла, але при цьому порядок рівняння по t підвищується. Для цього продиференціюємо рівняння (2.13) по t , а потім отримане рівняння додамо до рівняння (2.13), попередньо домноживши його на β_1 [137]. В результаті отримаємо ще одну форму основного рівняння консолідації з урахуванням лінійної повзучості

$$\begin{aligned} & (1+e)\beta_1 [\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c, T, h) \nabla h) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_c(c) \nabla c) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla T)] + \\ & + (\alpha_p + (2q-1)\alpha_s) e \beta_1 \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{\rho_c} (1+e) \beta_1 \left[\frac{\partial(nc)}{\partial t} - e \frac{\partial N}{\partial t} \right] + \\ & + (1+e) \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c, T, h) \nabla h) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_c(c) \nabla c) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla T)] + \quad (2.14) \\ & + (\alpha_p + (2q-1)\alpha_s) e \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\varepsilon}{\rho_c} (1+e) \left[\frac{\partial^2(nc)}{\partial t^2} - e \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} \right] = \\ & = - \frac{a_0}{1 + (R-1)\xi} \frac{\partial^2 \Theta(t)}{\partial t^2} - \frac{a_0 + a_1}{1 + (R-1)\xi} \beta_1 \frac{\partial \Theta(t)}{\partial t} + \beta(1+e) \left(\beta_1 \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \right). \end{aligned}$$

Рівняння (2.14) містить п'ять невідомих величин: Θ , h або p , c , N та T . Перейти до замикання системи рівнянь, яка містить своїм складовим рівняння консолідації, можна двома різними шляхами. Перший підхід базується на основній розрахунковій моделі В.А.Флоріна [137, 262, 263]. Другий підхід базується на теорії об'ємних сил Біо–Флоріна [122, 130, 158, 262, 296, 356, 357]. В дисертаційній роботі використано перший підхід.

Згідно [262, 263], в основу першого підходу покладене припущення, що напружений стан ґрунтового середовища в цілому в будь-який момент часу t співпадає з напруженим станом ґрунтового середовища в припущенні його миттєвої консолідації. Тобто

$$\Theta^* + Rp^* = \Theta + Rp, \quad (2.15)$$

де Θ^* – сума головних напружень в скелеті ґрунту в умовах повної стабілізації; p^* – тиск в поровому розчині води в умовах повної стабілізації. Зауважимо, що (2.15) повністю виконується при $R=1$ і є припущенням при $R=2$ та $R=3$.

Як відомо, зв'язок тиску в поровій рідині з напором має вигляд

$$h = \frac{p}{\gamma} \pm z, \quad (2.16)$$

де знак “+” відповідає напрямку осі OZ вгору, знак “-” – вниз. Тоді маємо

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (2.17)$$

Далі, враховуючи (2.16), (2.17), з (2.15) отримаємо

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{\partial \Theta^*}{\partial t} + R\gamma \frac{\partial h^*}{\partial t} - R\gamma \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (2.18)$$

У випадку лінійної залежності між напруженнями та деформаціями (2.9), при врахуванні (2.17), (2.18), рівняння консолидації (2.10) набуде вигляду

$$\begin{aligned} & \frac{(1+e)(1+(R-1)\xi)}{R\gamma a\omega} [\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c, T, h) \nabla h) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_c(c) \nabla c) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla T)] + \\ & + \frac{(\alpha_p + (2q-1)\alpha_s)(1+(R-1)\xi)e}{R\gamma a\omega} \frac{\partial T}{\partial t} + \\ & + \frac{\varepsilon(1+e)(1+(R-1)\xi)}{R\gamma \rho_c a\omega} \left[\frac{\partial(nc)}{\partial t} - e \frac{\partial N}{\partial t} \right] + \frac{1}{\omega} \frac{\partial h^*}{\partial t} + \frac{1}{R\gamma \omega} \frac{\partial \Theta^*}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

З рівняння (2.14), при врахуванні (2.17), (2.18), отримаємо кінцеву форму рівняння консолидації з урахуванням лінійної повзучості скелету ґрунту

$$\begin{aligned} & \frac{(1+e)(1+(R-1)\xi)}{\gamma} \beta_1 [\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c, T, h) \nabla h) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_c(c) \nabla c) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla T)] + \\ & + \frac{(\alpha_p + (2q-1)\alpha_s)(1+(R-1)\xi)e}{\gamma} \beta_1 \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\varepsilon(1+e)(1+(R-1)\xi)}{\rho_c \gamma} \beta_1 \left[\frac{\partial(nc)}{\partial t} - e \frac{\partial N}{\partial t} \right] + \\ & + \frac{(1+e)(1+(R-1)\xi)}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c, T, h) \nabla h) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_c(c) \nabla c) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla T)] + \\ & + \frac{(\alpha_p + (2q-1)\alpha_s)(1+(R-1)\xi)e}{\gamma} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\varepsilon(1+e)(1+(R-1)\xi)}{\rho_c \gamma} \left[\frac{\partial^2(nc)}{\partial t^2} - e \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} \right] + \\ & + \frac{a_0}{\gamma} \frac{\partial^2 (\Theta^* + R\gamma h^*)}{\partial t^2} + \frac{\beta_1}{\gamma} (a_0 + a_1) \frac{\partial (\Theta^* + R\gamma h^*)}{\partial t} = \\ & = [Ra_0 + \beta(1+e)(1+(R-1)\xi)] \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + [\beta_1 R(a_0 + a_1) + \beta\beta_1(1+e)(1+(R-1)\xi)] \frac{\partial h}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Рівняння (2.20) є диференціальним рівнянням в частинних похідних (ДРЧП) третього порядку [119].

2.4. Математичне моделювання процесів теплосолеперенесення та масообміну в пористих середовищах

Значний внесок в розвиток досліджень процесів переносу в пористих середовищах засобами математичного моделювання зробили М. М. Веригін, І. І. Ляшко, О. Я. Олійник, В. І. Лаврик, І. В. Сергієнко, В. В. Скопецький, В. С. Дейнека, С. І. Ляшко, Є. Я. Чапля, А. П. Власюк, А. Я. Бомба, О. Ю. Чернуха, М. Р. Петрик, Б. С. Шержуков, А. В. Шибанов, Д. С. Гужев, М. С. Іванов, Д. А. Ключин, М. М. Біляєв, С. Каримбердієва, Р. К. Ісламов, Г. Є. Мистецький, В. М. Ніколаєвський, І. В. Бейко та багато інших українських науковців, а також науковців близького та далекого зарубіжжя [9–14, 20, 35, 93–96, 101, 115, 116, 120, 204, 260, 269–271, 165, 166, 168, 170–176, 202, 247, 292, 337, 374, 382].

Зважаючи на те, що в неізотермічних умовах має місце явище термодифузії [16, 334] і питомий потік розчинених солей визначається як

$$\mathbf{q}_c = c\mathbf{u} - \mathbf{D}\nabla c - \mathbf{D}_T\nabla T,$$

рівняння переносу солей в пористому середовищі набуває вигляду

$$\nabla \cdot (\mathbf{D}\nabla c) + \nabla \cdot (\mathbf{D}_T\nabla T) - \nabla \cdot (c\mathbf{u}) = \frac{\partial(nc)}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t}, \quad (2.21)$$

де рівняння кінетики масообміну описується залежністю

$$\frac{\partial N}{\partial t} = f(c, N, C_m, N^*, \gamma_1, \dots, \gamma_n). \quad (2.22)$$

Тут: $\mathbf{D}$ – тензор коефіцієнтів конвективної дифузії; $\mathbf{D}_T$ – тензор коефіцієнтів термічної дифузії; c , N – концентрація солей в рідкій та твердій фазах; C_m , N^* – концентрація солей в рідкій та твердій фазах в умовах повної стабілізації; $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ – константи швидкості масообміну.

Згідно [101, 166] у випадку розчинення та випадання розчинених речовин в осад рівняння кінетики масообміну має вигляд

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\gamma_1(C_m - c)N^\chi. \quad (2.23)$$

Показник степеня χ в (2.23) залежить від характеру засолення породи. Для поверхневого засолення, при якому водорозчинні солі вкривають поверхню пор та тріщин, $\chi = 0$. Для об'ємного засолення породи (грунту), при якому солі у вигляді гранул різної форми та об'єму дисперсно розсіяні в об'ємі породи, $\chi = 1/2$ [101, 166].

Оскільки $\frac{1}{\rho_c}$ є величиною порядку 10^{-3} , то в рівнянні нерозривності (2.5)

покладемо $\varepsilon = 0$. Тоді, при $\rho_p = \text{const}$ з рівняння (2.21) маємо

$$\nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla c) + \nabla \cdot (\mathbf{D}_T \nabla T) - \mathbf{u} \nabla c = n \frac{\partial c}{\partial t} + (\alpha_\rho + q \alpha_s) n c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t}. \quad (2.24)$$

Зважаючи на те, що питомий тепловий потік в ґрунті визначається як [170]

$$\mathbf{q}_T = \rho c_p T \mathbf{u} - \lambda \nabla T,$$

рівняння теплоперенесення в пористому середовищі має вигляд

$$\nabla \cdot (\lambda \nabla T) - \rho c_p \mathbf{u} \nabla T = c_T \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (2.25)$$

Тут: λ – тензор коефіцієнтів ефективної теплопровідності вологого ґрунту; ρ , c_p – густина та питома теплоємність порового розчину; c_T – об'ємна теплоємність ґрунту [275, 276].

Початкові умови для концентрації сольового розчину запишуться наступним чином:

$$c(\mathbf{X}, 0) = C_0(\mathbf{X}), \mathbf{X} \in \bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma,$$

де $C_0(\mathbf{X})$ – задана функція; Ω – область в якій досліджуються процеси, а Γ – її межа.

Граничні умови для концентрації сольового розчину залежать від нижченаведених чинників.

Межа (частина межі) Γ області Ω дренована

Для концентрації можуть задаватись граничні умови одного з трьох родів:

$$c|_{\Gamma_{t_0}} = C(\mathbf{X}, t), \quad (\mathbf{X}, t) \in \Gamma_{t_0} = \Gamma \times (0; t_0],$$

$$(\mathbf{D}\nabla c + \mathbf{D}_T\nabla T, \mathbf{n})|_{\Gamma_{t_0}} = 0 \quad (\text{умова швидкого виносу розчинених солей});$$

$$[(\mathbf{D}\nabla c + \mathbf{D}_T\nabla T, \mathbf{n}) - (\mathbf{u}, \mathbf{n}) \cdot (c - C_1)]|_{\Gamma_{t_0}} = 0 \quad (\text{умова Данквертса}),$$

де $C(\mathbf{X}, t)$, $C_1(\mathbf{X}, t)$, $(\mathbf{X}, t) \in \Gamma_{t_0}$, – задані функції; $\mathbf{n}$ – вектор напрямних косинусів зовнішньої нормалі до межі Γ .

Межа (частина межі) Γ області Ω непроникна

Якщо непроникність зумовлюється заляганням пласту солі, то для концентрації задається гранична умова першого роду

$$c|_{\Gamma_{t_0}} = C_m$$

або нова балансна гранична умова [96]

$$[D(\nabla c, \mathbf{n}) + D_T(\nabla T, \mathbf{n}) - \frac{D}{\delta} \cdot c]|_{\Gamma_{t_0}} = -\frac{D \cdot C_m}{\delta},$$

де δ – товщина дифузійного примежового шару в околі фронту розчинення; C_m – концентрація граничного насичення.

Якщо непроникність зумовлюється заляганням кам'яного пласта або ґрунту з набагато меншим коефіцієнтом фільтрації, то для концентрації сольового розчину задається гранична умова непроникності

$$(\mathbf{D}\nabla c + \mathbf{D}_T\nabla T, \mathbf{n})|_{\Gamma_{t_0}} = 0.$$

Гранична умова для концентрації на вільній рухомій межі Γ_v області Ω

Гранична умова для концентрації сольового розчину на рухомій вільній межі при змінній пористості ґрунтового середовища в неізотермічному режимі, аналогічно до роботи [46], набуває вигляду

$$(\mathbf{D}\nabla c + \mathbf{D}_T\nabla T, \mathbf{n})|_{\Gamma_v} = 0, \quad t > 0.$$

Початкова умова для температури ґрунту запишеться наступним чином:

$$T(\mathbf{X}, 0) = T_0(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \overline{\Omega},$$

де $T_0(\mathbf{X})$ – задана функція.

Граничні умови для температури залежать від нижченаведених чинників.

На межі (частині межі) Γ області Ω відома температура

В даному випадку для температури задається гранична умова першого роду

$$T|_{\Gamma_{t_0}} = T_1(\mathbf{X}, t), \quad (\mathbf{X}, t) \in \Gamma_{t_0},$$

де $T_1(\mathbf{X}, t)$, $(\mathbf{X}, t) \in \Gamma_{t_0}$, задана функція.

На межі (частині межі) Γ області Ω відома величина теплового потоку

В даному випадку для температури задається гранична умова третього роду

$$(\mathbf{q}_T, \mathbf{n})|_{\Gamma_{t_0}} = Q_T,$$

де Q_T – величина теплового потоку. Якщо дана межа (частина межі) є непроникною для фільтраційного потоку, то вищенаведена гранична умова третього роду стає граничною умовою другого роду

$$(\lambda \nabla T, \mathbf{n})|_{\Gamma_{t_0}} = Q_T.$$

У випадку наявності теплообміну із зовнішнім середовищем, температура якого $T_z(\mathbf{X}, t)$, згідно закону Ньютона–Ріхмана

$$Q_T = \alpha (T|_{\Gamma_{t_0}} - T_z(\mathbf{X}, t)), \quad (\mathbf{X}, t) \in \Gamma_{t_0},$$

і гранична умова набуває вигляду

$$(\lambda \nabla T, \mathbf{n})|_{\Gamma_{t_0}} = \alpha (T|_{\Gamma_{t_0}} - T_z(\mathbf{X}, t)), \quad (\mathbf{X}, t) \in \Gamma_{t_0},$$

де α – коефіцієнт теплообміну.

Межа (частина межі) Γ області Ω теплоізольована

В даному випадку для температури задається однорідна гранична умова третього роду

$$(\mathbf{q}_T, \mathbf{n})|_{\Gamma_{t_0}} = 0.$$

2.5. Початкові та граничні умови для напору в масиві ґрунту, який консоїдується

Рівняння консоїдації (2.20) містить другу похідну по часу від невідомої функції надлишкового напору $h(\mathbf{X}, t)$. Тому для даної функції має бути дві початкові умови. Перша початкова умова має вигляд [137]

$$h_0(\mathbf{X}) = \frac{\Theta_0^*(\mathbf{X}) / R + p_0^*(\mathbf{X})}{\gamma \omega}, \quad \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, \quad (2.26)$$

де $\omega = 1 + \frac{\beta(1+e_0)(1+(R-1)\xi)}{Ra_0}$; e_0 – коефіцієнт пористості до прикладення

навантаження; R – розмірність задачі; Θ_0^* , p_0^* – сума головних напружень в скелеті ґрунту та тиск у поровій рідині безпосередньо після прикладення навантаження в умовах миттєвої стабілізації. Формула (2.26) отримана при наступних припущеннях:

1. Порова рідина нестискувана і не може фільтруватися з пор ґрунту в початковий момент прикладення навантаження. Тобто, зміни об'єму пор можливі лише за рахунок стиснення газоподібної фази.
2. Частинки твердої фази ґрунту є нестискуваними.

Якщо в умовах стабілізації надлишковий поровий тиск відсутній, то з умови (2.26) маємо

$$h_0(\mathbf{X}) = \frac{\Theta_0^*(\mathbf{X})}{R\gamma\omega}, \quad \mathbf{X} \in \bar{\Omega}. \quad (2.27)$$

Для одновимірної задачі ($R=1$) у випадку прикладання на ґрунт миттєвого зовнішнього навантаження інтенсивністю q маємо $\Theta_0^* = q$ і умова (2.27) набуває вигляду

$$h_0(x) = \frac{q}{\gamma\omega}. \quad (2.28)$$

В загальному випадку початкова умова (2.26) вимагає розв'язання задачі визначення напружено-деформованого стану та задачі фільтрації для визначення величин Θ_0^* та p_0^* . Наприклад, в роботі [254] для масиву ґрунту прямокутної форми товщиною l , півшириною b_2 та півшириною області прикладення навантаження l_2 обґрунтована наступна формула:

$$h_0(x, y) = \frac{1}{2\gamma} \left(\frac{ql_2}{b_2} \cdot \frac{1}{1-\nu} + \frac{4q}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi l_2}{b_2}}{m} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{m\pi l}{b_2} \cdot \operatorname{ch} \frac{m\pi(y-l)}{b_2}}{\operatorname{sh} \frac{2m\pi l}{b_2} + \frac{2m\pi l}{b_2}} \cdot \cos \frac{m\pi x}{b_2} \right),$$

де $\nu = \frac{\xi}{1+\xi}$ – коефіцієнт Пуассона в умовах неможливості бічного розширення.

Для просторової задачі початковий розподіл тисків у поровій рідині під дією зовнішнього навантаження $q = f(\xi, \eta)$, яке розподілене на обмеженій області Q , визначається залежністю [151]:

$$p_0(\mathbf{X}) = \frac{1+\mu}{3\pi} \iint_Q \frac{y \cdot f(\xi, \eta) d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2 + y^2 + (z-\eta)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

При $q = \text{const}$, $Q = [a, b] \times [c, d]$

$$\begin{aligned} p_0(\mathbf{X}) = & \frac{1+\mu}{3\pi} q \left(\frac{(d-z)}{|d-z|} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{|d-z|(b-x)}{y\sqrt{(x-b)^2 + y^2 + (z-d)^2}} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \operatorname{arctg} \left(\frac{|d-z|(a-x)}{y\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + (z-d)^2}} \right) \right] - \right. \\ & \left. - \frac{(c-z)}{|c-z|} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{|c-z|(b-x)}{y\sqrt{(x-b)^2 + y^2 + (z-c)^2}} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{|c-z|(a-x)}{y\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + (z-c)^2}} \right) \right] \right), \end{aligned}$$

де $\mathbf{X} = (x, y, z)$, μ – коефіцієнт Пуассона.

Друга початкова умова виводиться на основі рівняння фільтраційної консолидації і згідно основної розрахункової моделі Флоріна набуває вигляду (при нехтуванні впливом теплосолеперенесення) [137]

$$\left(\frac{R\gamma a_0}{1 + (R-1)\xi} + \beta(1+e)\gamma \right) \frac{\partial h_0}{\partial t} = (1+e)\nabla \cdot (\mathbf{K}_h \nabla h_0) - \frac{R\gamma a_1 \beta_1}{1 + (r-1)\xi} h_0 + \\ + \frac{a_0}{1 + (R-1)\xi} \left(\frac{\partial \Theta_0^*}{\partial t} + R \frac{\partial p_0^*}{\partial t} \right) + \frac{a_1 \beta_1}{1 + (r-1)\xi} (\Theta_0^* + R p_0^*), \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, t = 0.$$

Якщо у вищенаведеній початковій умові врахувати явища хімічного та термічного осмосів, а також залежність коефіцієнта фільтрації від концентрації солей, температури та напорів, то вона набуває вигляду

$$\left(\frac{R\gamma a_0}{1 + (R-1)\xi} + \beta(1+e)\gamma \right) \frac{\partial h_0}{\partial t} = (1+e)\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c_0, T_0, h_0) \nabla h_0 - \mathbf{K}_c(c_0) \nabla c_0 - \mathbf{K}_T \nabla T_0) - \\ - \frac{R\gamma a_1 \beta_1}{1 + (R-1)\xi} h_0 + \frac{a_0}{1 + (R-1)\xi} \left(\frac{\partial \Theta_0^*}{\partial t} + R \frac{\partial p_0^*}{\partial t} \right) + \frac{a_1 \beta_1}{1 + (R-1)\xi} (\Theta_0^* + R p_0^*), \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, t = 0, \quad (2.29)$$

де $c_0(\mathbf{X})$, $T_0(\mathbf{X})$, $\mathbf{X} \in \bar{\Omega}$, задають початкові розподіли концентрації солей та температури. У випадку миттєво прикладених незмінних в часі зовнішніх

навантажень маємо $\frac{\partial \Theta_0^*}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial p_0^*}{\partial t} = 0$. Тоді умова (2.29) набуває вигляду

$$\left(\frac{R\gamma a_0}{1 + (R-1)\xi} + \beta(1+e)\gamma \right) \frac{\partial h_0}{\partial t} = (1+e)\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c_0, T_0, h_0) \nabla h_0 - \mathbf{K}_c(c_0) \nabla c_0 - \mathbf{K}_T \nabla T_0) - \\ - \frac{R\gamma a_1 \beta_1}{1 + (R-1)\xi} h_0 + \frac{a_1 \beta_1}{1 + (R-1)\xi} (\Theta_0^* + R p_0^*), \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, t = 0. \quad (2.30)$$

Недоліком умов (2.29) та (2.30) є наявність величин Θ_0^* та p_0^* для визначення яких, як зазначалося вище, в загальному випадку потрібно розв'язувати задачу напружено-деформованого стану масиву ґрунту. Тому для спрощення можна використати умову (незмінність надлишкових напорів в початковий момент часу)

$$\left. \frac{\partial h_0(\mathbf{X})}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \mathbf{X} \in \bar{\Omega}.$$

Умова такого вигляду задавалась, наприклад, в роботах [25, 26].

Граничні умови для напору залежать від нижченаведених чинників.

Межа (частина межі) Γ області Ω дренажна

В даному випадку для напору задається гранична умова першого роду

$$h|_{\Gamma_{t_0}} = H(\mathbf{X}, t), \quad (\mathbf{X}, t) \in \Gamma_{t_0},$$

де $H(\mathbf{X}, t)$, $(\mathbf{X}, t) \in \Gamma_{t_0}$, задана функція.

Межа (частина межі) Γ області Ω непроникна

В даному випадку для швидкості фільтрації задається гранична умова непроникності

$$(\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{\Gamma_{t_0}} = 0.$$

Граничні умови для напору на рухомій межі (депресійній кривій) Γ_v області Ω

Оскільки на депресійній межі, яка є рухомою, тиск сольового розчину води дорівнює атмосферному, а атмосферний тиск приймається рівним нулю, то, покладаючи вісь OZ напрямленою вгору і враховуючи (2.16), для напору отримуємо наступну граничну умову:

$$h(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_v} = z, \quad t > 0.$$

Також на депресійній межі задається кінематична гранична умова [247, 278, 279]

$$(\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{\Gamma_v} = n \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad t > 0,$$

і співвідношення $\varphi(\mathbf{X}, t) = (z - h(\mathbf{X}, t))|_{\Gamma_v} = 0$ описує вільну поверхню Γ_v [247].

2.6. Кінематична гранична умова на верхній рухомій межі області пористого середовища у випадку урахування просідань в процесі консолідації

Дослідимо задачу в умовах неможливості бокового розширення. Тобто, припускаємо, що просідання відбувається лише за рахунок вертикальних.

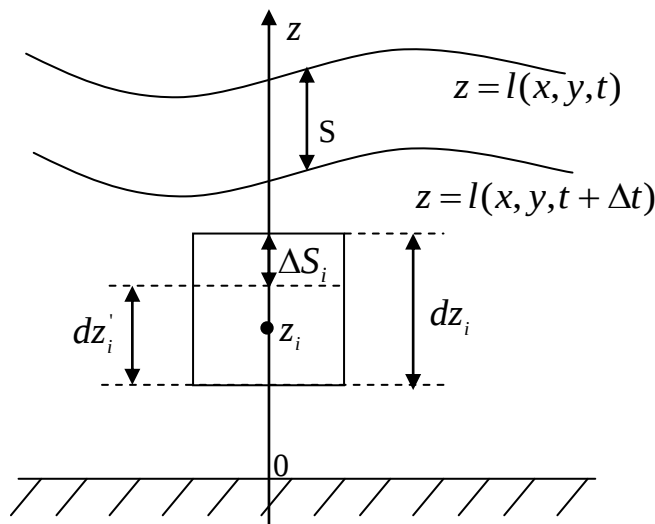


Рис. 2.1. Схема просідання верхньої межі ґрунту

Нехай в момент часу t в точці (x, y) висота ґрунту становила $l(x, y, t)$, а в момент часу $(t + \Delta t)$ висота ґрунту стала $l(x, y, t + \Delta t)$ (рис. 2.1). Тоді величина просідань (набухань) ґрунту в точці (x, y) протягом часу Δt дорівнює

$$S = l(x, y, t) - l(x, y, t + \Delta t). \quad (2.31)$$

Виділимо в ґрунті елементарний паралелепіпед зі сторонами dx_i , dy_i , dz_i (рис. 2.1). Просідання ґрунту в паралелепіпеді згідно наших припущень можливе лише у вертикальному напрямку (бічним розширенням нехтуємо). Також припустимо, що тверді частинки ґрунту нестискувані, як і порова рідина. Тоді просідання можливе лише за рахунок зміни об'єму пор, тобто коефіцієнта пористості. Припустимо, що за час Δt виділений фрагмент просів до величини dz'_i (у вертикальному напрямку). Тоді величина просідань

$$\Delta S_i = dz_i - dz'_i.$$

Припустимо, що таких виділених фрагментів є k . Тоді загальне просідання (набухання)

$$S = \sum_{i=1}^k (dz_i - dz'_i). \quad (2.32)$$

При наших припущеннях відносна об'ємна деформація ґрунту ε_v можлива лише за рахунок вертикальних деформацій, тобто $\varepsilon_v = \varepsilon_z$. Позначимо цю величину через ε_i . Тоді за означенням

$$\varepsilon_i = \frac{\Delta V_i}{V_i} = \frac{dx_i dy_i dz_i - dx_i dy_i dz'_i}{dx_i dy_i dz_i} = \frac{dz_i - dz'_i}{dz_i}$$

і

$$dz_i - dz'_i = \varepsilon_i dz_i. \quad (2.33)$$

З (2.32) та (2.33) маємо

$$S = \sum_{i=1}^k \varepsilon_i dz_i. \quad (2.34)$$

Об'єм твердих частинок $(V_i)_{me}$ у виділеному фрагменті ґрунту до і після деформації залишиться незмінним. Також осереднимо коефіцієнт пористості у даному фрагменті ґрунту (він дорівнює коефіцієнту в точці z_i), тобто $e_i = e(x, y, z_i, t)$. Також врахуємо, що

$$m = \frac{1}{1 + e}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} (V_i)_{me}(t) &= (V_i)_{me}(t + \Delta t), \\ m_i V_i(t) &= m_i(t + \Delta t)(V_i(t) - \Delta V_i), \\ \frac{m_i}{m_i(t + \Delta t)} &= \frac{V_i(t)}{(V_i(t) - \Delta V_i)}, \\ \frac{1}{1 + e(x, y, z_i, t)} (1 + e(x, y, z_i, t + \Delta t)) &= 1 - \varepsilon_i, \\ \varepsilon_i &= \frac{e(x, y, z_i, t) - e(x, y, z_i, t + \Delta t)}{1 + e_i}, \end{aligned}$$

$$\varepsilon_i = \frac{-\frac{\partial e_i}{\partial t} \Delta t + O(\Delta t^2)}{1 + e_i}.$$

Тоді з (2.34) маємо

$$S = -\sum_{i=1}^k \frac{\partial e_i}{\partial t} \frac{\Delta t dz_i}{1 + e_i}. \quad (2.35)$$

Прирівнюючи (2.31) та (2.35), отримуємо

$$\begin{aligned} l(x, y, t) - l(x, y, t + \Delta t) &= -\sum_{i=1}^k \frac{\partial e_i}{\partial t} \frac{\Delta t dz_i}{1 + e_i}, \\ -\frac{\partial l(x, y, t)}{\partial t} \Delta t + O(\Delta t^2) &= -\sum_{i=1}^k \frac{\partial e_i}{\partial t} \frac{\Delta t dz_i}{1 + e_i}, \\ -\frac{\partial l(x, y, t)}{\partial t} &= -\sum_{i=1}^k \frac{\partial e_i}{\partial t} \frac{dz_i}{1 + e_i}, \\ \frac{\partial l(x, y, t)}{\partial t} &= \int_0^{l(x, y, t)} \frac{\partial e}{\partial t} \frac{dz}{1 + e(x, y, z, t)}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Умова (2.36) і є кінематичною граничною умовою для верхньої межі просідання ґрунту в умовах неможливості бокового розширення.

При використанні лінійної залежності (2.9) між напруженнями та деформаціями згідно основної розрахункової моделі Флоріна маємо

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{de}{d\Theta} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial t} = -\frac{a}{1 + (R-1)\xi} \left(\frac{\partial \Theta^*}{\partial t} + R\gamma \frac{\partial h^*}{\partial t} - R\gamma \frac{\partial h}{\partial t} \right).$$

Враховуючи вищенаведену залежність і покладаючи коефіцієнт пористості e рівним його усередненому значенню $\bar{e}$, з (2.36) отримаємо

$$\frac{\partial l(x, y, t)}{\partial t} = \frac{R\gamma a}{(1 + \bar{e})(1 + (R-1)\xi)} \int_0^{l(x, y, t)} \left(\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{1}{R\gamma} \frac{\partial \Theta^*}{\partial t} - \frac{\partial h^*}{\partial t} \right) dz. \quad (2.37)$$

Якщо навантаження на ґрунт є миттєво прикладеним і незмінним в часі, то

$$\frac{\partial \Theta^*}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial h^*}{\partial t} = 0 \text{ і умова (2.37) набуває вигляду}$$

$$\frac{\partial l(y, z, t)}{\partial t} = \frac{R\gamma a}{(1 + \bar{e})(1 + (R-1)\xi)} \int_0^{l(y, z, t)} \frac{\partial h}{\partial t} dx. \quad (2.38)$$

У випадку урахування лінійної повзучості скелету ґрунту у вигляді (2.11) з ядром (2.12), маємо

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{1}{1 + (R-1)\xi} \left(-a_0 \frac{\partial \Theta}{\partial t} - a_1 \beta_1 \Theta(t) + a_1 \beta_1^2 \int_0^t \Theta(\tau) \exp(-\beta_1(t-\tau)) d\tau \right).$$

Тоді згідно основної розрахункової моделі Флоріна, з урахуванням залежностей (2.15), (2.18), маємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial t} = \frac{R\gamma}{1 + (R-1)\xi} & \left(a_0 \left(\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial h^*}{\partial t} - \frac{1}{R\gamma} \frac{\partial \Theta^*}{\partial t} \right) + \frac{a_1 \beta_1}{\gamma} \left(p(t) - p^*(t) - \frac{\Theta^*(t)}{R} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{a_1 \beta_1^2}{\gamma} \int_0^t \left(\frac{\Theta^*(t)}{R} + p^*(t) - p(t) \right) \exp(-\beta_1(t-\tau)) d\tau \right) \end{aligned}$$

і

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(x, y, t)}{\partial t} = \frac{R\gamma}{(1+\bar{e})(1+(R-1)\xi)} & \int_0^{l(x, y, t)} \left(a_0 \left(\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial h^*}{\partial t} - \frac{1}{R\gamma} \frac{\partial \Theta^*}{\partial t} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{a_1 \beta_1}{\gamma} \left(p(t) - p^*(t) - \frac{\Theta^*(t)}{R} \right) + \frac{a_1 \beta_1^2}{\gamma} \int_0^t \left(\frac{\Theta^*(t)}{R} + p^*(t) - p(t) \right) \exp(-\beta_1(t-\tau)) d\tau \right) dz. \end{aligned} \quad (2.39)$$

2.7. Математичні моделі взаємозв'язаних процесів фільтраційної консолідації та контактного розмиву гетерогенних пористих середовищ

В дисертаційній роботі серед процесів фільтраційного руйнування ґрунтів основна увага приділена математичному моделюванню нестационарного процесу контактного розмиву ґрунту фільтраційним потоком. Мотивом є те, що цей процес фільтраційного руйнування ґрунтів може бути передумовою утворення шляхів зосередженої фільтрації [384]. А для ґрунтових споруд, як згадувалося в розділі 1, зосереджена фільтрація є основною причиною їх руйнування [235]. Також в даному випадку потрібно відмітити роботу [252], в

якій вказується на небезпеку контактного розмиву при зведенні ґрунтових споруд на жорстких нерівних поверхнях.

Нехай в областях Ω_1 та Ω_2 , відповідно, знаходяться два типи ґрунту, які контактують по рухомій межі Γ_{12} (рис.2.2 у випадку двох просторових змінних). Область Ω_3 утворюється в результаті контактної розмиву ґрунту вздовж межі Γ_{12} в області Ω_1 і її займає суспензія [265]. Для спрощення, форму області Ω_2 будемо вважати незмінною.

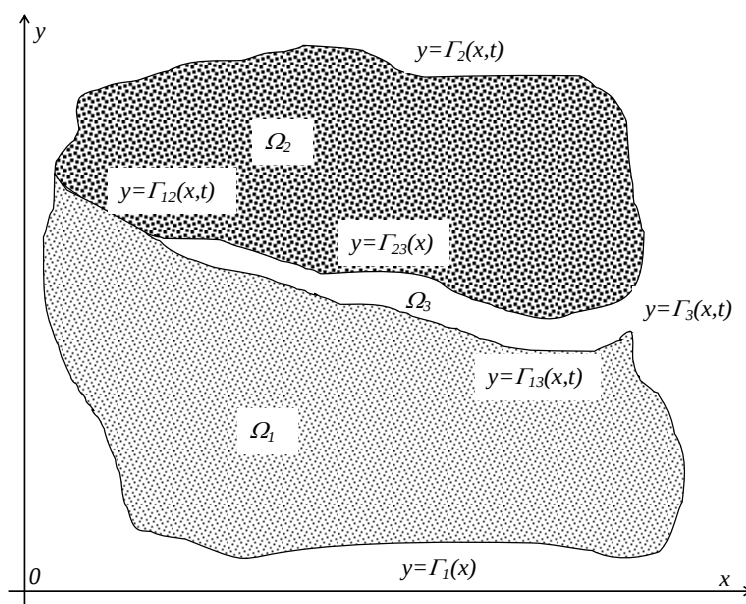


Рис. 2.2. Схематичне розміщення області Ω_3 контактної розмиву пористого середовища

Виведемо кінематичну граничну умову на межі можливого контактної розмиву. Виділимо на поверхні розмиву $z = \Gamma_{13}(\mathbf{X}^*, t)$, $\mathbf{X}^* = (x, y)$, при фіксованому t область, площею S . Виберемо в даній області точку $\mathbf{X} = (\mathbf{X}^*, z) = (x, y, z)$ і осереднимо характеристики ґрунту цієї області. Тобто, всі характеристики середовища у виділеній області будемо вважати рівними характеристикам у вибраній точці в заданий момент часу t . Тоді за час dt з виділеної площі за рахунок розмиву відірветься певна кількість ґрунтових частинок, загальною масою

$$k_{13}^{(er)} s(\mathbf{X}, t) ((\mathbf{v}, \mathbf{n}) + |(\mathbf{v}, \mathbf{d})|) S dt.$$

Тут: $s(\mathbf{X}, t)$ – концентрація твердих частинок ґрунту в одиниці об'єму середовища; $\mathbf{v}$ – вектор швидкості руху твердих частинок ґрунту; $\mathbf{n}$ – вектор напрямних косинусів зовнішньої нормалі; $\mathbf{d}$ – вектор напрямних косинусів дотичної; $k_{13}^{(er)}$ – коефіцієнт розмиву ґрунту [297, 311]. Вектор дотичної вважається додатньо направленим, якщо його поворот до вектора зовнішньої нормалі здійснюється проти руху годинникової стрілки. Якщо відбувається розмив ґрунту, то $s(\mathbf{X}, t) = m\rho_T$. Якщо ж відбувається нанесення твердих частинок на поверхню ґрунту, то $s(\mathbf{X}, t)$ – концентрація суспензії, яка фільтрується в ґрунт. Також ми беремо модуль від скалярного добутку $(\mathbf{v}, \mathbf{d})$, оскільки швидкість по дотичній завжди буде розмиваючою, незалежно від напрямку.

З іншого боку, маса твердих частинок, яка винесеться з виділеної області площею S поверхні $\Gamma_{13}(\mathbf{X}^*, t)$ за час dt рівна

$$-m\rho_T(\Gamma_{13}(\mathbf{X}^*, t+dt) - \Gamma_{13}(\mathbf{X}^*, t))S.$$

де m – відносний об'єм твердих частинок в одиниці об'єму ґрунту. Отже, маємо

$$-m\rho_T(\Gamma_{13}(\mathbf{X}^*, t+dt) - \Gamma_{13}(\mathbf{X}^*, t))S = k_{13}^{(er)}s(\mathbf{X}, t)((\mathbf{v}, \mathbf{n}) + |(\mathbf{v}, \mathbf{d})|)Sdt.$$

Переходячи до границі при $dt \rightarrow 0$ отримуємо умову

$$k_{13}^{(er)}s(\mathbf{X}, t)((\mathbf{v}, \mathbf{n}) + |(\mathbf{v}, \mathbf{d})|) = -(1-n)\rho_T \frac{d\Gamma_{13}}{dt}, \quad z = \Gamma_{13}(\mathbf{X}^*, t), \quad t \geq 0.$$

Оскільки координати поверхні $z = \Gamma_{13}(\mathbf{X}^*, t)$ теж залежать від часу, то в даній умові присутня повна похідна по часу. Відмітимо, що вказана умова виведена, коли в області Ω_3 знаходиться суспензія концентрацією $s(\mathbf{X}, t)$ і тверді частинки можуть накопичуватись на поверхні $z = \Gamma_{13}(\mathbf{X}^*, t)$, а не лише покидати її.

Математичних моделей взаємопов'язаних процесів фільтраційної консолідації та контактного розмиву гетерогенних пористих середовищ в дисертаційному дослідженні побудовано дві (по-аналогії з одно- та двофазними задачами Стефана). Перша математична модель у випадку

урахування впливу теплосолеперенесення описується наступною крайовою задачею:

$$\begin{aligned}
& \frac{(1+e)(1+(R-1)\xi)}{\gamma} \beta_1 [\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c, T, h) \nabla h) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_c(c) \nabla c) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla T)] + \\
& + \frac{(\alpha_p + (2q-1)\alpha_s)(1+(R-1)\xi)e}{\gamma} \beta_1 \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\varepsilon(1+e)(1+(R-1)\xi)}{\rho_c \gamma} \beta_1 \left[\frac{\partial(nc)}{\partial t} - e \frac{\partial N}{\partial t} \right] + \\
& + \frac{(1+e)(1+(R-1)\xi)}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c, T, h) \nabla h) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_c(c) \nabla c) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla T)] + \\
& + \frac{(\alpha_p + (2q-1)\alpha_s)(1+(R-1)\xi)e}{\gamma} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\varepsilon(1+e)(1+(R-1)\xi)}{\rho_c \gamma} \left[\frac{\partial^2(nc)}{\partial t^2} - e \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} \right] + \\
& + \frac{a_0}{\gamma} \frac{\partial^2 (\Theta^* + R\gamma h^*)}{\partial t^2} + \frac{\beta_1}{\gamma} (a_0 + a_1) \frac{\partial (\Theta^* + R\gamma h^*)}{\partial t} = [Ra_0 + \beta(1+e)(1+(R-1)\xi)] \times \\
& \times \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + [\beta_1 R(a_0 + a_1) + \beta \beta_1 (1+e)(1+(R-1)\xi)] \frac{\partial h}{\partial t}, \mathbf{X} \in \Omega, t > 0,
\end{aligned} \tag{2.40}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla c) + \nabla \cdot (\mathbf{D}_T \nabla T) - \mathbf{u} \nabla c = n \frac{\partial c}{\partial t} + (\alpha_p + q\alpha_s) nc \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t}, \mathbf{X} \in \Omega, t > 0, \tag{2.41}$$

$$\nabla \cdot (\lambda \nabla T) - \rho c_p \mathbf{u} \nabla T = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, \mathbf{X} \in \Omega, t > 0, \tag{2.42}$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\gamma_1 (C_m - c) N^\chi, \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, t > 0, \tag{2.43}$$

$$\mathbf{u} - e\mathbf{v} = -\mathbf{K}_h(c, T, h) \nabla h + \mathbf{K}_c(c) \nabla c + \mathbf{K}_T \nabla T, \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, \tag{2.44}$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{D}_s \nabla s) - (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \nabla s, \mathbf{X} \in \Omega_3, t > 0, \tag{2.45}$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u} = \nu \Delta \mathbf{u} - g \nabla h, \mathbf{X} \in \Omega_3, t > 0, \tag{2.46}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \mathbf{X} \in \Omega_3, t > 0, \tag{2.47}$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{\Gamma^{(u)}} = 0, h|_{\Gamma^{(h)}} = H(\mathbf{X}, t), \mathbf{X} \in \Gamma^{(h)}, \Gamma^{(h)} \cup \Gamma^{(u)} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, t > 0, \tag{2.48}$$

$$u_1|_{\Gamma_3^{(u)}} = U_1(\mathbf{X}, t), u_2|_{\Gamma_3^{(u)}} = U_2(\mathbf{X}, t), u_3|_{\Gamma_3^{(u)}} = U_3(\mathbf{X}, t), \mathbf{X} \in \Gamma_3^{(u)}, (\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{\Gamma_3^{(q)}} = 0,$$

$$\Gamma_3^{(u)} \cup \Gamma_3^{(q)} = \Gamma_3, t > 0, \tag{2.49}$$

$$\frac{\partial h}{\partial n}|_{\Gamma_3^{(\partial h)}} = 0, h|_{\Gamma_3^{(h)}} = H_3(\mathbf{X}, t), \mathbf{X} \in \Gamma_3^{(h)}, \Gamma_3^{(h)} \cup \Gamma_3^{(\partial h)} = \Gamma_3, t > 0, \tag{2.50}$$

$$(\mathbf{q}_s, \mathbf{n})|_{\Gamma^{(q_s)}} = 0, s|_{\Gamma^{(c_s)}} = S(\mathbf{X}, t), \mathbf{X} \in \Gamma^{(s)}, t > 0, \quad (2.51)$$

$$(\mathbf{q}_s, \mathbf{n})|_{\Gamma_{13}} = -(1-n) \frac{d\Gamma_{13}}{dt}, \mathbf{X} \in \Gamma_{13}, t > 0, \quad (2.52)$$

$$[h]|_{\Gamma_{12}} = 0, [\mathbf{u}]|_{\Gamma_{12}} = 0, t > 0, \quad (2.53)$$

$$[h]|_{\Gamma} = 0, \left[\frac{\partial h}{\partial n} \right]_{\Gamma} = 0, [\mathbf{u}]|_{\Gamma} = 0, \Gamma \in \{\Gamma_{13}; \Gamma_{23}\}, t > 0, \quad (2.54)$$

$$l_1 h(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_{t_0}} = H_1(\mathbf{X}, t), l_2 c(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_{t_0}} = C_1(\mathbf{X}, t), l_3 T(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_{t_0}} = T_1(\mathbf{X}, t), (\mathbf{X}, t) \in \Gamma_{t_0}, \quad (2.55)$$

$$h(\mathbf{X}, 0) = h_0(\mathbf{X}), c(\mathbf{X}, 0) = C_0(\mathbf{X}), T(\mathbf{X}, 0) = T_0(\mathbf{X}), N(\mathbf{X}, 0) = N_0(\mathbf{X}), \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, \quad (2.56)$$

$$s(\mathbf{X}, 0) = S_0(\mathbf{X}), \mathbf{X} \in \bar{\Omega}_3, \quad (2.57)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{X}), \mathbf{X} \in \bar{\Omega}_3, \quad (2.58)$$

$$k_{13}^{(er)} s(\mathbf{X}, t) ((\mathbf{v}, \mathbf{n}) + |(\mathbf{v}, \mathbf{d})|) = -(1-n) \rho_T \frac{d\Gamma_{13}}{dt}, \mathbf{X} \in \Gamma_{13}, t > 0, \quad (2.59)$$

$$\mathbf{q}_s = (\mathbf{u} - \mathbf{w})s - \mathbf{D}_s \nabla s, \mathbf{X} \in \Omega_3, t > 0, \quad (2.60)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t, \mathbf{u}), \mathbf{X} \in \Gamma_{13}, \quad (2.61)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{R\gamma a_0}{1 + (R-1)\xi} + \beta(1+e)\gamma \right) \frac{\partial h_0}{\partial t} = (1+e) \nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c_0, T_0, h_0) \nabla h_0 - \mathbf{K}_c(c_0) \nabla c_0 - \mathbf{K}_T \nabla T_0) - \\ & - \frac{R\gamma a_1 \beta_1}{1 + (R-1)\xi} h_0 + \frac{a_0}{1 + (R-1)\xi} \left(\frac{\partial \Theta_0^*}{\partial t} + R \frac{\partial p_0^*}{\partial t} \right) + \frac{a_1 \beta_1}{1 + (R-1)\xi} (\Theta_0^* + R p_0^*), \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, t = 0, \end{aligned} \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Gamma_2}{\partial t} = \frac{R\gamma}{(1+\bar{e})(1+(R-1)\xi)} \int_{\Gamma_{23}}^{\Gamma_2} \left(a_0 \left(\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial h^*}{\partial t} - \frac{1}{R\gamma} \frac{\partial \Theta^*}{\partial t} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{a_1 \beta_1}{\gamma} \left(p(t) - p^*(t) - \frac{\Theta^*(t)}{R} \right) + \frac{a_1 \beta_1^2}{\gamma} \int_0^t \left(\frac{\Theta^*(t)}{R} + p^*(t) - p(t) \right) \exp(-\beta_1(t-\tau)) d\tau \right) dx, \end{aligned} \quad (2.63)$$

де l_1, l_2, l_3 – оператори, що задають граничні умови для напору, концентрації солей та температури на бічній поверхні Γ_{t_0} циліндра $Q_{t_0} = \Omega \times (0; t_0]$.

Припускається, що на межах контакту областей виконуються умови спряження ідеального контакту (2.53), (2.54) [247]. Це не зменшує загальності задачі, адже зважаючи на науковий доробок І. В. Сергієнка, І. І. Ляшка, В. В. Скопечького,

В. С. Дейнеки, М. Р. Петрика ці умови спряження можуть бути замінені іншими, загальнішими. Функція $\mathbf{v} = \mathbf{F}(X, t, \mathbf{u})$ пов'язує вектор швидкості фільтрації $\mathbf{u}$ та вектор швидкості руху твердих частинок ґрунту $\mathbf{v}$ на рухомій межі Γ_{13} . Рівняння (2.45) описує зміну концентрації суспензії в області розмиву Ω_3 [397]. В моделі для описання руху рідини в зоні розмиву використовується система рівнянь Нав'є–Стокса (2.46), (2.47). Також зауважимо, що третя з умов спряження (2.54) пов'язує між собою швидкості руху рідини на межі Γ . Тому замість вектора $\mathbf{u}$ з боку областей Ω_1 та Ω_2 потрібно брати вектор $\mathbf{u}/n$.

Стосовно процесу розмиву математична модель (2.40)–(2.63) є задачею стефанівського типу. Причому – двофазною задачею [243]. Можна побудувати аналогічну математичну модель, яка стосовно процесу розмиву буде описуватись однофазною задачею Стефана. Маємо другу математичну модель [73, 76, 91]

$$\begin{aligned}
 & \frac{(1+e)(1+(R-1)\xi)}{\gamma} \beta_1 [\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c, T, h) \nabla h) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_c(c) \nabla c) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla T)] + \\
 & + \frac{(\alpha_\rho + (2q-1)\alpha_s)(1+(R-1)\xi)e}{\gamma} \beta_1 \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\varepsilon(1+e)(1+(R-1)\xi)}{\rho_c \gamma} \beta_1 \left[\frac{\partial(nc)}{\partial t} - e \frac{\partial N}{\partial t} \right] + \\
 & + \frac{(1+e)(1+(R-1)\xi)}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c, T, h) \nabla h) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_c(c) \nabla c) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla T)] + \\
 & + \frac{(\alpha_\rho + (2q-1)\alpha_s)(1+(R-1)\xi)e}{\gamma} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\varepsilon(1+e)(1+(R-1)\xi)}{\rho_c \gamma} \left[\frac{\partial^2(nc)}{\partial t^2} - e \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} \right] + \\
 & + \frac{a_0}{\gamma} \frac{\partial^2 (\Theta^* + R\gamma h^*)}{\partial t^2} + \frac{\beta_1}{\gamma} (a_0 + a_1) \frac{\partial (\Theta^* + R\gamma h^*)}{\partial t} = [Ra_0 + \beta(1+e)(1+(R-1)\xi)] \times \\
 & \times \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + [\beta_1 R(a_0 + a_1) + \beta \beta_1 (1+e)(1+(R-1)\xi)] \frac{\partial h}{\partial t}, \mathbf{X} \in \Omega, t > 0,
 \end{aligned} \tag{2.64}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla c) + \nabla \cdot (\mathbf{D}_T \nabla T) - \mathbf{u} \nabla c = n \frac{\partial c}{\partial t} + (\alpha_\rho + q\alpha_s) nc \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t}, \mathbf{X} \in \Omega, t > 0, \tag{2.65}$$

$$\nabla \cdot (\lambda \nabla T) - \rho c_p \mathbf{u} \nabla T = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, \mathbf{X} \in \Omega, t > 0, \tag{2.66}$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\gamma_1 (C_m - c) N^\chi, \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, t > 0, \tag{2.67}$$

$$\mathbf{u} - e\mathbf{v} = -\mathbf{K}_h(c, T, h)\nabla h + \mathbf{K}_c(c)\nabla c + \mathbf{K}_T\nabla T, \quad \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, \quad (2.68)$$

$$l_1 h(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_{t_0}} = H_1(\mathbf{X}, t), \quad l_2 c(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_{t_0}} = C_1(\mathbf{X}, t), \quad l_3 T(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_{t_0}} = T_1(\mathbf{X}, t), \quad (\mathbf{X}, t) \in \Gamma_{t_0}, \quad (2.69)$$

$$h(\mathbf{X}, 0) = h_0(\mathbf{X}), \quad c(\mathbf{X}, 0) = C_0(\mathbf{X}), \quad T(\mathbf{X}, 0) = T_0(\mathbf{X}), \quad N(\mathbf{X}, 0) = N_0(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, \quad (2.70)$$

$$k_{13}^{(er)}((\mathbf{v}, \mathbf{n}) + |(\mathbf{v}, \mathbf{d})|) = -\frac{d\Gamma_{13}}{dt}, \quad \mathbf{X} \in \Gamma_{13}, \quad t > 0, \quad (2.71)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t, \mathbf{u}), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_{13}, \quad (2.72)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{R\gamma a_0}{1 + (R-1)\xi} + \beta(1+e)\gamma \right) \frac{\partial h_0}{\partial t} = (1+e)\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c_0, T_0, h_0)\nabla h_0 - \mathbf{K}_c(c_0)\nabla c_0 - \mathbf{K}_T\nabla T_0) - \\ - \frac{R\gamma a_1 \beta_1}{1 + (R-1)\xi} h_0 + \frac{a_0}{1 + (R-1)\xi} \left(\frac{\partial \Theta_0^*}{\partial t} + R \frac{\partial p_0^*}{\partial t} \right) + \frac{a_1 \beta_1}{1 + (R-1)\xi} (\Theta_0^* + R p_0^*), \quad \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, \quad t = 0, \end{aligned} \quad (2.73)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_2}{\partial t} = \frac{R\gamma}{(1+\bar{e})(1+(R-1)\xi)} \int_{\Gamma_{23}}^{\Gamma_2} \left(a_0 \left(\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial h^*}{\partial t} - \frac{1}{R\gamma} \frac{\partial \Theta^*}{\partial t} \right) + \right. \\ \left. + \frac{a_1 \beta_1}{\gamma} \left(p(t) - p^*(t) - \frac{\Theta^*(t)}{R} \right) + \frac{a_1 \beta_1^2}{\gamma} \int_0^t \left(\frac{\Theta^*(t)}{R} + p^*(t) - p(t) \right) \exp(-\beta_1(t-\tau)) d\tau \right) dx, \end{aligned} \quad (2.74)$$

де l_1, l_2, l_3 – оператори, що задають граничні умови для напору, концентрації солей та температури на бічній поверхні Γ_{t_0} циліндра $Q_{t_0} = \Omega \times (0; t_0]$.

В умовах (2.59), (2.71) враховано зміну положення межі Γ_{13} в результаті контактного розмиву. Урахування ще і просідань за рахунок розсіювання надлишкових напорів вимагає модифікації умов до відповідних виглядів

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma_{13}}{dt} = -\frac{k_{13}^{(er)} s(\mathbf{X}, t)}{(1-n)\rho_T} ((\mathbf{v}, \mathbf{n}) + |(\mathbf{v}, \mathbf{d})|) + \frac{R\gamma}{(1+\bar{e})(1+(R-1)\xi)} \int_{\Gamma_1}^{\Gamma_{13}} \left(a_0 \left(\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial h^*}{\partial t} - \frac{1}{R\gamma} \frac{\partial \Theta^*}{\partial t} \right) + \right. \\ \left. + \frac{a_1 \beta_1}{\gamma} \left(p(t) - p^*(t) - \frac{\Theta^*(t)}{R} \right) + \frac{a_1 \beta_1^2}{\gamma} \int_0^t \left(\frac{\Theta^*(t)}{R} + p^*(t) - p(t) \right) \exp(-\beta_1(t-\tau)) d\tau \right) dx \end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma_{13}}{dt} = -k_{13}^{(er)} ((\mathbf{v}, \mathbf{n}) + |(\mathbf{v}, \mathbf{d})|) + \frac{R\gamma}{(1+\bar{e})(1+(R-1)\xi)} \int_{\Gamma_1}^{\Gamma_{13}} \left(a_0 \left(\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial h^*}{\partial t} - \frac{1}{R\gamma} \frac{\partial \Theta^*}{\partial t} \right) + \right. \\ \left. + \frac{a_1 \beta_1}{\gamma} \left(p(t) - p^*(t) - \frac{\Theta^*(t)}{R} \right) + \frac{a_1 \beta_1^2}{\gamma} \int_0^t \left(\frac{\Theta^*(t)}{R} + p^*(t) - p(t) \right) \exp(-\beta_1(t-\tau)) d\tau \right) dx. \end{aligned}$$

2.8. Основні рівняння математичної моделі взаємозв'язаних процесів фільтраційної консолідації та багатофракційної контактної суфозії гетерогенних пористих середовищ

Якщо ґрунт є неоднорідним і складається із шарів з різними гранулометричними складами, що, в свою чергу, впливає на їх фізико-хімічні властивості, то окрім контактного розмиву там можуть відбуватись процеси контактного суфозійного випору. В науковій літературі такі процеси названі «контактною суфозією». В дисертаційній роботі ми будемо притримуватись такої ж термінології, розуміючи під контактною суфозією взаємопроникнення через межу контакту суфозійних частинок в інше пористе середовище.

Розглянемо масив ґрунту в області Ω_1 , який привантажений ґрунтом в області Ω_2 більш великої фракції. Під впливом висхідного фільтраційного потоку суфозійні частинки з області Ω_1 можуть проникати в область Ω_2 . В результаті межа контакту двох ґрунтів $z = \Gamma_{12}(\mathbf{X}^*, t)$, $\mathbf{X} = (\mathbf{X}^*, z) = (x, y, z)$, є рухомою і змінює своє положення в часі. Тому область Ω_2 – це ґрунт, який складається із «скелету» та S -фракційних суфозійних частинок з концентраціями $\sigma^{(i)}(\mathbf{X}, t)$, $i = \overline{1, S}$. Під концентрацією $\sigma^{(i)}(\mathbf{X}, t)$ частинок в деякому виділеному об'ємі V пористого середовища будемо розуміти відношення об'єму суфозійних частинок до всього виділеного об'єму V . Тому $\sigma_{\max}(\mathbf{X}, t) = (1 - n_1)n_2$, де n_i – функції пористості «чистого» ґрунту в областях Ω_i , $i = 1, 2$.

Виділимо елементарний фрагмент ґрунту загальним об'ємом V , який повністю насичений поровою рідиною (не зменшуючи загальності вважаємо, що газоподібна складова відсутня, або її наявність можна знехтувати). Виділений фрагмент ґрунту буде містити: 1) поровий розчин об'ємом V_n , який дорівнює об'єму пор; 2) тверді структурні частинки об'ємом $V_s^{(0)}$, які утворюють «скелет» пористого середовища; 3) тверді суфозійні частинки

об'ємом $V_s^{(i)}$, $i = \overline{1, S}$, де номер i відповідає частинкам певної фракції. Відмітимо, що процеси механічної суфозії при $S = 1$ досліджено в роботах А. Я. Бомби, В. Л. Полякова [17, 19, 20, 223–228]. В роботі [223] висловлена ідея розгляду багатofракційних суфозійних частинок.

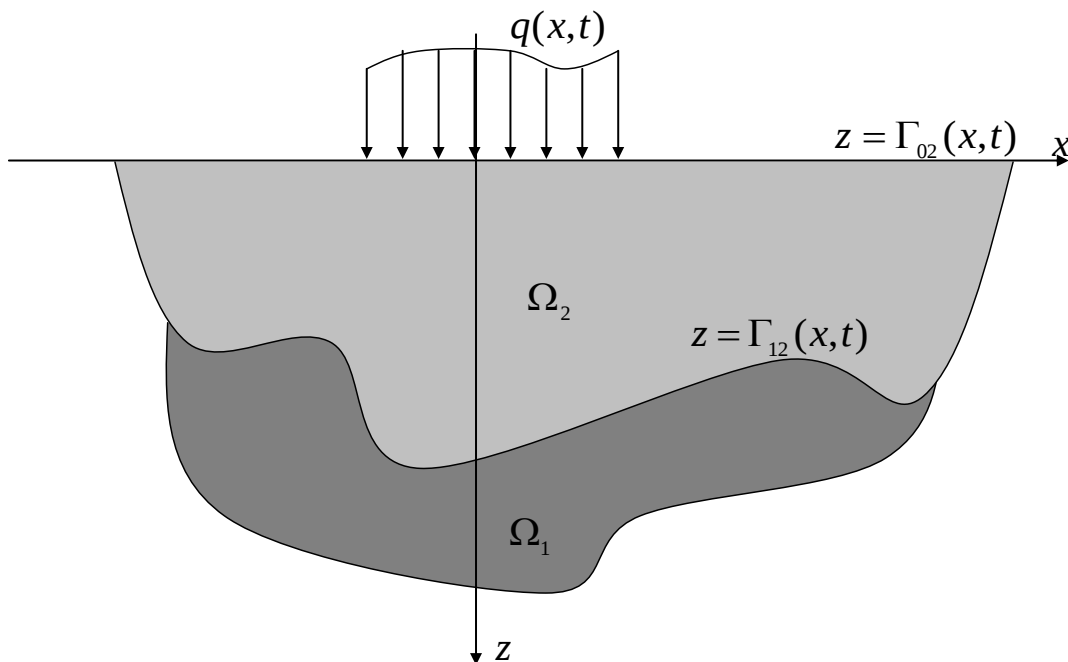


Рис. 2.3. Схема шаруватого масиву ґрунту, в якому можлива контактна суфозія

Нехай $n = \frac{V_n}{V}$ – пористість ґрунту; $m^{(i)} = \frac{V_s^{(i)}}{V}$ – відносний вміст твердих

частинок i -ї фракції; $e^{(i)} = \frac{n}{m^{(i)}}$; $i = \overline{0, S}$. Виведення рівняння фільтраційної консолідації з урахуванням наявності суфозійних частинок повністю повторює етапи виведення в класичній теорії. Тому маємо [191]:

$$\frac{1 - \sum_{i=1}^S m^{(i)}}{1 + e^{(0)}} \frac{\partial e^{(0)}}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{X}, t). \quad (2.75)$$

Далі, як і в класичній теорії фільтраційної консолідації, використовуючи принцип гідроємності М. М. Герсєванова, основну розрахункову модель В. А. Флоріна та узагальнений закон Дарсі–Герсєванова, з рівняння (2.75) отримуємо

$$\begin{aligned}
& \frac{(1+e^{(0)})(1+(R-1)\xi)}{\gamma\left(1-\sum_{i=1}^S m^{(i)}\right)} \beta_1 \left[\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c, T, h, \boldsymbol{\sigma}) \nabla h) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_c(c) \nabla c) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla T) \right] + \\
& \quad + \frac{(\alpha_p + (2q-1)\alpha_s)}{1+e^{(0)}} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{\rho_c} \left[\frac{\partial(nc)}{\partial t} - e^{(0)} \frac{\partial N}{\partial t} \right] + \\
& + \frac{(1+e^{(0)})(1+(R-1)\xi)}{\gamma\left(1-\sum_{i=1}^S m^{(i)}\right)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \left[\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c, T, h, \boldsymbol{\sigma}) \nabla h) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_c(c) \nabla c) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla T) \right] + \right. \\
& \quad \left. + \frac{(\alpha_p + (2q-1)\alpha_s)e^{(0)}}{\gamma(1+e^{(0)})} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{1}{\gamma} \left[\frac{\partial^2(nc)}{\partial t^2} - e \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} \right] \right) + \\
& + \frac{a_0}{\gamma} \frac{\partial^2 (\Theta^* + R\mathcal{H}^*)}{\mathcal{A}^2} + \frac{\beta_1}{\gamma} (a_0 + a_1) \frac{\partial (\Theta^* + R\mathcal{H}^*)}{\mathcal{A}} = [Ra_0 + \beta(1+e^{(0)})(1+(R-1)\xi)] \times \\
& \quad \times \frac{\partial^2 h}{\mathcal{A}^2} + [\beta_1 R(a_0 + a_1) + \beta\beta_1(1+e^{(0)})(1+(R-1)\xi)] \frac{\partial h}{\mathcal{A}}, \mathbf{X} \in \Omega, t > 0.
\end{aligned} \tag{2.76}$$

Рівняння (2.76) відрізняється від рівняння (2.20) лише наявністю в правій частині в знаменнику множника $\left(1 - \sum_{i=1}^S m^{(i)}\right)$, а також залежністю коефіцієнта фільтрації від концентрації суфозійних частинок. При відсутності суфозійних частинок $\sum_{i=1}^S m^{(i)} = 0$ і рівняння (2.76) повністю співпадає з (2.20).

Тензор коефіцієнтів фільтрації $\mathbf{K}_h$ залежить від фізико-хімічних характеристик пористого середовища: температури, концентрації солей, надлишкових напорів та концентрацій суфозійних частинок $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma^{(1)}; \sigma^{(2)}; \dots; \sigma^{(3)})$. Щодо залежності від концентрації суфозійних частинок, то в роботі [223] запропоновано аналог формули Козені–Кармана для коефіцієнта проникливості у випадку полідисперсного ґрунту

$$k = \chi^2 \frac{(d^{(0)})^2 n^3}{180(1-n)^2},$$

$$\text{де } \chi = \frac{1 + \sum_{i=1}^S \eta^{(i)}}{1 + \sum_{i=1}^S \eta^{(i)} D^{(i)}}, \quad \eta^{(i)} = \frac{m^{(i)}}{m^{(0)}}, \quad D^{(i)} = \frac{d^{(0)}}{d^{(i)}}; \quad d^{(i)}, \quad i = \overline{0, S}, \quad - \text{ середній діаметр}$$

частинок.

Рівняння для опису динаміки зміни концентрації $\sigma^{(i)}(\mathbf{X}, t)$, $i = \overline{1, S}$ як і рівняння теплосолеперенесення (або вологопереносу), виводиться на основі рівняння нерозривності

$$\frac{\partial \sigma^{(i)}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q}_i(\mathbf{X}, t) = 0, \quad i = \overline{1, S}. \quad (2.77)$$

Тут $\mathbf{q}_i(\mathbf{X}, t)$ – вектор–функція, яка задає потік суфозійних часток. Одним із виглядів функціональної залежності

$$\mathbf{q}_i(\mathbf{X}, t) = \mathbf{F}(\sigma^{(i)}, \sigma_{\max}, \mathbf{u}, u_{kr}^{(i)}), \quad \mathbf{X} \in \Omega_2, \quad i = \overline{1, S},$$

може бути

$$\mathbf{q}_i(\mathbf{X}, t) = \mathbf{f}^{(i)}(\mathbf{u}, u_{kr}^{(i)}) \sigma^{(i)}(\mathbf{X}, t) \mp w_i \nabla z - \mathbf{D}^{(i)} \nabla \sigma^{(i)}(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Omega_2, \quad i = \overline{1, S},$$

де w_i – швидкість осідання твердих часток i -ї фракції у вертикальному напрямку [397] («–» – вісь oz направлена вгору, «+» – вісь oz направлена вниз); $\mathbf{D}^{(i)}$ – тензор коефіцієнтів дисперсії суфозійних частинок [20]; $\mathbf{f}^{(i)}(\mathbf{u}, u_{kr}^{(i)}) = (f_j^{(i)})_{j=1}^R$, $f_j^{(i)} = \alpha_{er}^{(i)} (u_j - u_{kr}^{(i)})_+ = \alpha_{er}^{(i)} \max\{0; u_j - u_{kr}^{(i)}\}$, $\alpha_{er}^{(i)}$ – коефіцієнт розмиву [297, 339, 355]; $u_{kr}^{(i)}$ – скалярна критична швидкість розмиву для суфозійних частинок i -ї фракції.

Зазначимо, що в рівнянні нерозривності (2.77) знехтувано швидкістю руху твердих частинок ґрунту в результаті консолідації. Це обґрунтовується припущенням, що суфозійні частинки в області Ω_2 знаходяться в рухомому, не зв'язному зі «скелетом» стані.

Межа $z = \Gamma_{12}(\mathbf{X}^*, t)$, $\mathbf{X} = (\mathbf{X}^*, z) = (x, y, z)$ визначає нижню межу рухомого «скелету» із твердих, несудозійних частинок області Ω_2 . Цей процес можна порівняти із процесами вологопереносу, де межа Γ_{12} є межею розділу повністю насиченого та не повністю насиченого ґрунту. Єдина відмінність – при переході

частини вологи із області Ω_1 в область Ω_2 – межа Γ_{12} має рухатись вгору. Тут навпаки – якщо деякий об'єм суфозійних частинок з області Ω_1 перейде в пори крупнозернистого ґрунту в області Ω_2 , то межа Γ_{12} має опускатись вниз – об'єм ґрунту в області Ω_1 зменшиться. Тому, по аналогії із роботою [279] будемо мати

$$m \frac{\partial \Gamma_{12}}{\partial t} + \sum_{i=1}^S (\mathbf{q}_i(\mathbf{X}, t), \mathbf{n}_{12}) = 0, \quad (2.78)$$

де m – аналог недостачі водонасичення в задачі вологоперенесення, а в даному випадку

$$m(\mathbf{X}, t) = \sigma_{\max}(\mathbf{X}, t) - \sum_{i=1}^S \sigma^{(i)}(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Omega_2,$$

$\mathbf{n}_{12}$ – вектор напрямних косинусів зовнішньої нормалі до межі Γ_{12} відносно області Ω_1 .

Особливість зміни положення межі $z = \Gamma_{02}(\mathbf{X}^*, t)$ обумовлюється двома факторами: 1) зміною положення межі Γ_{12} та 2) зміною об'єму пор за рахунок процесів фільтраційної консолідації. Тобто

$$\frac{\partial \Gamma_{02}}{\partial t} = f_1(\mathbf{X}, t) + f_2(\mathbf{X}, t). \quad (2.79)$$

Другий фактор враховано в попередніх пунктах розділу при врахуванні лише вертикальних зміщень. Зокрема

$$f_2(\mathbf{X}, t) = - \frac{R\gamma \left(1 - \sum_{i=1}^S m^{(i)} \right)}{(1 + \bar{e})(1 + (R - 1)\xi)} \int_{\varphi(\mathbf{X}^*)}^{\Gamma_{02}} \left(a_0 \left(\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial h^*}{\partial t} - \frac{1}{R\gamma} \frac{\partial \Theta^*}{\partial t} \right) + \right. \\ \left. + \frac{a_1 \beta_1}{\gamma} \left(p(t) - p^*(t) - \frac{\Theta^*(t)}{R} \right) + \frac{a_1 \beta_1^2}{\gamma} \int_0^t \left(\frac{\Theta^*(t)}{R} + p^*(t) - p(t) \right) \exp(-\beta_1(t - \tau)) d\tau \right) dz,$$

де $z = \varphi(\mathbf{X}^*)$ – функція, що задає нижній нерухомий контур області консолідації.

Зважаючи на те, що умова (2.79) буде враховувати лише вертикальні зміщення, в першому факторі (функція $f_1(\mathbf{X}, t)$) потрібно враховувати це ж саме. Розглянемо рисунок 2.4. Тоді

$$\Delta\Gamma_{12} \approx -\frac{1}{n_z^{(12)}} (\Gamma_{12}(\mathbf{X}^*, t + \Delta t) - \Gamma_{12}(\mathbf{X}^*, t)),$$

де $n_z^{(12)} = \cos \alpha$ – напрямний косинус нормалі $\mathbf{n}_{12}$. Тобто

$$f_1(\mathbf{X}, t) = -\frac{1}{n_z^{(12)}} \frac{\partial \Gamma_{12}(\mathbf{X}^*, t)}{\partial t}.$$

Отже, побудована математична модель взаємних процесів фільтраційної консолидації та контактної багатофракційної суфозії в гетерогенному пористому середовищі буде містити наступні складові:

1. Рівняння фільтраційної консолидації та узагальнений закон Дарсі–Герсеванова

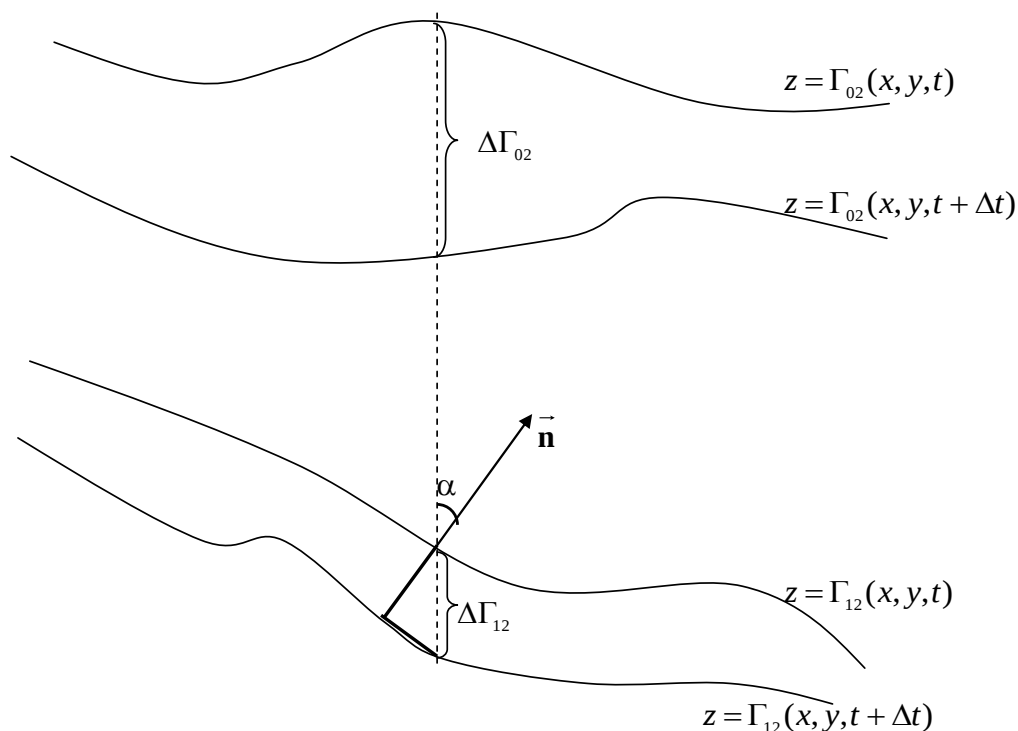


Рис. 2.4. Схема просідання верхньої межі масиву ґрунту при контактній суфозії

$$\begin{aligned}
& \frac{(1+e^{(0)})(1+(R-1)\xi)}{\gamma\left(1-\sum_{i=1}^S m^{(i)}\right)} \beta_1 \left[\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c, T, h, \sigma) \nabla h) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_c(c) \nabla c) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla T) \right] + \\
& + \frac{(\alpha_\rho + (2q-1)\alpha_s)}{1+e^{(0)}} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{\rho_c} \left[\frac{\partial(nc)}{\partial t} - e^{(0)} \frac{\partial N}{\partial t} \right] + \\
& + \frac{(1+e^{(0)})(1+(R-1)\xi)}{\gamma\left(1-\sum_{i=1}^S m^{(i)}\right)} \left(\frac{\partial}{\partial t} \left[\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c, T, h, \sigma) \nabla h) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_c(c) \nabla c) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla T) \right] + \right. \\
& \left. + \frac{(\alpha_\rho + (2q-1)\alpha_s)e^{(0)}}{\gamma(1+e^{(0)})} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{1}{\gamma} \left[\frac{\partial^2(nc)}{\partial t^2} - e \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} \right] \right) + \\
& + \frac{a_0}{\gamma} \frac{\partial^2(\Theta^* + R\gamma h^*)}{\partial t^2} + \frac{\beta_1}{\gamma} (a_0 + a_1) \frac{\partial(\Theta^* + R\gamma h^*)}{\partial t} = [Ra_0 + \beta(1+e^{(0)})(1+(R-1)\xi)] \times \\
& \times \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + [\beta_1 R(a_0 + a_1) + \beta\beta_1(1+e^{(0)})(1+(R-1)\xi)] \frac{\partial h}{\partial t}, \mathbf{X} \in \Omega, t > 0; \\
& \mathbf{u} - e\mathbf{v} = -\mathbf{K}_h(c, T, h, \sigma) \nabla h + \mathbf{K}_c(c) \nabla c + \mathbf{K}_T \nabla T, \mathbf{X} \in \bar{\Omega}.
\end{aligned}$$

2. Рівняння теплосолеперенесення та гетерогенних масообмінних процесів

$$\nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla c) + \nabla \cdot (\mathbf{D}_T \nabla T) - \mathbf{u} \nabla c = n \frac{\partial c}{\partial t} + (\alpha_\rho + q\alpha_s) nc \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t}, \mathbf{X} \in \Omega, t > 0;$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\gamma_1 (C_m - c) N^\chi, \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, t > 0;$$

$$\nabla \cdot (\lambda \nabla T) - \rho c_p \mathbf{u} \nabla T = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, \mathbf{X} \in \Omega, t > 0.$$

3. Рівняння та закон переносу суфозійних частинок

$$\frac{\partial \sigma^{(i)}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q}_i(\mathbf{X}, t) = 0, i = \overline{1, S}, \mathbf{X} \in \Omega_2,$$

$$\mathbf{q}_i(\mathbf{X}, t) = \mathbf{F}(\sigma^{(i)}, \sigma_{\max}, \mathbf{u}, \mathbf{u}_{kr}^{(i)}), \mathbf{X} \in \Omega_2.$$

4. Кінематичні граничні умови

$$\left(\sigma_{\max} - \sum_{i=1}^S \sigma^{(i)}(\mathbf{X}, t) \right) \frac{\partial \Gamma_{12}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^S (\mathbf{q}_i(\mathbf{X}, t), \mathbf{n}_{12}) = 0, \mathbf{X} \in \Gamma_{12},$$

$$\frac{\partial \Gamma_{02}(\mathbf{X}^*, t)}{\partial t} = -\frac{1}{n_z^{(12)}} \frac{\partial \Gamma_{12}(\mathbf{X}^*, t)}{\partial t} - \frac{R\gamma \left(1 - \sum_{i=1}^S m^{(i)}\right)}{(1 + \bar{e})(1 + (R - 1)\xi)} \int_{\varphi(\mathbf{X}^*)}^{\Gamma_{02}} \left(a_0 \left(\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial h^*}{\partial t} - \frac{1}{R\gamma} \frac{\partial \Theta^*}{\partial t} \right) + \frac{a_1 \beta_1}{\gamma} \left(p(t) - p^*(t) - \frac{\Theta^*(t)}{R} \right) + \frac{a_1 \beta_1^2}{\gamma} \int_0^t \left(\frac{\Theta^*(t)}{R} + p^*(t) - p(t) \right) \exp(-\beta_1(t - \tau)) d\tau \right) dz.$$

5. Додаткові умови, які включають

- початкові умови для шуканих функцій, в тому числі і для вільних рухомих меж;
- граничні умови для функцій $h(\mathbf{X}, t)$, $c(\mathbf{X}, t)$, $T(\mathbf{X}, t)$, $\sigma(\mathbf{X}, t)$;
- умови спряження на межі контакту Γ_{12} для функцій $h(\mathbf{X}, t)$, $c(\mathbf{X}, t)$, $T(\mathbf{X}, t)$.

2.9. Висновки до Розділу 2

Отже, в розділі 2 дисертаційного дослідження

1. Удосконалено закон Дарсі–Герсеванова руху рідин в гетерогенних деформівних пористих середовищах (на прикладі ґрунтів) щодо комплексного урахування та формалізації дії фізичних законів та явищ термічного і хімічного осмосів, залежності параметрів фільтрації від теплового та хімічного режимів ґрунту та нелінійної залежності коефіцієнта фільтрації від функції самих надлишкових напорів. До цього часу в узагальненнях закону Дарсі–Герсеванова враховувались лише залежність коефіцієнта фільтрації від концентрації порового соляового розчину та явища хімічного осмосу (роботи А. П. Власюка, О. В. Жеребятьєва, П. М. Мартинюка, М. Т. Кузло, О. М. Степанченко, О. П. Остапчук та ін.). Незалежно від робіт вказаних авторів, в роботах О. В. Школи та його учнів враховувалась залежність коефіцієнта консолідації від функції самих надлишкових напорів при математичному моделюванні фільтраційної консолідації ґрунтів.
2. Враховано явище термічного розширення фаз ґрунту, наявність солей в рідкій та твердій фазах в рівняннях нерозривності при побудові математичних моделей фільтраційної консолідації гетерогенного пористого

середовища. До цього при математичному моделюванні цих процесів явищ термічного розширення не враховувалося, оскільки в принципі не враховувався вплив неізотермічних умов. Вперше наявність солей в рідкій фазі при виведенні відповідного рівняння нерозривності теоретично враховано М. М. Веригінім, однак в практичних задачах цим впливом нехтувалось.

3. Результатом перших двох пунктів є формування нової математичної моделі фільтраційної консолідації гетерогенного пористого середовища (на прикладі ґрунтів) з урахуванням узагальненого закону Дарсі–Герсевича, рівнянь нерозривності в умовах впливу одночасно функціонуючих фізичних процесів переносу тепла, солей та масообміну, а також можливості просідання поверхні області ґрунту в процесі його консолідації. У відомих до цього часу математичних моделях фільтраційної консолідації ґрунтів явищем просідання нехтували. Урахування вказаного явища при математичному моделюванні процесів консолідації ґрунтів вимагає задання на рухомій межі кінематичної граничної умови, яка сформульована і обґрунтована в розділі 2, і дослідження відповідних нелінійних крайових задач в областях з рухомими межами
4. Побудовано нові математичні моделі фільтраційної консолідації ґрунтів з урахуванням можливості їх фільтраційного руйнування – наявності та поширення зони контактного розмиву, можливості багатofракційної контактної суфозії, а також з урахуванням впливу теплосолеперенесення. Побудовані математичні моделі є кроком вперед щодо урахування топологічної складності досліджуваних об'єктів – пористих середовищ, а також щодо урахування гетерогенності за складом одночасно функціонуючих в цих пористих середовищах фізичних процесів.
5. Отримано кінематичну граничну умову на рухомій межі контактного розмиву ґрунту фільтраційним потоком. При цьому вигляд умови допускає прийняття довільної залежності для швидкості руху твердих частинок (критерій розмиву) на межі розмиву. Виведена умова потрібна для

коректності постановки крайової задачі, якою описуються нестационарні взаємозв'язані процеси фільтраційної консолідації та контактного розмиву ґрунтів, а також для прогнозування форми та розмірів області розмиву.

6. В математичних моделях фільтраційної консолідації шаруватих ґрунтів вперше розглянуто явище контактної багатофракційної суфозії – коли суфозійні частинки з одного типу ґрунту через межу контакту можуть виноситись фільтраційним потоком в пори ґрунту іншого типу. При цьому в кінематичній граничній умові враховано ефект просідання верхньої межі ґрунту не лише за рахунок процесів консолідації, але і процесів контактної суфозії. До цього часу в науковій літературі математичних моделей таких взаємозв'язаних і взаємозалежних процесів побудовано не було.

Результати розділу 2 опубліковані в роботах [58, 62, 63, 65, 67, 70, 72, 74–76, 80, 91, 181].

РОЗДІЛ 3

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЛЬТРАЦІЙНОЇ КОНСОЛІДАЦІЇ
ГРУНТІВ З УРАХУВАННЯМ ВПЛИВУ ТЕПЛОСОЛЕПЕРЕНЕСЕННЯ

3.1. Математичні моделі процесів фільтраційної консолідації ґрунтів в умовах впливу техногенних факторів

Розглянемо процес фільтраційної консолідації шару трифазного ґрунту товщиною l нескінченної ширини під впливом рівномірно прикладеного зовнішнього навантаження інтенсивністю $q(t)$ (рис. 3.1) в одновимірній постановці [263]. Якщо температура ґрунту рівна $T(x, t)$ і поровою рідиною ґрунту є сольовий розчин з певним розподілом концентрації солей $c(x, t)$, тоді виникає задача вивчення впливу неізотермічного режиму та переносу солей на проходження фільтраційної консолідації даного масиву ґрунту.

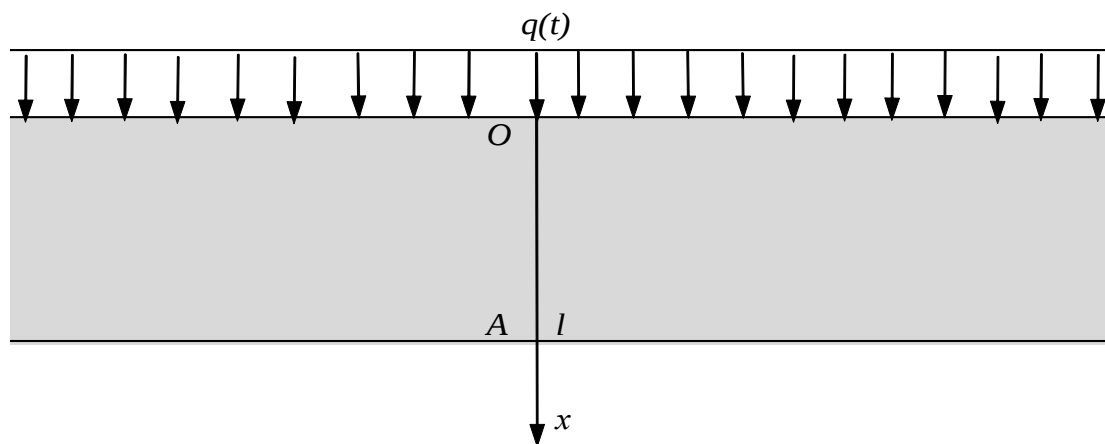


Рис. 3.1. Масив ґрунту нескінченної ширини під рівномірно прикладеним зовнішнім навантаженням інтенсивністю $q(t)$

Як показано в розділі 2, математична модель вищенаведеного процесу фільтраційної консолідації ґрунтів з урахуванням переносу солей в неізотермічних умовах бути описана наступною крайовою задачею [40, 51, 58, 65, 72, 79, 86, 87, 90]:

$$\begin{aligned}
& \frac{1+e}{\gamma} \beta_1 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_{11}^{(h)}(c, T, h) \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(k_{11}^{(c)}(c) \frac{\partial c}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(k_{11}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right] + \\
& + \frac{1+e}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_{11}^{(h)}(c, T, h) \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(k_{11}^{(c)}(c) \frac{\partial c}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(k_{11}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right] + \\
& + \frac{(\alpha_\rho + (2q-1)\alpha_s)e}{\gamma} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \beta_1 \frac{\partial T}{\partial t} \right] + \frac{\varepsilon(1+e)}{\rho_c \gamma} \left[n \frac{\partial^2 nc}{\partial t^2} - e \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} + \right. \\
& \left. + \beta_1 n \frac{\partial c}{\partial t} - e \beta_1 \frac{\partial N}{\partial t} \right] + \frac{a_0}{\gamma} \frac{\partial^2 (\Theta^* + \mathcal{H}^*)}{\partial \mathcal{A}^2} + \frac{\beta_1}{\gamma} (a_0 + a_1) \frac{\partial (\Theta^* + \mathcal{H}^*)}{\partial \mathcal{A}} = \\
& = [a_0 + \beta(1+e)] \frac{\partial^2 h}{\partial \mathcal{A}^2} + [\beta_1(a_0 + a_1) + \beta\beta_1(1+e)] \frac{\partial h}{\partial \mathcal{A}}, \quad x \in (0; l), t > 0,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} (D_{11}(c, T, h) \frac{\partial c}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial x} (D_{11T} \frac{\partial T}{\partial x}) - \mathbf{u} \frac{\partial c}{\partial x} = \\
& = n \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \mathcal{A}} + (\alpha_\rho + q\alpha_s) nc \frac{\partial T}{\partial \mathcal{A}} + \frac{\partial N}{\partial t}, \quad x \in (0; l), t > 0,
\end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\lambda_{11}(c, T) \frac{\partial T}{\partial x}) - \rho c_\rho \mathbf{u} \frac{\partial T}{\partial x} = c_T \frac{\partial T}{\partial \mathcal{A}}, \quad x \in (0; l), t > 0, \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\gamma_1 (C_m - c) N^\lambda, \quad x \in [0; l], t > 0, \tag{3.4}$$

$$\mathbf{u} = e\mathbf{v} - k_{11}^{(h)}(c, T, h) \frac{\partial h}{\partial x} + k_{11}^{(c)}(c) \frac{\partial c}{\partial x} + k_{11}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x}, \tag{3.5}$$

$$\mathbf{q}_c = \mathbf{u}c - D_{11}(c, T, h) \frac{\partial c}{\partial x} - D_{11T} \frac{\partial T}{\partial x}, \tag{3.6}$$

$$\mathbf{q}_T = \rho c_\rho \mathbf{u}T - \lambda_{11}(c, T) \frac{\partial T}{\partial x}, \tag{3.7}$$

$$\mathbf{u}|_{\Gamma_1} = 0, \quad h|_{\Gamma_2} = H_1(t), \quad t > 0, \tag{3.8}$$

$$\mathbf{q}_c|_{\Gamma_3} = 0, \quad c|_{\Gamma_4} = C_1(t), \quad t > 0, \tag{3.9}$$

$$\mathbf{q}_T|_{\Gamma_5} = 0, \quad T|_{\Gamma_6} = T_1(t), \quad t > 0, \tag{3.10}$$

$$h(x, 0) = h_0(x), \quad c(x, 0) = c_0(x), \quad T(x, 0) = T_0(x), \quad N(x, 0) = N_0(x), \quad x \in [0, l], \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}
& \gamma(a_0 + \beta(1+e)) \frac{\partial h_0}{\partial t} = \\
& = (1+e) \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(K_h(c_0, T_0, h_0) \frac{\partial h_0}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(K_c(c_0) \frac{\partial c_0}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(K_T \frac{\partial T_0}{\partial x} \right) \right] + \\
& + a_1 \beta_1 (\Theta_0^* + p_0^* - \mathcal{H}_0(x)) + a_0 \left(\frac{\partial \Theta_0^*}{\partial t} + \frac{\partial p_0^*}{\partial t} \right), \quad x \in [0, l], \quad t = 0,
\end{aligned} \tag{3.12}$$

де $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma_3 \cup \Gamma_4 = \Gamma_5 \cup \Gamma_6$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\Gamma_3 \cap \Gamma_4 = \emptyset$, $\Gamma_5 \cap \Gamma_6 = \emptyset$, $C_1(t)$, $T_1(t)$, $H_1(t)$, $h_0(x)$, $c_0(x)$, $T_0(x)$ – задані функції; $t \in (0; t_0]$.

Як показано в розділі 1, коефіцієнт фільтрації значно залежить від концентрації $c(x, t)$ сольового розчину та температури $T(x, t)$ ґрунтового середовища і, крім того, [202]

$$D = D_m + \lambda_D |\mathbf{u}|,$$

де D_m – коефіцієнт молекулярної дифузії; λ_D – параметр гідродинамічної дисперсії. Тому, в математичній моделі (3.1)–(3.12) коефіцієнти фільтрації та конвективної дифузії покладаються залежними від концентрації сольового розчину, температури та функції надлишкових напорів.

Розглянемо процес фільтраційної консолідації масиву ґрунту в області з фіксованими межами під впливом прикладеного зовнішнього навантаження інтенсивністю $q(x, t)$ в двовимірній постановці (рис. 3.2). Якщо ґрунт знаходиться в нестационарному тепловому полі з температурою $T(x, y, t)$ і поровою рідиною ґрунту є сольовий розчин з певним розподілом концентрації солей $c(x, y, t)$, тоді виникає задача вивчення впливу тепло–масопереносу на процес фільтраційної консолідації даного масиву ґрунту [41, 65, 72, 79, 86, 88, 89]. Питання про вплив переносу солей та неізотермічного режиму на процес фільтраційної консолідації ґрунту виникає і при напірній фільтрації сольового розчину під флютбетом (рис. 3.3). Вказані постановки задач відповідають профільній схемі фільтрації. Аналогічно ставляться задачі фільтраційної консолідації з урахуванням впливу техногенних факторів і в тривимірній постановці.

Як показано в розділі 2, математичні моделі процесів фільтраційної консолідації ґрунту в дво– та тривимірних постановках при урахуванні повзучості скелету ґрунту та впливу переносу солей в неізотермічному режимі можна описати наступною крайовою задачею [41, 65, 72, 79, 86, 88, 89]:

$$\begin{aligned}
& \frac{(1+e)(1+(R-1)\xi)}{\gamma} \beta_1 [\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c, T, h) \nabla h) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_c(c) \nabla c) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla T)] + \\
& + \frac{(\alpha_p + (2q-1)\alpha_s)(1+(R-1)\xi)e}{\gamma} \beta_1 \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\varepsilon(1+e)(1+(R-1)\xi)}{\rho_c \gamma} \beta_1 \left[n \frac{\partial c}{\partial t} - e \frac{\partial N}{\partial t} \right] + \\
& + \frac{(1+e)(1+(R-1)\xi)}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c, T, h) \nabla h) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_c(c) \nabla c) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla T)] + \\
& + \frac{(\alpha_p + (2q-1)\alpha_s)(1+(R-1)\xi)e}{\gamma} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\varepsilon(1+e)(1+(R-1)\xi)}{\rho_c \gamma} \left[n \frac{\partial^2 c}{\partial t^2} - e \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} \right] + \\
& + \frac{a_0}{\gamma} \frac{\partial^2 (\Theta^* + R\gamma h^*)}{\partial t^2} + \frac{\beta_1}{\gamma} (a_0 + a_1) \frac{\partial (\Theta^* + R\gamma h^*)}{\partial t} = [Ra_0 + \beta(1+e)(1+(R-1)\xi)] \times \\
& \times \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + [\beta_1 R(a_0 + a_1) + \beta \beta_1 (1+e)(1+(R-1)\xi)] \frac{\partial h}{\partial t}, \mathbf{X} \in \Omega, t > 0,
\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla c) + \nabla \cdot (\mathbf{D}_T \nabla T) - \mathbf{u} \nabla c = n \frac{\partial c}{\partial t} + (\alpha_p + q\alpha_s) n c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t}, \mathbf{X} \in \Omega, t > 0, \tag{3.14}$$

$$\nabla \cdot (\lambda(c) \nabla T) - \rho_c \mathbf{u} \nabla T = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, \mathbf{X} \in \Omega, t > 0, \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\gamma_1 (C_m - c) N^\lambda, \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, t > 0, \tag{3.16}$$

$$\mathbf{u} = e\mathbf{v} - \mathbf{K}_h(c, T, h) \nabla h + \mathbf{K}_c(c) \nabla c + \mathbf{K}_T \nabla T, \tag{3.17}$$

$$\mathbf{q}_c = \mathbf{u} \cdot c - \mathbf{D}(c, T, h) \nabla c - \mathbf{D}_T(c, T) \nabla T, \tag{3.18}$$

$$\mathbf{q}_T = \rho_c \mathbf{u} \cdot T - \lambda(c, T) \nabla T, \tag{3.19}$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{\Gamma_1} = 0, h|_{\Gamma_2} = H_1(\mathbf{X}, t), \mathbf{X} \in \Gamma_2, \tag{3.20}$$

$$(\mathbf{q}_c, \mathbf{n})|_{\Gamma_3} = 0, c|_{\Gamma_4} = C_1(\mathbf{X}, t), \mathbf{X} \in \Gamma_4, \tag{3.21}$$

$$(\mathbf{q}_T, \mathbf{n})|_{\Gamma_5} = 0, T|_{\Gamma_6} = T_1(\mathbf{X}, t), \mathbf{X} \in \Gamma_6, \tag{3.22}$$

$$h(\mathbf{X}, 0) = h_0(\mathbf{X}), c(\mathbf{X}, 0) = C_0(\mathbf{X}), T(\mathbf{X}, 0) = T_0(\mathbf{X}), N(\mathbf{X}, 0) = N_0(\mathbf{X}), \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, \tag{3.23}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{R\gamma a_0}{1+(R-1)\xi} + \beta(1+e)\gamma \right) \frac{\partial h_0}{\partial t} = (1+e) \nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c_0, T_0, h_0) \nabla h_0 - \mathbf{K}_c(c_0) \nabla c_0 - \mathbf{K}_T \nabla T_0) - \\
& - \frac{R\gamma a_1 \beta_1}{1+(R-1)\xi} h_0 + \frac{a_0}{1+(R-1)\xi} \left(\frac{\partial \Theta_0^*}{\partial t} + R \frac{\partial p_0^*}{\partial t} \right) + \frac{a_1 \beta_1}{1+(R-1)\xi} (\Theta_0^* + R p_0^*), \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, t = 0,
\end{aligned} \tag{3.24}$$

де $t \in (0; t_0]$; $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma_3 \cup \Gamma_4 = \Gamma_5 \cup \Gamma_6$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\Gamma_3 \cap \Gamma_4 = \emptyset$, $\Gamma_5 \cap \Gamma_6 = \emptyset$, $C_1(\mathbf{X}, t)$, $T_1(\mathbf{X}, t)$, $H_1(\mathbf{X}, t)$, $h_0(\mathbf{X})$, $c_0(\mathbf{X})$, $T_0(\mathbf{X})$ – задані функції; R – розмірність задачі ($R=2$ або $R=3$); $\mathbf{X}=(x, y)$ при $R=2$, $\mathbf{X}=(x, y, z)$ при $R=3$.

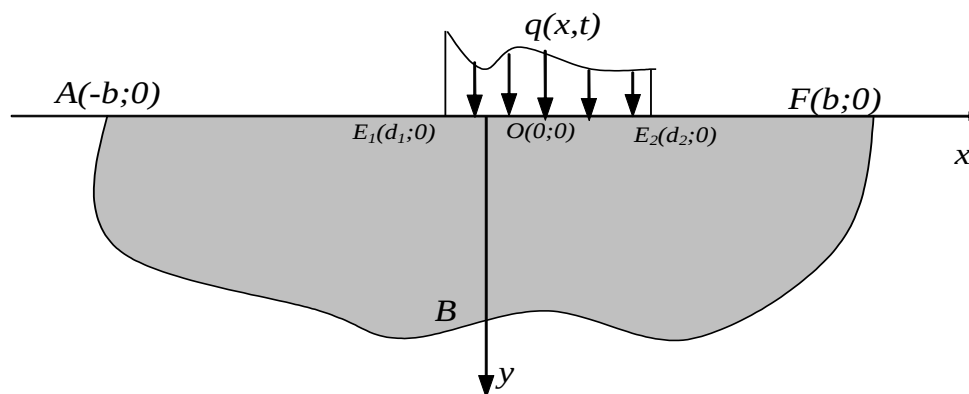


Рис. 3.2. Массив ґрунту із прикладеним зовнішнім навантаженням інтенсивністю $q(x,t)$ в двовимірній постановці

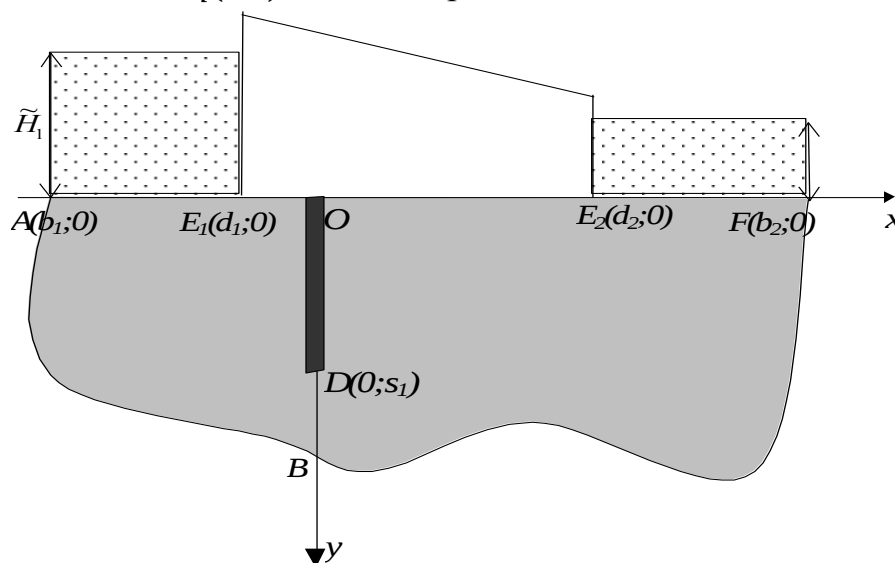


Рис. 3.3. Массив ґрунту в основі гідротехнічної споруди зі шпунтом в двовимірній постановці

3.2. Чисельний розв'язок крайової задачі фільтраційної консолідації в умовах впливу теплосолеперенесення методом скінченних елементів

Математичні моделі розглядуваних процесів фільтраційної консолідації ґрунтів з урахуванням тепломасоперенесення описуються крайовими задачами для систем нелінійних рівнянь параболічного типу. Зважаючи на нелінійність, відповідь на питання про відшукування розв'язку даних задач вимагає застосування чисельних методів.

Одним із найбільш популярних чисельних методів розв'язання задач математичної фізики в останні десятиріччя став метод скінченних елементів (МСЕ) [115, 116, 239, 247, 294, 321, 328, 378, 379, 404], який є одним із

варіантів загального проєкційного методу [198]. При великих значеннях чисел Пекле чисельні розв'язки крайових задач для рівнянь переносу, які знайдені МСЕ з використанням класичної схеми Гальоркіна, можуть втрачати стійкість і сильно осцилювати у всій області визначення. Для усунення даних недоліків у вищенаведених задачах, рівняння яких містять члени конвективного переносу розроблені стабілізаційні та адаптивні схеми МСЕ.

Поштовхом в напрямку розробки стабілізаційних схем МСЕ стала праця A.N. Brooks та T.J.R. Hughes [298]. Далі потрібно відмітити роботи таких авторів, як C. Baiocchi, F. Brezzi, L. Franca, S. L. Frey, M. C. M. Sandra, F. D. L. Abimael, L. M. Eduardo та ін. [290, 317, 380]. Значних успіхів в цьому напрямку досягла і українська школа прикладної математики, зокрема Львівська наукова школа та одні з її найавторитетніших представників Я. Г. Савула та Г. А. Шинкаренко [28, 150, 152, 241, 283].

Серед стабілізаційних схем МСЕ найбільшої популярності набули схема Дугласа–Вонга, протипотокова схема Петрова–Гальоркіна та схема найменших квадратів. Також є вживаною стабілізаційна схема локалізованих найменших квадратів [153].

В роботі [289] показано еквівалентність стабілізаційної протипотокової схеми Петрова–Гальоркіна та стабілізаційної схеми МСЕ з використанням так званих функцій–бульбашок [316, 325].

В роботах [40, 45, 49, 54, 65] застосовано стабілізаційну протипотокову схему Петрова–Гальоркіна для розв'язування крайових задач, якими описуються математичні моделі процесів фільтраційної консолідації ґрунтів з урахуванням впливу тепломасоперенесення.

Також потрібно відмітити edge–стабілізаційні схеми МСЕ [301]. Даний метод полягає у врахуванні стрибків градієнта шуканої функції при переході через сторони (ребра) скінченних елементів і в додаванні до дискретизованих варіаційних рівнянь відповідних збурюючих членів, отриманих на основі методу найменших квадратів на сторонах скінченних елементів.

Іншим напрямком усунення недоліків класичної схеми Гальоркіна в задачах конвекції–дифузії стали адаптивні схеми МСЕ [152, 283, 333, 392]. Ідея даних схем полягає в динамічній зміні скінченноелементного покриття області, в якій розв’язується задача, зі згущенням сітки в підобластях великих градієнтів (h–версія адаптивних схем) або в збільшенні у відповідних підобластях степенів поліноміальних базисних функцій МСЕ з використанням так званих ієрархічних базисів (p–версія адаптивних схем). Як зазначено в роботі [283], ефективність адаптивних схем МСЕ залежить від надійності апостеріорних оцінювачів похибок МСЕ.

Аналогічно [247, 116] дамо означення класичного розв’язку крайової задачі (3.13)–(3.24).

О з н а ч е н н я 3.1. Класичним розв’язком крайової задачі (3.13)–(3.24) називається трійка функцій $h(\mathbf{X}, t)$, $c(\mathbf{X}, t)$, $T(\mathbf{X}, t)$, які неперервні разом зі своїми частинними похідними першого порядку по просторових змінних на $\overline{Q_{t_0}}$, мають обмежені неперервні частинні похідні другого порядку по просторових змінних і $\frac{\partial(\bullet)}{\partial t}$ на Q_{t_0} та функція $N(\mathbf{X}, t)$, яка має неперервну частинну похідну $\frac{\partial(\bullet)}{\partial t}$ на Q_{t_0} і які задовольняють співвідношенням (3.13)–(3.24).

Нехай H_0 – простір вектор–функцій $\mathbf{s}(\mathbf{X}) = (s_1(\mathbf{X}); s_2(\mathbf{X}); s_3(\mathbf{X}); s_4(\mathbf{X}))$, кожна із компонент $s_i(\mathbf{X})$, $i = \overline{1, 4}$ яких в області Ω належать простору Соболева $W_2^1(\Omega)$, причому $s_1(\mathbf{X})$, $s_2(\mathbf{X})$ та $s_3(\mathbf{X})$ набувають нульових значень на тих частинах межі області Ω , де, відповідно для функцій $h(\mathbf{X}, t)$, $c(\mathbf{X}, t)$, $T(\mathbf{X}, t)$ задані граничні умови першого роду. Тобто, $s_1(\mathbf{X})|_{\Gamma_2} = 0$, $s_2(\mathbf{X})|_{\Gamma_4} = 0$, $s_3(\mathbf{X})|_{\Gamma_6} = 0$.

Нехай H – простір вектор–функцій $\mathbf{f}(\mathbf{X}, t) = (f_1(\mathbf{X}, t); f_2(\mathbf{X}, t); f_3(\mathbf{X}, t); f_4(\mathbf{X}, t))$, кожна з компонент $f_i(\mathbf{X}, t)$, $i = \overline{1, 4}$ яких інтегровна з квадратом разом зі своїми першими частинними похідними по всіх змінних в області Ω , $\forall t \in (0; t_0]$,

причому $f_1(\mathbf{X}, t)$, $f_2(\mathbf{X}, t)$ та $f_3(\mathbf{X}, t)$ задовольняють, відповідно, граничні умови першого роду, що і функції $h(\mathbf{X}, t)$, $c(\mathbf{X}, t)$, $T(\mathbf{X}, t)$. Тобто, $f_1(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_2} = H_1(\mathbf{X}, t)$, $\mathbf{X} \in \Gamma_2$, $f_2(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_4} = C_1(\mathbf{X}, t)$, $\mathbf{X} \in \Gamma_4$, $f_3(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_6} = T_1(\mathbf{X}, t)$, $\mathbf{X} \in \Gamma_6$,

Використовуючи стандартну процедуру: домноживши рівності (3.13)–(3.16), кожну з початкових умов (3.23) та початкову умову (3.24), відповідно, на довільні функції $s_1(\mathbf{X})$, $s_2(\mathbf{X})$, $s_3(\mathbf{X})$, $s_4(\mathbf{X})$ такі, що $(s_1(\mathbf{X}); s_2(\mathbf{X}); s_3(\mathbf{X}); s_4(\mathbf{X})) \in H_0$, інтегруючи їх по області Ω , застосовуючи формулу Остроградського-Гауса та враховуючи перші із граничних умов (3.20)–(3.22), отримаємо

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{a_0}{1+(R-1)\xi} + \frac{\beta(1+e)}{R} \right) \int_{\Omega} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} s_1(\mathbf{X}) d\Omega + \beta_1 \left(\frac{a_0 + a_1}{1+(R-1)\xi} + \frac{\beta(1+e)}{R} \right) \int_{\Omega} \frac{\partial h}{\partial t} s_1(\mathbf{X}) d\Omega + \\
 & + \frac{1+e}{R\gamma} \beta_1 \int_{\Omega} \{ (\mathbf{K}_h(c, T, h) \nabla h, \nabla s_1) - (\mathbf{K}_c(c) \nabla c, \nabla s_1) - (\mathbf{K}_T \nabla T, \nabla s_1) \} d\Omega + \\
 & + \frac{1+e}{R\gamma} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \{ (\mathbf{K}_h(c, T, h) \nabla h, \nabla s_1) - (\mathbf{K}_c(c) \nabla c, \nabla s_1) - (\mathbf{K}_T \nabla T, \nabla s_1) \} d\Omega = \\
 & = \frac{\beta_1(\alpha_p + (2q-1)\alpha_s)}{R\gamma} \int_{\Omega} \frac{\partial T}{\partial t} s_1(\mathbf{X}) d\Omega + \frac{\varepsilon \beta_1(1+e)}{R\rho_c \gamma} \int_{\Omega} \left(n \frac{\partial c}{\partial t} - e \frac{\partial N}{\partial t} \right) s_1(\mathbf{X}) d\Omega \\
 & + \frac{e(\alpha_p + (2q-1)\alpha_s)}{R\gamma} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} s_1(\mathbf{X}) d\Omega + \frac{\varepsilon(1+e)}{R\rho_c \gamma} \int_{\Omega} \left[n \frac{\partial^2 c}{\partial t^2} - e \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} \right] s_1(\mathbf{X}) d\Omega + \quad (3.25) \\
 & + \frac{a_0}{\gamma R(1+(R-1)\xi)} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 (\Theta^* + R\gamma h^*)}{\partial t^2} s_1(\mathbf{X}) d\Omega + \frac{\beta_1(a_0 + a_1)}{\gamma R(1+(R-1)\xi)} \int_{\Omega} \frac{\partial (\Theta^* + R\gamma h^*)}{\partial t} s_1(\mathbf{X}) d\Omega,
 \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} h(\mathbf{X}, 0) s_1(\mathbf{X}) d\Omega = \int_{\Omega} h_0(\mathbf{X}) s_1(\mathbf{X}) d\Omega, \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \left(n \frac{\partial c}{\partial t} s_2(\mathbf{X}) + (\mathbf{D} \nabla c, \nabla s_2) + (\mathbf{D}_T \nabla T, \nabla s_2) \right) d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{u} \nabla c s_2(\mathbf{X}) d\Omega = \\
 & = -(\alpha_p + q\alpha_s) \int_{\Omega} n c \frac{\partial T}{\partial t} s_2(\mathbf{X}) d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial N}{\partial t} s_2(\mathbf{X}) d\Omega, \quad (3.27)
 \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} c(\mathbf{X}, 0) s_2(\mathbf{X}) d\Omega = \int_{\Omega} c_0(\mathbf{X}) s_2(\mathbf{X}) d\Omega, \quad (3.28)$$

$$\int_{\Omega} \left(c_T \frac{\partial T}{\partial t} s_3(\mathbf{X}) + (\lambda \nabla T, \nabla s_3) + \rho c_p \mathbf{u} \nabla T s_3(\mathbf{X}) \right) d\Omega = 0, \quad (3.29)$$

$$\int_{\Omega} T(\mathbf{X}, 0) s_3(\mathbf{X}) d\Omega = \int_{\Omega} T_0(\mathbf{X}) s_3(\mathbf{X}) d\Omega, \quad (3.30)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial N}{\partial t} s_4(\mathbf{X}) d\Omega - \gamma_1 \int_{\Omega} (c - C_m) N^z(\mathbf{X}, t) s_4(\mathbf{X}) d\Omega = 0, \quad (3.31)$$

$$\int_{\Omega} N(\mathbf{X}, 0) s_4(\mathbf{X}) d\Omega = \int_{\Omega} N_0(\mathbf{X}) s_4(\mathbf{X}) d\Omega, \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{R\gamma a_0}{1 + (R-1)\xi} + \gamma\beta(1+e) \right) \int_{\Omega} \frac{\partial h_0}{\partial t} s_1(\mathbf{X}) d\Omega + \\ & + (1+e) \int_{\Omega} \{ (\mathbf{K}_h(c_0, T_0, h_0) \nabla h_0, \nabla s_1) - (\mathbf{K}_c(c_0) \nabla c_0, \nabla s_1) - (\mathbf{K}_T \nabla T_0, \nabla s_1) \} d\Omega + \\ & + \frac{R\gamma a_1 \beta_1}{1 + (R-1)\xi} \int_{\Omega} h_0(\mathbf{X}) s_1(\mathbf{X}) d\Omega = \\ & = \frac{a_0}{1 + (R-1)\xi} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \Theta_0^*}{\partial t} + R \frac{\partial p_0^*}{\partial t} \right) s_1(\mathbf{X}) d\Omega + \frac{a_1 \beta_1}{1 + (R-1)\xi} \int_{\Omega} (\Theta_0^* + R p_0^*) s_1(\mathbf{X}) d\Omega, \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\forall (s_1(\mathbf{X}); s_2(\mathbf{X}); s_3(\mathbf{X}); s_4(\mathbf{X})) \in H_0, \quad (h(\mathbf{X}, t); c(\mathbf{X}, t); T(\mathbf{X}, t); N(\mathbf{X}, t)) \in H.$$

О з н а ч е н н я 3.2. Вектор-функція $(h(\mathbf{X}, t); c(\mathbf{X}, t); T(\mathbf{X}, t); N(\mathbf{X}, t)) \in H$, котра $\forall (s_1(\mathbf{X}); s_2(\mathbf{X}); s_3(\mathbf{X}); s_4(\mathbf{X})) \in H_0$ задовольняє інтегральним співвідношенням (3.25)–(3.33) називається узагальненим розв’язком крайової задачі (3.13)–(3.24).

Оскільки значення сіткових чисел Пекле рівнянь (3.14), (3.15)

$$Pe_c = \frac{1}{2} h_e \frac{\|\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{D}\|}, \quad Pe_T = \frac{1}{2} h_e \frac{\|\rho c_p \mathbf{u}\|}{\|\lambda\|}$$

можуть бути більшими за одиницю, то числовий розв’язок задачі (3.13)–(3.24), побудований за класичною схемою Гальоркіна, може сильно осцилювати у всій області визначення. Тут h_e – максимальна довжина сторони в усіх скінченних елементах. Тому, для стабілізації чисельних розв’язків рівнянь (3.14), (3.15) використаємо протипотокову схему Петрова–Гальоркіна [241, 298, 310], яка підміняє варіаційну задачу збуреною

$$\int_{\Omega} (n \frac{\partial c}{\partial t} s_2(\mathbf{X}) + (\mathbf{D} \nabla c, \nabla s_2) + (\mathbf{D}_T \nabla T, \nabla s_2)) d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{u} \nabla c s_2(\mathbf{X}) d\Omega +$$

$$+ \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(c)} \int_{\Omega_e} (n \frac{\partial c}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla c) - \nabla \cdot (\mathbf{D}_T \nabla T) + \mathbf{u} \nabla c + (\alpha_\rho + q \alpha_s) n c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t}) \mathbf{u} \nabla s_2 d\Omega = (3.34)$$

$$= -(\alpha_\rho + q \alpha_s) \int_{\Omega} n c \frac{\partial T}{\partial t} s_2(\mathbf{X}) d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial N}{\partial t} s_2(\mathbf{X}) d\Omega,$$

$$\int_{\Omega} (c_T \frac{\partial T}{\partial t} s_3(\mathbf{X}) + (\lambda \nabla T, \nabla s_3) + \rho c_\rho \mathbf{u} \nabla T s_3(\mathbf{X})) d\Omega +$$

$$+ \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(T)} \int_{\Omega_e} (c_T \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \rho c_\rho \mathbf{u} \nabla T) \rho c_\rho \mathbf{u} \nabla s_3 d\Omega = 0; \quad (3.35)$$

де $\Omega = \bigcup \Omega_e$, Ω_e – скінченні елементи; $\tau_e^{(c)}$, $\tau_e^{(T)}$ – параметри регуляризації.

Наближений розв'язок задачі (3.13)–(3.24) шукаємо у вигляді

$$(\hat{h}(\mathbf{X}, t); \hat{c}(\mathbf{X}, t); \hat{T}(\mathbf{X}, t); \hat{N}(\mathbf{X}, t)) = (\sum_{i=1}^{n_1} h_i(t) \varphi_i^{(1)}(\mathbf{X}) + W_1(\mathbf{X}, t);$$

$$\sum_{i=1}^{n_2} c_i(t) \varphi_i^{(2)}(\mathbf{X}) + W_2(\mathbf{X}, t); \sum_{i=1}^{n_3} T_i(t) \varphi_i^{(3)}(\mathbf{X}) + W_3(\mathbf{X}, t); \sum_{i=1}^{n_4} N_i(t) \varphi_i^{(4)}(\mathbf{X})), \quad (3.36)$$

$$\text{де } \Phi_i = (\varphi_i^{(1)}; 0; 0; 0), \quad i = \overline{1, n_1}; \quad \Phi_i = (0; \varphi_{i-n_1}^{(2)}; 0; 0), \quad i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2};$$

$$\Phi_i = (0; 0; \varphi_{i-n_1-n_2}^{(3)}; 0), \quad i = \overline{n_1 + n_2 + 1, n_1 + n_2 + n_3}; \quad \Phi_i = (0; 0; 0; \varphi_{i-\sum_{j=1}^3 n_j}^{(4)}),$$

$i = \overline{\sum_{j=1}^3 n_j + 1, \sum_{j=1}^4 n_j}$ – базисні вектор–функції скінченновимірному підпростору

$M_0 \subset H_0$; $W_1(\mathbf{X}, t)$, $W_2(\mathbf{X}, t)$, $W_3(\mathbf{X}, t)$ – відомі функції, такі, що $W_1|_{\Gamma_2} = H_1(\mathbf{X}, t)$,

$\mathbf{X} \in \Gamma_2$; $W_2|_{\Gamma_4} = C_1(\mathbf{X}, t)$, $\mathbf{X} \in \Gamma_4$; $W_3|_{\Gamma_6} = T_1(\mathbf{X}, t)$, $\mathbf{X} \in \Gamma_6$; $\Omega = \bigcup \Omega_e$, Ω_e –

скінченні елементи; $\tau_e^{(c)}$, $\tau_e^{(T)}$ – параметри регуляризації.

Сукупність вектор–функцій, які можна подати у вигляді (3.36), породжують множину $M \subset H$.

О з н а ч е н н я 3.3. Наближеним узагальненим розв'язком крайової задачі (3.13)–(3.24) називається вектор–функція $(\hat{h}(\mathbf{X}, t); \hat{c}(\mathbf{X}, t); \hat{T}(\mathbf{X}, t); \hat{N}(\mathbf{X}, t)) \in M$,

яка $\forall t \in (0, t_0]$ та довільної вектор-функції $(S_1(\mathbf{X}); S_2(\mathbf{X}); S_3(\mathbf{X}); S_4(\mathbf{X})) \in M_0$ задовольняє інтегральним співвідношенням

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{a_0}{1+(R-1)\xi} + \frac{\beta(1+e)}{R} \right) \int_{\Omega} \frac{\partial^2 \hat{h}}{\partial t^2} S_1(\mathbf{X}) d\Omega + \beta_1 \left(\frac{a_0 + a_1}{1+(R-1)\xi} + \frac{\beta(1+e)}{R} \right) \int_{\Omega} \frac{\partial \hat{h}}{\partial t} S_1(\mathbf{X}) d\Omega + \\
& + \frac{1+e}{R\gamma} \beta_1 \int_{\Omega} \left\{ (\mathbf{K}_h(\hat{c}, \hat{T}, \hat{h}) \nabla \hat{h}, \nabla S_1) - (\mathbf{K}_c(\hat{c}) \nabla \hat{c}, \nabla S_1) - (\mathbf{K}_T \nabla \hat{T}, \nabla S_1) \right\} d\Omega + \\
& + \frac{1+e}{R\gamma} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ (\mathbf{K}_h(\hat{c}, \hat{T}, \hat{h}) \nabla \hat{h}, \nabla S_1) - (\mathbf{K}_c(\hat{c}) \nabla \hat{c}, \nabla S_1) - (\mathbf{K}_T \nabla \hat{T}, \nabla S_1) \right\} d\Omega = \\
& = \frac{\beta_1(\alpha_\rho + (2q-1)\alpha_s)}{R\gamma} \int_{\Omega} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{\mathcal{A}}} S_1(\mathbf{X}) d\Omega + \frac{\varepsilon \beta_1(1+e)}{R\rho_c \gamma} \int_{\Omega} \left(n \frac{\partial \hat{\mathcal{C}}}{\partial \hat{\mathcal{A}}} - e \frac{\partial \hat{N}}{\partial t} \right) S_1(\mathbf{X}) d\Omega \\
& + \frac{e(\alpha_\rho + (2q-1)\alpha_s)}{R\gamma} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial t^2} S_1(\mathbf{X}) d\Omega + \frac{\varepsilon(1+e)}{R\rho_c \gamma} \int_{\Omega} \left[n \frac{\partial^2 \hat{\mathcal{C}}}{\partial t^2} - e \frac{\partial^2 \hat{N}}{\partial t^2} \right] S_1(\mathbf{X}) d\Omega + \frac{1}{\gamma R(1+(R-1)\xi)} \times \\
& \times \left(a_0 \int_{\Omega} \frac{\partial^2 (\Theta^* + R\gamma h^*)}{\hat{\mathcal{A}}^2} S_1(\mathbf{X}) d\Omega + \beta_1(a_0 + a_1) \int_{\Omega} \frac{\partial (\Theta^* + R\gamma h^*)}{\hat{\mathcal{A}}} S_1(\mathbf{X}) d\Omega \right), \quad (3.37)
\end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} \hat{h}(\mathbf{X}, 0) S_1(\mathbf{X}) d\Omega = \int_{\Omega} h_0(\mathbf{X}) S_1(\mathbf{X}) d\Omega, \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left(n \frac{\partial \hat{\mathcal{C}}}{\partial \hat{\mathcal{A}}} S_2(\mathbf{X}) + (\mathbf{D} \nabla \hat{c}, \nabla S_2) + (\mathbf{D}_T \nabla \hat{T}, \nabla S_2) \right) d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{u} \nabla \hat{c} S_2(\mathbf{X}) d\Omega = \\
& = -(\alpha_\rho + q\alpha_s) \int_{\Omega} n \hat{c} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{\mathcal{A}}} S_2(\mathbf{X}) d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \hat{N}}{\partial \hat{\mathcal{A}}} S_2(\mathbf{X}) d\Omega, \quad (3.39)
\end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} \hat{c}(\mathbf{X}, 0) S_2(\mathbf{X}) d\Omega = \int_{\Omega} c_0(\mathbf{X}) S_2(\mathbf{X}) d\Omega, \quad (3.40)$$

$$\int_{\Omega} \left(c_T \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{\mathcal{A}}} S_3(\mathbf{X}) + (\lambda \nabla \hat{T}, \nabla S_3) + \rho c_\rho \mathbf{u} \nabla \hat{T} S_3(\mathbf{X}) \right) d\Omega = 0, \quad (3.41)$$

$$\int_{\Omega} \hat{T}(\mathbf{X}, 0) S_3(\mathbf{X}) d\Omega = \int_{\Omega} T_0(\mathbf{X}) S_3(\mathbf{X}) d\Omega, \quad (3.42)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \hat{N}}{\partial \hat{\mathcal{A}}} S_4(\mathbf{X}) d\Omega - \gamma_1 \int_{\Omega} (\hat{c} - C_m) \hat{N}^z(\mathbf{X}, t) S_4(\mathbf{X}) d\Omega = 0, \quad (3.43)$$

$$\int_{\Omega} \hat{N}(\mathbf{X}, 0) S_4(\mathbf{X}) d\Omega = \int_{\Omega} N_0(\mathbf{X}) S_4(\mathbf{X}) d\Omega, \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{R\gamma a_0}{1+(R-1)\xi} + \gamma\beta(1+e) \right) \int_{\Omega} \frac{\partial \hat{h}_0}{\partial t} S_1(\mathbf{X}) d\Omega + \\
& + (1+e) \int_{\Omega} \left\{ (\mathbf{K}_h(\hat{c}_0, \hat{T}_0, \hat{h}_0) \nabla \hat{h}_0, \nabla S_1) - (\mathbf{K}_c(\hat{c}_0) \nabla \hat{c}_0, \nabla S_1) - (\mathbf{K}_T \nabla \hat{T}_0, \nabla S_1) \right\} d\Omega + \\
& + \frac{R\gamma a_1 \beta_1}{1+(R-1)\xi} \int_{\Omega} \hat{h}_0(\mathbf{X}) S_1(\mathbf{X}) d\Omega = \\
& = \frac{a_0}{1+(R-1)\xi} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \Theta_0^*}{\partial t} + R \frac{\partial p_0^*}{\partial t} \right) S_1(\mathbf{X}) d\Omega + \frac{a_1 \beta_1}{1+(R-1)\xi} \int_{\Omega} (\Theta_0^* + R p_0^*) S_1(\mathbf{X}) d\Omega,
\end{aligned} \tag{3.45}$$

$$\forall (S_1(\mathbf{X}); S_2(\mathbf{X}); S_3(\mathbf{X}); S_4(\mathbf{X})) \in M_0, (\hat{h}(\mathbf{X}, t); \hat{c}(\mathbf{X}, t); \hat{T}(\mathbf{X}, t); \hat{N}(\mathbf{X}, t)) \in M.$$

Із інтегральних рівностей (3.34), (3.35) отримуємо

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left(n \frac{\partial \hat{c}}{\partial t} S_2(\mathbf{X}) + (\mathbf{D} \nabla \hat{c}, \nabla S_2) + (\mathbf{D}_T \nabla \hat{T}, \nabla S_2) \right) d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{u} \nabla \hat{c} S_2(\mathbf{X}) d\Omega + \\
& + \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(c)} \int_{\Omega_e} \left(n \frac{\partial \hat{c}}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla \hat{c}) - \nabla \cdot (\mathbf{D}_T \nabla \hat{T}) + \mathbf{u} \nabla \hat{c} + (\alpha_{\rho} + q\alpha_s) n \hat{c} \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{N}}{\partial t} \right) \mathbf{u} \nabla S_2 d\Omega = \\
& = -(\alpha_{\rho} + q\alpha_s) \int_{\Omega} n \hat{c} \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} S_2(\mathbf{X}) d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \hat{N}}{\partial t} S_2(\mathbf{X}) d\Omega,
\end{aligned} \tag{3.46}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left(c_T \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} S_3(\mathbf{X}) + (\lambda \nabla \hat{T}, \nabla S_3) + \rho c_{\rho} \mathbf{u} \nabla \hat{T} S_3(\mathbf{X}) \right) d\Omega + \\
& + \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(T)} \int_{\Omega_e} \left(c_T \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} - \nabla \cdot (\lambda \nabla \hat{T}) + \rho c_{\rho} \mathbf{u} \nabla \hat{T} \right) \rho c_{\rho} \mathbf{u} \nabla S_3 d\Omega = 0;
\end{aligned} \tag{3.47}$$

$$\forall (S_1(\mathbf{X}); S_2(\mathbf{X}); S_3(\mathbf{X}); S_4(\mathbf{X})) \in M_0, (\hat{h}(\mathbf{X}, t); \hat{c}(\mathbf{X}, t); \hat{T}(\mathbf{X}, t); \hat{N}(\mathbf{X}, t)) \in M.$$

Зрозуміло, що в загальному випадку в області складної геометрії знайти функції $W_1(\mathbf{X}, t)$, $W_2(\mathbf{X}, t)$, $W_3(\mathbf{X}, t)$ без наближених обчислень практично неможливо. Тому, при реалізації схем МСЕ на практиці, на межах Γ_2 , Γ_4 , Γ_6 вводять додаткові вузли загальною кількістю n_2^{Γ} , n_4^{Γ} , n_6^{Γ} відповідно і функції $W_1(\mathbf{X}, t)$, $W_2(\mathbf{X}, t)$, $W_3(\mathbf{X}, t)$ наближено шукають за допомогою все тих же базисних функцій МСЕ у вигляді

$$W_1(\mathbf{X}, t) \approx \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2^{\Gamma}} h_i(t) \varphi_i^{(1)}(\mathbf{X}), \quad W_2(\mathbf{X}, t) \approx \sum_{i=n_2+1}^{n_2+n_4^{\Gamma}} c_i(t) \varphi_i^{(2)}(\mathbf{X}), \quad W_3(\mathbf{X}, t) \approx \sum_{i=n_3+1}^{n_3+n_6^{\Gamma}} T_i(t) \varphi_i^{(3)}(\mathbf{X}). \tag{3.48}$$

Не зменшуючи загальності будемо вважати, що наближені розв'язки $\hat{h}(\mathbf{X}, t)$, $\hat{c}(\mathbf{X}, t)$, $\hat{T}(\mathbf{X}, t)$, $\hat{N}(\mathbf{X}, t)$ шукаються на одній скінченноелементній сітці при використанні одних і тих же базисних функцій. Тобто, $n_1 + n_2^\Gamma = n_2 + n_4^\Gamma = n_3 + n_6^\Gamma = n_4 = k$; $\varphi_i^{(1)}(\mathbf{X}) = \varphi_i^{(2)}(\mathbf{X}) = \varphi_i^{(3)}(\mathbf{X}) = \varphi_i^{(4)}(\mathbf{X}) = \varphi_i(\mathbf{X})$, $i = \overline{1, k}$. Тоді з (3.48) та (3.36) маємо

$$\begin{aligned} (\hat{h}(\mathbf{X}, t); \hat{c}(\mathbf{X}, t); \hat{T}(\mathbf{X}, t); \hat{N}(\mathbf{X}, t)) = & \left(\sum_{i=1}^k h_i(t) \varphi_i(\mathbf{X}); \right. \\ & \left. \sum_{i=1}^k c_i(t) \varphi_i(\mathbf{X}); \sum_{i=1}^k T_i(t) \varphi_i(\mathbf{X}); \sum_{i=1}^k N_i(t) \varphi_i(\mathbf{X}) \right). \end{aligned} \quad (3.49)$$

З рівностей (3.37), (3.38), (3.46), (3.47), (3.39)–(3.45) з урахуванням (3.49), отримуємо задачу Коші для системи нелінійних диференціальних рівнянь відносно вектора $(\mathbf{h}(t); \mathbf{C}(t); \mathbf{T}(t); \mathbf{N}(t))$

$$\mathbf{M}^{(4)} \cdot \frac{d\mathbf{N}}{dt} + \mathbf{L}^{(4)}(\mathbf{C}, \mathbf{N}^\chi) = \mathbf{0}, \quad (3.50)$$

$$\mathbf{M}^{(3)} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{dt} + \mathbf{L}^{(3)}(\mathbf{h}, \mathbf{C}, \mathbf{T}) \cdot \mathbf{T} = \mathbf{F}^{(3)}, \quad (3.51)$$

$$\mathbf{M}^{(2)} \cdot \frac{d\mathbf{C}}{dt} + \mathbf{L}^{(2)}(\mathbf{h}, \mathbf{C}, \mathbf{T}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{L}^{(21)} \cdot \mathbf{T}(t) + \mathbf{M}^{(21)} \cdot \frac{d\mathbf{N}}{dt} + \mathbf{M}^{(22)} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{dt} + \mathbf{F}^{(2)}, \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^{(1)} \cdot \frac{d^2 \mathbf{h}}{dt^2} + \mathbf{M}^{(1)} \cdot \frac{d\mathbf{h}}{dt} + \mathbf{L}^{(1)}(\mathbf{C}, \mathbf{T}, \mathbf{h}) \cdot \mathbf{h}(t) = \\ = \mathbf{L}^{(12)} \cdot \mathbf{C}(t) + \mathbf{L}^{(13)} \cdot \mathbf{T}(t) + \mathbf{M}^{(12)} \cdot \frac{d\mathbf{C}}{dt} + \mathbf{M}^{(13)} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{dt} + \mathbf{M}^{(14)} \cdot \frac{d\mathbf{N}}{dt} + \\ + \mathbf{Q}^{(12)} \cdot \frac{d^2 \mathbf{C}}{dt^2} + \mathbf{Q}^{(13)} \cdot \frac{d^2 \mathbf{T}}{dt^2} + \mathbf{Q}^{(14)} \cdot \frac{d^2 \mathbf{N}}{dt^2} + \mathbf{F}^{(1)}, \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\mathbf{M}^{(0)} \cdot \frac{d\mathbf{h}^{(0)}}{dt} + \mathbf{L}^{(0)}(\mathbf{C}^{(0)}, \mathbf{T}^{(0)}, \mathbf{h}^{(0)}) \cdot \mathbf{h}^{(0)} = \mathbf{L}^{(01)} \cdot \mathbf{C}^{(0)} + \mathbf{L}^{(02)} \cdot \mathbf{T}^{(0)} + \mathbf{F}^{(0)}, \quad (3.54)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}^{(1)} \cdot \mathbf{h}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(1)}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(2)} \cdot \mathbf{C}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(2)}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(3)} \cdot \mathbf{T}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(3)}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(4)} \cdot \mathbf{N}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(4)}. \quad (3.55)$$

де

$$\mathbf{h}(t) = (h_i(t))_{i=1}^k, \quad \mathbf{h}^{(0)} = (h_i(0))_{i=1}^k, \quad \mathbf{C}(t) = (c_i(t))_{i=1}^k, \quad \mathbf{C}^{(0)} = (c_i(0))_{i=1}^k, \quad \mathbf{T}(t) = (T_i(t))_{i=1}^k,$$

$$\mathbf{T}^{(0)} = (T_i(0))_{i=1}^k, \quad \mathbf{N}(t) = (N_i(t))_{i=1}^k, \quad \mathbf{N}^{(0)} = (N_i(0))_{i=1}^k,$$

$$\mathbf{M}^{(s)} = (m_{ij}^{(s)})_{i,j=1}^k, \quad s = \overline{0, 4}; \quad \mathbf{L}^{(s)} = (l_{ij}^{(s)})_{i,j=1}^k, \quad \mathbf{F}^{(s)} = (f_i^{(s)})_{i=1}^k, \quad s = \overline{0, 3}; \quad \mathbf{L}^{(4)} = (l_i^{(4)})_{i=1}^k;$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}^{(21)} &= (l_{ij}^{(21)})_{i,j=1}^k; \mathbf{M}^{(21)} = (m_{ij}^{(21)})_{i,j=1}^k; \mathbf{Q}^{(1)} = (q_{ij}^{(1)})_{i,j=1}^k; \mathbf{Q}^{(1s)} = (q_{ij}^{(1s)})_{i,j=1}^k, \\
\mathbf{M}^{(1s)} &= (m_{ij}^{(1s)})_{i,j=1}^k, s = \overline{2,4}; \mathbf{L}^{(1s)} = (l_{ij}^{(1s)})_{i,j=1}^k, s = 2, 3; \mathbf{L}^{(0s)} = (l_{ij}^{(0s)})_{i,j=1}^k, s = 1, 2; \\
\tilde{\mathbf{M}}^{(s)} &= (\tilde{m}_{ij}^{(s)})_{i,j=1}^k, \tilde{\mathbf{F}}^{(s)} = (\tilde{f}_i^{(s)})_{i=1}^k, s = \overline{0,4}; \\
\tilde{m}_{ij}^{(1)} &= \tilde{m}_{ij}^{(2)} = \tilde{m}_{ij}^{(3)} = \tilde{m}_{ij}^{(4)} = \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\Omega; \tilde{f}_i^{(1)} = \int_{\Omega} h_0 \varphi_i d\Omega; \tilde{f}_i^{(2)} = \int_{\Omega} c_0 \varphi_i d\Omega; \\
\tilde{f}_i^{(3)} &= \int_{\Omega} T_0 \varphi_i d\Omega; \tilde{f}_i^{(4)} = \int_{\Omega} N_0 \varphi_i d\Omega; \\
f_i^{(2)} &= 0; f_i^{(3)} = 0; m_{ij}^{(3)} = c_T \left(\int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\Omega + \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(T)} \int_{\Omega_e} \rho c_{\rho} \varphi_j \mathbf{u} \nabla \varphi_i d\Omega \right); m_{ij}^{(4)} = \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\Omega; \\
l_{ij}^{(3)} &= \int_{\Omega} \left((\lambda \nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) + \rho c_{\rho} \varphi_i \mathbf{u} \nabla \varphi_j \right) d\Omega + \\
&+ \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(T)} \int_{\Omega_e} \rho c_{\rho} (-\nabla \cdot (\lambda \nabla \varphi_j) + \rho c_{\rho} \mathbf{u} \nabla \varphi_j) \mathbf{u} \nabla \varphi_i d\Omega; \\
m_{ij}^{(2)} &= n \left(\int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\Omega + \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(c)} \int_{\Omega_e} \varphi_j \mathbf{u} \nabla \varphi_i d\Omega \right); \\
l_{ij}^{(21)} &= - \int_{\Omega} (\mathbf{D}_T \nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) d\Omega - \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(c)} \int_{\Omega_e} \nabla \cdot (\mathbf{D}_T \nabla \varphi_j) \mathbf{u} \nabla \varphi_i d\Omega; \\
l_i^{(4)} &= -\gamma_1 \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^k c_j(t) \varphi_j - C_m \right) \left(\sum_{j=1}^k N_j(t) \varphi_j \right)^{\chi} \varphi_i d\Omega; \\
m_{ij}^{(21)} &= - \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\Omega - \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(c)} \int_{\Omega_e} \mathbf{u} \varphi_i \varphi_j d\Omega; m_{ij}^{(14)} = - \frac{\varepsilon \beta_1 (1+e)}{R \rho_c \gamma} \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\Omega; \\
l_{ij}^{(2)} &= \int_{\Omega} \left((\mathbf{D} \nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j) + \varphi_i \mathbf{u} \nabla \varphi_j + (\alpha_{\rho} + q \alpha_s) n \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} \varphi_i \varphi_j \right) d\Omega + \\
&+ \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(c)} \int_{\Omega_e} (-\nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla \varphi_j) + \mathbf{u} \nabla \varphi_j + (\alpha_{\rho} + q \alpha_s) n \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} \varphi_j) \mathbf{u} \nabla \varphi_i d\Omega; \\
q_{ij}^{(12)} &= \frac{\varepsilon n (1+e)}{R \rho_c \gamma} \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\Omega; q_{ij}^{(13)} = \frac{e(\alpha_{\rho} + (2q-1)\alpha_s)}{R \gamma} \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\Omega; \\
q_{ij}^{(14)} &= - \frac{\varepsilon n (1+e)}{R \rho_c \gamma} \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\Omega; l_{ij}^{(12)} = - \frac{1+e}{R \gamma} \left(\beta_1 \int_{\Omega} (\mathbf{K}_c \nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) d\Omega + \int_{\Omega} \left(\frac{d\mathbf{K}_c}{dt} \nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i \right) d\Omega \right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_{ij}^{(13)} &= -\frac{1+e}{R\gamma} \left(\beta_1 \int_{\Omega} (\mathbf{K}_T \nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) d\Omega + \int_{\Omega} \left(\frac{d\mathbf{K}_T}{dt} \nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i \right) d\Omega \right); \\
q_{ij}^{(1)} &= \left(\frac{a_0}{1+(R-1)\xi} + \frac{\beta(1+e)}{R} \right) \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\Omega; \\
m_{ij}^{(1)} &= \gamma_1 \left(\frac{a_0 + a_1}{1+(R-1)\xi} + \frac{\beta(1+e)}{R} \right) \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\Omega + \frac{1+e}{R\gamma} \int_{\Omega} (\mathbf{K}_h(\hat{c}, \hat{T}, \hat{h}) \nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) d\Omega; \\
l_{ij}^{(1)} &= \frac{1+e}{R\gamma} \left(\beta_1 \int_{\Omega} (\mathbf{K}_h \nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) d\Omega + \int_{\Omega} \left(\frac{d\mathbf{K}_h}{dt} \nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i \right) d\Omega \right); \\
m_{ij}^{(0)} &= \left(\frac{R\gamma a_0}{1+(R-1)\xi} + \gamma\beta(1+e) \right) \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\Omega; \quad l_{ij}^{(01)} = (1+e) \int_{\Omega} (\mathbf{K}_c \nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) d\Omega; \\
m_{ij}^{(12)} &= \frac{\varepsilon n \beta_1 (1+e)}{R\rho_c \gamma} \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\Omega + \frac{1+e}{R\gamma} \int_{\Omega} (\mathbf{K}_c(\hat{c}) \nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) d\Omega; \\
m_{ij}^{(13)} &= \frac{\beta_1(\alpha_\rho + (2q-1)\alpha_s)}{R\gamma} \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\Omega + \frac{1+e}{R\gamma} \int_{\Omega} (\mathbf{K}_T(\hat{c}) \nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) d\Omega; \\
l_{ij}^{(0)} &= (1+e) \int_{\Omega} (\mathbf{K}_h(\hat{c}_0, \hat{T}_0, \hat{h}_0) \nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) d\Omega + \frac{R\gamma a_1 \beta_1}{1+(R-1)\xi} \int_{\Omega} \varphi_j \varphi_i d\Omega; \\
l_{ij}^{(02)} &= (1+e) \int_{\Omega} (\mathbf{K}_T \nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) d\Omega; \\
f_i^{(1)} &= \frac{a_0}{\gamma R(1+(R-1)\xi)} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 (\Theta^* + R\gamma h^*)}{\partial^2} \varphi_i d\Omega + \frac{\beta_1(a_0 + a_1)}{\gamma R(1+(R-1)\xi)} \int_{\Omega} \frac{\partial (\Theta^* + R\gamma h^*)}{\partial \hat{\mathbf{t}}} \varphi_i d\Omega; \\
f_i^{(0)} &= \frac{a_0}{1+(R-1)\xi} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \Theta_0^*}{\partial t} + R \frac{\partial p_0^*}{\partial t} \right) \varphi_i d\Omega + \frac{a_1 \beta_1}{1+(R-1)\xi} \int_{\Omega} (\Theta_0^* + R p_0^*) \varphi_i d\Omega.
\end{aligned}$$

Параметри регуляризації $\tau_e^{(T)}$, $\tau_e^{(c)}$ в (3.46), (3.47) згідно [241, 380]

вибираються наступним чином: $\tau_e^{(T)} = \frac{h_e}{a \|\rho_{\mathbf{c}} \mathbf{u}\|_{\infty, e}} \gamma(Pe_T)$, $\tau_e^{(c)} = \frac{h_e}{a \|\mathbf{u}\|_{\infty, e}} \gamma(Pe_c)$, де

$$a = 3, \quad \gamma(z) = \begin{cases} z, & 0 \leq z \leq 1; \\ 1, & 1 \leq z < \infty. \end{cases}$$

Потрібно відмітити особливості у визначенні елементів матриць задачі Коші (3.50)–(3.55), якщо вузол скінченноелементної сітки під номером i

попадає на частину межі Γ , де для невідомої функції задано граничні умови першого роду. Маємо:

1. Якщо $\mathbf{X}_i \in \Gamma_2$, то в системі (3.53) всі елементи i -го рядка покладаються рівними нулю і лише $l_{ii}^{(1)} := 1$ (де " := " – символ присвоєння). Також $f_i^{(1)} := H_1(\mathbf{X}_i, t)$.
2. Якщо $\mathbf{X}_i \in \Gamma_4$, то в системі (3.52) всі елементи i -го рядка покладаються рівними нулю і лише $l_{ii}^{(2)} := 1$, причому $f_i^{(2)} := C_1(\mathbf{X}_i, t)$.
3. Якщо $\mathbf{X}_i \in \Gamma_6$, то в системі (3.51) всі елементи i -го рядка покладаються рівними нулю і лише $l_{ii}^{(3)} := 1$, причому $f_i^{(3)} := T_1(\mathbf{X}_i, t)$.

Для знаходження числового розв'язку задачі Коші (3.50)–(3.55) поділимо часовий відрізок $[0; t_0]$ на m_1 однакових частин з кроком $\tau = \frac{t_0}{m_1}$. З цією метою введемо позначення $\mathbf{h}^{(j)}$, $\mathbf{C}^{(j)}$, $\mathbf{T}^{(j)}$, $\mathbf{N}^{(j)}$ – наближені розв'язки задачі Коші (3.50)–(3.55) при $t = j\tau$.

Наближений розв'язок системи нелінійних диференціальних рівнянь (3.50)–(3.55) можна знайти, наприклад, за допомогою повністю неявної лінеаризованої різницевої схеми [242, 244]

$$\mathbf{M}^{(4)} \cdot \frac{\mathbf{N}^{(s+1)} - \mathbf{N}^{(s)}}{\tau} + \mathbf{L}^{(4)}(\mathbf{C}^{(s)}, (\mathbf{N}^{(s+1)})^Z) = \mathbf{0}, \quad (3.56)$$

$$\mathbf{M}^{(3)} \cdot \frac{\mathbf{T}^{(s+1)} - \mathbf{T}^{(s)}}{\tau} + \mathbf{L}^{(3)}(\mathbf{h}^{(s)}, \mathbf{C}^{(s)}, \mathbf{T}^{(s)}) \cdot \mathbf{T}^{(s+1)} = (\mathbf{F}^{(3)})^{(s+1)}, \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{(2)} \cdot \frac{\mathbf{C}^{(s+1)} - \mathbf{C}^{(s)}}{\tau} + \mathbf{L}^{(2)}(\mathbf{h}^{(s)}, \mathbf{C}^{(s)}, \mathbf{T}^{(s+1)}) \cdot \mathbf{C}^{(s+1)} = & \mathbf{L}^{(21)} \cdot \mathbf{T}^{(s+1)} + \\ + \mathbf{M}^{(21)} \cdot \frac{\mathbf{N}^{(s+1)} - \mathbf{N}^{(s)}}{\tau} + \mathbf{M}^{(22)} \cdot \frac{\mathbf{T}^{(s+1)} - \mathbf{T}^{(s)}}{\tau} + & (\mathbf{F}^{(2)})^{(s+1)}, \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{Q}^{(1)} \cdot \frac{\mathbf{h}^{(s+1)} - 2\mathbf{h}^{(s)} + \mathbf{h}^{(s-1)}}{\tau^2} + \mathbf{M}^{(1)} \cdot \frac{\mathbf{h}^{(s+1)} - \mathbf{h}^{(s)}}{\tau} + \mathbf{L}^{(1)}(\mathbf{C}^{(s+1)}, \mathbf{T}^{(s+1)}, \mathbf{h}^{(s)}) \cdot \mathbf{h}^{(s+1)} = \\
& = \mathbf{L}^{(12)} \cdot \mathbf{C}^{(s+1)} + \mathbf{L}^{(13)} \cdot \mathbf{T}^{(s+1)} + \mathbf{M}^{(12)} \cdot \frac{\mathbf{C}^{(s+1)} - \mathbf{C}^{(s)}}{\tau} + \mathbf{M}^{(13)} \cdot \frac{\mathbf{T}^{(s+1)} - \mathbf{T}^{(s)}}{\tau} + \\
& + \mathbf{M}^{(14)} \cdot \frac{\mathbf{N}^{(s+1)} - \mathbf{N}^{(s)}}{\tau} + \mathbf{Q}^{(12)} \cdot \frac{\mathbf{C}^{(s+1)} - 2\mathbf{C}^{(s)} + \mathbf{C}^{(s-1)}}{\tau^2} + \\
& + \mathbf{Q}^{(13)} \cdot \frac{\mathbf{T}^{(s+1)} - 2\mathbf{T}^{(s)} + \mathbf{T}^{(s-1)}}{\tau^2} + \mathbf{Q}^{(14)} \cdot \frac{\mathbf{N}^{(s+1)} - 2\mathbf{N}^{(s)} + \mathbf{N}^{(s-1)}}{\tau^2} + (\mathbf{F}^{(1)})^{(s+1)}, \quad (3.59)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{M}^{(0)} \cdot \frac{\mathbf{h}^{(1)} - \mathbf{h}^{(0)}}{\tau} + \mathbf{L}^{(0)}(\mathbf{C}^{(0)}, \mathbf{T}^{(0)}, \mathbf{h}^{(0)}) \cdot \mathbf{h}^{(0)} = \mathbf{L}^{(01)} \cdot \mathbf{C}^{(0)} + \mathbf{L}^{(02)} \cdot \mathbf{T}^{(0)} + \mathbf{F}^{(0)}, \quad (3.60)$$

$s = \overline{1, m_1 - 1}$. Тут верхнім індексом позначені значення матриць та векторів на відповідному часовому шарі.

Система рівнянь (3.56) є нелінійною відносно невідомої вектор-функції $\mathbf{N}^{(s+1)}$. Для її лінеаризації можна використати метод Ньютона [244]

$$\mathbf{M}^{(4)} \cdot \frac{\mathbf{N}^{(s+1)} - \mathbf{N}^{(s)}}{\tau} + \frac{\mathbf{L}^{(4)}(\mathbf{C}^{(s)}, (\mathbf{N}^{(s)})^\chi)}{d\mathbf{N}} \cdot (\mathbf{N}^{(s+1)} - \mathbf{N}^{(s)}) = \mathbf{0}. \quad (3.61)$$

Згідно (3.16) маємо

$$\frac{\mathbf{L}^{(4)}(\mathbf{C}^{(s)}, (\mathbf{N}^{(s)})^\chi)}{d\mathbf{N}} = \chi \gamma_1 (C_m - c^{(s)}) (\mathbf{N}^{(s)})^{\chi-1}.$$

Якщо в математичній моделі фільтраційної консолідації знехтувати явищем повзучості скелету ґрунту і залежність між головними напруженнями та коефіцієнтом пористості прийняти у вигляді спрямленого відрізка компресійної кривої (2.9), то задача Коші для системи нелінійних диференціальних рівнянь відносно вектора $(\mathbf{h}(t); \mathbf{C}(t); \mathbf{T}(t); \mathbf{N}(t))$ набуде вигляду

$$\mathbf{M}^{(4)} \cdot \frac{d\mathbf{N}}{dt} + \mathbf{L}^{(4)}(\mathbf{C}, \mathbf{N}^\chi) = \mathbf{0}, \quad (3.62)$$

$$\mathbf{M}^{(3)} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{dt} + \mathbf{L}^{(3)}(\mathbf{h}, \mathbf{C}, \mathbf{T}) \cdot \mathbf{T} = \mathbf{F}^{(3)}, \quad (3.63)$$

$$\mathbf{M}^{(2)} \cdot \frac{d\mathbf{C}}{dt} + \mathbf{L}^{(2)}(\mathbf{h}, \mathbf{C}, \mathbf{T}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{L}^{(21)} \cdot \mathbf{T}(t) + \mathbf{M}^{(21)} \cdot \frac{d\mathbf{N}}{dt} + \mathbf{M}^{(22)} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{dt} + \mathbf{F}^{(2)}, \quad (3.64)$$

$$\mathbf{M}^{(1)} \cdot \frac{d\mathbf{h}}{dt} + \mathbf{L}^{(1)}(\mathbf{C}, \mathbf{T}, \mathbf{h}) \cdot \mathbf{h}(t) = \mathbf{L}^{(12)} \cdot \mathbf{C}(t) + \quad (3.65)$$

$$+ \mathbf{L}^{(13)} \cdot \mathbf{T}(t) + \mathbf{M}^{(12)} \cdot \frac{d\mathbf{C}}{dt} + \mathbf{M}^{(13)} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{dt} + \mathbf{M}^{(14)} \cdot \frac{d\mathbf{N}}{dt} + \mathbf{F}^{(1)},$$

$$\tilde{\mathbf{M}}^{(1)} \cdot \mathbf{h}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(1)}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(2)} \cdot \mathbf{C}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(2)}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(3)} \cdot \mathbf{T}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(3)}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(4)} \cdot \mathbf{N}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(4)}. \quad (3.66)$$

Для дискретизації в часі задачі Коші (3.62)–(3.66) можна використати схему предиктор–коректор [247]

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}^{(4)} \cdot \frac{\mathbf{P}^{(s+1)} - \mathbf{N}^{(s)}}{\tau} + \frac{\mathbf{L}^{(4)}(\mathbf{C}^{(s)}, (\mathbf{N}^{(s)})^\chi)}{d\mathbf{N}} \cdot (\mathbf{P}^{(s+1)} - \mathbf{N}^{(s)}) = \mathbf{0}, \\ & \mathbf{M}^{(4)} \cdot \frac{\mathbf{N}^{(s+1)} - \mathbf{N}^{(s)}}{\tau} + \frac{\mathbf{L}^{(4)}\left(\mathbf{C}^{(s)}, \left(\frac{1}{2}(\mathbf{N}^{(s)} + \mathbf{P}^{(s+1)})\right)^\chi\right)}{d\mathbf{N}} \cdot (\mathbf{N}^{(s+1)} - \mathbf{N}^{(s)}) = \mathbf{0}, \\ & \mathbf{M}^{(3)} \cdot \frac{\mathbf{Q}^{(s+1)} - \mathbf{T}^{(s)}}{\tau} + \frac{1}{2}\mathbf{L}^{(3)}(\mathbf{C}^{(s)}, \mathbf{T}^{(s)}, \mathbf{h}^{(s)}) \cdot (\mathbf{Q}^{(s+1)} + \mathbf{T}^{(s)}) = \mathbf{F}^{(3)(s+1/2)}, \\ & \mathbf{M}^{(3)} \cdot \frac{\mathbf{T}^{(s+1)} - \mathbf{T}^{(s)}}{\tau} + \\ & + \mathbf{L}^{(3)}\left(\frac{1}{2}[\mathbf{W}^{(s+1)} + \mathbf{C}^{(s)}], \frac{1}{2}[\mathbf{Q}^{(s+1)} + \mathbf{T}^{(s)}], \frac{1}{2}[\mathbf{V}^{(s+1)} + \mathbf{h}^{(s)}]\right) \cdot \mathbf{T}^{(s+1/2)} = \mathbf{F}^{(3)(s+1/2)}, \\ & \mathbf{M}^{(2)} \cdot \frac{\mathbf{W}^{(s+1)} - \mathbf{C}^{(s)}}{\tau} + \frac{1}{2}\mathbf{L}^{(2)}(\mathbf{C}^{(s)}, \mathbf{T}^{(s)}, \mathbf{h}^{(s)}) \cdot (\mathbf{W}^{(s+1)} + \mathbf{C}^{(s)}) = \\ & = \frac{1}{2}\mathbf{L}^{(21)}(\mathbf{Q}^{(s+1)} + \mathbf{T}^{(s)}) + \mathbf{M}^{(21)} \cdot \frac{\mathbf{N}^{(s+1)} - \mathbf{N}^{(s)}}{\tau} + \mathbf{M}^{(22)} \cdot \frac{\mathbf{Q}^{(s+1)} - \mathbf{T}^{(s)}}{\tau} + \mathbf{F}^{(2)(s+1/2)}, \\ & \mathbf{M}^{(2)} \cdot \frac{\mathbf{C}^{(s+1)} - \mathbf{C}^{(s)}}{\tau} + \mathbf{L}^{(2)}\left(\frac{1}{2}[\mathbf{W}^{(s+1)} + \mathbf{C}^{(s)}], \frac{1}{2}[\mathbf{T}^{(s+1)} + \mathbf{T}^{(s)}], \frac{1}{2}[\mathbf{V}^{(s+1)} + \mathbf{h}^{(s)}]\right) \cdot \mathbf{C}^{(s+1/2)} = \\ & = \mathbf{L}^{(21)} \cdot \mathbf{T}^{(s+1/2)} + \mathbf{M}^{(21)} \cdot \frac{\mathbf{N}^{(s+1)} - \mathbf{N}^{(s)}}{\tau} + \mathbf{M}^{(22)} \cdot \frac{\mathbf{T}^{(s+1)} - \mathbf{T}^{(s)}}{\tau} + \mathbf{F}^{(2)(s+1/2)}, \\ & \mathbf{M}^{(1)} \cdot \frac{\mathbf{V}^{(s+1)} - \mathbf{h}^{(s)}}{\tau} + \frac{1}{2}\mathbf{L}^{(1)}(\mathbf{C}^{(s)}, \mathbf{T}^{(s)}, \mathbf{h}^{(s)}) \cdot (\mathbf{V}^{(s+1)} + \mathbf{h}^{(s)}) = \frac{1}{2}\mathbf{L}^{(12)} \cdot (\mathbf{W}^{(s+1)} + \mathbf{C}^{(s)}) + \\ & + \frac{1}{2}\mathbf{L}^{(13)} \cdot (\mathbf{Q}^{(s+1)} + \mathbf{T}^{(s)}) + \mathbf{M}^{(12)} \cdot \frac{\mathbf{W}^{(s+1)} - \mathbf{C}^{(s)}}{\tau} + \mathbf{M}^{(13)} \cdot \frac{\mathbf{Q}^{(s+1)} - \mathbf{T}^{(s)}}{\tau} + \\ & + \mathbf{M}^{(14)} \cdot \frac{\mathbf{N}^{(s+1)} - \mathbf{N}^{(s)}}{\tau} + \mathbf{F}^{(1)(s+1/2)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{M}^{(1)} \cdot \frac{\mathbf{h}^{(s+1)} - \mathbf{h}^{(s)}}{\tau} + \mathbf{L}^{(1)} \left(\frac{1}{2} [\mathbf{W}^{(s+1)} + \mathbf{C}^{(s)}] \right) \frac{1}{2} [\mathbf{T}^{(s+1)} + \mathbf{T}^{(s)}] \frac{1}{2} [\mathbf{V}^{(s+1)} + \mathbf{h}^{(s)}] \cdot \mathbf{h}^{(s+1/2)} = \\
& = \mathbf{L}^{(12)} \cdot \mathbf{C}^{(s+1/2)} + \mathbf{L}^{(13)} \cdot \mathbf{T}^{(s+1/2)} + \mathbf{M}^{(12)} \cdot \frac{\mathbf{C}^{(s+1)} - \mathbf{C}^{(s)}}{\tau} + \\
& + \mathbf{M}^{(13)} \cdot \frac{\mathbf{T}^{(s+1)} - \mathbf{T}^{(s)}}{\tau} + \mathbf{M}^{(14)} \cdot \frac{\mathbf{N}^{(s+1)} - \mathbf{N}^{(s)}}{\tau} + \mathbf{F}^{(1)(s+1/2)},
\end{aligned}$$

де $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{P}$ – допоміжні вектор-функції; $\mathbf{F}^{(s+1/2)} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^{(s+1)} + \mathbf{F}^{(s)})$.

Відмітимо, що в роботі [65] доведена теорема про точність наближених скінченноелементних розв'язків одновимірної нелінійної крайової задачі фільтраційної консолідації в умовах впливу тепло-солепереносу (в області з фіксованими межами), отриманих згідно класичної схеми Бубнова-Гальоркіна та застосуванні схеми Кранка-Ніколсона. Встановлено, що похибка скінченноелементних розв'язків є обмеженою величиною порядку $O(h_{\max}^p, \tau^2)$, де p – степінь поліноміальних базисних функцій, τ – крок по часу, $h_{\max}$ – максимальна із довжин всіх скінченних елементів.

3.3. Метод радіальних базисних функцій та його застосування для чисельного розв'язання нелінійної крайової задачі фільтраційної консолідації в умовах впливу теплосолеперенесення

Одним із недоліків проекційно-сіткових методів (до яких відноситься МСЕ) є необхідність покриття розрахункової області, в якій шукається розв'язок задачі, так званою геометричною сіткою – множиною вузлів, які пов'язані між собою наперед визначеними зв'язками [257]. Тому застосування МСЕ до розв'язування крайових задач, особливо просторових, пов'язане зі значними обчислювальними та ресурсними затратами. Адже виникає потреба в створенні генератора скінченноелементного розбиття тривимірних областей, що складає приблизно 70% від затрат всіх ресурсів на розв'язування задачі [361]. Як відомо, точність скінченноелементних розв'язків залежить від форми скінченного елемента [239]. У випадку трикутних скінченних елементів "ідеальним" є правильний трикутник. Цього не завжди вдається домогтись,

зважаючи на форму розрахункової області, особливо це стосується задач у яких область змінюється в часі. Застосування методу скінченних різниць (МСР) з використанням регулярної (прямокутної) сітки обмежує форму області, в якій шукається розв'язок задачі, а застосування МСР на нерегулярних сітках [29] еквівалентне вимогам скінченноелементного розбиття області. Крім того, МСР в кривих задачах тепломасоперенесення з конвективними членами вимагає застосування монотонних різницевих схем [2-4, 29, 96].

Однією із альтернатив проекційно–сітковим методам виступають методи граничних елементів [50, 52, 82] та проекційно–безсіткові методи [331, 360, 361]. Наприклад, при заданні в проекційному методі Петрова–Гальоркіна в якості пробних функцій дельта–функції Дірака отримуємо так званий метод колокацій в точках (надалі – метод колокації) [34]. В якості базисних функцій в даному методі можна використати радіальні базисні функції (РБФ).

Радіальні базисні функції знайшли своє застосування в методах наближення функцій [300, 335, 336, 402], а також в способі відшукування часткових розв'язків ДРЧП в методі граничних елементів та в методі фундаментального розв'язку [388]. Також РБФ широко використовуються у комп'ютерній графіці [308, 324]. Найбільш вживаними РБФ є наступні [300, 319, 320, 330, 343, 344, 354, 388]:

мультіквадратична $\varphi(r, \varepsilon) = \sqrt{1 + (r\varepsilon)^2}$, обернена мультіквадратична

$\varphi(r, \varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{1 + (r\varepsilon)^2}}$, обернена квадратична $\varphi(r, \varepsilon) = \frac{1}{1 + (r\varepsilon)^2}$ та гауссівська

$\varphi(r, \varepsilon) = e^{-(r\varepsilon)^2}$. Тут $\varepsilon > 0$ – константа, яку називають параметром форми. Також останнім часом широко використовуються РБФ з компактним носієм [299, 300, 401, 402]. Приклади даних функцій наведено у табл. 3.1, де $(1-r)_+$ – зрізка функції, яка визначається наступним чином:

$$(1-r)_+ = \begin{cases} 1-r, 0 \leq r \leq 1; \\ 0, r > 1. \end{cases}$$

Табл. 3.1. Радіальні базисні функції з компактним носієм

Розмірність простору	Вигляд РБФ	Неперервна диференційованість
1	$\varphi(r) = (1-r)_+$	C^0
	$\varphi(r) = (1-r)_+^3(3r+1)$	C^2
	$\varphi(r) = (1-r)_+^5(8r^2+5r+1)$	C^4
2 та 3	$\varphi_1(r) = (1-r)_+^2$	C^0
	$\varphi_2(r) = (1-r)_+^4(4r+1)$	C^2
	$\varphi_3(r) = (1-r)_+^6(35r^2+18r+3)$	C^4

На практиці область визначення РБФ з компактним носієм $\varphi(r)$ необхідно змінювати. Для цього вводять параметр $\alpha > 0$ і використовують

$$\varphi^{[\alpha]}(r) = \varphi(r/\alpha).$$

Першою роботою із застосування РБФ вважається розробка R. L. Hardy в 70-х роках XX-го століття методу апроксимації кривих та поверхонь в геодезичних задачах. Маючи набір s точок $\{(x_j, y_j)\}_{j=1}^s$ і відповідних їм топографічних замірів $\{f_j\}_{j=1}^s$ R. L. Hardy запропонував наближати дані наступною функцією:

$$F(x, y) = \sum_{j=1}^s \lambda_j \sqrt{c^2 + (x - x_j)^2 + (y - y_j)^2},$$

де λ_j шукаються за допомогою колокації із СЛАР

$$F(x_j, y_j) = f_j, j = \overline{1, s}.$$

Автор назвав новий підхід “мультиквадратичним методом”. Математичні основи мультиквадратичного методу, як методу апроксимації функцій, закладені С. А. Micchelli в 1986 році [367]. Автором доведена теорема (аналогічна теоремі Вейєрштрасса про апроксимацію функцій многочленами),

яка обґрунтовує базисність мультиквадратичної радіальної функції в просторі неперервних функцій. Більше того, базисність доведена для будь-якої позитивно визначеної радіальної функції. До таких відносяться більшість із відомих глобально визначених радіальних функцій: мультиквадратична, обернена мультиквадратична, обернена квадратична, Гаусівська.

Не претендуючи на повноту висвітлення відомих результатів, згадаємо лише схему загального проєкційного методу [198], якою скористаємось в подальших викладках стосовно методу РБФ. В гільбертовому просторі H розглянемо операторне рівняння [198]

$$Au = f, \quad f \in H, \quad (3.67)$$

де A – лінійний оператор в H з областю визначення $D(A)$. Вимагаємо виконання умови щільності $D(A)$ в H .

Задамо набір так званих базисних функцій

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_s, \quad s = 1, 2, \dots, \quad (3.68)$$

кожна з яких належить $D(A)$. Позначимо через H_s лінійну оболонку функцій

(3.68), тобто множину, яка складається із всеможливих комбінацій $\sum_{i=1}^s \alpha_i \varphi_i$, де

$\alpha_i = \text{const}, i = \overline{1, s}$. Вимагаємо виконання принаймні двох наступних умов:

1) система функцій (3.68) є лінійно незалежною в H ; 2) система функцій (3.68) є повною в H . Інші умови щодо систем базисних функцій висвітлені в [198].

Введемо в розгляд деякий оператор K з областю визначення $D(K) \supseteq D(A)$ і розглянемо набір функцій $\{\psi_i\}_{i=1}^s \in D(K)$, які називаються пробними. Згідно проєкційного методу [198] наближений розв'язок u_s рівняння (3.67) шукають у вигляді $u_s = \sum_{j=1}^s c_j \varphi_j$, де невідомі константи $c_j, j = \overline{1, s}$, знаходять із СЛАР

$$(Au_n - f, K\psi_i)_H = 0, \quad i = \overline{1, s}. \quad (3.69)$$

Тут $(u, v)_H$ – скалярний добуток в просторі H . Згідно проєкційного методу Петрова–Гальоркіна: K – тотожний оператор, $\varphi_i \neq \psi_i, i = \overline{1, s}, \varphi_i \in D(A), \psi_i \in H$.

На основі проєкційного методу Петрова–Гальоркіна ґрунтується багато безсіткових числових методів математичної фізики [240, 361].

Нехай $H = L_2(\Omega)$, де Ω – область m -вимірному евклідовому простору. Тоді, $(u, v)_H = \int_{\Omega} u v d\mathbf{X}$, де $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$. Розіб'ємо область Ω на s

підобластей $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_s$ таким чином, щоб $\bigcup_{i=1}^s \Omega_i = \Omega$, $\Omega_j \cap \Omega_i = \emptyset$ при $i \neq j$.

В кожній підобласті Ω_i виберемо вузлову точку (або просто – вузол)

$\mathbf{X}_i = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_m^{(i)}) \in \Omega_i$, $i = \overline{1, s}$, в кожній з яких розглянемо дельта-функцію

Дірака [34] $\delta_i(\mathbf{X}) = \delta(r_i)$, $r_i = \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_i\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^m (x_j - x_j^{(i)})^2}$. Тоді

$\int_{\Omega} f(\mathbf{X}) \delta_i(\mathbf{X}) d\mathbf{X} = f(\mathbf{X}_i)$, $i = \overline{1, s}$. В якості пробних виберемо функції

$\psi_i(\mathbf{X}) = \delta_i(\mathbf{X})$, $i = \overline{1, s}$. Тоді в просторі $L_2(\Omega)$ для знаходження наближеного

розв'язку операторного рівняння (3.67) у вигляді $u_s(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^s c_j \varphi_j(\mathbf{X})$, згідно

проєкційного методу Петрова–Гальоркіна, з (3.69) отримуємо СЛАР

$$\sum_{j=1}^s c_j A \varphi_j(\mathbf{X}_i) = f(\mathbf{X}_i), \quad i = \overline{1, s}. \quad (3.70)$$

Розв'язавши СЛАР (3.70), знайдемо невідомі коефіцієнти c_j , $j = \overline{1, s}$, а звідси і наближений розв'язок $u_s(\mathbf{X})$ рівняння (3.67) в просторі $L_2(\Omega)$.

Описаний метод називається методом колокації в точці [34] і є варіантом проєкційного методу Петрова–Гальоркіна, де в якості пробних функцій вибираються дельта-функції Дірака, аргументами яких є відстані до вузлів $\mathbf{X}_i$, $i = \overline{1, s}$. В даному методі вимагається задання в області, в якій шукається розв'язок задачі, лише множини вузлів. Тому він (метод) відноситься до безсіткових.

Вперше метод коллокації в точці з використанням РБФ для розв'язування крайових задач для ДРЧП запропоновано в роботах [343, 344] і отримав назву “метод РБФ”. Звичайно, на даний час під цією назвою розуміється цілий клас

безсіткових методів. В дисертаційній роботі використана одна із його модифікацій, яка описана нижче.

Для прикладу розглянемо наступну крайову задачу:

$$Au(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \Omega,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\mathbf{X} \in \Gamma_2} = g(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_2,$$

$$u(\mathbf{X})|_{\mathbf{X} \in \Gamma_1} = \bar{u}(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_1,$$

де A – диференціальний оператор другого порядку; $\frac{\partial}{\partial n}$ – оператор похідної по зовнішній нормалі; u – невідома функція; $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ – границя області Ω , причому $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. Одна із модифікацій методу РБФ полягає в тому, що виділяються окремо множини вузлових і колокаційних точок [139, 359, 262]. Причому колокаційних точок повинно бути більше. Тобто, в замиканні $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ області Ω вибираються вузлові точки $\mathbf{X}_j$, $j = \overline{1, s}$ і колокаційні точки $\mathbf{Y}_i$, $i = \overline{1, k}$. Виділимо наступні підмножини номерів колокаційних точок: $k^{(\Omega)}$ – множина номерів колокаційних точок, що належать області Ω ; $k^{(1)}$ – множина номерів колокаційних точок, що належать границі Γ_1 ; $k^{(2)}$ – множина номерів колокаційних точок, які належать границі Γ_2 . Наближений розв’язок вищенаведеної крайової задачі шукаємо у вигляді

$$u_n(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^s c_j \varphi_j(r_j, \varepsilon),$$

де c_j – деякі невідомі коефіцієнти; $r_j = \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_j\|_2$; $\varepsilon > 0$ – параметр форми; $\varphi_j(r_j, \varepsilon)$ – деякі відомі РБФ. Тоді для відшукування невідомих c_j , $j = \overline{1, s}$ згідно методу колокації в точці, маємо СЛАР

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{F}, \tag{3.71}$$

де

$$\mathbf{C} = (c_1, c_2, \dots, c_s)^T; \mathbf{A} = \{a_{ij}\}_{i=1; j=1}^{k; s}; \mathbf{F} = (f_1, f_2, \dots, f_k)^T;$$

$$r_{ij} = \|\mathbf{Y}_i - \mathbf{X}_j\|_2 = \sqrt{(y_1^{(i)} - x_1^{(j)})^2 + \dots + (y_n^{(i)} - x_n^{(j)})^2};$$

$$a_{ij} = \begin{cases} A(\varphi_j(r_{ij}, \varepsilon)), & i \in k^{(\Omega)}, \\ \frac{\partial \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon)}{\partial n}, & i \in k^{(2)}, \\ \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon), & i \in k^{(1)}, \end{cases} \quad f_i = \begin{cases} f(\mathbf{X}_i), & i \in k^{(\Omega)}, \\ g(\mathbf{X}_i), & i \in k^{(2)}, \\ \bar{u}(\mathbf{X}_i), & i \in k^{(1)}. \end{cases}$$

В класичному методі РБФ множини вузлових і коллокаційних точок співпадають. Вищеописана модифікація методу РБФ пов'язана з необхідністю підвищення стійкості наближених розв'язків та підвищення точності апроксимації граничних умов.

В СЛАР (3.71) з коефіцієнтами, що визначаються згідно останніх формул, кількість рівнянь k більше кількості невідомих s . Для її розв'язання можна використовувати метод найменших квадратів [206, 281]. Його суть полягає в тому, що потрібно знайти такий вектор $\mathbf{C}$, для якого виконується умова $|\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} - \mathbf{F}|^2 = \min_{\mathbf{X} \in R^s} |\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} - \mathbf{F}|^2$. Розв'язок цієї задачі зводиться до розв'язання СЛАР

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{C} = \mathbf{A}^T \mathbf{F},$$

де індекс « T » зверху означає транспонування.

На даний час застосування методу РБФ в прикладних задачах набрало значної популярності [305, 312–314, 338, 340, 345–347, 353, 358, 359, 381, 363]. Не відстає в даному напрямку і українська школа прикладної математики. Зокрема, набули розвитку застосування атомарних радіальних базисних функцій завдяки роботам В. М. Колодяжного, В. О. Рвачова, О. Ю. Лісіної та ін. [154–156]. В роботі Р. М. Тригуб [256] досліджено властивості позитивно визначених радіальних функцій поліноміально вигляду і максимальної гладкості. Автором відмічено про застосування цих РБФ з компактним носієм в обчислювальних методах.

Дослідження якісних характеристик методу РБФ стосовно розв'язування крайових задач для ДРЧП знаходиться на початковому етапі. Чи не перша спроба оцінки похибок даного методу висвітлена в роботі [320]. Зокрема, для задачі Діріхле для рівняння Пуассона

$$\begin{aligned}\Delta u(\mathbf{X}) &= f(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \Omega, \\ u(\mathbf{X})|_{\Gamma} &= g(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \Gamma,\end{aligned}$$

оцінка має вигляд

$$\|u - u_n\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \|g - u_n\|_{L_\infty(\Gamma)} + C\sqrt{\text{vol}(\Omega)}\|f - \Delta u_n\|_{L_\infty(\Omega)}.$$

Тут: u_n – наближений розв'язок згідно методу РБФ; $C > 0$ – константа; $\|\bullet\|_{L_\infty}$ – норма в сенсі метрики простору L_∞ ; $\text{vol}(\Omega)$ – “об’єм” області Ω (“об’єм” – це умовна назва, яка залежить від розмірності простору).

Найбільш повні результати досліджень похибок методу РБФ наведені в [330]. Зокрема, розглянуто крайову задачу

$$\begin{aligned}Lu(\mathbf{X}) &= f(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \Omega, \\ u(\mathbf{X})|_{\Gamma} &= g(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \Gamma,\end{aligned}$$

де $Lu(\mathbf{X})$ – лінійний еліптичний оператор другого порядку зі змінними коефіцієнтами. Якщо $u(\mathbf{X}) \in W_2^m(\Omega)$, де $[m] > 2 + \frac{n}{2}$, то для похибки між точним розв'язком $u(\mathbf{X})$ та наближеним розв'язком $u_n(\mathbf{X})$ згідно методу РБФ справедлива оцінка

$$\|u - u_n\|_{L_\infty(\Omega)} \leq C \left(h_{X,\Omega}^{m-2-\frac{n}{2}} + h_{X,\Gamma}^{m-\frac{n}{2}} \right) \|u\|_{W_2^m(\Omega)},$$

де $C > 0$ – константа; $h_{X,\Omega} = \sup_{\mathbf{X} \in \Omega} \min_{j \in \omega} \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_j\|_2$, $h_{X,\Gamma} = \sup_{\mathbf{X} \in \Gamma} \min_{j \in \omega^\Gamma} \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_j\|_2$; ω – множина номерів вузлів, які належать області Ω ; ω^Γ – множина номерів вузлів, які належать межі Γ ; $W_2^m(\Omega)$ – простір Соболева.

Аналогічна оцінка для першої крайової задачі для еліптичних рівнянь зі сталими коефіцієнтами наведена в роботі [319].

Набагато більше оцінок точності методу РБФ стосовно розв'язання крайових задач зроблено на основі обчислювальних експериментів [354, 381,

396]. Висновки згідно таких експериментів однотипні: метод РБФ має точність не нижчу, а в деяких випадках набагато вищу, за точність відомих сіткових методів – МСР та МСЕ.

Для чисельного розв'язання задачі (3.13)–(3.24) безсітковим методом РБФ виберемо в замиканні області $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ вузли–центри $\mathbf{X}_i$, $i = \overline{1, s}$ та колокаційні точки $\mathbf{Y}_i$, $i = \overline{1, k}$, де k^Ω , k^{Γ_j} – відповідно множини номерів колокаційних точок, які лежать в області Ω і на відповідних частинах Γ_j , $j = \overline{1, 6}$, межі Γ . Вимагаємо $k \geq s$. В загальному випадку множини вузлових точок $\mathbf{X}_i$, $i = \overline{1, s}$ та колокаційних точок $\mathbf{Y}_i$, $i = \overline{1, k}$ не співпадають. Хоча, при практичній реалізації методу, такий випадок не виключається. Також відмітимо наступне. Наближені розв'язки для різних невідомих функцій можна шукати на різних сітках вузлових та колокаційних точок. Для уникнення зайвої індексації та громіздкості викладки зроблені для випадку однієї сітки, що не зменшує їх (викладок) загальності.

Наближений розв'язок крайової задачі (3.13)–(3.24) шукаємо у вигляді

$$\begin{aligned} h(\mathbf{X}, t) &\approx \sum_{i=1}^s h_i(t) \varphi_i(r_i, \varepsilon_h), \quad c(\mathbf{X}, t) \approx \sum_{i=1}^s c_i(t) \varphi_i(r_i, \varepsilon_c), \quad T(\mathbf{X}, t) \approx \sum_{i=1}^s T_i(t) \varphi_i(r_i, \varepsilon_T), \\ N(\mathbf{X}, t) &\approx \sum_{i=1}^s N_i(t) \varphi_i(r_i, \varepsilon_N), \end{aligned} \quad (3.72)$$

де $h_i(t), c_i(t), T_i(t), N_i(t), i = \overline{1, s}$, – невідомі коефіцієнти, які залежать лише від часу; $\varphi(r_i, \varepsilon)$, $i = \overline{1, s}$, – відомі РБФ [300, 340], причому $r_i = \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_i\|_2$; $\varepsilon_h > 0$, $\varepsilon_c > 0$, $\varepsilon_T > 0$, $\varepsilon_N > 0$ – параметри форми; $\|\bullet\|_2$ – Евклідова норма вектора.

Тоді, використовуючи метод колокацій в точці [34], з рівнянь (3.13)–(3.16), граничних та початкових умов (3.20)–(3.24) отримуємо задачу Коші (3.50)–(3.55) для системи нелінійних диференціальних рівнянь відносно векторів невідомих $\mathbf{h}(t) = \{h_i(t)\}_{i=1}^s$, $\mathbf{C}(t) = \{c_i(t)\}_{i=1}^s$, $\mathbf{T}(t) = \{T_i(t)\}_{i=1}^s$, $\mathbf{N}(t) = \{N_i(t)\}_{i=1}^s$ де

$$\mathbf{h}^{(0)} = (h_i(0))_{i=1}^s, \quad \mathbf{C}^{(0)} = (c_i(0))_{i=1}^s, \quad \mathbf{T}^{(0)} = (T_i(0))_{i=1}^s, \quad \mathbf{N}^{(0)} = (N_i(0))_{i=1}^s,$$

$$\mathbf{M}^{(\alpha)} = (m_{ij}^{(\alpha)})_{i,j=1}^{k,s}, \alpha = \overline{0;4}, \mathbf{L}^{(\alpha)} = (l_{ij}^{(\alpha)})_{i,j=1}^{k,s}, \mathbf{F}^{(\alpha)} = (f_i^{(\alpha)})_{i=1}^k, \alpha = \overline{0;3}, \mathbf{L}^{(4)} = (l_i^{(4)})_{i=1}^k,$$

$$\mathbf{L}^{(21)} = (l_{ij}^{(21)})_{i,j=1}^{k,s}, \mathbf{M}^{(21)} = (m_{ij}^{(21)})_{i,j=1}^{k,s}, \mathbf{Q}^{(1)} = (q_{ij}^{(1)})_{i,j=1}^{k,s}, \mathbf{Q}^{(1\alpha)} = (q_{ij}^{(1\alpha)})_{i,j=1}^{k,s},$$

$$\mathbf{M}^{(1\alpha)} = (m_{ij}^{(1\alpha)})_{i,j=1}^{k,s}, s = \overline{2;4}, \mathbf{L}^{(1\alpha)} = (l_{ij}^{(1\alpha)})_{i,j=1}^{k,s}, \alpha = 2; 3, \mathbf{L}^{(0\alpha)} = (l_{ij}^{(0\alpha)})_{i,j=1}^{k,s}, \alpha = 1; 2,$$

$$\tilde{\mathbf{M}}^{(\alpha)} = (\tilde{m}_{ij}^{(\alpha)})_{i,j=1}^{k,s}, \tilde{\mathbf{F}}^{(\alpha)} = (\tilde{f}_i^{(\alpha)})_{i=1}^k, \alpha = \overline{0;4}, m_{ij}^{(3)} = \begin{cases} c_T \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T), & i \in k^\Omega, \\ 0, & i \notin k^\Omega, \end{cases}$$

$$m_{ij}^{(2)} = \begin{cases} n\varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c), & i \in k^\Omega, \\ 0, & i \notin k^\Omega, \end{cases} l_{ij}^{(3)} = \begin{cases} -\nabla \cdot (\lambda \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T)) + \rho c_\rho \mathbf{u} \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T), & i \in k^\Omega, \\ (-\lambda \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T) + \rho c_\rho \mathbf{u} \cdot \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T), \mathbf{n}), & i \in k^{\Gamma_5}, \\ \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T), & i \in k^{\Gamma_6}, \end{cases}$$

$$l_{ij}^{(4)} = -\gamma_1 \left(\sum_{j=1}^s c_j(t) \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c) - C_m \left(\sum_{j=1}^s N_j(t) \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_N) \right)^\chi \right), m_{ij}^{(4)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_N),$$

$$f_i^{(3)} = \begin{cases} 0, & i \in k^\Omega, \\ 0, & i \in k^{\Gamma_5}, \\ T_1(\mathbf{Y}_i, t), & i \in k^{\Gamma_6}, \end{cases} q_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \left(\frac{a_0}{1 + (R-1)\xi} + \frac{\beta(1+e)}{R} \right) \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h), & i \in k^\Omega, \\ 0, & i \notin k^\Omega, \end{cases}$$

$$l_{ij}^{(2)} = \begin{cases} -\nabla \cdot (\mathbf{D}_c \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c)) + \mathbf{u} \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c), & i \in k^\Omega, \\ (-\mathbf{D}_c \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c) + \mathbf{u} \cdot \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c), \mathbf{n}), & i \in k^{\Gamma_3}, \\ \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c), & i \in k^{\Gamma_4}, \end{cases} m_{ij}^{(21)} = \begin{cases} -\varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_N), & i \in k^\Omega, \\ 0, & i \notin k^\Omega, \end{cases}$$

$$l_{ij}^{(21)} = \begin{cases} \nabla \cdot (\mathbf{D}_T \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T)), & i \in k^\Omega, \\ (-\mathbf{D}_T \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T), \mathbf{n}), & i \in k^{\Gamma_3}, \\ 0, & i \in k^{\Gamma_4}, \end{cases} m_{ij}^{(22)} = \begin{cases} -(\alpha_\rho + q\alpha_s) \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T), & i \in k^\Omega, \\ 0, & i \notin k^\Omega, \end{cases}$$

$$m_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \beta_1 \left(\frac{a_0 + a_1}{1 + (R-1)\xi} + \frac{\beta(1+e)}{R} \right) \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h) - \\ - \frac{1+e}{R\gamma} \nabla \cdot (\mathbf{K}_h(\mathbf{C}, \mathbf{T}, \mathbf{h}) \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h)), & i \in k^\Omega, \\ 0, & i \notin k^\Omega, \end{cases} f_i^{(2)} = \begin{cases} 0, & i \notin k^{\Gamma_4}, \\ C_1(\mathbf{Y}_i, t), & i \in k^{\Gamma_4}, \end{cases}$$

$$l_{ij}^{(1)} = \begin{cases} -\frac{1+e}{R\gamma} \beta_1 \nabla \cdot (\mathbf{K}_h(\mathbf{C}, \mathbf{T}, \mathbf{h}) \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h)), & i \in k^\Omega, \\ (-\mathbf{K}_h(\mathbf{C}, \mathbf{T}, \mathbf{h}) \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h), \mathbf{n}), & i \in k^{\Gamma_1}, \\ \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h), & i \in k^{\Gamma_2}, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
l_{ij}^{(12)} &= \begin{cases} -\frac{1+e}{R\gamma} \beta_1 \nabla \cdot (\mathbf{K}_c \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c)), & i \in k^\Omega, \\ (\mathbf{K}_c \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c), \mathbf{n}), & i \in k^{\Gamma_1}, \\ 0, & i \in k^{\Gamma_2}, \end{cases} \\
l_{ij}^{(13)} &= \begin{cases} -\frac{1+e}{R\gamma} \beta_1 \nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T)), & i \in k^\Omega, \\ (\mathbf{K}_T \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T), \mathbf{n}), & i \in k^{\Gamma_1}, \\ 0, & i \in k^{\Gamma_2}, \end{cases} \\
m_{ij}^{(12)} &= \begin{cases} -\frac{1+e}{R\gamma} \nabla \cdot (\mathbf{K}_c \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c)) + \frac{\varepsilon \beta_1 (1+e) n}{R \rho_c \gamma} \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c), & i \in k^\Omega, \\ 0, & i \notin k^\Omega, \end{cases} \\
f_i^{(0)} &= \left(\frac{a_0}{1+(R-1)\xi} \left(\frac{\partial \Theta_0^*}{\partial t} + R \frac{\partial p_0^*}{\partial t} \right) + \frac{a_1 \beta_1}{1+(R-1)\xi} (\Theta_0^* + R p_0^*) \right) \Bigg|_{\mathbf{X}=\mathbf{Y}_i}, \\
f_i^{(1)} &= \begin{cases} \frac{1}{1+(R-1)\xi} \left(\frac{a_0}{R\gamma} \frac{\partial^2 (\Theta^* + R\gamma h^*)}{\partial t^2} + \frac{\beta_1 (a_0 + a_1)}{R\gamma} \frac{\partial (\Theta^* + R\gamma h^*)}{\partial t} \right) \Bigg|_{\mathbf{X}=\mathbf{Y}_i}, & i \in k^\Omega, \\ 0, & i \in k^{\Gamma_1}, \\ H_1(\mathbf{Y}_i, t), & i \in k^{\Gamma_2}, \end{cases} \\
m_{ij}^{(13)} &= \begin{cases} -\frac{1+e}{R\gamma} \nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T)) + \frac{(\alpha_\rho + (2q-1)\alpha_s) e \beta_1}{R\gamma} \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T), & i \in k^\Omega, \\ 0, & i \notin k^\Omega, \end{cases} \\
m_{ij}^{(14)} &= \begin{cases} -\frac{\varepsilon e (1+e) \beta_1}{R \rho_c \gamma} \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_N), & i \in k^\Omega, \\ 0, & i \notin k^\Omega, \end{cases} \quad q_{ij}^{(12)} = \begin{cases} \frac{\varepsilon n (1+e)}{R \rho_c \gamma} \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c), & i \in k^\Omega, \\ 0, & i \notin k^\Omega, \end{cases} \\
q_{ij}^{(13)} &= \begin{cases} \frac{e(\alpha_\rho + (2q-1)\alpha_s)}{R\gamma} \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T), & i \in k^\Omega, \\ 0, & i \notin k^\Omega, \end{cases} \quad q_{ij}^{(14)} = \begin{cases} -\frac{\varepsilon e (1+e)}{R \rho_c \gamma} \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c), & i \in k^\Omega, \\ 0, & i \notin k^\Omega, \end{cases} \\
m_{ij}^{(0)} &= \left(\gamma \beta (1+e) + \frac{R\gamma a_0}{1+(R-1)\xi} \right) \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h), \\
l_{ij}^{(0)} &= -(1+e) \nabla \cdot (\mathbf{K}_h (\mathbf{C}^{(0)}, \mathbf{T}^{(0)}, \mathbf{h}^{(0)}) \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h)) + \frac{R\gamma a_1 \beta_1}{1+(R-1)\xi} \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h), \\
l_{ij}^{(01)} &= -(1+e) \nabla \cdot (\mathbf{K}_c \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c)), \quad l_{ij}^{(02)} = -(1+e) \nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{m}_{ij}^{(1)} &= \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h), \quad \tilde{m}_{ij}^{(2)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c), \quad \tilde{m}_{ij}^{(3)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T), \quad \tilde{m}_{ij}^{(4)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_N), \\ \tilde{f}_i^{(1)} &= h_0(\mathbf{Y}_i), \quad \tilde{f}_i^{(2)} = c_0(\mathbf{Y}_i), \quad \tilde{f}_i^{(3)} = T_0(\mathbf{Y}_i), \quad \tilde{f}_i^{(4)} = N_0(\mathbf{Y}_i), \quad i = \overline{1; k}, \quad r_{ji} = \|\mathbf{Y}_i - \mathbf{X}_j\|_2. \end{aligned}$$

3.4. Результати чисельних експериментів та аналіз впливу теплосолеперенесення на процеси фільтраційної консолідації ґрунтів

Програмна реалізація алгоритмів чисельного розв'язання крайових задач фільтраційної консолідації глинистих ґрунтів з урахуванням переносу солей в неізотермічному режимі методами радіальних базисних функцій, скінченних елементів та скінченних різниць виконана з використанням сучасних технологій об'єктно-орієнтованого та візуально-подійного програмування [65, 70, 193].

Для наближеного відшукування інтегралів при формуванні матриць методу скінченних елементів (у випадку змінних коефіцієнтів відповідних диференціальних рівнянь) використано квадратурні формули Гаусса [162]. Системи лінійних алгебричних рівнянь методу скінченних елементів розв'язано прямим методом Гаусса з вибором головного елемента. Системи лінійних алгебричних рівнянь методу РБФ розв'язувались методом найменших квадратів [139, 206, 281] з подальшим застосуванням методу Крейга [215].

Приклад 3.1.

1. Розмірність задачі: $R=2$. Коефіцієнт бічного тиску $\xi = 0.75$.

2. Область розв'язання задачі: Область фільтраційної консолідації масиву глинистого ґрунту прямокутної форми в основі гідротехнічної споруди зображена на рис. 3.4 при розмірах $l=10\text{м}$, $s=5\text{м}$, $b=20\text{м}$, $l_1=-10\text{м}$, $l_2=10\text{м}$.

3. Чисельний метод: Чисельні розрахунки проведено методом скінченних елементів на сітці з 812 лінійних трикутників.

4. Схема дискретизації в часі: Для дискретизації в часі використано схему предиктор–коректор з рівномірним кроком за часом $\tau = 30$ діб.

5. Вплив масоперенесення: Враховувався через явище хімічного осмосу зі сталими коефіцієнтами $k_{11}^{(c)} = k_{22}^{(c)} = 2.8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^5 / \text{кг} \cdot \text{доба}$, $k_{12}^{(c)} = k_{21}^{(c)} = 0 \text{ м}^5 / \text{кг} \cdot \text{доба}$ та через залежність коефіцієнта фільтрації від концентрації порового сольового розчину. Параметри масоперенесення: $D_{11} = D_{22} = 0.02 \text{ м}^2 / \text{доба}$, $D_{12} = D_{21} = 0 \text{ м}^2 / \text{доба}$.

6. Вплив теплоперенесення: Враховувався через явище термічного осмосу зі сталими коефіцієнтами $k_{11}^{(T)} = k_{22}^{(T)} = 2.8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{град} \cdot \text{доба}$ та через залежність коефіцієнта фільтрації від температури пористого середовища. Також враховувалось явище термодифузії з коефіцієнтом $D_{11}^{(T)} = D_{22}^{(T)} = 0.02 \text{ кг} / (\text{м} \cdot \text{доба} \cdot ^\circ \text{C})$. Параметри теплоперенесення: $c_\rho = 4,2 \text{ кДж} / \text{кг} \cdot \text{град}$, $\lambda_{11} = \lambda_{22} = 108 \text{ кДж} / \text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба}$, $c_T = 2137 \text{ кДж} / \text{м}^3 \cdot \text{град}$, $\rho = 1100 \text{ кг} / \text{м}^3$.

7. Вплив наявності солей в рідкій та твердій фазах на рівняння нерозривності: Не враховувалось.

8. Вплив термічного розширення фаз ґрунту: Не враховувалось.

9. Наявність газу: Не враховувалось. Ґрунт вважався двофазним при середньому значенні коефіцієнта пористості $e = 0.7$.

10. Залежність коефіцієнта фільтрації від надлишкових напорів, температури та концентрації солей в рідкій фазі: Від функції надлишкових напорів коефіцієнт фільтрації покладался незалежним. Для випадку постійного коефіцієнта фільтрації $k_{11}^{(h)} = k_{22}^{(h)} = k_{20} = 10^{-3} \frac{\text{м}}{\text{доба}}$. Залежність $k_{11}^{(h)} = k_{22}^{(h)} = k(c, T)$ визначалася шляхом апроксимації функції $k(c, T)$ радіальними базисними функціями [300, 340, 402] за експериментальними даними, що наведені в табл. 3.2. Для подальшого використання в числових експериментах проводилось масштабування на множник $k_{20} / k(0, 20)$, де згідно табл. 3.2 $k(0, 20) = 9.215 \frac{\text{м}}{\text{доба}}$.

11. Повзучість скелету ґрунту: Не враховувалась. Між сумою головних напружень та коефіцієнтом пористості приймалась лінійна залежність (2.9) у вигляді спрямленого відрізка компресійної кривої при $a = 5.12 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{Н}$.

12. Масообмінні процеси: Не враховувались і коефіцієнт швидкості масообміну $\gamma_1 = 0 \text{ доба}^{-1}$.

13. Граничні умови:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{DC} = (\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{L_1 O S L_2} = 0, \quad h|_{AD} = h|_{AL_1} = H_1(t), \quad h|_{BC} = h|_{L_2 B} = H_2(t),$$

$$\left. \frac{\partial c}{\partial x} \right|_{AD} = \left. \frac{\partial c}{\partial x} \right|_{BC} = \left. \frac{\partial c}{\partial y} \right|_{DC} = \left. \frac{\partial c}{\partial y} \right|_{L_1 O} = \left. \frac{\partial c}{\partial x} \right|_{OS} = \left. \frac{\partial c}{\partial y} \right|_{OL_2} = 0, \quad c|_{AL_1} = C_m, \quad c|_{L_2 B} = C_1(t),$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{AD} = \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{BC} = \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{DC} = \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{L_1 O} = \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{OS} = \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{OL_2} = 0, \quad T|_{AL_1} = T_1(t), \quad T|_{L_2 B} = T_2(t).$$

Функції $T_1(t)$ та $T_2(t)$ визначались з умови сезонних коливань температури,

причому $T_1(t) = T_2(t) = 17 + 13 \cos\left(\frac{\pi t}{180}\right)$ $T_{\max} = 30^\circ \text{C}$, $T_{\min} = 4^\circ \text{C}$. Також

$H_1(t) = 10 \text{ м}$, $H_2(t) = 0 \text{ м}$, $C_m = 350 \text{ г/літр}$, $C_1(t) = 8 \text{ г/літр}$.

14. Початкові умови: Початковий розподіл концентрації солей

$$c_0(x, y) = \begin{cases} C_m, & (x, y) \in AL_1; \\ C_1, & (x, y) \notin AL_1; \end{cases} \quad \text{та температури} \quad T_0(x, y) = \begin{cases} T_{\max}, & (x, y) \in AL_1 \cup L_2 B; \\ T_{\min}, & (x, y) \notin AL_1 \cup L_2 B. \end{cases}$$

Початковий розподіл напорів $h_0(x, y)$ визначався як розв'язок наступної крайової задачі

$$\Delta h_0(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega,$$

$$\left. \frac{\partial h_0}{\partial y} \right|_{DC} = 0, \quad h_0|_{AD} = h_0|_{AL_1} = H_1(0), \quad h_0|_{BC} = h_0|_{L_2 B} = H_2(0), \quad h_0|_{L_1 L_2} = q^{(h)}.$$

Тут $q^{(h)}$ – напір, який відповідає прикладеному навантаженню на масив ґрунту.

Зокрема, $q^{(h)} = \frac{q}{\gamma}$, де q – інтенсивність зовнішнього навантаження.

Табл. 3.2. Експериментальні значення коефіцієнта фільтрації, залежного від температури та концентрації солей

$T, ^\circ C$ $c, \text{г/л}$	4	20	30	40
0	4.147	9.215	11.519	18.430
10	4.667	10.370	12.963	20.740
20	5.702	12.670	15.838	25.340
30	6.532	14.515	18.144	29.030
40	6.843	15.205	19.006	30.410
50	6.976	15.500	19.375	31.000
60	5.185	11.520	14.400	23.040
70	4.458	9.905	12.381	19.810
80	4.147	9.215	11.519	18.430
90	3.940	8.755	10.944	17.510
100	3.630	8.065	10.081	16.130
110	3.423	7.605	9.506	15.210
120	3.110	6.910	8.638	13.820
130	2.903	6.450	8.063	12.900
140	2.799	6.220	7.775	12.440
150	2.592	5.760	7.200	11.520
160	2.075	4.610	5.763	9.220
170	2.025	4.500	5.625	9.000
180	1.980	4.400	5.500	8.800
190	1.935	4.300	5.375	8.600
200	1.913	4.250	5.313	8.500
210	1.890	4.200	5.250	8.400
220	1.800	4.000	5.000	8.000
230	1.755	3.900	4.875	7.800
240	1.665	3.700	4.625	7.400
250	1.620	3.600	4.500	7.200
260	1.530	3.400	4.250	6.800
270	1.485	3.300	4.125	6.600
280	1.395	3.100	3.875	6.200
290	1.350	3.000	3.750	6.000
300	1.305	2.900	3.625	5.800
310	1.215	2.700	3.375	5.400
320	1.170	2.600	3.250	5.200
330	1.080	2.400	3.000	4.800
340	0.990	2.200	2.750	4.400
350	0.900	2.000	2.500	4.000

15. Основні завдання чисельного експерименту:

Дослідити вплив тепломасоперенесення на розподіли надлишкових напорів в масиві ґрунту та порівняти їх з аналогічними розподілами без урахування впливу температури та розчинених солей.

На рис. 3.5, 3.6 наведено графіки розподілу різниці двох напорів $\Delta h(x, y, t) = h_1(x, y, t) - h_2(x, y, t)$ при $t = 720$ діб та $t = 900$ діб відповідно, де $h_1(x, y, t)$ – напір при нехтуванні термодифузіїю та термоосмосом; $h_2(x, y, t)$ – напір при та урахуванні термоосмосу та термодифузії (в обох випадках враховується вплив нормального хімічного осмосу). На рис. 3.7, 3.8 наведені аналогічні графіки розподілу різниці концентрації солей.

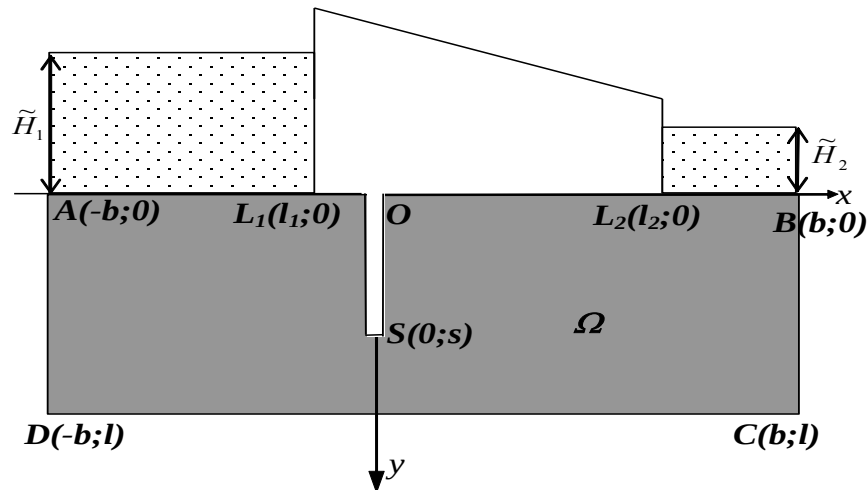


Рис. 3.4. Область Ω фільтраційної консолідації в прикладі 3.1.

Аналіз результатів проведених чисельних експериментів розрахунку полів напорів, концентрації солей та температури для даної задачі показав, що у випадку врахування термодифузії, термоосмосу та впливу переносу солей на процес фільтраційної консолідації зі сторони верхнього б'єфу та в області виходу фільтраційного потоку в нижньому б'єфі відбуваються коливання надлишкових напорів та концентрації солей, які залежать від сезонних коливань температури. Зі сторони нижнього б'єфу під гідроспородою за шпунтом надлишкові напори розсіюються повільніше, ніж у випадку фільтраційної консолідації без урахування впливу теплового фактору (див. рис. 3.5, 3.6). Щоб пояснити дані явища, потрібно звернути увагу на розподіл

температури та концентрації солей по області консолідації, а також на характер залежності коефіцієнта фільтрації від концентрації сольового розчину. При $t = 720$ діб в області верхнього та нижнього б'єфів $c_1(x, y, t) < c_2(x, y, t)$, де $c_1(x, y, t)$ – розподіл концентрації солей при нехтуванні термодифузії та термоосмосом; $c_2(x, y, t)$ – розподіл концентрації солей в неізотермічних умовах. Тобто, в даному випадку градієнт концентрації солей в неізотермічних умовах менший, аніж в ізотермічних. Хімічний осмос при зменшенні градієнта концентрації солей зменшує свій вплив, а тому напори в ізотермічних умовах в області верхнього та нижнього б'єфів розсіюються повільніше ніж в неізотермічних умовах. Якщо звернути увагу на розподіл температури (див. рис. 3.11), то аналогічний вплив на напірну функцію має і термічний осмос. Пояснення розподілу різниці двох напорів на рис.3.6 аналогічне попередньому, але в даному випадку градієнт концентрації солей більший при урахуванні неізотермічних умов, що в свою чергу пояснює нерівність $h_1(x, y, t) > h_2(x, y, t)$ в районі верхнього та нижнього б'єфів. Розподіл різниці концентрації солей (див. рис. 3.7, 3.8) в свою чергу пояснюється розподілом температури при (див. рис. 3.11, 3.12) та явищем термодифузії.

За шпунтом під гідротехнічною спорудою спостерігається відносно стабілізований розподіл поля температур і тут концентрація солей не перевищує 15г/літр (див. рис. 3.10). До того ж у випадку урахування теплового фактору концентрація солей в цій підобласті менша, аніж у випадку без його урахування (див. рис. 3.7, 3.8). Тому, зважаючи на залежність коефіцієнта фільтрації від концентрації солей (він є функцією зростаючою при $0 < c < 50\text{г/літр}$) надлишкові напори в даній підобласті при урахуванні неізотермічних умов розсіюються повільніше.

Наявність градієнта концентрації солей в поровій воді та градієнта температури в ґрунті порушує очікуване співвідношення напорів у ньому, що може призвести до негативних наслідків, пов'язаних зі стійкістю споруд, зведених на даних ґрунтах, як на етапі будівництва об'єкта, так і в процесі його

експлуатації. Зокрема, як показав даний приклад, сезонні коливання температури можуть спричиняти коливання напорів в районах верхнього та нижнього б'єфів.

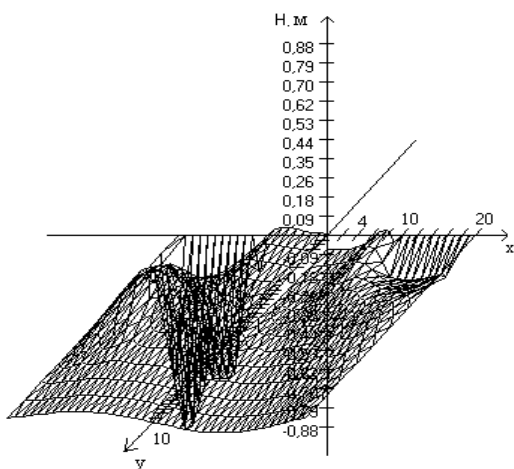


Рис. 3.5. Графік розподілу поля різниці двох напорів при $t=720$ діб

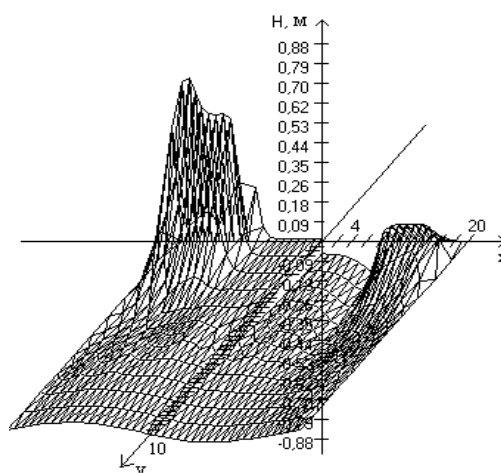


Рис. 3.6. Графік розподілу поля різниці двох напорів при $t=900$ діб

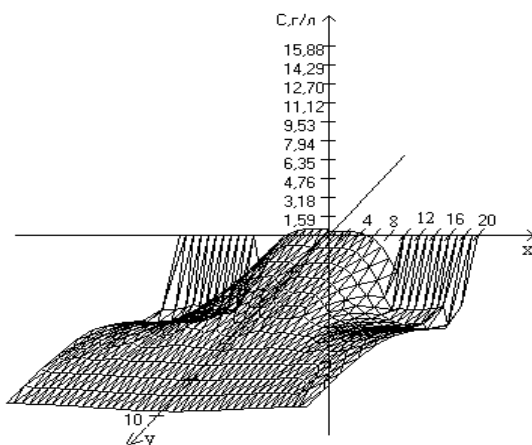


Рис. 3.7. Графік розподілу поля різниці концентрації солей при $t=720$ діб

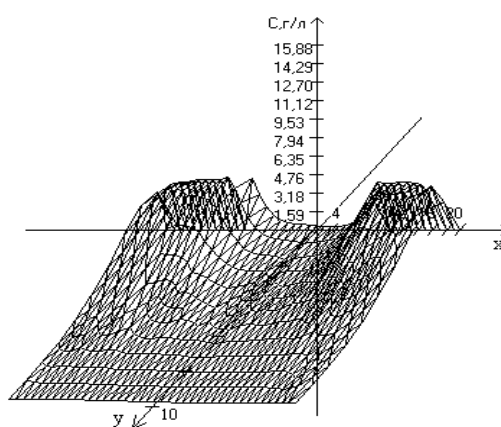


Рис. 3.8. Графік розподілу поля різниці концентрації солей при $t=900$ діб

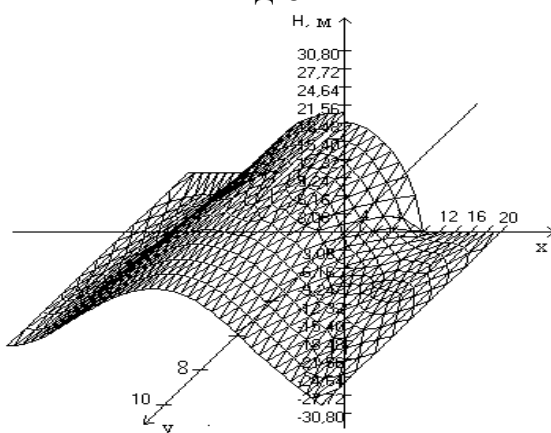


Рис. 3.9. Графік розподілу поля напорів при $t=900$ діб з урахуванням впливу теплосолеперенесення

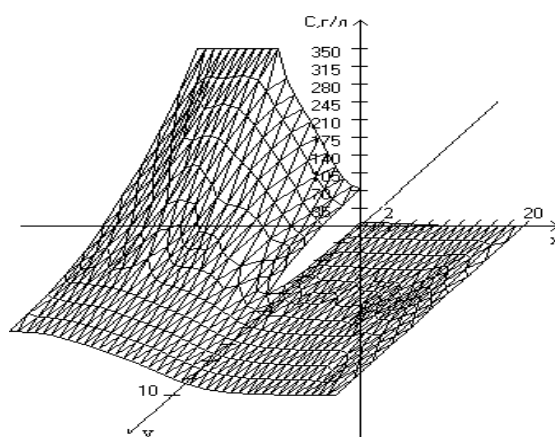


Рис. 3.10. Графік розподілу поля концентрації при $t=900$ діб з урахуванням впливу теплосолеперенесення

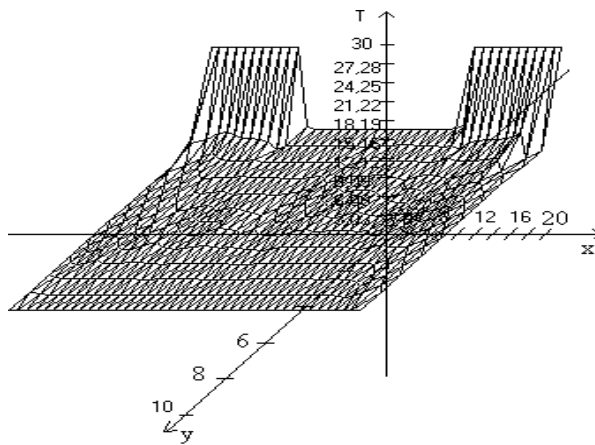


Рис. 3.11. Графік розподілу температури при $t=720$ діб з урахуванням впливу тепломасоперенесення

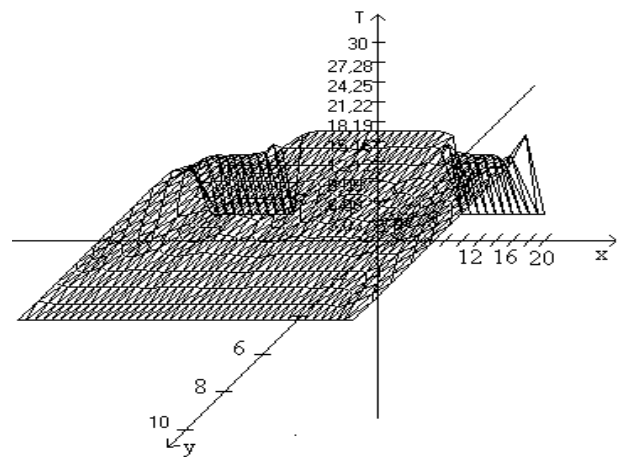


Рис. 3.12. Графік розподілу температури при $t=900$ діб з урахуванням впливу тепломасоперенесення

Приклад 3.2. Проведемо порівняльний аналіз скінченноелементних та скінченнорізницевих розв'язків задачі фільтраційної консолидації, розглянутої в прикладі 3.1. Для зручності запишемо диференціальні рівняння, які є складовими математичної моделі вказаної задачі, у вигляді

$$\frac{(1+e)(1+\xi)}{2\gamma a} \left[\frac{\partial}{\partial x} (k_{11}^{(h)}(c, T, h) \frac{\partial h}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (k_{22}^{(h)}(c, T, h) \frac{\partial h}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial x} (k_{11}^{(c)}(c) \frac{\partial c}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y} (k_{22}^{(c)}(c) \frac{\partial c}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial x} (k_{11}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y} (k_{22}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial y}) \right] + \frac{\partial h^*}{\partial t} + \frac{1}{2\gamma} \frac{\partial \Theta^*}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (3.73)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} (D_{11}(c, T, h) \frac{\partial c}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (D_{22}(c, T, h) \frac{\partial c}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial x} (D_{T11} \frac{\partial T}{\partial x}) + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} (D_{T22} \frac{\partial T}{\partial y}) - u_1 \frac{\partial c}{\partial x} - u_2 \frac{\partial c}{\partial y} = n \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t}, \end{aligned} \quad (3.74)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\lambda_{11} \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\lambda_{22} \frac{\partial T}{\partial y}) - \rho c_\rho u_1 \frac{\partial T}{\partial x} - \rho c_\rho u_2 \frac{\partial T}{\partial y} = c_T \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (3.75)$$

Дискретизуємо область $\bar{Q}_{t_0}$ рівномірною сіткою $\bar{Q}^{(2m_1, m_2, n_1)} = [-m_1 h_1; m_1 h_1] \times [0; m_2 h_2] \times [0; n_1 \tau]$ з кроками h_1 , h_2 та τ відповідно по змінних x , y та часу t , де $2m_1$, m_2 , n_1 – кількість кроків по просторових змінних та часу відповідно.

Для відшукування наближеного розв'язку відповідної двовимірної крайової задачі застосуємо локально–одновимірну схему О.А.Самарського. Для дискретизації рівняння (3.73) використаємо неявну різницеву схему, а для рівнянь (3.74), (3.75) – монотонну різницеву схему О.А.Самарського [242, 244]. З цією метою диференціальне рівняння (3.73) подамо у вигляді системи одновимірних рівнянь

$$\frac{(1+e)(1+\xi)}{2\gamma a} \left[\frac{\partial}{\partial x} (k_{11}^{(h)}(c, T, h) \frac{\partial h}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial x} (k_{11}^{(c)}(c) \frac{\partial c}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial x} (k_{11}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x}) \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial h^*}{\partial t} + \frac{1}{4\gamma} \frac{\partial \Theta^*}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial t},$$

$$\frac{(1+e)(1+\xi)}{2\gamma a} \left[\frac{\partial}{\partial y} (k_{22}^{(h)}(c, T, h) \frac{\partial h}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial y} (k_{22}^{(c)}(c) \frac{\partial c}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial y} (k_{22}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial y}) \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial h^*}{\partial t} + \frac{1}{4\gamma} \frac{\partial \Theta^*}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial t}.$$

В результаті отримуємо скінченнорізницевий аналог диференціального рівняння (3.73) у вигляді системи різницевих рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{h_{i_1, i_2}^{(j+0,5)} - h_{i_1, i_2}^{(j)}}{\tau} = \frac{(1+e)(1+\xi)}{2\gamma a h_1} & \left[\left((a_1)_{i_1+1, i_2}^{(j)} \frac{h_{i_1+1, i_2}^{(j+0,5)} - h_{i_1, i_2}^{(j+0,5)}}{h_1} - (a_1)_{i_1, i_2}^{(j)} \frac{h_{i_1, i_2}^{(j+0,5)} - h_{i_1-1, i_2}^{(j+0,5)}}{h_1} \right) - \right. \\ & - \left((b_1)_{i_1+1, i_2}^{(j)} \frac{c_{i_1+1, i_2}^{(j+0,5)} - c_{i_1, i_2}^{(j+0,5)}}{h_1} - (b_1)_{i_1, i_2}^{(j)} \frac{c_{i_1, i_2}^{(j+0,5)} - c_{i_1-1, i_2}^{(j+0,5)}}{h_1} \right) - \left((z_1)_{i_1+1, i_2}^{(j)} \frac{T_{i_1+1, i_2}^{(j+0,5)} - T_{i_1, i_2}^{(j+0,5)}}{h_1} - \right. \\ & \left. \left. - (z_1)_{i_1, i_2}^{(j)} \frac{T_{i_1, i_2}^{(j+0,5)} - T_{i_1-1, i_2}^{(j+0,5)}}{h_1} \right) \right] + f_{i_1, i_2}^{(j+0,5)}, \end{aligned} \quad (3.76)$$

$$\begin{aligned} \frac{h_{i_1, i_2}^{(j+1)} - h_{i_1, i_2}^{(j+0,5)}}{\tau} = \frac{(1+e)(1+\xi)}{2\gamma a h_2} & \left[\left((a_2)_{i_1, i_2+1}^{(j+1)} \frac{h_{i_1, i_2+1}^{(j+1)} - h_{i_1, i_2}^{(j+1)}}{h_2} - (a_2)_{i_1, i_2}^{(j+1)} \frac{h_{i_1, i_2}^{(j+1)} - h_{i_1, i_2-1}^{(j+1)}}{h_2} \right) - \right. \\ & - \left((b_2)_{i_1, i_2+1}^{(j+1)} \frac{c_{i_1, i_2+1}^{(j+1)} - c_{i_1, i_2}^{(j+1)}}{h_2} - (b_2)_{i_1, i_2}^{(j+1)} \frac{c_{i_1, i_2}^{(j+1)} - c_{i_1, i_2-1}^{(j+1)}}{h_2} \right) - \left((z_2)_{i_1, i_2+1}^{(j+1)} \frac{T_{i_1, i_2+1}^{(j+1)} - T_{i_1, i_2}^{(j+1)}}{h_2} - \right. \\ & \left. \left. - (z_2)_{i_1, i_2}^{(j+1)} \frac{T_{i_1, i_2}^{(j+1)} - T_{i_1, i_2-1}^{(j+1)}}{h_2} \right) \right] + f_{i_1, i_2}^{(j+1)}, \end{aligned} \quad (3.77)$$

$$i_1 = \overline{-m_1 + 1, m_1 - 1}, \quad i_2 = \overline{1, m_2 - 1}, \quad j = \overline{0, n_1 - 1},$$

де

$$\begin{aligned}
 (a_1)_{i_1, i_2}^{(j)} &= \frac{1}{2} \left((k_{11}^{(h)})_{i_1, i_2}^{(j)} + (k_{11}^{(h)})_{i_1-1, i_2}^{(j)} \right), \quad (a_2)_{i_1, i_2}^{(j)} = \frac{1}{2} \left((k_{22}^{(h)})_{i_1, i_2}^{(j)} + (k_{22}^{(h)})_{i_1, i_2-1}^{(j)} \right), \\
 (b_1)_{i_1, i_2}^{(j)} &= \frac{1}{2} \left((k_{11}^{(c)})_{i_1, i_2}^{(j)} + (k_{11}^{(c)})_{i_1-1, i_2}^{(j)} \right), \quad (b_2)_{i_1, i_2}^{(j)} = \frac{1}{2} \left((k_{22}^{(c)})_{i_1, i_2}^{(j)} + (k_{22}^{(c)})_{i_1, i_2-1}^{(j)} \right), \\
 (z_1)_{i_1, i_2}^{(j)} &= \frac{1}{2} \left((k_{11}^{(T)})_{i_1, i_2}^{(j)} + (k_{11}^{(T)})_{i_1-1, i_2}^{(j)} \right), \quad (z_2)_{i_1, i_2}^{(j)} = \frac{1}{2} \left((k_{22}^{(T)})_{i_1, i_2}^{(j)} + (k_{22}^{(T)})_{i_1, i_2-1}^{(j)} \right), \\
 f_{i_1, i_2}^{(j)} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h^*}{\partial t} \Big|_{x_{i_1} y_{i_2}}^{t_j} + \frac{1}{2\gamma} \frac{\partial \Theta^*}{\partial t} \Big|_{x_{i_2} y_{i_2}}^{t_{j+1}} \right).
 \end{aligned}$$

Диференціальне рівняння (3.74) подамо у вигляді системи одновимірних рівнянь

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} (D_{11}(c, T, h) \frac{\partial c}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial x} (D_{r11} \frac{\partial T}{\partial x}) - u_1 \frac{\partial c}{\partial x} &= \frac{n}{2} \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial N}{\partial t}, \\
 \frac{\partial}{\partial y} (D_{22}(c, T, h) \frac{\partial c}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial y} (D_{r22} \frac{\partial T}{\partial y}) - u_2 \frac{\partial c}{\partial y} &= \frac{n}{2} \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial N}{\partial t}.
 \end{aligned}$$

Тоді скінченнорізницеий аналог диференціального рівняння (3.74) запишеться у вигляді наступної системи різницевих рівнянь:

$$\begin{aligned}
 & n \frac{c_{i_1, i_2}^{(j+0,5)} - c_{i_1, i_2}^{(j)}}{\tau} + \frac{N_{i_1, i_2}^{(j+0,5)} - N_{i_1, i_2}^{(j)}}{\tau} = \\
 &= \frac{(\eta_1)_{i_1, i_2}^{(j)}}{h_1} \left((d_1)_{i_1+1, i_2}^{(j)} \frac{c_{i_1+1, i_2}^{(j+0,5)} - c_{i_1, i_2}^{(j+0,5)}}{h_1} - (d_1)_{i_1, i_2}^{(j)} \frac{c_{i_1, i_2}^{(j+0,5)} - c_{i_1-1, i_2}^{(j+0,5)}}{h_1} \right) + \\
 &+ \frac{1}{h_1} \left((d_{T_1})_{i_1+1, i_2}^{(j)} \frac{T_{i_1+1, i_2}^{(j+0,5)} - T_{i_1, i_2}^{(j+0,5)}}{h_1} - (d_{T_1})_{i_1, i_2}^{(j)} \frac{T_{i_1, i_2}^{(j+0,5)} - T_{i_1-1, i_2}^{(j+0,5)}}{h_1} \right) + \\
 &+ \frac{(u_1^+)_{i_1, i_2}^{(j)}}{(D_{11})_{i_1, i_2}^{(j)}} \cdot (d_1)_{i_1+1, i_2}^{(j)} \frac{c_{i_1+1, i_2}^{(j+0,5)} - c_{i_1, i_2}^{(j+0,5)}}{h_1} + \frac{(u_1^-)_{i_1, i_2}^{(j)}}{(D_{11})_{i_1, i_2}^{(j)}} \cdot (d_1)_{i_1, i_2}^{(j)} \frac{c_{i_1, i_2}^{(j+0,5)} - c_{i_1-1, i_2}^{(j+0,5)}}{h_1},
 \end{aligned} \tag{3.78}$$

$$\begin{aligned}
 & n \frac{c_{i_1, i_2}^{(j+1)} - c_{i_1, i_2}^{(j+0,5)}}{\tau} + \frac{N_{i_1, i_2}^{(j+1)} - N_{i_1, i_2}^{(j+0,5)}}{\tau} = \\
 &= \frac{(\eta_2)_{i_1, i_2}^{(j)}}{h_2} \left((d_2)_{i_1, i_2+1}^{(j)} \frac{c_{i_1, i_2+1}^{(j+1)} - c_{i_1, i_2}^{(j+1)}}{h_2} - (d_2)_{i_1, i_2}^{(j)} \frac{c_{i_1, i_2}^{(j+1)} - c_{i_1, i_2-1}^{(j+1)}}{h_2} \right) +
 \end{aligned} \tag{3.79}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{h_2} \left((d_{T_2})_{i_1, i_2+1}^{(j)} \frac{T_{i_1, i_2+1}^{(j+1)} - T_{i_1, i_2}^{(j+1)}}{h_2} - (d_{T_2})_{i_1, i_2}^{(j)} \frac{T_{i_1, i_2}^{(j+1)} - T_{i_1, i_2-1}^{(j+1)}}{h_2} \right) + \\
& + \frac{(u_2^+)_{i_1, i_2}^{(j)}}{(D_{22})_{i_1, i_2}^{(j)}} \cdot (d_2)_{i_1, i_2+1}^{(j)} \frac{c_{i_1, i_2+1}^{(j+1)} - c_{i_1, i_2}^{(j+1)}}{h_2} + \frac{(u_2^-)_{i_1, i_2}^{(j)}}{(D_{22})_{i_1, i_2}^{(j)}} \cdot (d_2)_{i_1, i_2}^{(j)} \frac{c_{i_1, i_2}^{(j+1)} - c_{i_1, i_2-1}^{(j+1)}}{h_2},
\end{aligned}$$

$$i_1 = \overline{-m_1 + 1, m_1 - 1}, i_2 = \overline{1, m_2 - 1}, j = \overline{0, n_1 - 1},$$

де

$$(d_1)_{i_1, i_2}^{(j)} = \frac{1}{2} \left((D_{11})_{i_1, i_2}^{(j)} + (D_{11})_{i_1-1, i_2}^{(j)} \right), \quad (d_2)_{i_1, i_2}^{(j)} = \frac{1}{2} \left((D_{22})_{i_1, i_2}^{(j)} + (D_{22})_{i_1, i_2-1}^{(j)} \right),$$

$$(d_{T_1})_{i_1, i_2}^{(j)} = \frac{1}{2} \left((D_{T11})_{i_1, i_2}^{(j)} + (D_{T11})_{i_1-1, i_2}^{(j)} \right), \quad (d_{T_2})_{i_1, i_2}^{(j)} = \frac{1}{2} \left((D_{T22})_{i_1, i_2}^{(j)} + (D_{T22})_{i_1, i_2-1}^{(j)} \right),$$

$$\begin{aligned}
(\eta_{i_3})_{i_1, i_2}^{(j)} &= \frac{1}{1 + \frac{h_{i_3} |(u_{i_3})_{i_1, i_2}^{(j)}|}{2(D_{i_3 i_3})_{i_1, i_2}^{(j)}}} = 1 - \frac{h_{i_3} |(u_{i_3})_{i_1, i_2}^{(j)}|}{2(D_{i_3 i_3})_{i_1, i_2}^{(j)}} + O(h_{i_3}^2), \quad (u_{i_3}^+)_{i_1, i_2}^{(j)} = \frac{-(u_{i_3})_{i_1, i_2}^{(j)} + |(u_{i_3})_{i_1, i_2}^{(j)}|}{2} \geq 0, \\
(u_{i_3}^-)_{i_1, i_2}^{(j)} &= \frac{-(u_{i_3})_{i_1, i_2}^{(j)} - |(u_{i_3})_{i_1, i_2}^{(j)}|}{2} \leq 0, \quad i_3 = 1, 2.
\end{aligned}$$

Диференціальне рівняння (3.75) подамо у вигляді системи одновимірних рівнянь

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_{11} \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \rho c_{\rho} u_1 \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{c_T}{2} \frac{\partial T}{\partial t}, \\
\frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_{22} \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \rho c_{\rho} u_2 \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{c_T}{2} \frac{\partial T}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Тоді скінченнорізницевий аналог диференціального рівняння (3.75) запишеться у вигляді наступної системи різницевих рівнянь:

$$\begin{aligned}
c_T \frac{T_{i_1, i_2}^{(j+0,5)} - T_{i_1, i_2}^{(j)}}{\tau} &= \frac{(\bar{\eta}_1)_{i_1, i_2}^{(j)}}{h_1} \left((\bar{\lambda}_1)_{i_1+1, i_2}^{(j)} \frac{T_{i_1+1, i_2}^{(j+0,5)} - T_{i_1, i_2}^{(j+0,5)}}{h_1} - (\bar{\lambda}_1)_{i_1, i_2}^{(j)} \frac{T_{i_1, i_2}^{(j+0,5)} - T_{i_1-1, i_2}^{(j+0,5)}}{h_1} \right) + \\
&+ \rho c_{\rho} \left(\frac{(u_1^+)_{i_1, i_2}^{(j)}}{(\lambda_{11})_{i_1, i_2}^{(j)}} \cdot (\bar{\lambda}_1)_{i_1+1, i_2}^{(j)} \frac{T_{i_1+1, i_2}^{(j+0,5)} - T_{i_1, i_2}^{(j+0,5)}}{h_1} + \frac{(u_1^-)_{i_1, i_2}^{(j)}}{(\lambda_{11})_{i_1, i_2}^{(j)}} \cdot (\bar{\lambda}_1)_{i_1, i_2}^{(j)} \frac{T_{i_1, i_2}^{(j+0,5)} - T_{i_1-1, i_2}^{(j+0,5)}}{h_1} \right), \quad (3.80)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_T \frac{T_{i_1, i_2}^{(j+1)} - T_{i_1, i_2}^{(j+0,5)}}{\tau} &= \frac{(\bar{\eta}_2)_{i_1, i_2}^{(j)}}{h_2} \left((\bar{\lambda}_2)_{i_1, i_2+1}^{(j)} \frac{T_{i_1, i_2+1}^{(j+1)} - T_{i_1, i_2}^{(j+1)}}{h_2} - (\bar{\lambda}_2)_{i_1, i_2}^{(j)} \frac{T_{i_1, i_2}^{(j+1)} - T_{i_1, i_2-1}^{(j+1)}}{h_2} \right) + \\
&+ \rho c_\rho \left(\frac{(u_2^+)_{i_1, i_2}^{(j)}}{(\lambda_{22})_{i_1, i_2}^{(j)}} \cdot (\bar{\lambda}_2)_{i_1, i_2+1}^{(j)} \frac{T_{i_1, i_2+1}^{(j+1)} - T_{i_1, i_2}^{(j+1)}}{h_2} + \frac{(u_2^-)_{i_1, i_2}^{(j)}}{(\lambda_{22})_{i_1, i_2}^{(j)}} \cdot (\bar{\lambda}_2)_{i_1, i_2}^{(j)} \frac{T_{i_1, i_2}^{(j+1)} - T_{i_1, i_2-1}^{(j+1)}}{h_2} \right), \quad (3.81)
\end{aligned}$$

$i_1 = \overline{-m_1 + 1, m_1 - 1}$, $i_2 = \overline{1, m_2 - 1}$, $j = \overline{0, n_1 - 1}$, де

$$(\bar{\lambda}_1)_{i_1, i_2}^{(j)} = \frac{1}{2} \left((\lambda_{11})_{i_1, i_2}^{(j)} + (\lambda_{11})_{i_1-1, i_2}^{(j)} \right), \quad (\bar{\lambda}_2)_{i_1, i_2}^{(j)} = \frac{1}{2} \left((\lambda_{22})_{i_1, i_2}^{(j)} + (\lambda_{22})_{i_1, i_2-1}^{(j)} \right),$$

$$(\bar{\eta}_{i_3})_{i_1, i_2}^{(j)} = \frac{1}{1 + \frac{h_{i_3} \rho c_\rho |(u_{i_3})_{i_1, i_2}^{(j)}|}{2(\lambda_{i_3 i_3})_{i_1, i_2}^{(j)}}} = 1 - \frac{h_{i_3} \rho c_\rho |(u_{i_3})_{i_1, i_2}^{(j)}|}{2(\lambda_{i_3 i_3})_{i_1, i_2}^{(j)}} + O(h_{i_3}^2), \quad i_3 = 1, 2.$$

Для значень компонент швидкості фільтрації маємо

$$(u_1)_{i_1, i_2}^{(j)} = -(k_{11}^{(h)})_{i_1, i_2}^{(j)} \frac{h_{i_1+1, i_2}^{(j)} - h_{i_1-1, i_2}^{(j)}}{2h_1} + (k_{11}^{(c)})_{i_1, i_2}^{(j)} \frac{c_{i_1+1, i_2}^{(j)} - c_{i_1-1, i_2}^{(j)}}{2h_1} + (k_{11}^{(T)})_{i_1, i_2}^{(j)} \frac{T_{i_1+1, i_2}^{(j)} - T_{i_1-1, i_2}^{(j)}}{2h_1},$$

$$(u_2)_{i_1, i_2}^{(j)} = -(k_{22}^{(h)})_{i_1, i_2}^{(j)} \frac{h_{i_1, i_2+1}^{(j)} - h_{i_1, i_2-1}^{(j)}}{2h_2} + (k_{22}^{(c)})_{i_1, i_2}^{(j)} \frac{c_{i_1, i_2+1}^{(j)} - c_{i_1, i_2-1}^{(j)}}{2h_2} + (k_{22}^{(T)})_{i_1, i_2}^{(j)} \frac{T_{i_1, i_2+1}^{(j)} - T_{i_1, i_2-1}^{(j)}}{2h_2},$$

$i_1 = \overline{-m_1 + 1, m_1 - 1}$, $i_2 = \overline{1, m_2 - 1}$, $j = \overline{0, n_1}$.

Для відшукування розв'язків систем різницевих рівнянь (3.76)–(3.81) використовувався метод прогонки [242].

Детальне розв'язання вказаних крайових задач методом скінченних різниць та теореми, які встановлюють точність отриманих наближених розв'язків, наведено в монографії [65].

Скінченнорізницеві обчислення проведено на сітці з рівномірним кроком $h_1 = h_2 = 1$ м. Скінченноелементні розв'язки отримано на сітці з 812 трикутних скінченних елементів при квадратичних базисних функціях.

На рис. 3.13–3.15 наведено графіки розподілу різниці двох напорів $|h_1(x, y, t) - h_2(x, y, t)|$, концентрації солей $|c_1(x, y, t) - c_2(x, y, t)|$ та температури $|T_1(x, y, t) - T_2(x, y, t)|$ відповідно, де $h_1(x, y, t)$, $c_1(x, y, t)$, $T_1(x, y, t)$ – наближені

розв'язки, отримані методом скінченних різниць, а $h_2(x, y, t)$, $c_2(x, y, t)$, $T_2(x, y, t)$ – методом скінченних елементів.

Як видно з рис. 3.13–3.15 найбільші похибки між розв'язками, отриманими двома чисельними методами досягаються в областях великих градієнтів розглядуваних фізичних полів, а також в околах кутових точок L_1 та L_2 прикладення навантаження. Однак, зважаючи на нелінійний характер задачі, отримані величини похибок можна вважати цілком прийнятними. Отже, зважаючи на недостатність теоретичних досліджень точності наближених розв'язків, отриманих методом скінченних елементів із використанням стабілізації за протипотоковою схемою Петрова–Гальоркіна, дані результати засвідчують їх прийнятну точність.

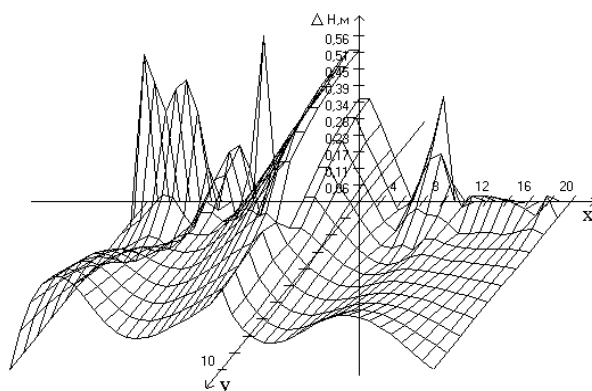


Рис. 3.13. Графік розподілу поля різниці двох напорів при $t=720$ діб.

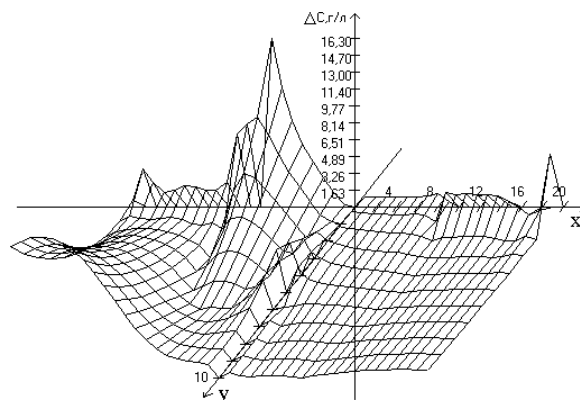


Рис. 3.14. Графік розподілу поля різниці концентрації солей при $t=720$ діб.

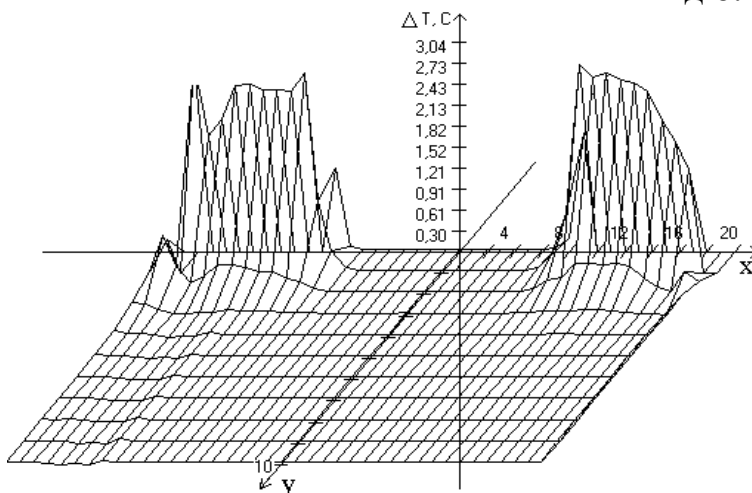


Рис. 3.15. Графік розподілу поля різниці температури при $t=720$ діб.

Приклад 3.3.

1. Розмірність задачі: $R=1$.

2. Область розв'язання задачі: Область фільтраційної консолідації масиву глинистого ґрунту товщиною $l = 20$ м (див. рис. 3.1.).

3. Чисельний метод: Чисельні розрахунки проведено методом скінченних елементів при лінійних та квадратичних базисних функціях з довжиною скінченного елемента 0,5 м.

4. Схема дискретизації в часі: Для дискретизації в часі використано схему предиктор–коректор з рівномірним кроком за часом $\tau = 30$ діб.

5. Вплив масоперенесення: Враховувався через явище хімічного осмосу зі сталим коефіцієнтом $k_{11}^{(c)} = 2.8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^5/\text{кг} \cdot \text{доба}$ та через залежність коефіцієнта фільтрації від концентрації порового сольового розчину. Параметри масоперенесення: $D_{11} = 0.002 \text{ м}^2/\text{доба}$.

6. Вплив теплоперенесення: Не враховувався.

7. Вплив наявності солей в рідкій та твердій фазах на рівняння нерозривності: Враховувався при густині солей в твердій фазі $\rho_s = 2 \cdot 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3$.

8. Вплив термічного розширення фаз ґрунту: Не враховувалось.

9. Наявність газу: Не враховувалось. Ґрунт вважався двофазним при середньому значенні коефіцієнта пористості $e = 0.7$ та пористості $n = 0.4$.

10. Залежність коефіцієнта фільтрації від надлишкових напорів, температури та концентрації солей в рідкій фазі: Від функції надлишкових напорів коефіцієнт фільтрації покладался незалежним. Для випадку постійного коефіцієнта фільтрації $k_{11}^{(h)} = k_{20} = 10^{-3} \frac{\text{м}}{\text{доба}}$. Залежність $k_{11}^{(h)} = k(c)$ визначалася шляхом апроксимації функції $k(c)$ радіальними базисними функціями [300, 340, 402] за

експериментальними даними, що наведені в табл. 3.2 при $T = 20^{\circ}\text{C}$. Для подальшого використання в числових експериментах проводилось масштабування на множник $k_{20}/k(0)$, де згідно табл. 3.2 $k(0) = 9.215 \frac{\text{м}}{\text{доба}}$.

11. Повзучість скелету ґрунту: Не враховувалась. Між сумою головних напружень та коефіцієнтом пористості приймалась лінійна залежність (2.9) у вигляді спрямленого відрізка компресійної кривої при $a = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{Н}$. В узагальненому законі Дарсі–Герсегова знехтувано швидкістю руху твердих частинок ґрунту.

12. М а с о о б м і н н і п р о ц е с и: Враховувались при коефіцієнті швидкості масообміну $\gamma_1 = 6.5 \cdot 10^{-5} \text{ доба}^{-1}$ та $\chi = 1/2$, що відповідає об'ємному засоленню ґрунту, при якому солі у вигляді гранул різної форми та об'єму дисперсно розсіяні в ґрунті [101, 166].

13. Г р а н и ч н і у м о в и:

$$h|_{x=0} = 0, \mathbf{u}|_{x=l} = 0, c|_{x=0} = C_m, \mathbf{q}_c|_{x=l} = 0,$$

Тобто, верхня межа масиву ґрунту вважалась дренажною і змоченою сольовим розчином з концентрацією граничного насичення $C_m = 350 \text{ г/літр}$, а нижня межа – непроникною. Причому, непроникність зумовлюється заляганням кам'яного пласта (або ґрунту з набагато меншим коефіцієнтом фільтрації).

14. П о ч а т к о в і у м о в и: Початковий розподіл концентрації солей

$$c_0(x) = \begin{cases} C_m, & x = 0; \\ C_1, & x \neq 0; \end{cases} \quad C_1 = 8 \text{ г/літр}. \text{ Вважалось, що на верхню межу ґрунту}$$

миттєво прикладається зовнішнє навантаження інтенсивністю

$$q = 20 \cdot 10^4 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{доба}^2}. \text{ Тому початковий розподіл напорів } h_0(x) \text{ визначався}$$

згідно формули (2.28) при $\omega = 1$ та $\gamma = 10^4 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{доба}^2}$. Початковий розподіл

концентрації солей в твердій фазі визначався згідно формули

$$N_0(x) = 240 \left(-\left(\frac{x}{l} \right)^2 + \frac{x}{l} \right) + 40.$$

15. Основні завдання чисельного експерименту: Вияснення впливу урахування наявності солей в рідкій та твердій фазах на процес фільтраційної консолидації.

Як видно з рис. 3.16 без врахування масообмінних процесів, при змінному коефіцієнті фільтрації надлишкові напори зменшуються і з часом стають меншими нуля. Тобто ґрунт переходить у стан переущільнення. Рис. 3.17 демонструє зміну надлишкових напорів, враховуючи масообмінні процеси. В порівнянні з попереднім графіком можна зробити висновок, що наявність солей в твердій уповільнює розсіювання надлишкових напорів. Це пояснюється тим, що при розчиненні кристаликів солі об'єм порової рідини збільшується, а отже і збільшується тиск, який вона чинить на скелет ґрунту.

На рис. 3.18 зображена різниця напорів з рис. 3.17 та рис. 3.16. Видно, що напори з врахуванням масообміну солей переважають напори без врахування наявності солей в твердій фазі.

Як видно з рис. 3.19 концентрація солей в твердій фазі в одиниці об'єму пористого середовища зменшується з часом. Тобто це означає, що з часом кристалики солі, присутні у порах ґрунту, розчиняться. Рисунок 3.20 демонструє розподіл концентрації солей в рідкій фазі.

Отже, урахування масообмінних процесів призводить до уповільнення розсіювання надлишкових напорів.

Приклад 3.4.

1. Розмірність задачі: $R=2$. Коефіцієнт бічного тиску $\xi = 0.75$.

2. Область розв'язання задачі: Область фільтраційної консолидації масиву глинистого ґрунту товщиною $l=10$ м (див. рис. 3.21) при $b=10$ м, $d_1 = -5$ м, $d_2 = 5$ м.

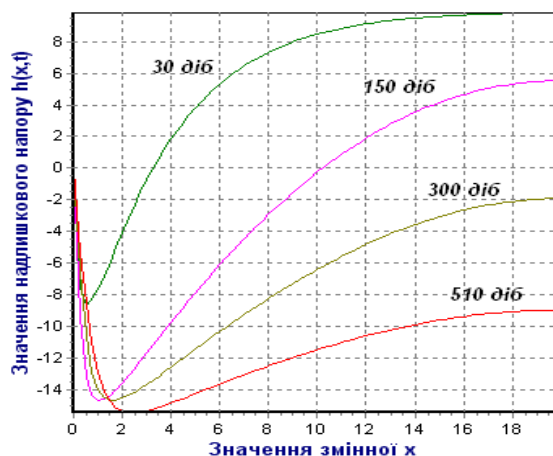


Рис. 3.16. Графіки розподілу поля надлишкових напорів при $\varepsilon = 0$, $k_{11}^{(c)} \neq 0$, $k_{11}^{(h)} = k(c)$.

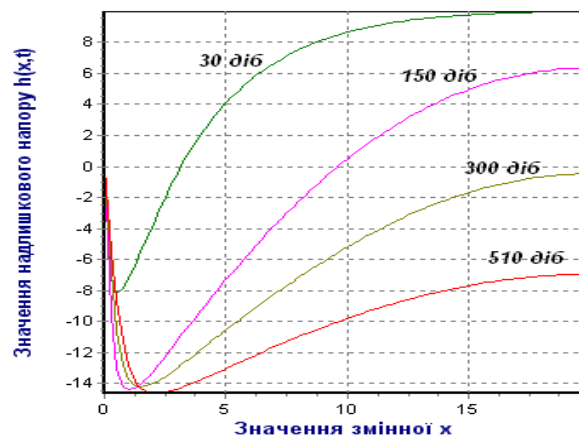


Рис. 3.17. Графіки розподілу поля надлишкових напорів при $\varepsilon = 1$, $k_{11}^{(c)} \neq 0$, $k_{11}^{(h)} = k(c)$.

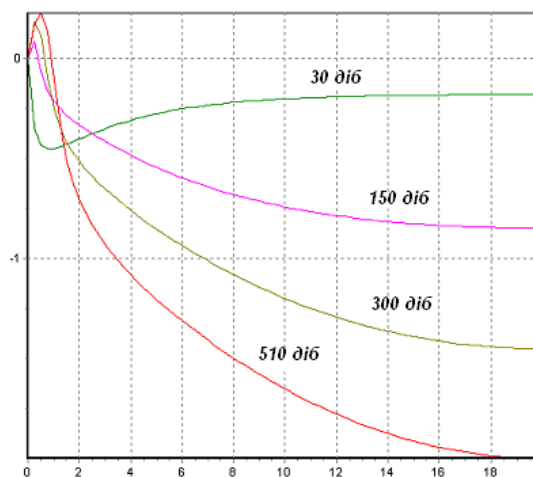


Рис. 3.18. Графік різниці між полями надлишкових напорів, зображеними на рис.3.16 та рис.3.17.

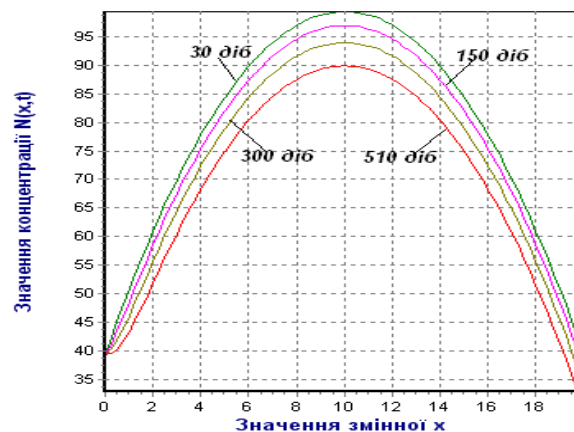


Рис. 3.19. Розподіл поля концентрації $N(x,t)$ при $\varepsilon = 1$, $k_{11}^{(c)} \neq 0$, $k_{11}^{(h)} = k(c)$.

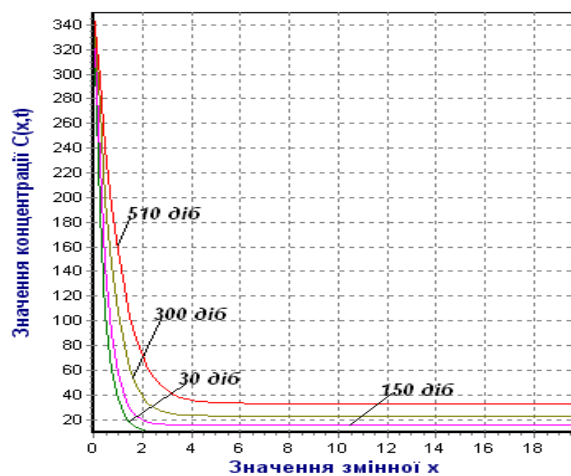


Рис. 3.20. Розподіл поля концентрації $c(x,t)$ сольового розчину при $\varepsilon = 1$, $k_{11}^{(c)} \neq 0$, $k_{11}^{(h)} = k(c)$.

3. Чисельний метод: Чисельні розрахунки проведено методом скінченних різниць при кроках різницевої сітки $h_1 = h_2 = 0,5 \text{ м}$.

4. Схема дискретизації в часі: Для дискретизації в часі використано повністю неявну різницеву схему з рівномірним кроком за часом $\tau = 30 \text{ діб}$.

5. Вплив масоперенесення: Враховувався через явище хімічного осмосу зі сталими коефіцієнтами $k_{11}^{(c)} = k_{22}^{(c)} = 2.8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^5 / \text{кг} \cdot \text{доба}$, $k_{12}^{(c)} = k_{21}^{(c)} = 0 \text{ м}^5 / \text{кг} \cdot \text{доба}$ та через залежність коефіцієнта фільтрації від концентрації порового сольового розчину. Параметри масоперенесення: $D_{11} = D_{22} = 0.002 \text{ м}^2 / \text{доба}$, $D_{21} = D_{12} = 0 \text{ м}^2 / \text{доба}$.

6. Вплив теплоперенесення: Не враховувався.

7. Вплив наявності солей в рідкій та твердій фазах на рівняння нерозривності: Враховувався при густині солей в твердій фазі $\rho_s = 2 \cdot 10^3 \text{ кг} / \text{м}^3$.

8. Вплив термічного розширення фаз ґрунту: Не враховувалось.

9. Наявність газу: Не враховувалось. Ґрунт вважався двофазним при середньому значенні коефіцієнта пористості $e = 0.7$ та пористості $n = 0.4$.

10. Залежність коефіцієнта фільтрації від надлишкових напорів, температури та концентрації солей в рідкій фазі: Від функції надлишкових напорів коефіцієнт фільтрації покладался незалежним. Для випадку постійного коефіцієнта фільтрації $k_{11}^{(h)} = k_{22}^{(h)} = k_{20} = 10^{-3} \frac{\text{м}}{\text{доба}}$. Залежність $k_{11}^{(h)} = k_{22}^{(h)} = k(c)$ визначалася шляхом апроксимації функції $k(c)$ радіальними базисними функціями аналогічно прикладу 3.3.

11. Повзучість скелету ґрунту: Не враховувалась. Між сумою головних напружень та коефіцієнтом пористості приймалась лінійна залежність (2.9) у вигляді спрямленого відрізка компресійної кривої при

$a = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{Н}$. В узагальненому законі Дарсі–Герсевича знехтувано швидкістю руху твердих частинок ґрунту.

12. М а с о о б м і н н і п р о ц е с и: Враховувались при коефіцієнті швидкості масообміну $\gamma_1 = 6,5 \cdot 10^{-4} \text{ доба}^{-1}$ та $\chi = \frac{1}{2}$, що відповідає об'ємному засоленню ґрунту, при якому солі у вигляді гранул різної форми та об'єму дисперсно розсіяні в ґрунті [101, 166].

13. Г р а н и ч н і у м о в и:

$$h|_{DC} = H_1, \quad h|_{AB} = H_2, \quad h|_{DL_1 \cup L_2 B} = H_3, \quad u_y|_{L_1 L_2} = 0, \quad u_y|_{AC} = 0,$$

$$c|_{DL_1 \cup BL_2} = C_m, \quad \left. \frac{\partial c}{\partial x} \right|_{DC \cup AB} = 0, \quad \left. \frac{\partial c}{\partial y} \right|_{L_1 L_2 \cup AC} = 0,$$

де $H_1 = H_2 = H_3 = 0 \text{ м}$, $C_m = 350 \text{ г/літр}$.

14. П о ч а т к о в і у м о в и: Початковий розподіл концентрації солей

$$c_0(x, y) = \begin{cases} C_m, & (x, y) \in DL_1 \cup L_2 B; \\ C_1, & (x, y) \notin DL_1 \cup L_2 B; \end{cases} \quad \text{де } C_1 = 8 \text{ г/літр.}$$

Початковий розподіл напорів $h_0(x, y)$ визначався згідно формули [254]

$$h_0(x, y) = \frac{1}{2\gamma} \left(\frac{qd_1}{b} \cdot \frac{1}{1-\nu} + \frac{4q}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{md_1}{b}}{m} \cdot \frac{\text{sh} \frac{m\pi l}{b} \cdot \text{ch} \frac{m\pi(y-l)}{b}}{\text{sh} \frac{2m\pi l}{b} + \frac{2m\pi l}{b}} \cdot \cos \frac{m\pi x}{b} \right)$$

де зовнішнє навантаження інтенсивністю $q = 20 \cdot 10^4 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{доба}^2}$ вважалось

миттєво прикладеним та незмінним в часі; $\nu = \frac{\xi}{1+\xi}$ – коефіцієнт Пуассона;

$\gamma = 10^4 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{доба}^2}$. Початковий розподіл концентрації солей в твердій фазі

визначався згідно формули $N_0(x, y) = 240 \left(-\left(\frac{x}{b} \right)^2 + \frac{x}{b} \right) + 40$.

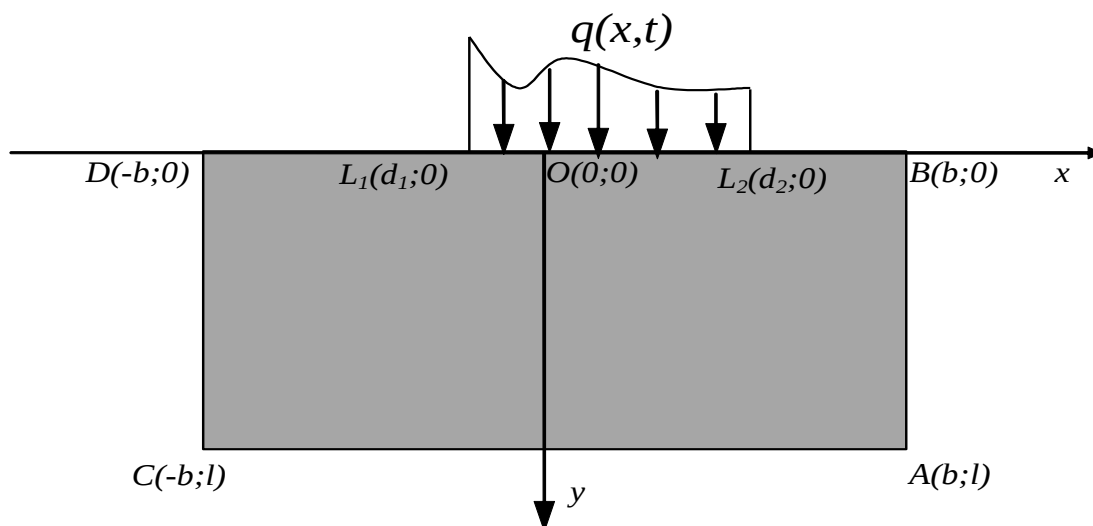


Рис. 3.21. Область Ω фільтраційної консолідації прикладу 3.4.

15. Основні завдання чисельного експерименту: Вияснення впливу урахування наявності солей в рідкій та твердій фазах на процес фільтраційної консолідації.

Результати числового експерименту в графічному вигляді представлено на рис. 3.22–3.28 на момент часу $t = 540$ діб.

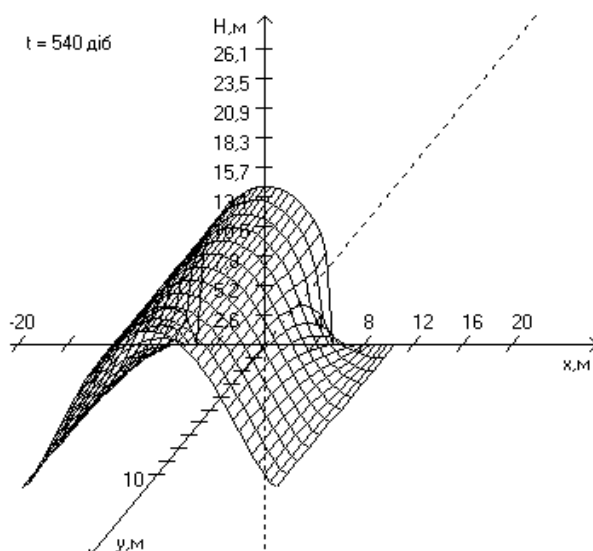


Рис. 3.22. Графіки розподілу поля надлишкових напорів при $\varepsilon = 0$, $K_c \neq 0$

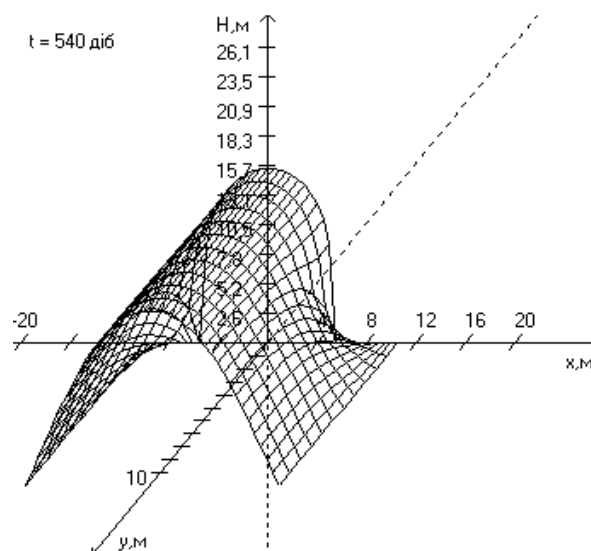


Рис. 3.23. Графіки розподілу поля надлишкових напорів при $\varepsilon = 1$, $K_c \neq 0$

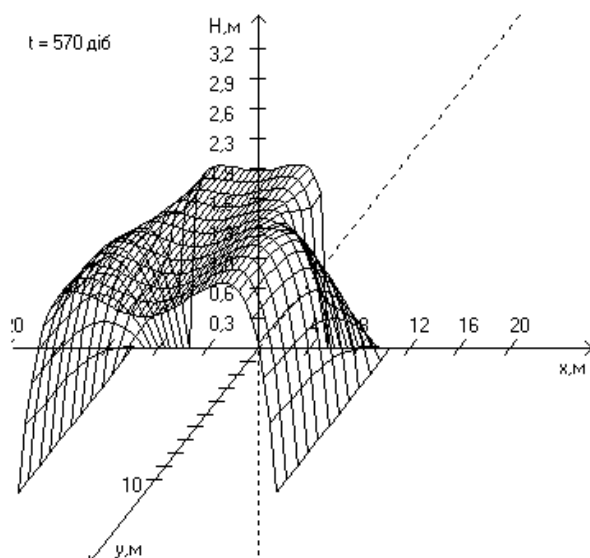


Рис. 3.24. Графік різниці між полями надлишкових напорів зображеними на рис.3.23 та рис.3.22

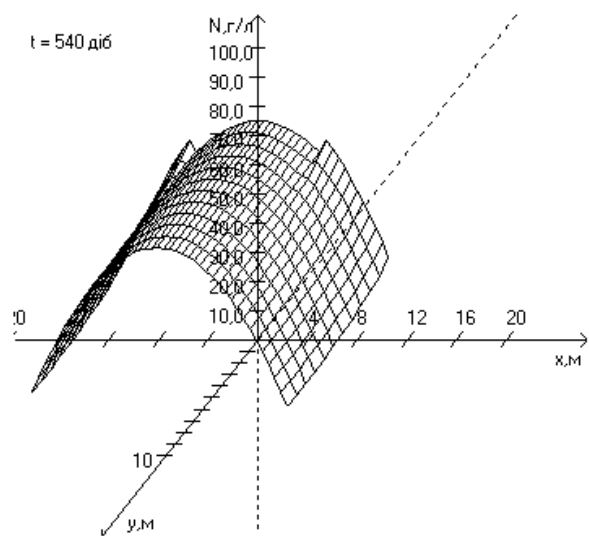


Рис. 3.25. Розподіл поля концентрації $N(x, y, t)$ при $N_{\max} = 100 \text{ г/л}$, $\varepsilon = 1$, $K_c \neq 0$

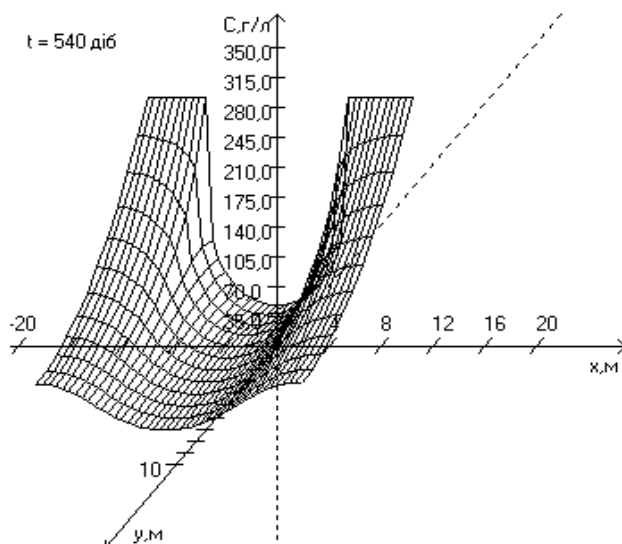


Рис. 3.26. Розподіл поля концентрації c сольового розчину при $\varepsilon = 1$, $K_c \neq 0$

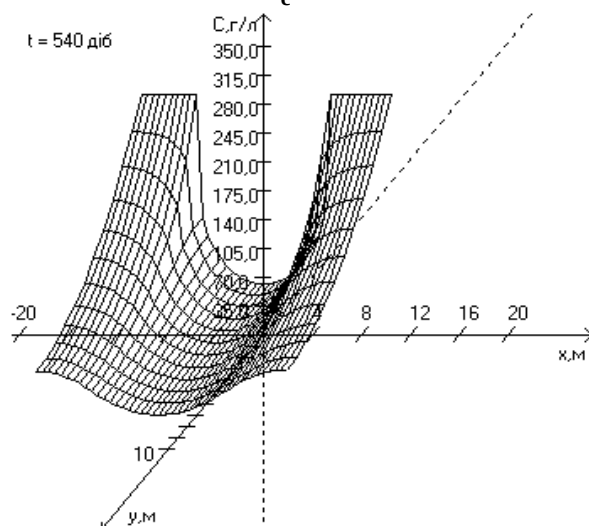


Рис. 3.27. Розподіл поля концентрації c сольового розчину при $\varepsilon = 0$, $K_c \neq 0$

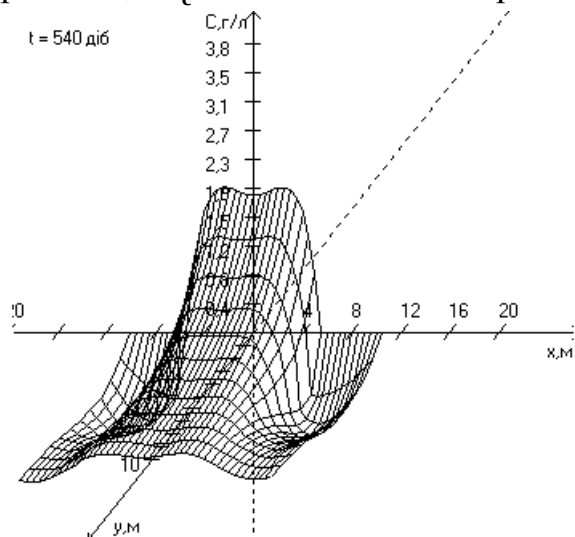


Рис. 3.28. Графік різниці між полями, зображеними на рис.3.26 та рис.3.27

При врахуванні наявності в ґрунті солей в твердій фазі та залежності $k_{11}^{(h)} = k_{22}^{(h)} = k(c)$ напори більші і розсіюються повільніше, особливо в районі основи прикладеного навантаження, ніж у випадку без врахування впливу наявності солей в твердій фазі (рис. 3.22–3.24). Максимальне збільшення напорів складає близько 13 % від їх значення у випадку нехтування впливом наявності солей в твердій фазі. Це пояснюється тим, що наявні кристалики солі з часом розчиняються, за рахунок чого збільшується об'єм порової рідини, а отже і тиск, який вона чинить на скелет ґрунту.

Як видно з рисунка 3.25 концентрація солей в твердій фазі в одиниці об'єму пористого середовища зменшується з часом. Це означає, що з часом кристалики солі, присутні у поровій рідині, розчиняються.

При врахуванні наявності в ґрунті солей в твердій фазі та залежності $k_{11}^{(h)} = k_{22}^{(h)} = k(c)$ концентрація солей в рідкій фазі більша, особливо поза межами району основи прикладеного навантаження, ніж у випадку без врахування впливу наявності солей в твердій фазі (рис. 3.26–3.28).

Отже, урахування масообмінних процесів при дослідженні консолідації ґрунтів приводить до уповільнення розсіювання надлишкових напорів.

Приклад 3.5.

1. Розмірність задачі: $R=1$.

2. Область розв'язання задачі: Область фільтраційної консолідації шару глинистого ґрунту товщиною $l = 25$ м зображена на рис. 3.1.

3. Чисельний метод: Чисельні розрахунки проведено методом скінченних елементів при лінійних та квадратичних базисних функціях при довжині скінченного елемента 0.5 м.

4. Схема дискретизації в часі: Для дискретизації в часі використано схему предиктор–коректор з рівномірним кроком за часом $\tau = 30$ діб.

5. Вплив масоперенесення: Не враховувався.

6. Вплив теплоперенесення: Враховувався через явище термічного осмосу зі сталими коефіцієнтами $k_{11}^{(T)} = 2.8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{град} \cdot \text{доба}$ та через залежність коефіцієнта фільтрації від температури пористого середовища.

Параметри теплоперенесення: $\lambda_{11} = 108 \text{ кДж}/\text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба}$, $c_\rho = 4.2 \text{ кДж}/\text{кг} \cdot \text{град}$, $c_T = 2137 \text{ кДж}/\text{м}^3 \cdot \text{град}$, $\rho = 1000 \text{ кг}/\text{м}^3$.

7. Вплив наявності солей в рідкій та твердій фазах на рівняння нерозривності: Не враховувалось.

8. Вплив термічного розширення фаз ґрунту: Враховувалось з коефіцієнтами термічного розширення [261] $\alpha_\rho = 1.8 \cdot 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, $\alpha_s = 2.4 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$. Також покладалось $q = 0.5$.

9. Наявність газу: Не враховувалось. Ґрунт вважався двофазним при середньому значенні коефіцієнта пористості $e = 0.7$.

10. Залежність коефіцієнта фільтрації від надлишкових напорів, температури та концентрації солей в рідкій фазі: Коефіцієнт фільтрації покладался незалежним від функції надлишкових напорів. Для випадку постійного коефіцієнта фільтрації $k_{11}^{(h)} = k_{20} = 10^{-3} \frac{\text{м}}{\text{доба}}$. Залежність $k_{11}^{(h)} = k(T)$ визначалася шляхом апроксимації функції $k(T)$ радіальними базисними функціями [300, 340, 402] за експериментальними даними, що наведені в табл. 3.2 у випадку чистої води. Для подальшого використання в числових експериментах проводилось масштабування на множник $k_{20}/k(20)$, де згідно табл. 3.2 $k(20) = 9,215 \frac{\text{м}}{\text{доба}}$.

11. Повзучість скелету ґрунту: Не враховувалась. Між сумою головних напружень та коефіцієнтом пористості приймалась лінійна залежність (2.9) у вигляді спрямленого відрізка компресійної кривої при $a = 5.12 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{Н}$.

12. Масообмінні процеси: Не враховувались.

13. Граничні умови:

$$h(0,t)=0, \mathbf{u}|_{x=l}=0, T(0,t)=T_1(t), T(l,t)=T_2(t),$$

де $T_2(t)=90^\circ\text{C}$, $T_1(t)=15^\circ\text{C}$.

14. Початкові умови: Початковий розподіл температури

$$T_0(x)=\begin{cases} T_2, & x=l; \\ T_1, & x\neq l. \end{cases} \quad \text{Початковий розподіл напорів } h_0(x)=0. \text{ Вважалось, що}$$

надлишкові напори від прикладення зовнішнього навантаження, або від власної ваги ґрунту, розсіялись. Така ідеалізація процесу зроблена для кращого прослідковування саме впливу термічного розширення ґрунтових фаз на зміну розподілу надлишкових напорів в ґрунті.

15. Основні завдання експерименту: Дослідити вплив урахування теплового розширення фаз ґрунту на розподіл надлишкових напорів в насиченому гетерогенному пористому середовищі.

На рис. 3.29, 3.30 наведені графіки розподілу поля надлишкових напорів для різного часу від початкового моменту часу з урахуванням залежності $k_{11}^{(h)} = k(T)$, термічного осмосу та ефекту термічного розширення фаз ґрунту при непроникній та дренажній нижній межі.

Аналіз результатів проведених розрахунків полів надлишкових напорів засвідчив, що у випадку урахування термічного розширення порової рідини та твердого скелету в масиві ґрунту виникають стійкі поля надлишкових напорів, які повільно розсіюються в часі. При дренажній нижній межі дані напори досягають менших значень і швидше розсіюються, аніж при умові її непроникності. У випадку непроникної нижньої межі надлишкові напори досягають максимального значення 27 м через 10 років після початку процесу і зменшуються наполовину ще через 10 років. Повільне розсіювання надлишкових напорів пояснюється малим числовим значенням коефіцієнта фільтрації для глинистих ґрунтів, хоча і приймається його зростання на порядок

при збільшенні температури до 55°C . У випадку дренажованої нижньої межі максимальне значення надлишкових напорів 11 м досягається через 600 діб.

Отже, при високих температурах ($T > 50^{\circ}\text{C}$) тепловим розширенням фаз ґрунту нехтувати не можна. Отримані дані якісно узгоджуються з експериментальними даними, згідно яких, при нагріванні ґрунту відбувається зростання порових тисків.

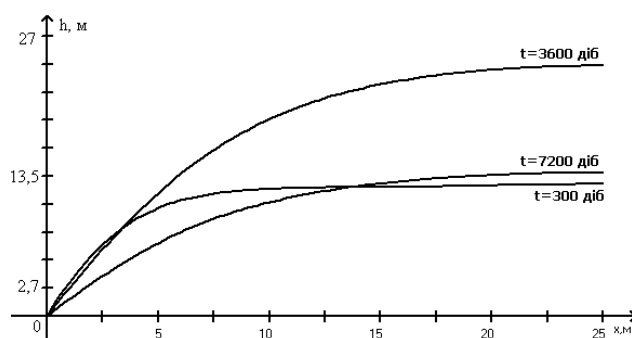


Рис. 3.29. Графіки розподілу поля надлишкових напорів з урахуванням ефекту термічного розширення при непроникній нижній межі

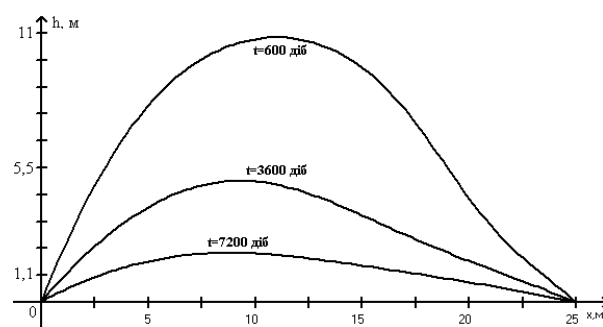


Рис. 3.30. Графіки розподілу поля надлишкових напорів з урахуванням ефекту термічного розширення при дренажованій нижній межі

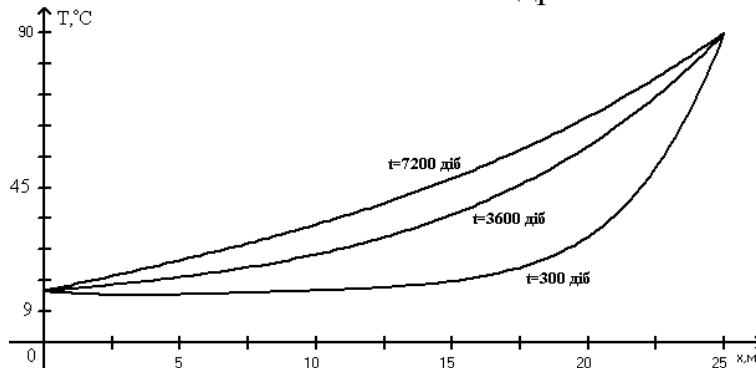


Рис. 3.31. Графіки розподілу поля температури з урахуванням ефекту термічного розширення.

Приклад 3.6.

1. Розмірність задачі: $R=1$.
2. Область розв'язання задачі: Область фільтраційної консолидації масиву глинистого ґрунту товщиною $l=10$ м (див. рис. 3.1.).

3. Чисельний метод: Чисельні розрахунки проведено методом радіальних базисних функцій. З класу нескінченно гладких РБФ використовувались обернена мультіквадратична, мультіквадратична та

гаусівська. Відрізок $[0; l]$ дискретизувався рівномірною вузловою сіткою з кроком δ . Як результат проведених числових експериментів для відповідних базисних функцій при заданому кроці розбиття δ , знайдені значення параметрів ε_h , ε_c , ε_T , які наведені в табл. 3.3. Вибір параметрів форми здійснювався за такими критеріями: 1) точність апроксимації функцій $c_0(x)$, $T_0(x)$, $h_0(x)$; 2) відсутність осциляцій в наближених розв'язках; 3) допустимість знайдених значень для концентрації солей та температури (виконання принципу максимуму).

Табл. 3.3. Значення параметрів форми для РБФ

	Гаусівська РБФ						Мультиквадратична РБФ					
$\delta =$	0,1	0,15	0,2	0,3	0,4	0,5	0,1	0,15	0,2	0,3	0,4	0,5
ε_h	3,5	2,2	1,4	0,9	0,7	0,5	2	1,2	0,8	0,5	0,4	0,3
ε_c	3	2	1,4	1	0,7	0,8	1,5	0,9	0,7	0,5	0,4	0,3
ε_T	3	2	1,4	1	0,7	0,8	1,4	0,9	0,7	0,5	0,4	0,3

	Обернена мультиквадратична РБФ				
$\delta =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
ε_h	1,7	0,7	0,4	0,3	0,3
ε_c	1,2	0,6	0,4	0,3	0,2
ε_T	1,2	0,6	0,4	0,3	0,2

4. Схема дискретизації в часі: Для дискретизації в часі використано неявну різницеву схему з рівномірним кроком за часом $\tau = 60$ діб.

5. Вплив масоперенесення: Враховувався через явище хімічного осмосу зі сталим коефіцієнтом $k_{11}^{(c)} = 2.8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^5 / \text{кг} \cdot \text{доба}$ та через залежність коефіцієнта фільтрації від концентрації порового сольового розчину. Параметри масоперенесення: $D_{11} = 0.02 \text{ м}^2 / \text{доба}$.

6. Вплив теплоперенесення: Враховувався через явище термічного осмосу зі сталим коефіцієнтом $k_{11}^{(T)} = 2.8 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}^2}{\text{град} \cdot \text{доба}}$, явище термодифузії зі сталим коефіцієнтом $D_{11}^{(T)} = 0.02 \text{ кг} / (\text{м} \cdot \text{доба} \cdot ^\circ \text{C})$. Параметри

теплоперенесення: $\lambda_{11} = 108 \frac{\text{кДж}}{\text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба}}, \quad c_p = 4.2 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{град}},$

$c_T = 2137 \frac{\text{кДж}}{\text{м}^3 \cdot \text{град}}, \quad \rho = 1100 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$

7. Вплив наявності солей в рідкій та твердій фазах на рівняння нерозривності: Не враховувався.

8. Вплив термічного розширення фаз ґрунту: Не враховувалося.

9. Наявність газу: Враховувалося. Вважалося, що вміст газу в ґрунті складає 5%. Тоді при $m=0.6$ маємо $s=0.02$, $n=0.38$, $e=0.67$. Також покладалось $\mu_T = 0.0245$, $p_a = 10^4 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2}.$

10. Залежність коефіцієнта фільтрації від надлишкових напорів, температури та концентрації солей в рідкій фазі: Коефіцієнт фільтрації покладался незалежним від функції надлишкових напорів. Для випадку постійного коефіцієнта фільтрації $k_{11}^{(h)} = k_{20} = 2,88 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}}{\text{доба}}.$ Залежність $k_{11}^{(h)} = k(c, T)$ визначалася аналогічно прикладу 3.1.

11. Повзучість скелету ґрунту: Враховувалась при параметрах повзучості $a_0 = 0,5 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}^2}{\text{кг}}, \quad a_1 = 0,3 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}^2}{\text{кг}}, \quad \beta_1 = 10^{-2} \text{доба}^{-1}.$

12. Масообмінні процеси: Не враховувались і коефіцієнт швидкості масообміну $\gamma_1 = 0 \text{доба}^{-1}.$

13. Граничні умови:

$$h|_{x=0} = h|_{x=l} = 0, \quad c|_{x=0} = C_m, \quad \mathbf{q}_c|_{x=l} = 0, \quad T|_{x=0} = T_{\max}, \quad \mathbf{q}_T|_{x=l} = 0,$$

де $C_m = 350 \frac{\text{г}}{\text{літр}}, \quad T_{\max} = 30^\circ \text{C}.$ На нижній границі для концентрації задається гранична умова $\mathbf{q}_c|_{x=l} = 0$, а для температури – $\mathbf{q}_T|_{x=l} = 0$. Фізичний зміст – для концентрації це гранична умова швидкого виносу солей, а для температури – умова теплоізоляції. Зрозуміло, що реальне значення теплового потоку через

нижню межу повністю не дорівнює нулю. Але, ми вважаємо, що цією величиною можна знехтувати.

14. Початкові умови: Початковий розподіл концентрації солей

$$c_0(x) = \begin{cases} C_m, & x = 0, \\ 5\text{г/літр}, & x \neq 0, \end{cases}, \text{ а температури } - T_0(x) = \begin{cases} T_{\max}, & x = 0, \\ 4^\circ\text{C}, & x \neq 0. \end{cases} \text{ Вважалось, що на}$$

верхню межу ґрунту миттєво прикладається зовнішнє навантаження інтенсивністю $q = 38 \cdot 10^4 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{доба}^2}$. Тому початковий розподіл напорів $h_0(x)$

визначався згідно формули (1.28) при $\gamma = 10^4 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{доба}^2}$.

15. Основні завдання чисельного експерименту:

Вияснення впливу урахування наявності газу та повзучості скелету ґрунту на процес фільтраційної консолідації в умовах впливу тепломасоперенесення. Результати числових експериментів в графічному вигляді наведені на рис. 3.32–рис. 3.39.

Як видно з рис.3.36, у випадку урахування повзучості ґрунтового скелету, надлишкові напори розсіюються швидше, ніж у випадку без урахування повзучості скелету ґрунту в тих підобластях, де ґрунт не перейшов в переущільнений стан. Проте, в підобластях, де ґрунт перейшов в переущільнений стан (надлишкові напори стають негативними) спостерігається протилежна тенденція. Таке явище пояснюється тим, що урахування повзучості призводить до зменшення тисків в поровій рідині і до збільшення напружень в скелеті ґрунту.

В підобластях, в яких ґрунт перейшов в переущільнений стан, надлишкові напори розсіюються швидше у випадку нехтування наявністю газової компоненти (рис.3.38). В інших підобластях відтік порової рідини відбувається швидше для трифазного ґрунту. Це пояснюється стисливістю газу.

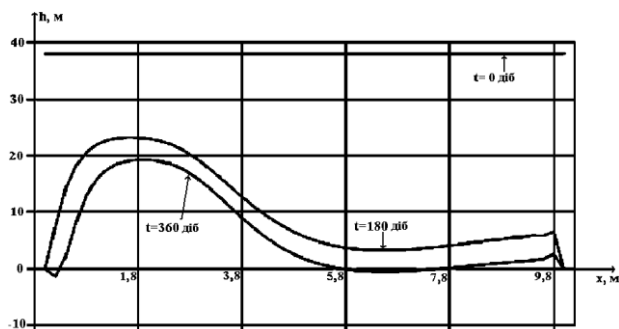


Рис. 3.32. Графіки розподілу надлишкових напорів в масиві трифазного ґрунту при урахуванні повзучості та явищ тепломасоперенесення

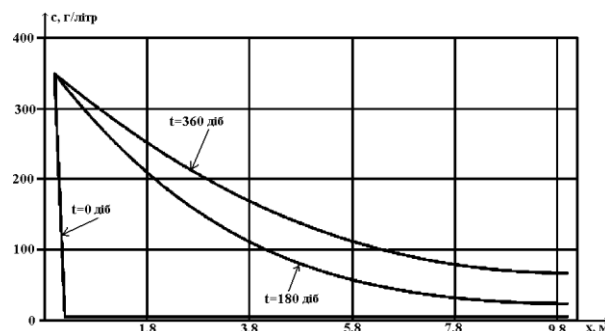


Рис. 3.33. Графіки розподілу концентрації солей в неізотермічному режимі (при урахуванні повзучості скелету ґрунту)

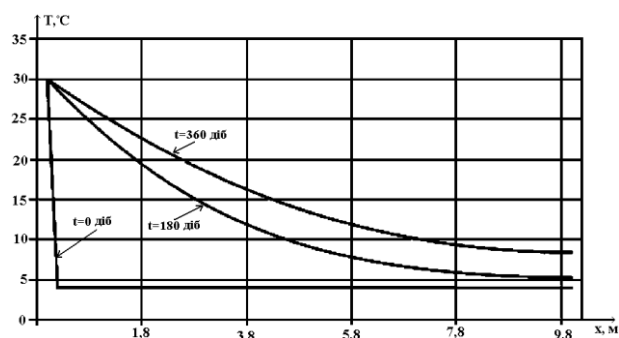


Рис. 3.34. Графіки розподілу температури в умовах фільтрації сольових розчинів (при урахуванні повзучості скелету ґрунту)

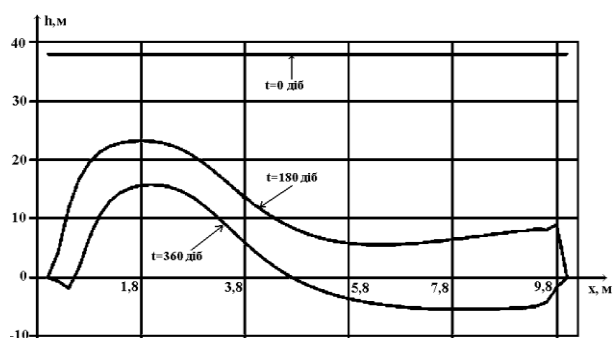


Рис. 3.35. Графіки розподілу надлишкових напорів в масиві трифазного ґрунту в умовах тепломасоперенесення без урахування повзучості

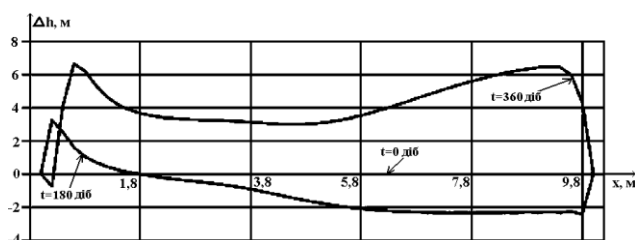


Рис. 3.36. Графіки різниці надлишкових напорів в умовах тепломасоперенесення з урахуванням та без урахування повзучості скелету ґрунту (“рис.3.32”– “рис.3.35”)

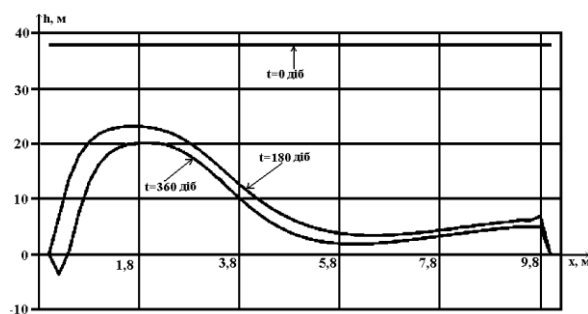


Рис. 3.37. Графіки розподілу надлишкових напорів в масиві двофазного ґрунту при урахуванні повзучості та явищ тепломасоперенесення

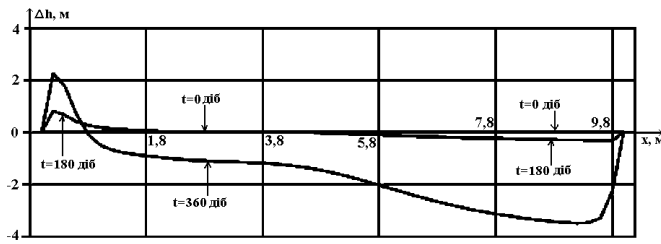


Рис. 3.38. Графіки різниці надлишкових напорів в трифазному та двофазному ґрунтах (“рис.3.32”–“рис.3.37”)

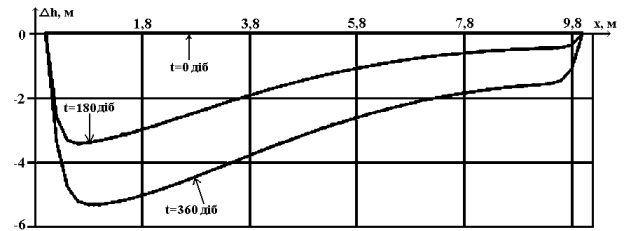


Рис. 3.39. Графіки різниці надлишкових напорів з урахуванням та без урахування явищ тепломасоперенесення при $k = const$ (в обох випадках враховується повзучість скелета ґрунту)

При урахуванні впливу теплосолеперенесення надлишкові напори в масиві ґрунту розсіюються швидше (рис.3.39), ніж у випадку нехтування явищами термодифузії, термоосмосу і хімічного осмосу. Це явище пояснюється характером розподілу температури і концентрації солей в області консолідації (рис. 3.33, 3.34).

Цей приклад показує, що явищами повзучості скелета ґрунту, наявністю газової компоненти, а також впливом тепломасоперенесення при дослідженні процесів фільтраційної консолідації нехтувати не можна.

Приклад 3.7.

1. Розмірність задачі: $R=2$. Коефіцієнт бічного тиску $\xi = 0.75$.
2. Область розв'язання задачі: Область фільтраційної консолідації масиву глинистого ґрунту прямокутної форми при $l=10$ м, $b=20$ м, $d_1=5$ м, $d_2=15$ м (рис.3.40).

3. Чисельний метод: Чисельні розрахунки проведено методом радіальних базисних функцій. Для апроксимації шуканих функцій в якості базисної використовувалась РБФ з компактним носієм [401]

$$\varphi\left(\frac{r}{\alpha}\right) = \left(1 - \frac{r}{\alpha}\right)_+^6 \left(35\left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 + 18\frac{r}{\alpha} + 3\right), \quad \alpha > 0.$$

Область консолідації дискретизувалась вузловою сіткою з відстанню між сусідніми вузлами приблизно рівною 1 м.

4. Схема дискретизації в часі: Для дискретизації в часі використано неявну різницеву схему з рівномірним кроком за часом $\tau = 60$ діб.

5. Вплив масоперенесення: Враховувався через явище хімічного осмосу зі сталими коефіцієнтами $k_{11}^{(c)} = k_{22}^{(c)} = 2.8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^5 / \text{кг} \cdot \text{доба}$, $k_{12}^{(c)} = k_{21}^{(c)} = 0 \text{ м}^5 / \text{кг} \cdot \text{доба}$ та через залежність коефіцієнта фільтрації від концентрації порового сольового розчину. Параметри масоперенесення: $D_{11}^{(c)} = D_{22}^{(c)} = 0.02 \text{ м}^2 / \text{доба}$, $D_{12}^{(c)} = D_{21}^{(c)} = 0 \text{ м}^2 / \text{доба}$.

6. Вплив теплоперенесення: Враховувався через явище термічного осмосу зі сталими коефіцієнтами $k_{11}^{(T)} = k_{22}^{(T)} = 2.8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{град} \cdot \text{доба}$, $k_{12}^{(T)} = k_{21}^{(T)} = 0 \text{ м}^2 / \text{град} \cdot \text{доба}$, явище термодифузії зі сталими коефіцієнтами $D_{11}^{(T)} = D_{22}^{(T)} = 0.02 \text{ кг} / (\text{м} \cdot \text{доба} \cdot ^\circ \text{C})$, $D_{12}^{(T)} = D_{21}^{(T)} = 0 \text{ кг} / (\text{м} \cdot \text{доба} \cdot ^\circ \text{C})$. Параметри теплоперенесення:

$$\lambda_{11} = \lambda_{22} = 108 \text{ кДж} / \text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба},$$

$$\lambda_{12} = \lambda_{21} = 0 \text{ кДж} / \text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба}, \quad c_\rho = 4.2 \text{ кДж} / \text{кг} \cdot \text{град}, \quad c_T = 2137 \text{ кДж} / \text{м}^3 \cdot \text{град},$$

$$\rho = 1100 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

7. Вплив наявності солей в рідкій та твердій фазах на рівняння нерозривності: Не враховувався.

8. Вплив термічного розширення фаз ґрунту: Не враховувалось.

9. Наявність газу: Враховувалось. Вважалося, що вміст газу в ґрунті складає 5%. Тоді при $m = 0.6$ маємо $s = 0.02$, $n = 0.38$, $e = 0.67$. Також покладалось $\mu_T = 0.0245$, $p_a = 10^4 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2}$.

10. Залежність коефіцієнта фільтрації від надлишкових напорів, температури та концентрації солей в рідкій фазі: Коефіцієнт фільтрації покладался незалежним від функції надлишкових напорів. Для випадку постійного коефіцієнта фільтрації

$$k_{11}^{(h)} = k_{22}^{(h)} = k_{20} = 10^{-4} \frac{\text{М}}{\text{доба}}, \quad k_{21}^{(h)} = k_{12}^{(h)} = k_{20} = 0 \frac{\text{М}}{\text{доба}}. \quad \text{Залежність } k_{11}^{(h)} = k_{22}^{(h)} = k(c, T)$$

визначалася шляхом апроксимації функції $k(c, T)$ аналогічно прикладу 3.1.

11. Повзучість скелету ґрунту: Враховувалась при параметрах повзучості $a_0 = 0.5 \cdot 10^{-6} \frac{\text{М}^2}{\text{кг}}$, $a_1 = 0.3 \cdot 10^{-6} \frac{\text{М}^2}{\text{кг}}$, $\beta_1 = 10^{-2} \text{доба}^{-1}$.

12. Масообмінні процеси: Не враховувались і коефіцієнт швидкості масообміну $\gamma_1 = 0 \text{доба}^{-1}$.

13. Граничні умови:

$$h|_{OC} = H_1, \quad h|_{AB} = H_2, \quad h|_{OL_1 \cup L_2 B} = H_3, \quad u_y|_{L_1 L_2} = 0, \quad u_y|_{AC} = 0, \quad c|_{OL_1 \cup BL_2} = C_m,$$

$$\left. \frac{\partial c}{\partial x} \right|_{OC \cup AB} = 0, \quad \left. \frac{\partial c}{\partial y} \right|_{L_1 L_2 \cup AC} = 0, \quad T|_{OL_1 \cup BL_2} = T_{\max}, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{OC \cup AB} = 0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{L_1 L_2 \cup AC} = 0,$$

$$\text{де } H_1 = H_2 = H_3 = 5 \text{ м}, \quad C_m = 350 \frac{\text{г}}{\text{літр}}, \quad T_{\max} = 30^\circ \text{C}.$$

14. Початкові умови: Початковий розподіл концентрації солей

$$C_0(x, y) = \begin{cases} C_m, & (x, y) \in OL_1 \cup L_2 B; \\ 8z/l, & (x, y) \notin OL_1 \cup L_2 B; \end{cases} \quad \text{а температури } T_0(x, y) = \begin{cases} 30^\circ \text{C}, & (x, y) \in OL_1 \cup L_2 B; \\ 4^\circ \text{C}, & (x, y) \notin OL_1 \cup L_2 B. \end{cases}$$

Початковий розподіл напорів $h_0(x, y)$ визначався згідно формули [254]

$$h_0(x, y) = \frac{1}{2\gamma} \left(\frac{qd_1}{b} \cdot \frac{1}{1-\nu} + \frac{4q}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{md_1}{b}}{m} \cdot \frac{\text{sh} \frac{m\pi l}{b} \cdot \text{ch} \frac{m\pi(y-l)}{b}}{\text{sh} \frac{2m\pi l}{b} + \frac{2m\pi l}{b}} \cdot \cos \frac{m\pi x}{b} \right)$$

де зовнішнє навантаження інтенсивністю $q = 38 \cdot 10^4 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{доба}^2}$ вважалось миттєво прикладеним та незмінним в часі; $\nu = \frac{\xi}{1 + \xi}$ – коефіцієнт Пуассона;

$$\gamma = 10^4 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{доба}^2}.$$

15. Основні завдання чисельного експерименту: Вияснення впливу урахування наявності газу та повзучості скелету ґрунту на процес фільтраційної консолідації в умовах впливу тепломасоперенесення. На рис. 3.41 наведений розподіл поля напорів (на рис. 3.42 та рис. 3.43 – температур і концентрацій відповідно) при врахуванні впливу всіх вказаних явищ, при $t = 3$ роки. На рис. 3.44–3.47 відображено розподіли полів напорів, при не врахуванні впливу одного з явищ. На рис. 3.48–3.50 – відповідні графіки різниці розподілу полів напорів, що дають змогу виявити та кількісно оцінити вплив кожного явища.

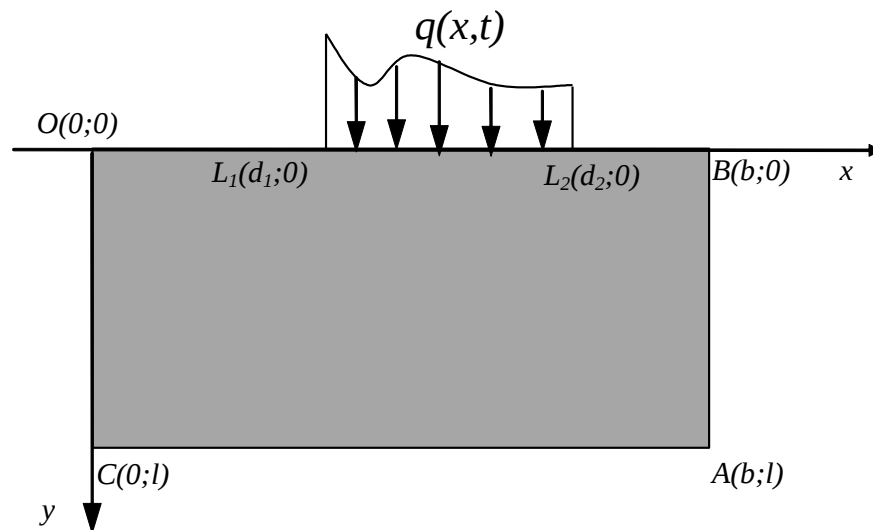


Рис. 3.40. Область фільтраційної консолідації прикладу 3.7.

Як видно з рис. 3.48 поле напорів розсіюється повільніше при врахуванні повзучості. Проте, зменшення тиску в поровій рідині, викликане даним явищем, нівелюється в області прикладення навантаження. Слід зазначити, що врахування повзучості зумовлює поступове наростання тиску в поровій рідині з наступним його зменшенням.

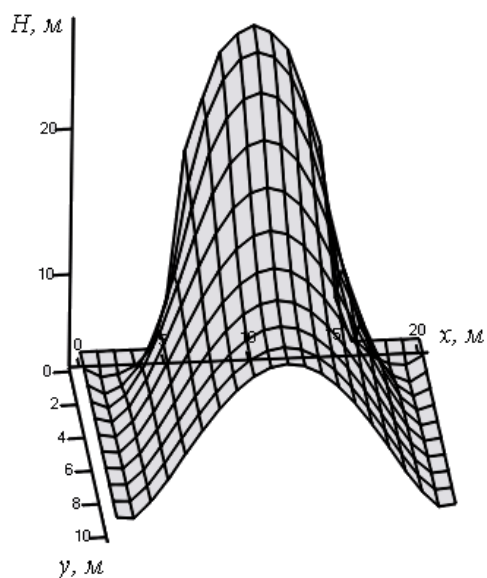


Рис. 3.41. Графік розподілу поля надлишкових напорів у ґрунтів при врахуванні впливу повзучості та тепломасоперенесення

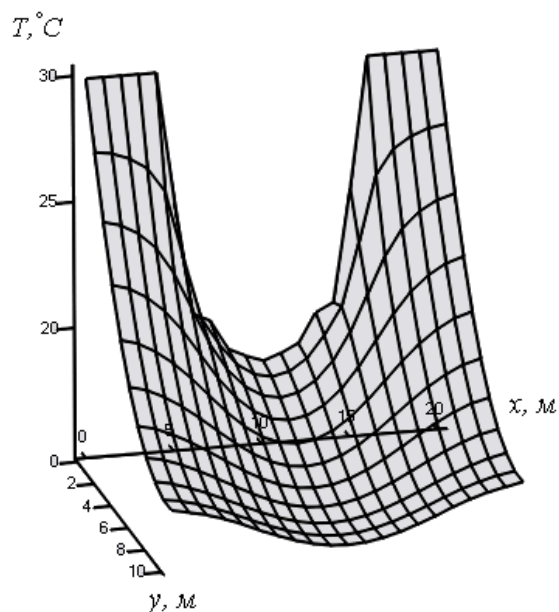


Рис. 3.42. Графік розподілу поля температур

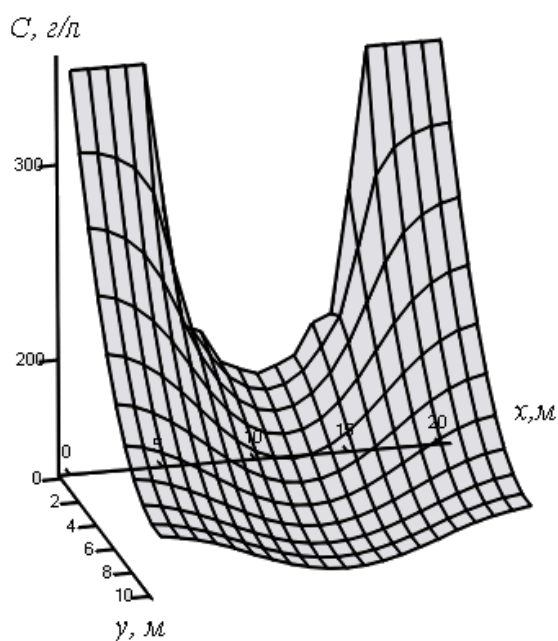


Рис. 3.43. Графік розподілу поля концентрацій солей

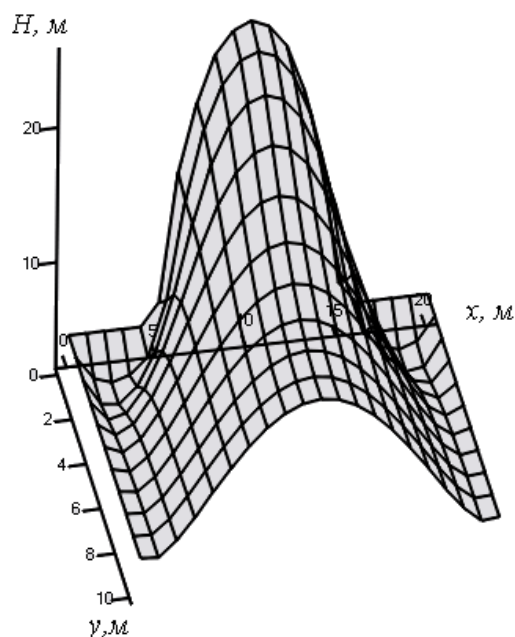


Рис. 3.44. Графік розподілу поля надлишкових напорів у ґрунті в умовах тепломасоперенесення без урахування повзучості

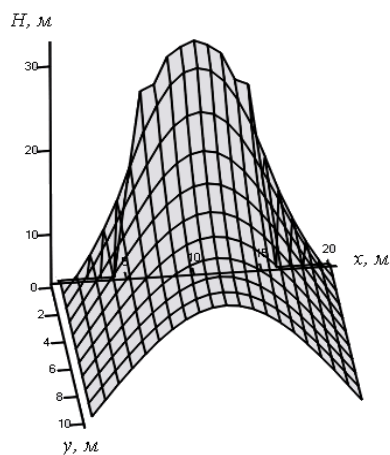


Рис. 3.45. Розподіл надлишкових напорів у ґрунті без урахування впливу тепломасоперенесення

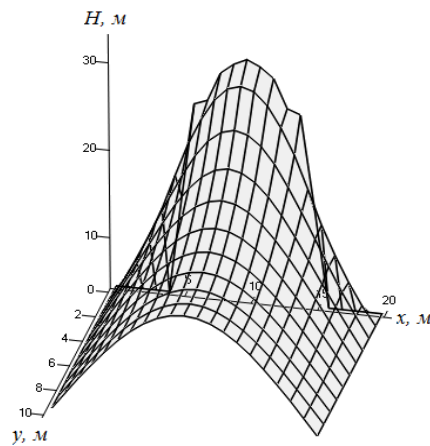


Рис. 3.46. Розподіл надлишкових напорів у ґрунті без урахування впливу тепломасоперенесення та повзучості

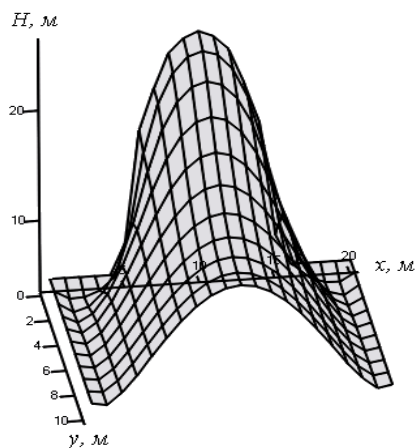


Рис. 3.47. Графік розподілу надлишкових напорів у ґрунті при неврахуванні наявності затисненого газу

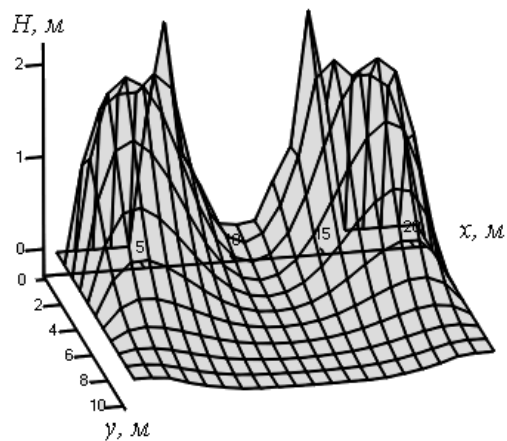


Рис. 3.48. Графік різниці між полями надлишкових напорів в ґрунті зображених на рис.3.41 та рис.3.44

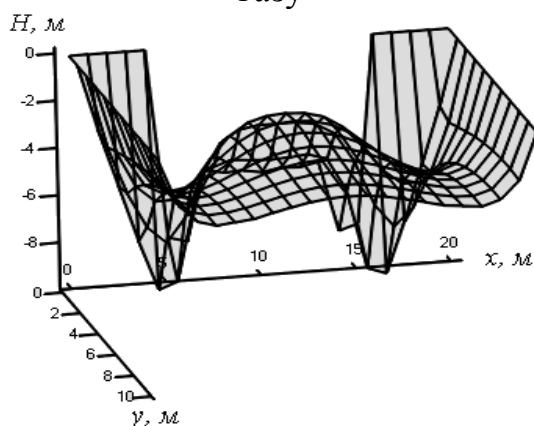


Рис. 3.49. Графік різниці між полями надлишкових напорів в ґрунті зображених на рис.3.41 та рис.3.45

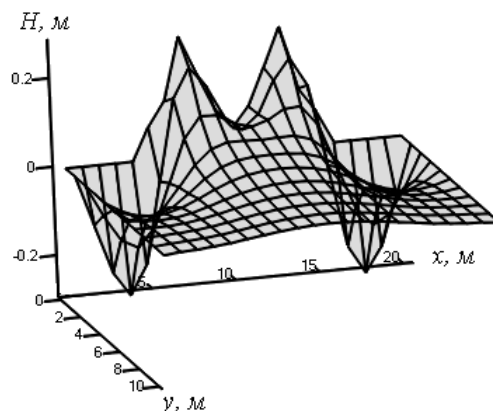


Рис. 3.50. Графік різниці між полями надлишкових напорів у ґрунті зображених на рис.3.45 та рис.3.46

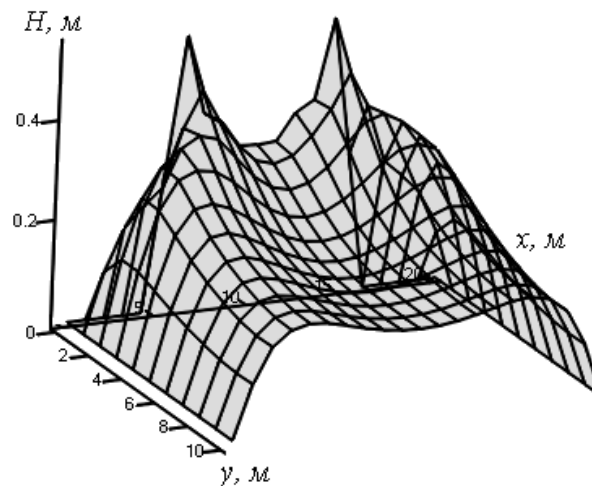


Рис. 3.51. Графік різниці між полями надлишкових напорів в ґрунті зображених на рис.3.41 та рис.3.47

Врахування явищ тепломасоперенесення зумовлює відтік рідини в області з підвищеною концентрацією та температурою, що відповідно збільшує тиск у поровій рідині в цих областях (різкі вигини на рис.3.49). Врахування осмотичних явищ сприяє швидшому розсіюванню поля надлишкових напорів в області біля дренажних меж і уповільненню такого розсіювання в областях біля непроникних меж.

Наявність затисненого газу в ґрунті уповільнює процес розсіювання надлишкових напорів. Це пояснюється врахуванням об'ємної стискуваності газу.

Приклад 3.8.

1. Розмірність задачі: $R=3$. Коефіцієнт бічного тиску $\xi = 0.75$.

2. Область розв'язання задачі: Область фільтраційної консолідації масиву глинистого ґрунту форми прямокутного паралелепіпеда з довжинами ребер по кожній координатній осі 16м, 9м, 16м відповідно (рис. 3.52). Область прикладення навантаження Q має форму квадрата з довжиною сторони 5 м.

3. Чисельний метод: Чисельні розрахунки проведено методом радіальних базисних функцій. Для апроксимації шуканих функцій в якості базисної використовувалась РБФ з компактним носієм [401]

$$\varphi\left(\frac{r}{\alpha}\right) = \left(1 - \frac{r}{\alpha}\right)_+^6 \left(35\left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 + 18\frac{r}{\alpha} + 3\right), \alpha > 0.$$

Область консолідації покривалась вузловою сіткою з відстанню між сусідніми вузлами приблизно рівною 1 м.

4. Схема дискретизації в часі: Для дискретизації в часі використано неявну різницеву схему з рівномірним кроком за часом $\tau = 60$ діб.

5. Вплив масоперенесення: Враховувався через явище хімічного осмосу зі сталими коефіцієнтами $k_{11}^{(c)} = k_{22}^{(c)} = k_{33}^{(c)} = 2.8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^5 / \text{кг} \cdot \text{доба}$, та через залежність коефіцієнта фільтрації від концентрації порового сольового розчину. Параметри масоперенесення: $D_{11}^{(c)} = D_{22}^{(c)} = D_{33}^{(c)} = 0.02 \text{ м}^2 / \text{доба}$.

6. Вплив теплоперенесення: Враховувався через явище термічного осмосу зі сталими коефіцієнтами $k_{11}^{(T)} = k_{22}^{(T)} = k_{33}^{(T)} = 2.8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{град} \cdot \text{доба}$, явище термодифузії зі сталими коефіцієнтами $D_{11}^{(T)} = D_{22}^{(T)} = D_{33}^{(T)} = 0.002 \text{ кг} / \text{доба} \cdot \text{м} \cdot \text{град}$. Параметри

теплоперенесення: $\lambda_{11} = \lambda_{22} = \lambda_{33} = 108 \text{ кДж} / \text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба}$, $c_\rho = 4.2 \text{ кДж} / \text{кг} \cdot \text{град}$, $c_T = 2137 \text{ кДж} / \text{м}^3 \cdot \text{град}$, $\rho = 1100 \text{ кг} / \text{м}^3$.

7. Вплив наявності солей в рідкій та твердій фазах на рівняння нерозривності: Не враховувався.

8. Вплив термічного розширення фаз ґрунту: Не враховувалось.

9. Наявність газу: Вважалося, що вміст газу в ґрунті складає 5%. Тоді при $m=0.6$ маємо $s=0.02$, $n=0.38$, $e=0.67$. Також покладалось

$$\mu_\Gamma = 0.0245, p_a = 10^4 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2}.$$

10. Залежність коефіцієнта фільтрації від надлишкових напорів, температури та концентрації солей в рідкій фазі: Коефіцієнт фільтрації покладался незалежним від функції надлишкових напорів. Для випадку постійного коефіцієнта фільтрації

$$k_{11}^{(h)} = k_{22}^{(h)} = k_{33}^{(h)} = k_{20} = 10^{-4} \frac{\text{м}}{\text{доба}}. \quad \text{Залежність} \quad k_{11}^{(h)} = k_{22}^{(h)} = k_{33}^{(h)} = k(c, T)$$

визначалася шляхом апроксимації функції $k(c, T)$ радіальними базисними функціями [300, 340, 402] аналогічно прикладу 3.1.

11. Повзучість скелету ґрунту: Враховувалась при параметрах повзучості $a_0 = 0 \frac{\text{м}^2}{\text{кг}}$, $a_1 = 3 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}^2}{\text{кг}}$, $\beta_1 = 10^{-2} \text{доба}^{-1}$.

12. Масообмінні процеси: Не враховувались і коефіцієнт швидкості масообміну $\gamma_1 = 0 \text{доба}^{-1}$.

13. Граничні умови: Граничні умови для невідомих функцій визначались нищевказаними факторами. Область Q та грань Ω_5 непроникні, а грані Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 , Ω_4 , Ω_6/Q – дренавані. В областях Q та Ω_5 для шуканих функцій задаються умови непроникності. Для концентрації солей на Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 , Ω_4 задано граничні умови швидкого виносу, а для температури умови теплоізоляції. На Ω_6 задано граничні умови першого роду. На межах області фільтраційної консолідації, де задано граничні умови першого роду, напір покладался рівним 5 м, а температура 30°C .

14. Початкові умови: Початковий розподіл концентрації солей $c_0(x, y, z) = \begin{cases} C_m, & (x, y, z) \in \Omega_6; \\ 8z/l, & (x, y, z) \notin \Omega_6; \end{cases}$ а температури $T_0(x, y, z) = \begin{cases} 30^\circ \text{C}, & (x, y, z) \in \Omega_6; \\ 4^\circ \text{C}, & (x, y, z) \notin \Omega_6. \end{cases}$

Початковий розподіл напорів $h_0(x, y, z)$ визначався згідно формули [151]

$$p_0(\mathbf{X}) = \frac{1 + \mu}{3\pi} q \left(\frac{(d - z)}{|d - z|} \left[\arctg \left(\frac{|d - z|(b - x)}{y \sqrt{(x - b)^2 + y^2 + (z - d)^2}} \right) \right] - \right.$$

$$- \arctg \left(\frac{|d-z|(a-x)}{y\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + (z-d)^2}} \right) \Bigg] -$$

$$- \frac{(c-z)}{|c-z|} \left[\arctg \left(\frac{|c-z|(b-x)}{y\sqrt{(x-b)^2 + y^2 + (z-c)^2}} \right) - \arctg \left(\frac{|c-z|(a-x)}{y\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + (z-c)^2}} \right) \right],$$

де зовнішнє навантаження інтенсивністю $q = 38 \cdot 10^4 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{доба}^2}$ вважалось

миттєво прикладеним та незмінним в часі; $\mu = \frac{\xi}{1+\xi}$ – коефіцієнт Пуассона;

$$\gamma = 10^4 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{доба}^2}; Q = [a, b] \times [c, d].$$

15. Основні завдання чисельного експерименту: Вияснення впливу урахування повзучості скелету ґрунту на процес фільтраційної консолідації в умовах впливу тепломасоперенесення. Результати наведено в графічному вигляді на рис. 3.53–3.59 в області перерізу по площині паралельній до XOZ в точці $y = 8 \text{ м}$.

Як видно з рис. 3.58 при врахуванні повзучості скелету ґрунту надлишкові напори розсіюються повільніше. Тенденція відповідає двовимірному випадку, однак різниця між напорами отримується набагато більшою. Також, як видно з рис. 3.59 значний внесок в уповільнення розсіювання напорів біля непроникної межі Q прикладення навантаження дає урахування тепломасоперенесення. Тобто, велика різниця в розподілі напорів, яка відображена на рис. 3.58 отримується як загальний внесок двох факторів – тепломасоперенесення та повзучості скелету ґрунту.

Як видно з рис. 3.59, характер впливу тепломасоперенесення на процес консолідації ґрунту в тривимірному випадку співпадає з двовимірним – напори розсіюються швидше в областях біля дренажних меж і повільніше в областях біля непроникних меж.

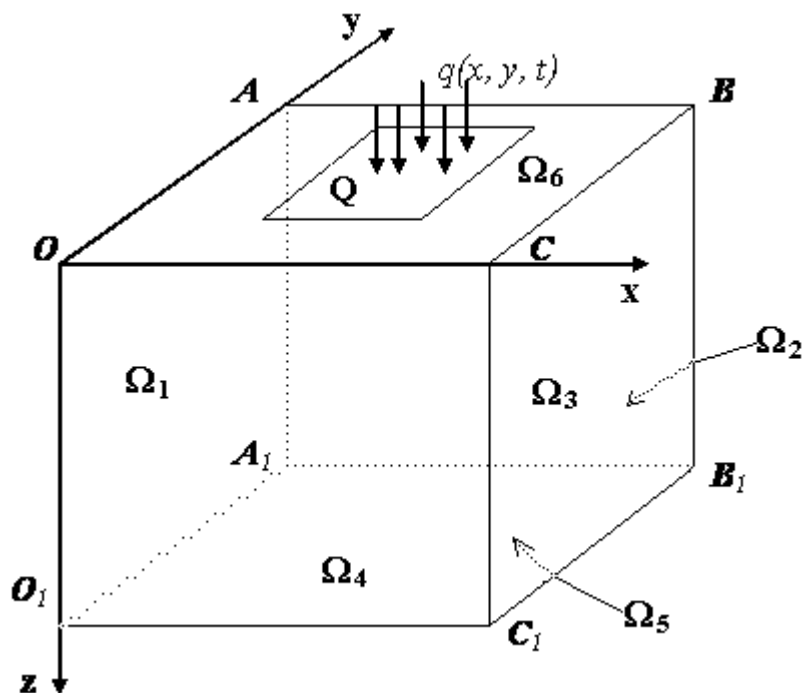


Рис.3.52. Область фільтраційної консолідації масиву ґрунту прикладу 3.8.

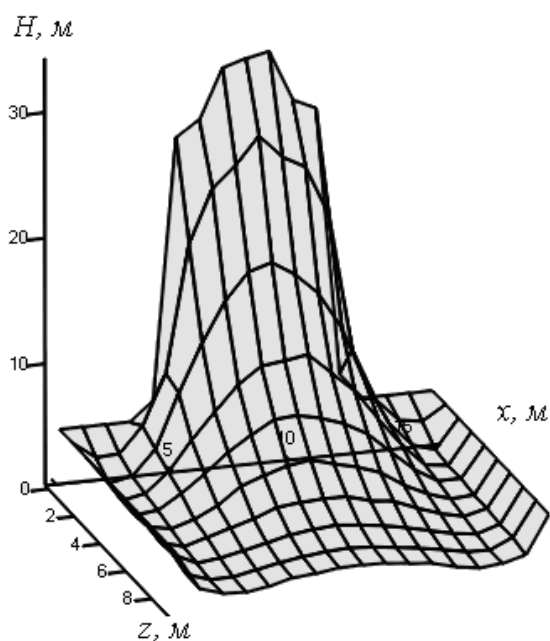


Рис. 3.53. Графік розподілу поля надлишкових напорів у ґрунтів при врахуванні впливу повзучості та тепломасоперенесення

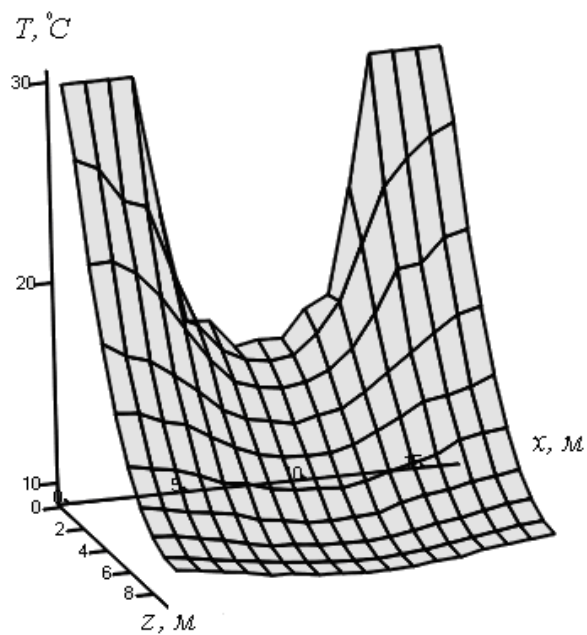


Рис. 3.54. Графік розподілу поля температур

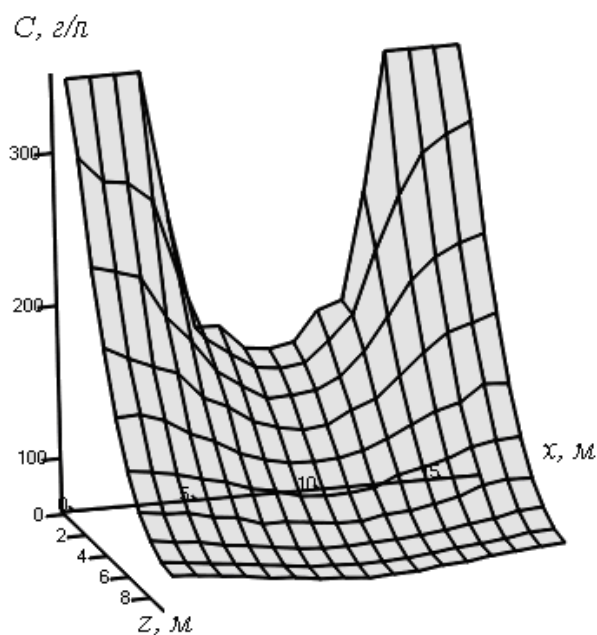


Рис. 3.55. Графік розподілу поля концентрацій солей

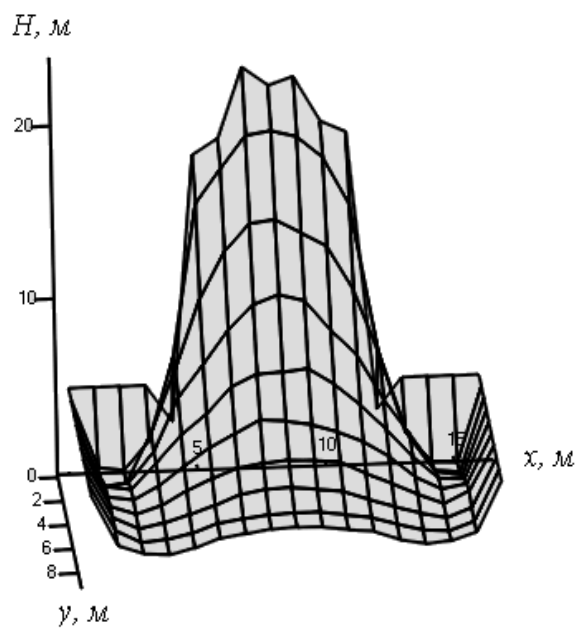


Рис. 3.56. Графік розподілу поля надлишкових напорів у ґрунті в умовах тепломасоперенесення без урахування повзучості

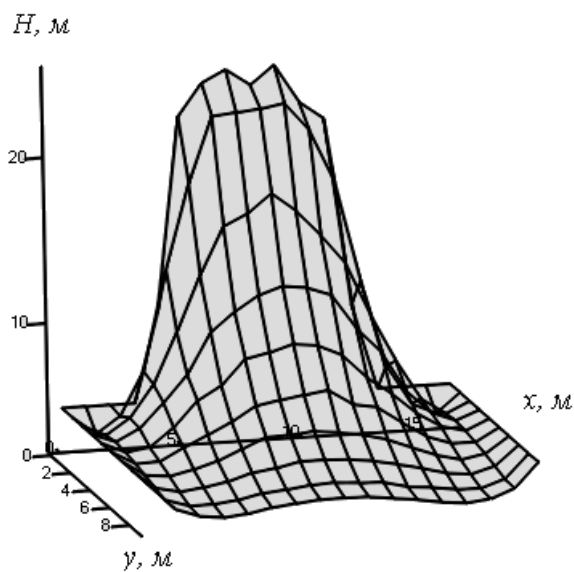


Рис. 3.57. Розподіл надлишкових напорів у ґрунті без урахування впливу тепломасоперенесення

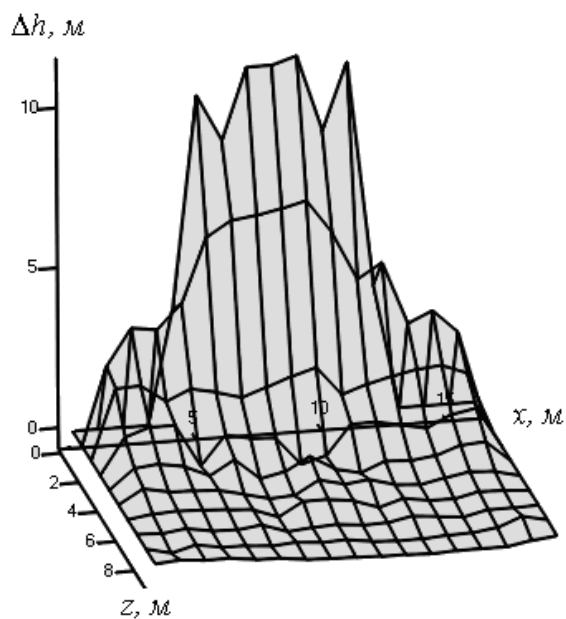


Рис. 3.58. Графік різниці між полями надлишкових напорів в ґрунті зображених на рис.3.53 та рис.3.56

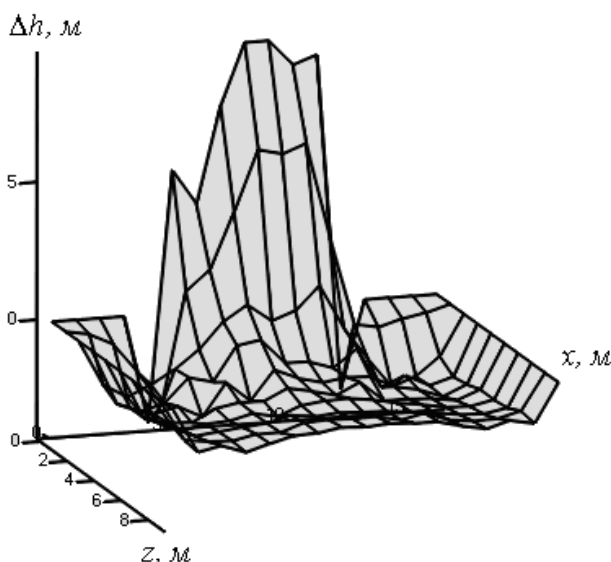


Рис. 3.59. Графік різниці між полями надлишкових напорів в ґрунті зображених на рис. 3.53 та рис. 3.57

Приклад 3.9.

1. Розмірність задачі: $R=1$.

2. Область розв'язання задачі: Область фільтраційної консолидації масиву глинистого ґрунту товщиною $l = 24$ м (див. рис. 3.1.).

3. Чисельний метод: Чисельні розрахунки проведено методом радіальних базисних функцій з використанням мультіквадратичної РБФ та методом скінченних елементів з використанням кусково-лінійних та кусково-квадратичних базисних функцій.

Відрізок $[0; l]$ дискретизувався рівномірною вузловою сіткою, де h_m – крок дискретизації в методі скінченних елементів (МСЕ) (для кусково-лінійних базисних функцій); h_r – крок дискретизації в методі радіальних базисних функцій (РБФ); ε_Ω – значення параметра форми для внутрішніх вузлів; ε_∂ – значення параметра форми для граничних вузлів.

Параметр форми ε є важливим інструментом покращення точності апроксимації наближених розв'язків в методі РБФ. Щодо рекомендацій вибору вказаного параметра можна виділити роботу [345]. Так $\varepsilon_\Omega \approx \sqrt{N}/5$, $\varepsilon_\partial \approx 0.1\varepsilon_\Omega$. Тут N – загальна кількість всіх вузлів. Рекомендації щодо вибору значень параметра форми також наведено в роботах [327, 335, 346, 338].

Проблема при практичній реалізації класичних схем МСЕ – осциляції наближених розв’язків в задачах тепломасоперенесення у випадку домінування конвективного члена переносу над дифузійним. Для стабілізації чисельних розв’язків рівнянь тепломасоперенесення використано протипотокову схему Петрова–Гальоркіна. Одним із питань застосування стабілізаційних схем МСЕ є вибір стабілізаційних параметрів. В роботах [28, 241] параметр $\tau_e^{(T)}$ вибирався з

наступних умов: $\tau_e^{(T)} = \frac{h_m}{a \|\rho c_p u\|_{\infty, e}} \gamma(Pe_T)$, $a = 1.44$, $\gamma(z) = \begin{cases} z, & 0 \leq z \leq 1; \\ 1, & 1 \leq z < \infty. \end{cases}$ Тут:

$Pe_c = \frac{1}{2} h_m \frac{\|u\|_{\infty, e}}{\|D_c\|_{\infty, e}}$, $Pe_T = \frac{1}{2} h_m \frac{\|\rho c_p u\|_{\infty, e}}{\|\lambda\|_{\infty, e}}$ – сіткові числа Пекле рівнянь

тепломасоперенесення. Аналогічне правило запропоновано в [380], лише $a = 2$,

$\gamma(z) = \begin{cases} 0, & 0 \leq z < 1; \\ 1, & 1 \leq z < \infty. \end{cases}$ Правила вибору стабілізаційних параметрів наведено також

в роботах [30, 288, 318, 394, 395].

4. С х е м а д и с к р е т и з а ц і ї в ч а с і: Час, протягом якого досліджували процес консолідації, дорівнює 1 рік. Для дискретизації в часі використано повністю неявну лінеаризовану різницеву схему з кроком $\tau = 30$ діб.

5. В п л и в м а с о п е р е н е с е н н я: Враховувався через явище хімічного осмосу зі сталим коефіцієнтом $k_{11}^{(c)} = 2.8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^5 / \text{кг} \cdot \text{доба}$ та через залежність коефіцієнта фільтрації від концентрації порового сольового розчину. Параметри масоперенесення: $D_{11} = 0.02 \text{ м}^2 / \text{доба}$.

6. В п л и в т е п л о п е р е н е с е н н я: Враховувався через явище термічного осмосу зі сталим коефіцієнтом $k_{11}^{(T)} = 2.8 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}^2}{\text{град} \cdot \text{доба}}$, явище термодифузії зі сталим коефіцієнтом $D_{11}^{(T)} = 0.002 \text{ кг} / (\text{м} \cdot \text{доба} \cdot ^\circ \text{C})$. Параметри

теплоперенесення: $\lambda_{11} = 108 \frac{\text{кДж}}{\text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба}}, \quad c_\rho = 4,2 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{град}},$

$$c_T = 2137 \frac{\text{кДж}}{\text{м}^3 \cdot \text{град}}, \quad \rho = 1100 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

7. Вплив наявності солей в рідкій та твердій фазах на рівняння нерозривності: Не враховувався.

8. Вплив термічного розширення фаз ґрунту: Не враховувалось.

9. Наявність газу: Не враховувався.

10. Залежність коефіцієнта фільтрації від надлишкових напорів, температури та концентрації солей в рідкій фазі: Коефіцієнт фільтрації покладался незалежним від функції надлишкових напорів. Для випадку постійного коефіцієнта фільтрації $k_{11}^{(h)} = k_{20} = 10^{-3} \frac{\text{м}}{\text{доба}}$. Залежність $k_{11}^{(h)} = k(c, T)$ визначалася шляхом апроксимації функції $k(c, T)$ радіальними базисними функціями [300, 340, 402] аналогічно прикладу 3.1.

11. Повзучість скелету ґрунту: Враховувалась при параметрах повзучості $a_0 = 0 \frac{\text{м}^2}{\text{кг}}, a_1 = 2 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}^2}{\text{кг}}, \beta_1 = 10^{-2} \text{доба}^{-1}$.

12. Масообмінні процеси: Не враховувались і коефіцієнт швидкості масообміну $\gamma_1 = 0 \text{доба}^{-1}$.

13. Граничні умови:

$$h|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad c|_{x=0} = C_m, \quad q_c|_{x=l} = 0, \quad T|_{x=0} = T_{\max}, \quad q_T|_{x=l} = 0,$$

де $C_m = 350 \frac{\text{г}}{\text{літр}}, T_{\max} = 30^\circ \text{C}$.

14. Початкові умови: Початковий розподіл концентрації солей

$$c_0(x) = \begin{cases} C_m, & x = 0, \\ 5 \text{г/літр}, & x \neq 0, \end{cases}, \quad \text{а температури} - T_0(x) = \begin{cases} T_{\max}, & x = 0, \\ 4^\circ \text{C}, & x \neq 0. \end{cases} \quad \text{Вважалось, що на}$$

верхню межу ґрунту миттєво прикладається зовнішнє навантаження

інтенсивністю $q = 20 \cdot 10^4 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{доба}^2}$. Тому початковий розподіл напорів $h_0(x)$

визначався згідно формули (2.28) при $\gamma = 10^4 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{доба}^2}$.

15. Основні завдання чисельного експерименту: Порівняння наближених розв'язків, отриманих різними чисельними методами. Для оцінки якості співпаданя двох наближених розв'язків $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ (при $t = t_s = s \cdot \tau$) крайової задачі використана максимальна відносна похибка

$$\max_{1 \leq i \leq N} \frac{|u_1(x_i, t_s) - u_2(x_i, t_s)|}{|u_1(x_i, t_s)|} 100\% \quad (\text{при умові } u_1(x_i, t_s) \neq 0). \quad \text{В якості дискретної}$$

множини точок x_i вибирались, як правило, вузли в МСЕ. Також в знаменнику може стояти $u_2(x, t)$. Однак, при «належному» співпаданні функцій $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ це мало впливає на величину похибки.

Окрім вказаної, також використано ще наступні оцінки для похибок:

$$\text{середня відносна похибка } \bar{v}^{(s)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^{(s)}, \quad \text{де } v_i^{(s)} = \frac{|u_1(x_i, t_s) - u_2(x_i, t_s)|}{|u_1(x_i, t_s)|} 100\% \quad -$$

відносна похибка у вузлі x_i на часовому шарі під номером s ;

$$\text{середньоквадратична відносна похибка } v^{(s)} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (v_i^{(s)})^2}; \quad \text{інтегральна}$$

$$\text{похибка } p^{(s)} = \frac{1}{l} \int_0^l |u_1(x, t_s) - u_2(x, t_s)| dx. \quad \text{Інтегральна похибка не є відносною. Вона}$$

характеризує середню висоту криволінійної трапеції між графіками наближених розв'язків. Замість l в знаменнику при визначенні $p^{(s)}$ має стояти $l(u_1(x, t_s))$ або $l(u_2(x, t_s))$ – довжини відповідних дуг кривих. Оскільки $l(u_i(x, t_s)) \geq l$, $i = 1, 2$, то величина $p^{(s)}$, обчислена згідно вищевказаної формули, буде дещо завищеною.

Результати чисельних експериментів наведено в табл. 3.4–3.18 та на рис. 3.60–3.63 при $t = 360 \text{ діб}$. В таблицях номери рядків відповідають степеням базисних функцій МСЕ, а номери стовпці мають наступні значення: 1 –

інтегральна похибка; 2 – середня відносна похибка; 3 – середньоквадратична відносна похибка; 4 – максимальна відносна похибка; 5 – точка досягнення максимальної відносної похибки.

Табл. 3.4–3.12 та рис. 3.60–3.63 відповідають $D = 2 \cdot 10^{-2} \frac{м^2}{доба}$.

Перша проблема, з якою стикаються при реалізації методу РБФ – це точність апроксимації граничних умов другого та третього родів. Дана проблема відображена на рис. 3.60 та у відповідній табл. 3.4. Як видно, біля нижньої межі наближений розв’язок згідно методу РБФ, який відповідає концентрації солей, стає меншим нуля. З фізичної точки зору такий наближений розв’язок є неприйнятним. Способів вирішення вказаної проблеми методу РБФ загалом є кілька. Серед них виділимо: 1) згущення вузлової сітки; 2) вибір параметра форми – його змінні значення для внутрішніх та граничних вузлів; 3) використання в якості вузлових та коллокаційних різних множин точок. При цьому коллокаційних точок має бути набагато більше за вузлових і вузлові точки є лише внутрішніми. В даному випадку отримаємо перевизначені СЛАР; 4) вибір вузлових точок за межами області, в якій розв’язується задача. Розглянемо результати розв’язання вказаної задачі при використанні перших двох способів.

Табл. 3.5 та табл. 3.6 відповідають першому способу вирішення вказаної проблеми. При $N = 121$ (табл. 3.6) відносна похибка в точці $x = 24$ м складає 14,2% (в табл. 3.4 – приблизно 430%).

Табл. 3.7–3.11 відповідають другому способу вирішення недостатньої точності апроксимації граничних умов другого роду в методі РБФ. Згідно значень похибок, він є ефективнішим за перший спосіб. Відмітимо, що параметр форми в табл. 3.7–3.10 для внутрішніх вузлів покладался рівним 1, а на межі – в сто разів меншим. Це не відповідає вимогам роботи [345]. В табл. 3.11 параметр форми вибирався згідно рекомендацій [345]. Похибки в цій таблиці набагато менші за аналогічні з табл. 3.9. Графіки на рис. 3.61–3.63 відповідають табл. 3.8–3.10. Видно, що візуально відрізнити відмінності між

наближеними розв'язками різними чисельними методами та при різних степенях базисних функцій МСЕ тут практично неможливо.

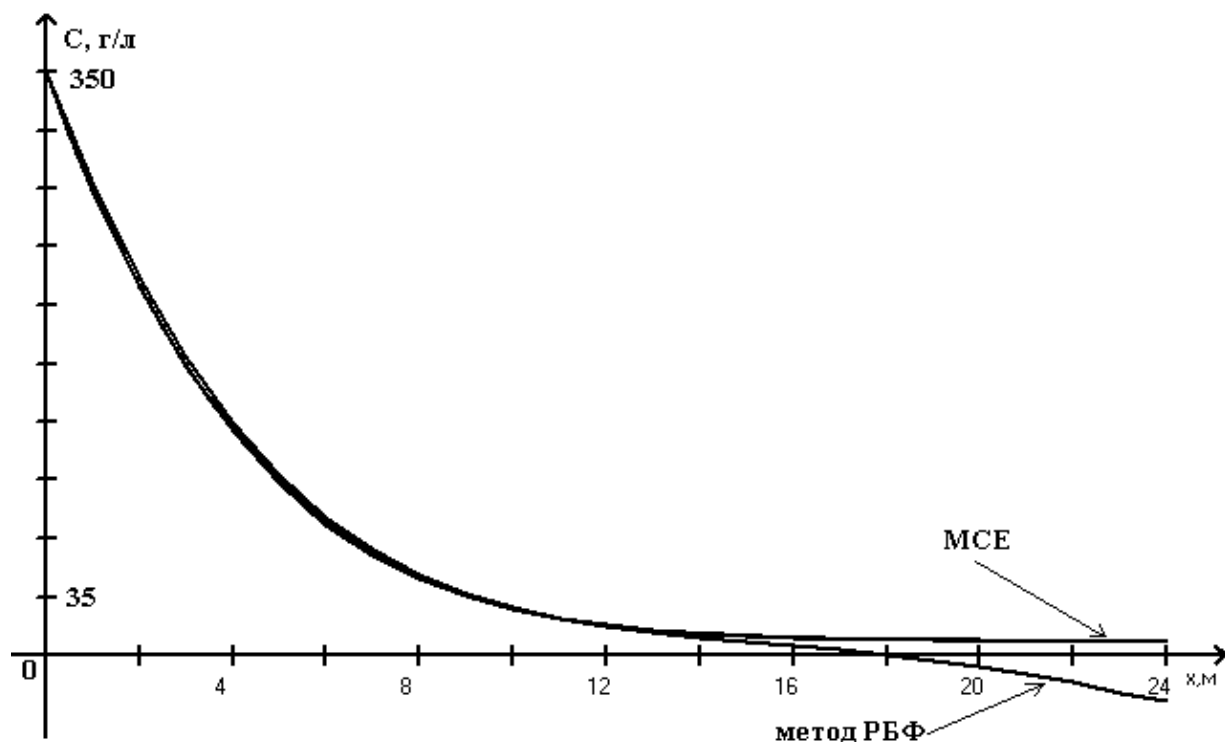


Рис. 3.60. Графік розподілу концентрації солей ($\varepsilon_{\Omega} = \varepsilon_{\partial} = 1$, $N = 25$, $h_m = h_r = 1$ м).

Як видно з табл. 3.4–3.11 та рис. 3.60–3.63 при $D = 2 \cdot 10^{-2}$ м²/доба осциляції в розв'язках задач тепломасоперенесення відсутні. При $D = 2 \cdot 10^{-3}$ м²/доба в розв'язках задачі масоперенесення, отриманих згідно МСЕ, в областях великих градієнтів напору ($0 \leq x \leq 3$ м) з'являються неприродні осциляції.

Табл. 3.4. Похибки між наближеними розв'язками на рис. 3.60

	1	2	3	4	5
1	8,18	76,07	146,2	429,30	24
2	7,60	73,08	140,9	428,64	24
3	7,41	72,10	139,1	428,54	24

Табл. 3.5. Похибки для концентрації солей ($\varepsilon = 1$, $N = 49$, $h_m = h_r = 0.5$ м)

	1	2	3	4	5
1	2,83	26,45	51,84	162,16	24
2	2,60	25,80	50,82	162,12	24
3	2,54	25,60	50,47	162,11	24

Табл. 3.6. Похибки для концентрації солей ($\varepsilon = 1, N = 121, h_m = h_r = 0.2 \text{ м}$)

	1	2	3	4	5
1	0,33	2,35	4,40	14,19	24
2	0,25	2,24	4,39	14,21	24
3	0,24	2,23	4,39	14,21	24

Табл. 3.7. Похибки для концентрації солей ($\varepsilon_\Omega = 1, \varepsilon_\delta = 0.01, N = 25, h_m = h_r = 1 \text{ м}$)

	1	2	3	4	5
1	1,44	2,99	3,76	6,47	10
2	1,04	2,15	2,21	3,57	10
3	0,91	1,91	1,92	2,98	9,67

Табл. 3.8. Похибки для концентрації солей ($\varepsilon_\Omega = 1, \varepsilon_\delta = 0.01, N = 121, h_m = h_r = 0.2 \text{ м}$)

	1	2	3	4	5
1	0,16	0,35	0,44	0,76	10,6
2	0,072	0,16	0,20	0,35	10,3
3	0,055	0,12	0,16	0,28	10,2

Табл. 3.9. Похибки для напорів ($\varepsilon_\Omega = 1, \varepsilon_\delta = 0.01, N = 121, h_m = h_r = 0.2 \text{ м}$)

	1	2	3	4	5
1	0,041	0,37	0,66	3,32	0,2
2	0,037	0,35	0,66	5,11	0,1
3	0,036	0,35	0,68	6,28	0,067

Табл. 3.10. Похибки для температури ($\varepsilon_\Omega = 1, \varepsilon_\delta = 0.01, N = 121, h_m = h_r = 0.2 \text{ м}$)

	1	2	3	4	5
1	0,11	0,19	0,20	0,36	6,4
2	0,051	0,093	0,093	0,17	7,0
3	0,037	0,071	0,071	0,13	7,067

Табл. 3.11. Похибки для напорів ($\varepsilon_\Omega = 2, \varepsilon_\delta = 0.2, N = 121, h_m = h_r = 0.2 \text{ м}$)

	1	2	3	4	5
1	0,043	0,34	0,52	2,15	0,6
2	0,038	0,31	0,46	2,09	0,5
3	0,037	0,30	0,46	2,07	0,53

Табл. 3.12. Похибки для напорів ($\varepsilon_\Omega = 1, \varepsilon_\delta = 0.01, N = 121, h_m = h_r = 0.2 \text{ м}, a = 5$)

	1	2	3	4	5
1	0,10	2,24	5,76	34,29	0,20
2	0,14	2,84	6,65	34,23	0,20
3	0,13	2,72	6,22	31,01	0,067

Табл. 3.13. Похибки для напорів ($\varepsilon_\Omega = 1, \varepsilon_\delta = 0.01, N = 121, h_m = h_r = 0.2 \text{ м}, a = 3$)

	1	2	3	4	5
1	0,19	3,67	8,59	40,23	0,20
2	0,19	3,57	8,04	37,56	0,20
3	0,18	3,45	7,69	34,29	0,20

Табл. 3.14. Похибки для напорів ($\varepsilon_\Omega = 1,$

Табл. 3.15. Похибки для напорів

$\varepsilon_{\partial} = 0.01$, $N = 121$, $h_m = h_r = 0.2$ м,
 $a = 1.5$)

	1	2	3	4	5
1	0,31	5,26	11,62	46,03	0,40
2	0,27	4,80	10,45	42,59	0,30
3	0,26	4,66	10,17	41,15	0,20

($\varepsilon_{\Omega} = 1$, $\varepsilon_{\partial} = 0.01$, $N = 241$, $h_m = h_r = 0.1$ м,
 $a = 3$)

	1	2	3	4	5
1	0,085	2,23	6,43	53,76	0,10
2	0,083	2,16	6,51	76,18	0,05
3	0,081	2,12	6,52	87,87	0,033

Табл. 3.16. Похибки для напорів ($\varepsilon_{\Omega} = 1$,
 $\varepsilon_{\partial} = 0.01$, $h_r = 0.1$ м, $h_m = 0.0025$, $x \leq 1$ м;
 $h_m = 0.1$, $x > 1$ м)

	1	2	3	4	5
1	0,032	10,15	21,44	114,31	0,0025
2	0,028	10,29	21,61	114,87	0,00125
3	0,028	10,32	21,66	115,01	0,00083

Табл. 3.17. Похибки для напорів
($D = 1 \cdot 10^{-3} \frac{M^2}{\partial o b a}$, $\varepsilon_{\Omega} = 1$, $\varepsilon_{\partial} = 0.01$,
 $N = 241$, $h_m = h_r = 0.1$ м, $a = 3$)

	1	2	3	4	5
1	0,124	3,29	9,23	60,41	0,10
2	0,123	3,32	9,28	63,65	0,05
3	0,120	3,32	9,35	65,11	0,033

Табл. 3.18. Похибки для напорів ($D = 2 \cdot 10^{-4} \frac{M^2}{\partial o b a}$, $\varepsilon_{\Omega} = 4.4$, $\varepsilon_{\partial} = 0.44$,
 $h_r = 0.05$ м, $h_m = 0.1$ м, $a = 3$)

	1	2	3	4	5
1	0,137	2,84	8,34	83,72	0,10
2	0,145	3,24	9,75	108,34	0,05
3	0,133	3,04	9,68	119,20	0,033

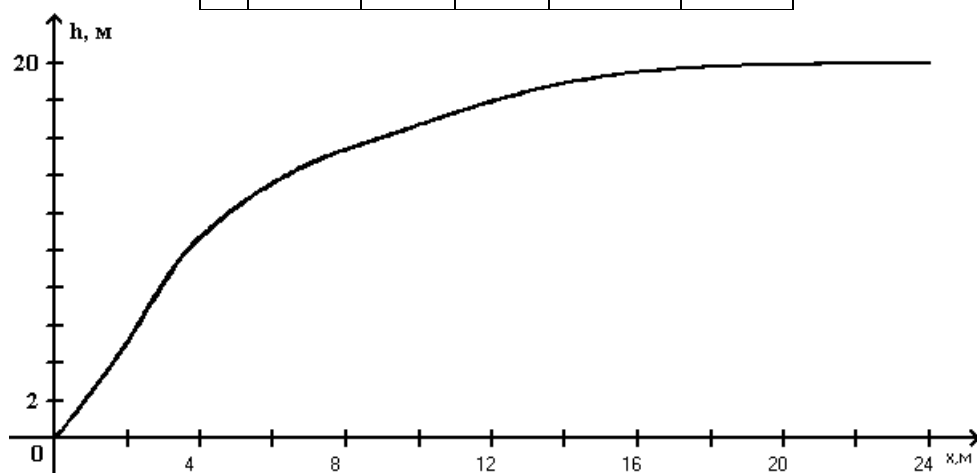


Рис. 3.61. Розподіл надлишкових напорів у масиві ґрунту

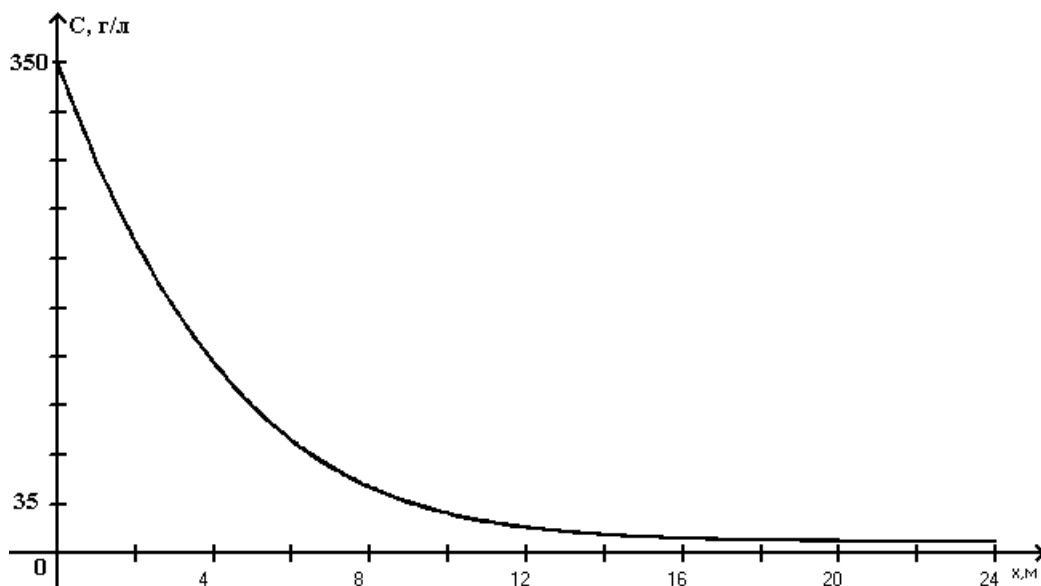


Рис. 3.62. Розподіл концентрації солей у масиві ґрунту

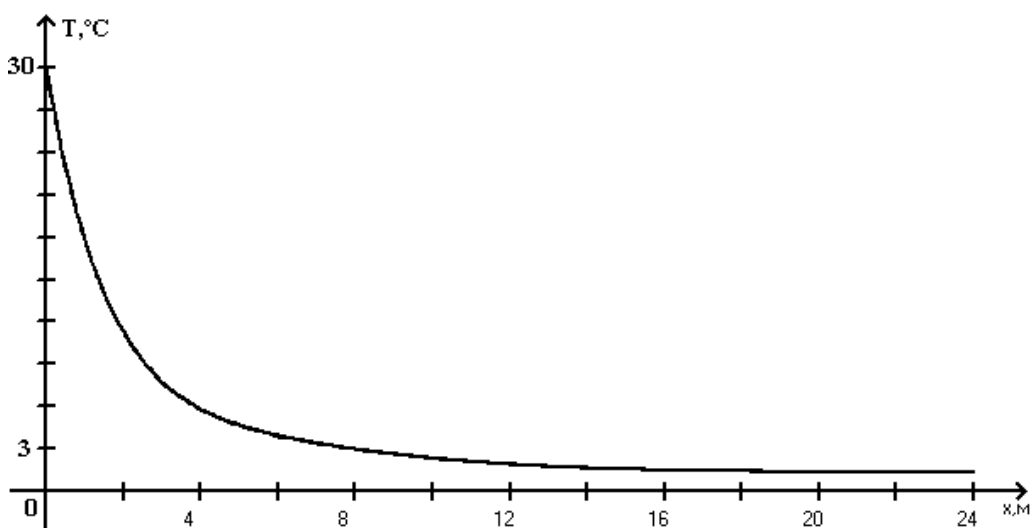


Рис. 3.63. Розподіл температури у масиві ґрунту

В табл. 3.12–3.16 $D = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{доба}$. Табл. 3.12–3.15 відповідають використанню для рівнянь тепломасоперенесення в МСЕ протипотокової стабілізаційної схеми Петрова–Гальоркіна. При стабілізаційному параметрі більшому за 3 похибки зменшуються (див. табл. 3.12), однак при його значеннях більших за 5 в розв’язках знову з’являються осциляції. При стабілізаційному параметрі меншому значення 3 стійкість розв’язків зростає, але зростають і похибки.

Цікаво порівняти значення в табл. 3.13 та 3.15. Для експерименту згідно табл. 3.15 крок дискретизації по змінній x в два рази менший за крок

відповідно табл. 3.13. Однак, максимальна відносна похибка (стовпець під номером 4) в табл. 3.15 набагато більша за відповідні значення табл. 3.13 і зростає при збільшенні степеня базисних функцій МСЕ. Хоча насправді, як показують числові значення інших типів похибок, ситуація прямо протилежна. Отже, максимальна відносна похибка не може виступати «надійним» критерієм співпадання наближених розв'язків. Якщо подивитись на стовпець під номером 5 табл. 3.15, то досягається вона в околі точки $x=0$ – там, де надлишкові напори є близькими до нуля.

Як видно з табл. 3.17 при зменшенні коефіцієнта дифузії (збільшення сіткового числа Пекле) похибки між наближеними розв'язками зростають. Загалом потрібно відмітити, що метод РБФ в даному контексті дає стійкіші розв'язки, аніж МСЕ. Це підтверджується і результатами роботи [192]. Однак, якщо зберігається співвідношення параметрів форми згідно табл. 3.15 або табл. 3.17, то при подальшому зменшенні кроку дискретизації h_r розв'язки, отримані методом РБФ втрачають стійкість.

Якщо ж при виборі параметрів форми слідувати рекомендаціям роботи [345] (див. табл. 3.18), то стійкість розв'язків методу РБФ зберігається. Хоча, знову ж, максимальні відносні похибки сягають ста і більше відсотків. Це ж саме стосується і похибок, якщо замість стабілізаційних схем МСЕ використовувати згущення сітки в областях великих сіткових чисел Пекле (див. табл. 3.16).

Приклад 3.10.

1. Розмірність задачі: $R=2$. Коефіцієнт бічного тиску $\xi=0.75$.

2. Область розв'язання задачі: Область фільтраційної консолідації масиву глинистого ґрунту прямокутної форми при $l=10$ м, $b=10$ м, $a=5$ м (рис.3.64).

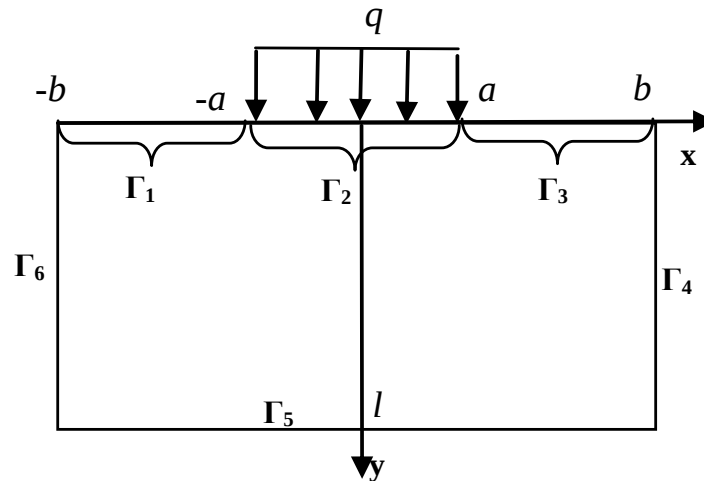


Рис.3.64. Область фільтраційної консолідації в прикладі 3.10

3. Чисельний метод: Чисельні розрахунки проведено методом радіальних базисних функцій з використанням мультіквадратичної РБФ та РБФ з компактним носієм [401]

$$\varphi^{[\alpha]}(r) = \left(1 - \frac{r}{\alpha}\right)_+^6 \left(35 \left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 + 18 \frac{r}{\alpha} + 3\right), \quad \alpha > 0.$$

Також обчислення проводились методом скінченних елементів.

4. Схема дискретизації в часі: Час, протягом якого досліджувався процес консолідації, дорівнює 1 рік. Для дискретизації в часі використано повністю неявну лінеаризовану різницеву схему з кроком $\tau = 10$ діб.

5. Вплив масоперенесення: Враховувався через явище хімічного осмосу зі сталими коефіцієнтами $k_{11}^{(c)} = k_{22}^{(c)} = 2.8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^5 / \text{кг} \cdot \text{доба}$, $k_{12}^{(c)} = k_{21}^{(c)} = 0 \text{ м}^5 / \text{кг} \cdot \text{доба}$ та через залежність коефіцієнта фільтрації від концентрації порового сольового розчину. Параметри масоперенесення: $D_{11}^{(c)} = D_{22}^{(c)} = 0.02 \text{ м}^2 / \text{доба}$, $D_{12}^{(c)} = D_{21}^{(c)} = 0 \text{ м}^2 / \text{доба}$.

6. Вплив теплоперенесення: Враховувався через явище термічного осмосу зі сталими коефіцієнтами $k_{11}^{(T)} = k_{22}^{(T)} = 2.8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{град} \cdot \text{доба}$,

$k_{12}^{(T)} = k_{21}^{(T)} = 0 \text{ м}^2 / \text{град} \cdot \text{доба}$, явище термодифузії зі сталими коефіцієнтами
 $D_{11}^{(T)} = D_{22}^{(T)} = 0.002 \text{ кг} / (\text{м} \cdot \text{доба} \cdot ^\circ \text{C})$, $D_{21}^{(T)} = D_{12}^{(T)} = 0 \text{ кг} / (\text{м} \cdot \text{доба} \cdot ^\circ \text{C})$. Параметри
 теплоперенесення: $\lambda_{11} = \lambda_{22} = 108 \text{ кДж} / \text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба}$, $\lambda_{12} = \lambda_{21} = 0 \text{ кДж} / \text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба}$,
 $c_\rho = 4.2 \text{ кДж} / \text{кг} \cdot \text{град}$, $c_T = 2137 \text{ кДж} / \text{м}^3 \cdot \text{град}$, $\rho = 1100 \text{ кг} / \text{м}^3$.

7. Вплив наявності солей в рідкій та твердій фазах на рівняння нерозривності: Не враховувався.

8. Вплив термічного розширення фаз ґрунту: Не враховувалося.

9. Наявність газу: Не враховувався.

10. Залежність коефіцієнта фільтрації від надлишкових напорів, температури та концентрації солей в рідкій фазі: Коефіцієнт фільтрації покладался незалежним від функції надлишкових напорів. Для випадку постійного коефіцієнта фільтрації

$$k_{11}^{(h)} = k_{22}^{(h)} = k_{20} = 10^{-3} \frac{\text{м}}{\text{доба}}, \quad k_{21}^{(h)} = k_{12}^{(h)} = k_{20} = 0 \frac{\text{м}}{\text{доба}}. \quad \text{Залежність}$$

$k_{11}^{(h)} = k_{22}^{(h)} = k(c, T)$ визначалася шляхом апроксимації функції $k(c, T)$ радіальними базисними функціями [300, 340, 402] аналогічно прикладу 3.1.

11. Повзучість скелету ґрунту: Враховувалась при параметрах повзучості $a_0 = 0 \frac{\text{м}^2}{\text{кг}}$, $a_1 = 5.12 \cdot 10^{-7} \frac{\text{м}^2}{\text{кг}}$, $\beta_1 = 10^{-4} \text{ доба}^{-1}$.

12. Масообмінні процеси: Не враховувались і коефіцієнт швидкості масообміну $\gamma_1 = 0 \text{ доба}^{-1}$.

13. Граничні умови: Межі Γ_2 та Γ_5 непроникні, а межі Γ_1 , Γ_3 дренавані. Межі Γ_4 та Γ_6 є межами симетрії.

14. Початкові умови: Початковий розподіл концентрації солей
 $c_0(x, y) = \begin{cases} C_m, & (x, y) \in \Gamma_1; \\ 8 \text{ г/л}, & (x, y) \notin \Gamma_1; \end{cases} \quad \text{а температури} \quad T_0(x, y) = \begin{cases} 30^\circ \text{C}, & (x, y) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_3; \\ 4^\circ \text{C}, & (x, y) \notin \Gamma_1 \cup \Gamma_3. \end{cases}$

Початковий розподіл напорів $h_0(x, y)$ визначався, як в прикладі 3.7, де зовнішнє навантаження інтенсивністю $q = 10^5 \text{ Н/м}^2$ вважалось миттєво прикладеним та незмінним в часі.

15. Основні завдання чисельного експерименту: Порівняти наближені розв'язки крайової задачі, отримані МСЕ та методом РБФ. Для оцінки якості співпадання двох наближених розв'язків $u_1(\mathbf{X}, t)$, $u_2(\mathbf{X}, t)$ (при $t = t_s = s \cdot \tau$) крайової задачі використана максимальна відносна

похибка $\max_{1 \leq i \leq M} \frac{|u_1(\mathbf{X}_i, t_s) - u_2(\mathbf{X}_i, t_s)|}{|u_1(\mathbf{X}_i, t_s)|} 100\%$ (при умові $u_1(\mathbf{X}_i, t_s) \neq 0$). В якості

дискретної множини точок $\mathbf{X}_i$ вибирались, як правило, вузли в МСЕ. Також в знаменнику може стояти $u_2(\mathbf{X}, t)$. Однак, при «належному» співпаданні функцій $u_1(\mathbf{X}, t)$, $u_2(\mathbf{X}, t)$ це мало впливає на величину похибки. Окрім вказаної,

використані ще наступні оцінки для похибок: середня відносна похибка

$$\bar{v}^{(s)} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M v_i^{(s)}, \text{ де } v_i^{(s)} = \frac{|u_1(\mathbf{X}_i, t_s) - u_2(\mathbf{X}_i, t_s)|}{|u_1(\mathbf{X}_i, t_s)|} 100\% - \text{відносна похибка у вузлі } \mathbf{X}_i$$

на часовому шарі під номером s ; середньоквадратична відносна похибка

$$v^{(s)} = \sqrt{\frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (v_i^{(s)})^2}.$$

Результати чисельних експериментів наведені на рис. 3.65–3.70 при $t = 300$ діб та у відповідних табл. 3.19–3.22. В табл. 3.19 наведено параметри чисельних експериментів.

Для вирішення проблеми точності апроксимації граничних умов другого та третього родів в методі РБФ увага зосереджена на третьому способі [359] (див. приклад 3.9) – використання в якості вузлових та коллокаційних різних множин точок. При цьому коллокаційних точок має бути набагато більше за вузлових і вузлові точки є лише внутрішніми. Причини вибору саме цього способу наступні: 1) Перший спосіб (згущення вузлової сітки) вирішення вказаної проблеми є дуже ресурсоемким; 2) Згідно другого способу в роботі [345] дану

проблему запропоновано вирішити через вибір параметра форми ε для мультিকвадратичної РБФ. Так $\varepsilon_{\Omega} \approx \sqrt{N}/5$, $\varepsilon_{\Gamma} \approx 0.1\varepsilon_{\Omega}$. Тут N – загальна кількість всіх вузлів у вузловому покритті замикання $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ області Ω ; ε_{Ω} – значення параметрів форми для внутрішніх вузлів; ε_{Γ} – значення параметрів форми для граничних вузлів. Якщо в одновимірному випадку цей метод дав прийнятні результати (див. приклад 3.9), то в двовимірному отримані розв’язки значно відрізняються від розв’язків згідно методу скінченних елементів (МСЕ). Крім того, перестає виконуватись принцип максимуму для параболічних рівнянь. При вказаному співвідношенні параметрів форми зростає число обумовленості матриці СЛАР і отримується «пилкоподібний» розв’язок.

Також відмітимо, що в даному прикладі параметри тепломасоперенесення вибирались для уникнення осциляцій в наближених розв’язках МСЕ.

Як видно з рис. 3.68–3.70 найбільші абсолютні похибки виникають в околах кутових точок прикладеного навантаження. В цих точках відбувається «стик» меж, на яких для шуканих функцій задаються граничні умови різних типів. Оскільки метод РБФ використаного типу (на основі методу колокації в точці) дозволяє шукати наближений класичний розв’язок, то, можливо, в околах кутових точок цей розв’язок не володіє потрібним запасом диференційованості. Саме цим можна пояснити найбільші похибки в околах вказаних точок. Загалом, аналізуючи літературу з методу РБФ, маємо підтвердження висновків інших авторів – найбільші похибки даний метод дає саме при апроксимації граничних умов другого та третього родів.

Як видно з табл. 3.20–3.22 на величини похибок значно впливає параметр форми (при використанні мультিকвадратичної РБФ). При цьому максимальні відносні похибки можуть сягати значних величин. Тому при наявності кутових точок більш інформативними є середня відносна та середньоквадратична відносна похибки. Збільшення кількості вузлових та колокаційних точок не завжди приводить до зменшення похибки. В той же час, при використанні РБФ з компактним носієм спостерігається тенденція до зменшення похибок при

зростанні кількості вузлових та колокаційних точок. При збільшенні радіуса компактного носія – похибки зменшуються, а при зменшенні – збільшуються.

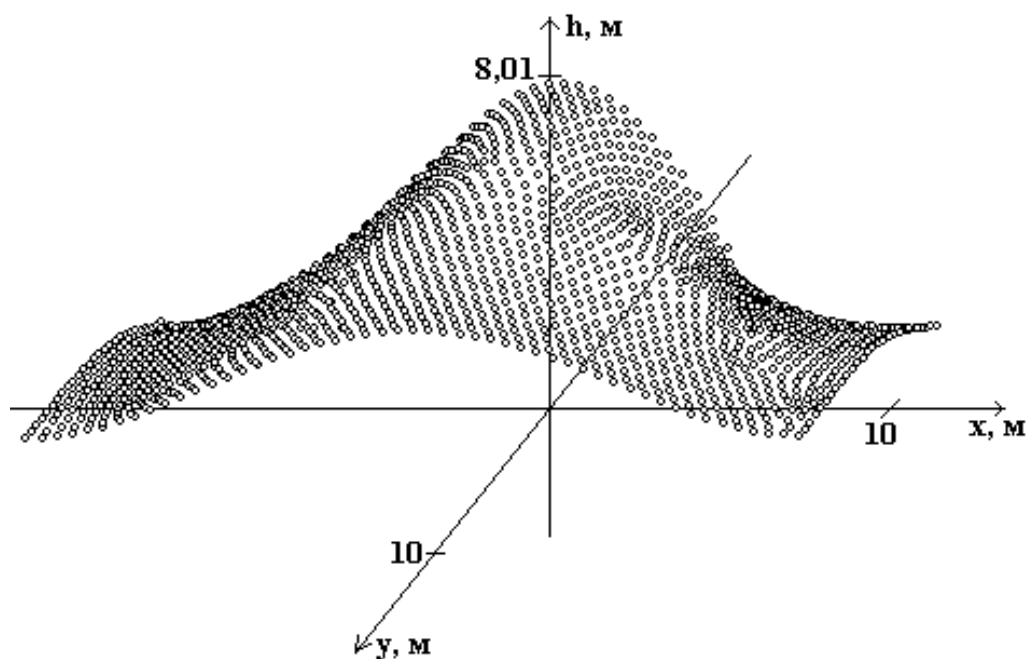


Рис. 3.65. Розподіл надлишкових напорів у масиві ґрунту

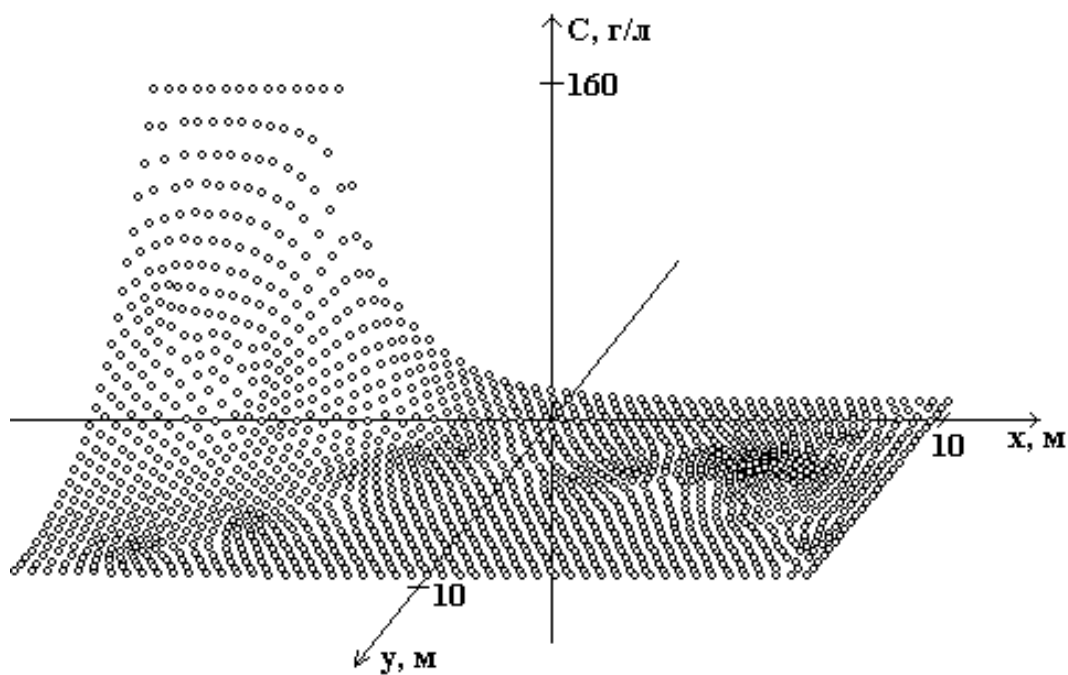


Рис. 3.66. Розподіл концентрації солей в поровому розчині

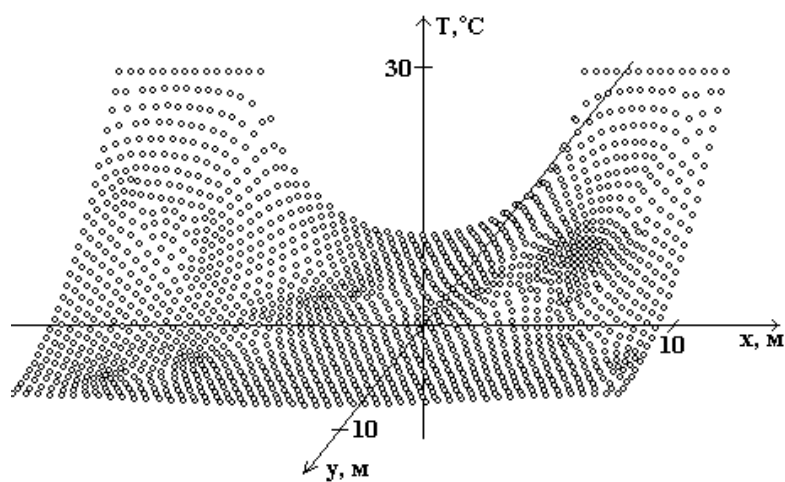


Рис. 3.67. Розподіл температури у масиві ґрунту

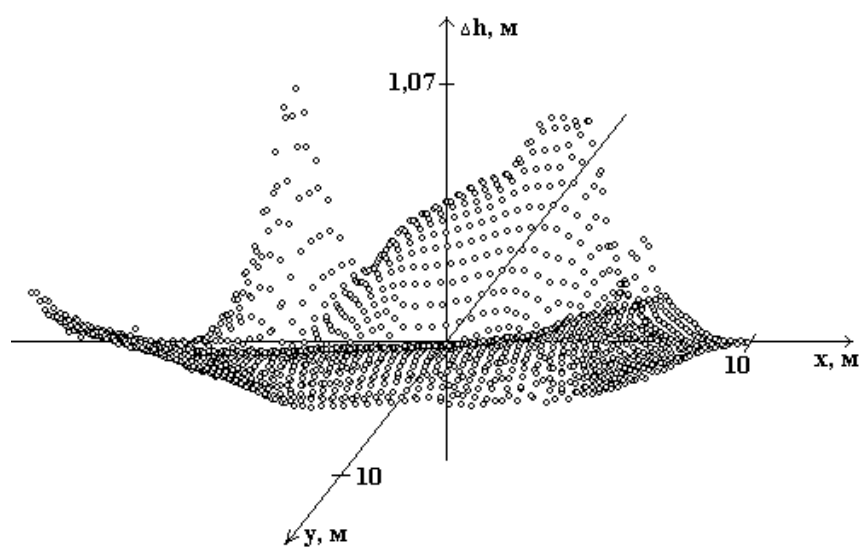


Рис. 3.68. Розподіл різниці надлишкових напорів у масиві ґрунту

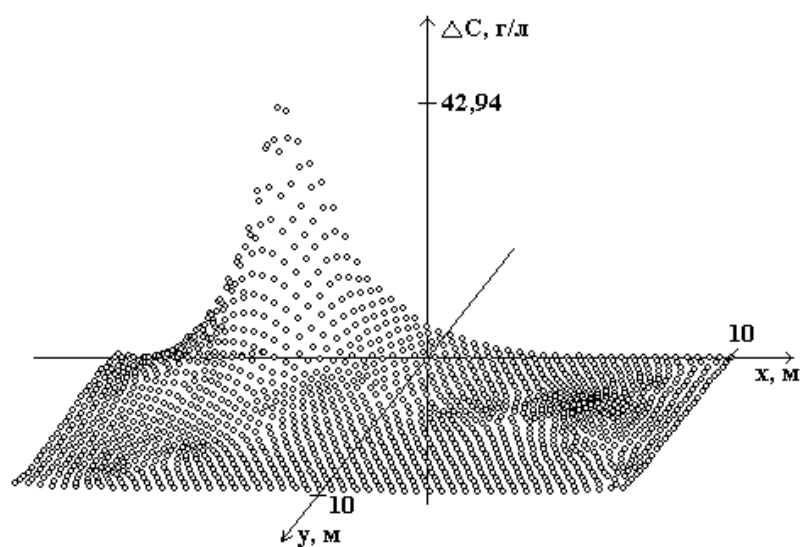


Рис. 3.69. Розподіл різниці концентрації солей в поровому розчині

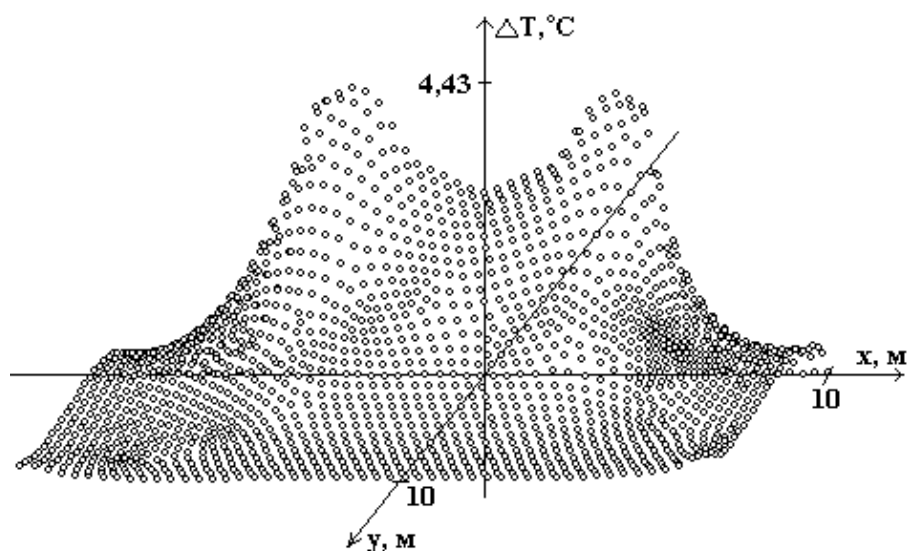


Рис. 3.70. Розподіл різниці температури у масиві ґрунту

Табл. 3.19. Параметри чисельних експериментів в прикладі 3.10

№ чисель- ного експери- менту	Степінь базисних функцій в МСЕ	Радіальна базисна функція	Кількість вузлів в МСЕ	Кількість вузлів в методі РБФ	Кількість коло- каційних точок в методі РБФ
1	2	мульти- квадратична, $\varepsilon = 2$	1695	808	1695
2	2	мульти- квадратична, $\varepsilon = 2$	2139	1024	2139
3	2	мульти- квадратична, $\varepsilon = 1$	2139	1024	2139
4	2	мульти- квадратична, $\varepsilon = 3$	2139	1024	2139
5	2	РБФ з компактним носієм, $\alpha = 10$	1695	808	1695
6	2	РБФ з компактним носієм, $\alpha = 10$	2139	1024	2139
7	2	РБФ з компактним носієм, $\alpha = 10$	2878	1017	2878

Табл. 3.20. Похибки для напорів в прикладі 3.10

№ чисельного експерименту	Максимальна відносна похибка (%)	Середня відносна похибка (%)	Середньоквадратична відносна похибка (%)
1	31,67	7,65	10,48
2	32,55	8,28	10,95
3	29,68	9,27	11,62
4	39,39	9,15	12,77
5	27,30	4,64	5,75
6	24,84	3,91	4,96
7	23,58	3,00	4,57

Табл. 3.21. Похибки для концентрації солей в прикладі 3.10

№ чисельного експерименту	Максимальна відносна похибка (%)	Середня відносна похибка (%)	Середньоквадратична відносна похибка (%)
1	63,19	12,80	18,08
2	66,24	9,73	12,98
3	49,16	8,69	12,95
4	91,52	16,35	22,95
5	68,91	10,39	16,66
6	65,02	10,08	16,44
7	63,15	10,02	16,24

Табл. 3.22. Похибки для температури в прикладі 3.10

№ чисельного експерименту	Максимальна відносна похибка (%)	Середня відносна похибка (%)	Середньоквадратична відносна похибка (%)
1	20,39	4,98	6,10
2	19,65	5,03	5,99
3	19,90	7,69	9,23
4	19,67	5,28	6,51
5	30,22	12,43	13,93
6	27,63	11,66	13,13
7	26,34	11,28	12,66

Приклад 3.11.

1. Розмірність задачі: $R=2$. Коефіцієнт бічного тиску $\xi = 0.75$.

2. Область розв'язання задачі: Область фільтраційної консолідації масиву глинистого ґрунту прямокутної форми в основі гідротехнічної споруди зображена на рис. 3.4. при розмірах $l=10$ м, $s=0$ м, $b=10$ м, $l_1=-5$ м, $l_2=5$ м.

3. Чисельний метод: Чисельні розрахунки проведено методом радіальних базисних функцій. Кількість вузлів – 456, коллокаційних точок – 1071. В якості базисної використовувалась мультиквадратична радіальна функція з параметрами форми $\varepsilon_h = \varepsilon_c = \varepsilon_T = 0.425$.

4. Схема дискретизації в часі: Для дискретизації в часі використано схему предиктор–коректор з рівномірним кроком за часом $\tau = 30$ діб.

5. Вплив масоперенесення: Враховувався через явище хімічного осмосу зі сталими коефіцієнтами $k_{11}^{(c)} = k_{22}^{(c)} = 2.8 \cdot 10^{-5}$ м⁵/кг·доба, $k_{12}^{(c)} = k_{21}^{(c)} = 0$ м⁵/кг·доба та через залежність коефіцієнта фільтрації від концентрації порового сольового розчину. Параметри масоперенесення: $D_{11} = D_{22} = 0.002$ м²/доба, $D_{12} = D_{21} = 0$ м²/доба.

6. Вплив теплоперенесення: Враховувався через явище термічного осмосу зі сталими коефіцієнтами $k_{11}^{(T)} = k_{22}^{(T)} = 2.8 \cdot 10^{-6}$ м²/град·доба, $k_{12}^{(T)} = k_{21}^{(T)} = 0$ м²/град·доба та через залежність коефіцієнта фільтрації від температури пористого середовища. Також враховувалось явище термодифузії з коефіцієнтом $D_{11}^{(T)} = D_{22}^{(T)} = 0.002$ кг/(м·доба·°C),

$D_{21}^{(T)} = D_{12}^{(T)} = 0$ кг/(м·доба·°C). Параметри теплоперенесення:

$\lambda_{11} = \lambda_{22} = 108$ кДж/м·град·доба, $\lambda_{12} = \lambda_{21} = 0$ кДж/м·град·доба,

$c_\rho = 4.2$ кДж/кг·град, $c_T = 2137$ кДж/м³·град, $\rho = 1100$ кг/м³.

7. Вплив наявності солей в рідкій та твердій фазах на рівняння нерозривності: Не враховувалось.

8. Вплив термічного розширення фаз ґрунту: Не враховувалось.

9. Наявність газу: Не враховувалось. Ґрунт вважався двофазним при початковому значенні коефіцієнта пористості $e_0 = 0.62$.

10. Залежність коефіцієнта фільтрації від надлишкових напорів, температури та концентрації солей в рідкій фазі: Для коефіцієнта фільтрації використовувалась наступна залежність:

$$k_{11}^{(h)}(c, T, h) = k_{22}^{(h)}(c, T, h) = k(c, T) \cdot \exp(\beta \cdot (e - e_0)).$$

Тут $\beta = 12$. Множник $\exp(\beta \cdot (e - e_0))$ визначає ступінь впливу зміни коефіцієнта пористості на коефіцієнт фільтрації. Даний множник брався згідно роботи [111], де $k(e) = \alpha \cdot \exp(\beta \cdot e)$. Для випадку постійного коефіцієнта фільтрації

$$k_{11}^{(h)} = k_{22}^{(h)} = k_{20} = 10^{-3} \frac{M}{\text{доба}}. \quad \text{Залежність } k(c, T) \text{ визначалася шляхом}$$

апроксимації методом радіальних базисних функцій [300, 340, 402] аналогічно прикладу 3.1.

Коефіцієнт пористості покладался залежним від суми Θ головних напружень в скелеті ґрунту [111]

$$e(\Theta) = e_0 - c \cdot \ln(1 + b \cdot \Theta),$$

де $c = 6.2 \cdot 10^{-2}$, $b = 6.5 \cdot 10^{-5} \text{ Па}^{-1}$. Функція Θ визначалась з умов основної розрахункової моделі Флоріна [137, 263]

$$\Theta(x, y, t) = \Theta_0(x, y) - 2\gamma h(x, y, t).$$

11. Повзучість скелету ґрунту: Не враховувалась. Між сумою головних напружень та коефіцієнтом пористості приймалась лінійна залежність (2.9) у вигляді спрямленого відрізка компресійної кривої при $a = 5.12 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{Н}$.

12. Масообмінні процеси: Не враховувались і коефіцієнт швидкості масообміну $\gamma_1 = 0$ доба⁻¹.

13. Граничні умови:

$$(\mathbf{q}_c, \mathbf{n})|_{ADCB \cup AL_1 \cup L_2 B} = 0, \quad c|_{L_1 L_2} = C_m, \quad (\mathbf{q}_T, \mathbf{n})|_{ADCB} = 0, \quad T|_{AL_1 \cup L_2 B} = T_1, \quad T|_{L_1 L_2} = T_{\max},$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{DC \cup L_1 L_2} = 0, \quad h|_{DAL_1 \cup CBE_2} = H_1.$$

Тут $C_m = 160$ г/л, $T_{\max} = 50^\circ \text{C}$, $T_1 = 20^\circ \text{C}$, $H_1 = 0$ м.

14. Початкові умови: Початковий розподіл концентрації солей

$$c_0(x, y) = \begin{cases} C_m, & (x, y) \in L_1 L_2, \\ C_{\min}, & (x, y) \notin L_1 L_2; \end{cases} \quad \text{та температури } T_0(x, y) = \begin{cases} T_{\max}, & (x, y) \in L_1 L_2, \\ T_1, & (x, y) \in AL_1 \cup L_2 B, \\ T_{\min}, & (x, y) \notin AB. \end{cases} \quad \text{Тут:}$$

$C_{\min} = 8$ г/літр, $T_{\min} = 10^\circ \text{C}$. Початковий розподіл напорів визначався з умов, що в початковий момент часу весь тиск від прикладеного навантаження передається на порову рідину. Тоді [137, ст. 320] $h_0(x, y) = \frac{\Theta_0}{2\gamma}$. Сума Θ_0 головних напружень в скелеті ґрунту визначалась для півплощини згідно формули [137, ст. 171]

$$\Theta_0(x, y) = \frac{2q}{\pi} \left(\arctg \frac{a-x}{y} + \arctg \frac{a+x}{y} \right),$$

де $(-a)$ та a координати по x точок L_1 та L_2 відповідно (див. рис. 3.4); $q = 2,2 \cdot 10^5$ Па – величина миттєво прикладеного рівномірного навантаження.

15. Основні завдання чисельного експерименту: Дослідити вплив нелінійної залежності коефіцієнта фільтрації від напорів на розподіли надлишкових напорів в масиві ґрунту та порівняти їх з аналогічними розподілами без урахування вказаної нелінійної залежності. Тестовий приклад відповідає випадку фундаменту цеху хімічного виробництва з підвищеною температурою та витіканням хімічних речовин в ґрунтову основу споруди.

Результати чисельних експериментів в графічному вигляді представлені на рис. 3.71–3.74. Як видно з рис. 3.72, у випадку залежності $k(c, T, h)$ надлишкові

напори в масиві ґрунту розсіюються повільніше, аніж у випадку без урахування залежності коефіцієнта фільтрації від напору $h(x, y, t)$. Причому, максимальна різниця сягає 60 % від величини самих напорів. Зрозуміло, що нехтувати таким впливом при дослідженні процесів консолідації ґрунтових основ промислових та цивільних будівельних об'єктів не можна.

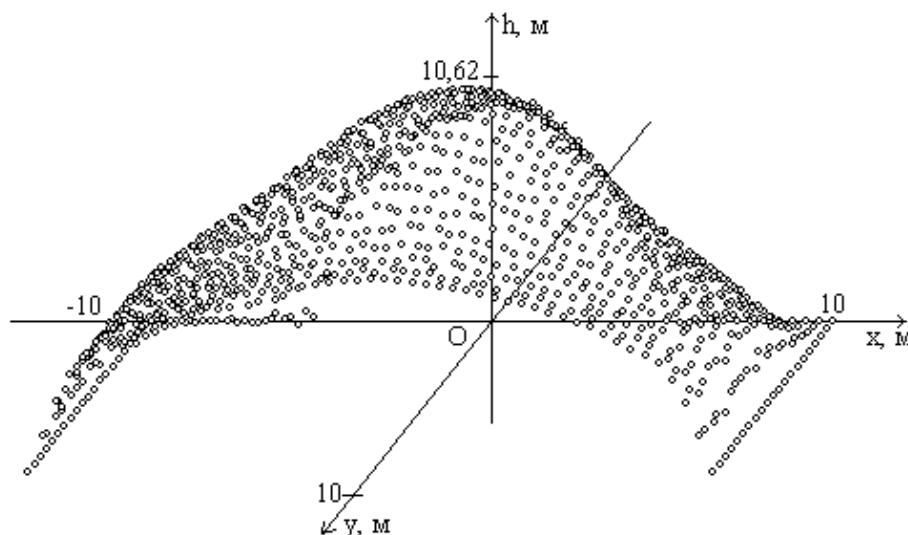


Рис. 3.71. Графік розподілу поля надлишкових напорів з урахуванням залежності $k(c, T, h)$ при $t=270$ діб

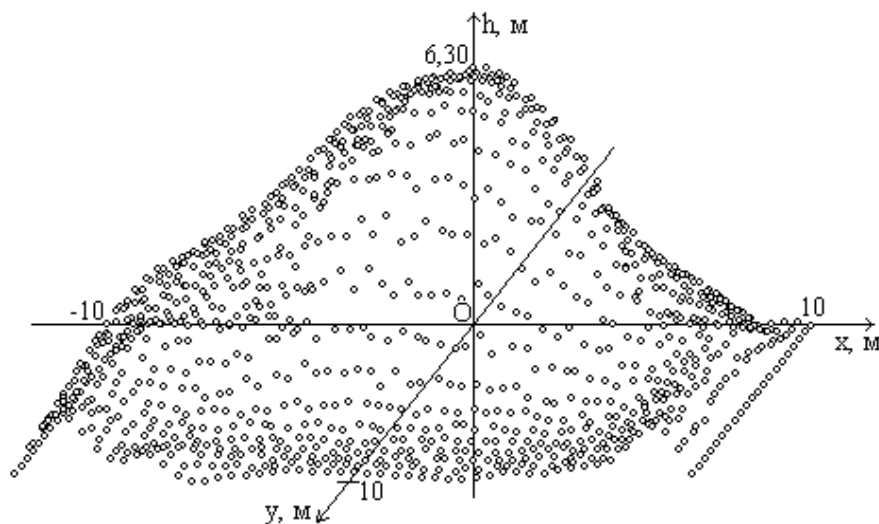


Рис. 3.72. Графік різниці між розподілом надлишкових напорів з урахуванням залежностей $k(c, T, h)$ та $k(c, T)$ при $t=270$ діб

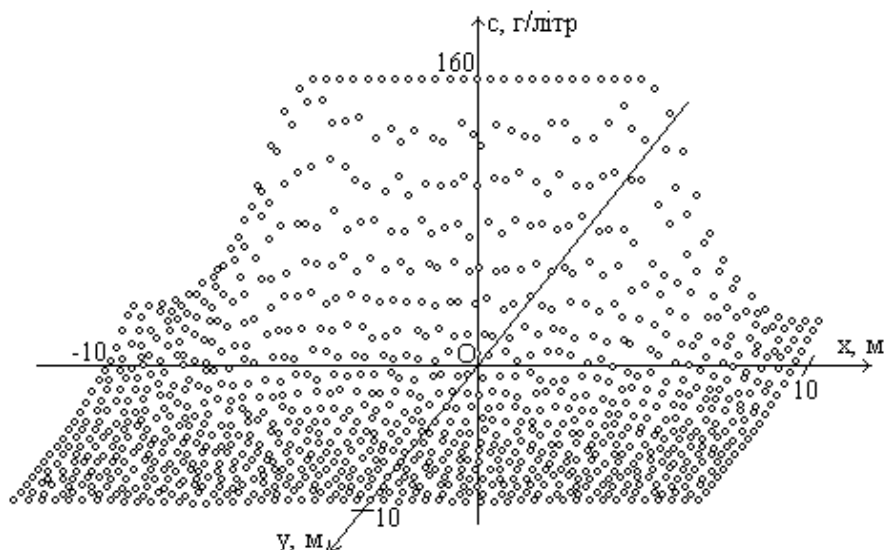


Рис. 3.73. Графік розподілу поля концентрації солей при $t=270$ діб

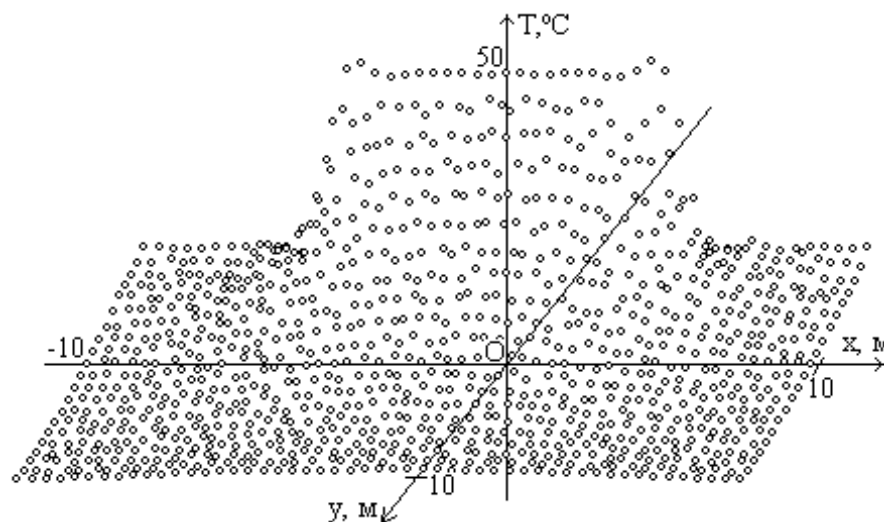


Рис. 3.74. Графік розподілу поля температури при $t=270$ діб

3.5. Прогнозування зсувних процесів ґрунтів в умовах впливу техногенних факторів

Розглянемо задачу сповзання масиву багатофазного глинистого ґрунту під дією власної ваги, змінних у часі граничних навантажень і напорів води. Нехай маємо нахилений до горизонту під кутом α масив ґрунту товщиною l . Початок координат поміщаємо на поверхні шару і направимо вісь z перпендикулярно до нього, а вісь x вздовж масиву ґрунту (рис 3.75). Для вирішення задачі приймемо такі спрощуючі припущення:

1. Основним фактором, що сприяє утворенню зсуву, є змінний у часі режим напірних вод.
2. Зовнішнє навантаження відсутнє (або миттєво прикладене).

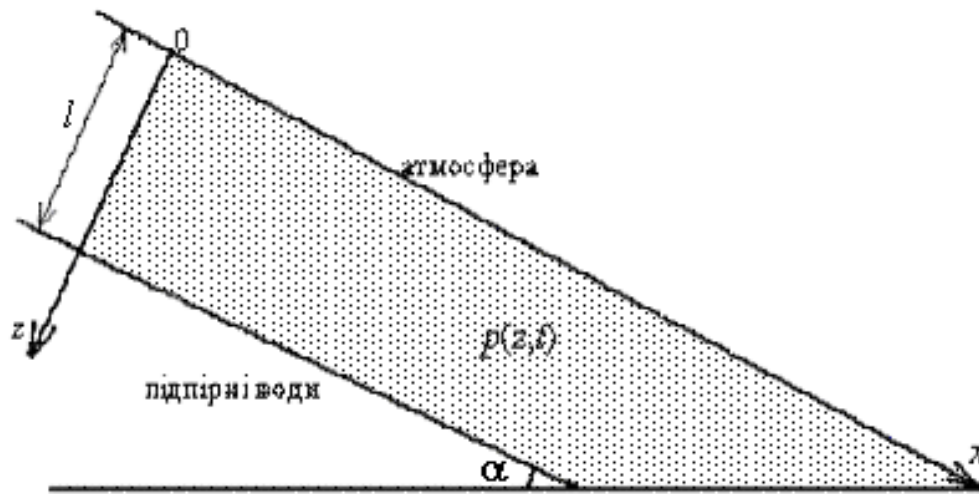


Рис. 3.75. Досліджуваний масив ґрунту на зсув

Для прогнозу зміщення масиву ґрунту потрібно визначити його напружено-деформівний стан, який згідно наших припущень залежить від надлишкових тисків (напорів) ґрунтових вод. Для визначення динаміки зміни цих тисків використаємо математичну модель фільтраційної консолідації, яка згідно розділу 2, описується наступною крайовою задачею:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1+e}{\gamma a \omega} \frac{\partial}{\partial z} \left(k_{11}^{(h)}(c, T, h) \frac{\partial h}{\partial z} - k_{11}^{(c)}(c) \frac{\partial c}{\partial z} - k_{11}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial z} \right), \quad (3.82)$$

$$n \frac{\partial c}{\partial t} + \gamma_1 (c - C_m) = \frac{\partial}{\partial z} \left(D_{11}(c, T, h) \frac{\partial c}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_{11}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial z} \right) - u \frac{\partial c}{\partial z}, \quad (3.83)$$

$$c_T \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_{11}(c) \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \rho c_\rho u \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (3.84)$$

$$u = -k_{11}^{(h)}(c, T, h) \frac{\partial h}{\partial z} + k_{11}^{(c)}(c) \frac{\partial c}{\partial z} + k_{11}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (3.85)$$

$$l_1 h(z, t)|_{z=0} = 0; \quad l_2 h(z, t)|_{z=l} = 0; \quad (3.86)$$

$$l_3 c(z, t)|_{z=0} = 0; \quad l_4 c(z, t)|_{z=l} = 0, \quad (3.87)$$

$$l_5 T(z, t)|_{z=0} = 0; \quad l_6 T(z, t)|_{z=l} = 0; \quad (3.88)$$

$$h(z,t)|_{t=0} = h_0(z), c(z,t)|_{t=0} = c_0(z), T(z,t)|_{t=0} = T_0(z), \quad z \in [0; l], \quad (3.89)$$

де $t \in [0, t_0)$, $z \in [0, l]$, $h_0(z), C_0(z), T_0(z)$ – задані функції; l_i , $i = \overline{1, 6}$, – оператори, які граничні умови для невідомих функцій.

В математичній моделі (3.82)–(3.89) між коефіцієнтом пористості та сумою головних напружень в ґрунті прийнята лінійна залежність (1.9). Також в рівнянні кінетики масообміну (2.23) покладено $\chi = 0$, що відповідає поверхневому засоленню пор ґрунту [101, 166].

Для обчислення зміщень точок розглядуваного масиву ґрунту скористаємось результатами робіт [253, 268]. В результаті маємо

$$V_x(z,t) = \frac{1}{\eta} \left((z-l)(q \cdot \sin \alpha - q \frac{1+2\xi}{3} \cos \alpha \operatorname{tg} \psi) - H(z-l) \operatorname{tg} \psi + \right. \\ \left. + (z^2 - l^2) \left(\frac{\gamma'}{2} \sin \alpha - \frac{\gamma'}{2} \frac{1+2\xi}{3} \cos \alpha \operatorname{tg} \psi \right) + \left(\int_0^l p \, ds - \int_0^z p \, ds \right) \operatorname{tg} \psi \right), \quad (3.90)$$

де $V_x(z,t)$ – швидкості зміщень точок масиву ґрунту; η – коефіцієнт вязкопластичного руху; H, ψ – параметри рівняння вязкопластичного руху; γ' – об'ємна вага ґрунту, зваженого у воді. Зауважимо, що (3.90) отримано з припущення виконання граничної умови Ньютона

$$V_x|_{z=l} = 0.$$

Рівність (3.90) визначає закономірність зміни швидкостей вязкопластичного руху в нахиленому пласті під дією власної ваги, змінних у часі граничних навантажень і напорів. Тиски $p(z,t)$ обчислюються, як розв'язки задачі фільтраційної консолідації.

Проведено два чисельних експерименти, результати яких наведено нижче.

Приклад 3.12.

1. Розмірність задачі: $R=1$.

2. Область розв'язання задачі: Область фільтраційної консолідації масиву глинистого ґрунту товщиною $l=10$ м (див. рис. 3.75).

3. Чисельний метод: Чисельні розрахунки проведено методом радіальних базисних функцій.

4. Схема дискретизації в часі: Для дискретизації в часі використано схему предиктор–коректор з рівномірним кроком за часом $\tau = 30$ діб.

5. Вплив масоперенесення: Враховувався через явище хімічного осмосу зі сталим коефіцієнтом $k_{11}^{(c)} = 2.8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^5 / \text{кг} \cdot \text{доба}$ та через залежність коефіцієнта фільтрації від концентрації порового сольового розчину. Параметри масоперенесення: $D_{11} = 0.02 \text{ м}^2 / \text{доба}$.

6. Вплив теплоперенесення: Враховувався через явище термічного осмосу зі сталим коефіцієнтом $k_{11}^{(T)} = 2.8 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}^2}{\text{град} \cdot \text{доба}}$, явище термодифузії зі сталим коефіцієнтом $D_{11}^{(T)} = 0.02 \text{ кг} / (\text{м} \cdot \text{доба} \cdot ^\circ \text{C})$. Параметри теплоперенесення:

$$\lambda_{11} = 108 \frac{\text{кДж}}{\text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба}}, \quad c_\rho = 4.2 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{град}},$$

$$c_T = 2137 \frac{\text{кДж}}{\text{м}^3 \cdot \text{град}}, \quad \rho = 1100 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

7. Вплив наявності солей в рідкій та твердій фазах на рівняння нерозривності: Не враховувався.

8. Вплив термічного розширення фаз ґрунту: Не враховувалося.

9. Наявність газу: Вважалося, що вміст газу в ґрунті складає 5%. Тоді при $m = 0.6$ маємо $s = 0.02$, $n = 0.38$, $e = 0.67$. Також покладалось $\mu_T = 0.0245$, $p_a = 10^4 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2}$.

10. Залежність коефіцієнта фільтрації від надлишкових напорів, температури та концентрації солей в рідкій фазі: Від функції напорів коефіцієнт фільтрації покладался незалежним. Для випадку постійного коефіцієнта фільтрації $k_{11}^{(h)} = k_{20} = 2.88 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}}{\text{доба}}$. Залежність $k_{11}^{(h)} = k(c, T)$ визначалася шляхом

апроксимації функції $k(c, T)$ радіальними базисними функціями [300, 340, 402] аналогічно прикладу 3.1.

11. Повзучість скелету ґрунту: Не враховувалась. Між коефіцієнтом пористості та сумою головних напружень приймалась лінійна залежність (2.9) при $a = 2 \cdot 10^{-6} \frac{\text{М}^2}{\text{кг}}$.

12. Масообмінні процеси: Не враховувались і коефіцієнт швидкості масообміну $\gamma_1 = 0 \text{ доба}^{-1}$.

13. Граничні умови:

$$h(z, t)|_{z=0} = 0, \quad h(z, t)|_{z=l} = \frac{\varphi(t)}{\gamma}, \quad c(z, t)|_{z=0} = C_{\min}, \quad c(z, t)|_{z=l} = C_m,$$

$$T(z, t)|_{z=0} = T_{\max}, \quad T(z, t)|_{z=l} = T_{\min},$$

де $C_{\min} = 2 \text{ г/літр}$, $C_m = 350 \text{ г/літр}$, $T_{\max} = 30^\circ \text{C}$, $T_{\min} = 4^\circ \text{C}$, $\gamma = 10^4 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{доба}^2}$.

Динаміку запропонованої зміни функції $\varphi(t)$ можна прослідкувати на графіку рис. 3.79.

14. Початкові умови: Початковий розподіл концентрації солей

$$c_0(z) = C_m, \text{ температури } - T_0(z) = \begin{cases} T_{\max}, & z = 0; \\ T_{\min}, & z \neq 0; \end{cases} \text{ надлишкових напорів } h_0(z) = 0.$$

15. Основні завдання чисельного експерименту:

Вияснення впливу урахування тепломасоперенесення на швидкості зсувних зміщень. Результати числових експериментів в графічному вигляді наведені на рис. 3.76–3.81.

Фізично даний експеримент означає дослідження на зсув засоленого шару ґрунту (при $\psi = 35$). Як видно, з рис. 3.80, 3.81 у випадку урахування впливу тепломасоперенесення швидкості зміщень в області високих градієнтів концентрації солей (область глибиною 0–3,5 м) в 3–4 рази перевищують швидкості зміщень у випадку без врахування вказаних факторів. Вплив

теплового фактору, згідно даної математичної моделі, на порядок менший за вплив концентрації солей. Отже, даний експеримент показує, що наявність солей в ґрунті може збільшити швидкості його зсувних зміщень.

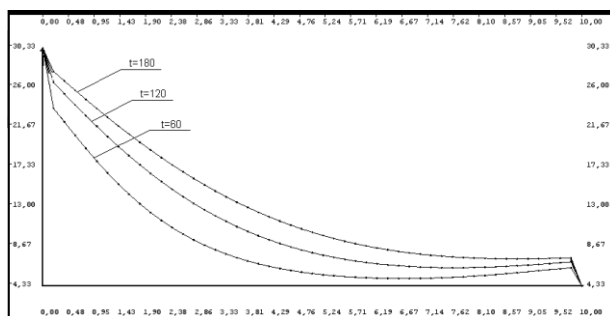


Рис. 3.76. Розподіл температури

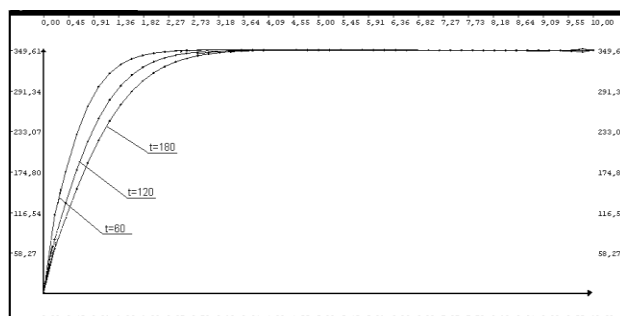
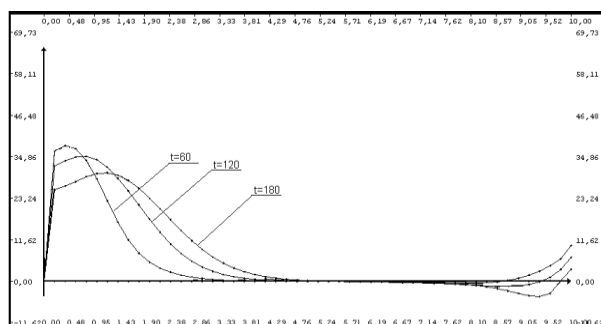
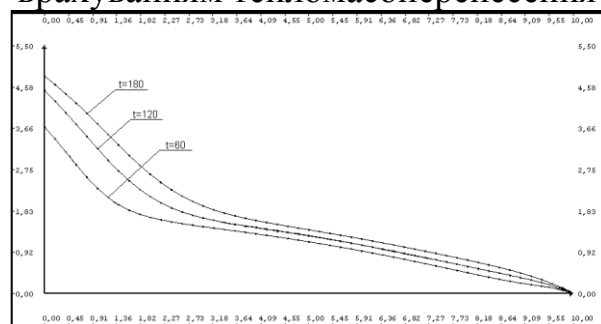
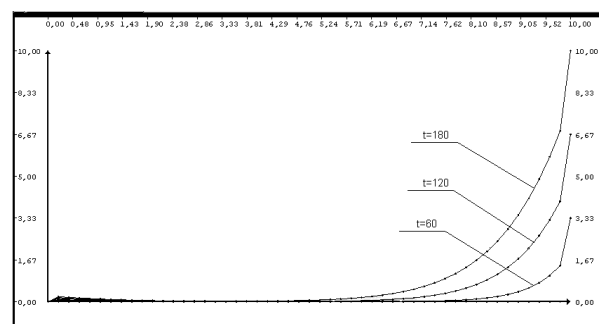
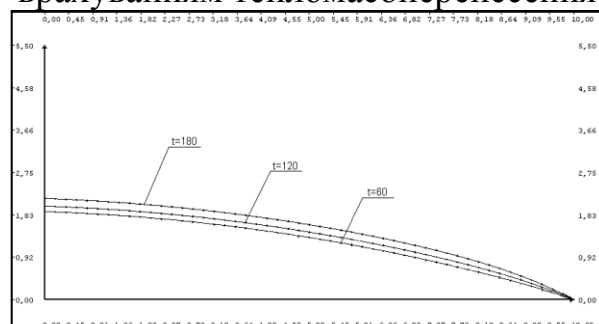


Рис. 3.77. Розподіл концентрації солей

Рис. 3.78. Розподіл напорів з
врахуванням тепломасоперенесенняРис. 3.80. Розподіл швидкостей
зміщень з врахуванням
тепломасоперенесенняРис. 3.79. Розподіл напорів без
врахуванням тепломасоперенесенняРис. 3.81. Розподіл швидкостей
зміщень без врахуванням
тепломасоперенесення

Приклад 3.13.

Від прикладу 3.12 даний приклад відрізняється лише початковими та граничними умовами для шуканих функцій:

$$h(z,t)|_{z=0} = 0, \quad h(z,t)|_{z=l} = \frac{\varphi(t)}{\gamma}, \quad c(z,t)|_{z=l} = C_m, \quad c(z,t)|_{z=0} = C_{\min},$$

$$T(z,t)|_{z=0} = T_{\max}, \quad T(z,t)|_{z=l} = T_{\min}.$$

Початковий розподіл концентрації солей $c_0(z) = C_{\min}$, температури –

$$T_0(z) = \begin{cases} T_{\max}, & z = 0; \\ T_{\min}, & z \neq 0; \end{cases} \quad \text{надлишкових напорів} \quad h_0(z) = \frac{\gamma_{\text{грунту}} - \gamma}{\gamma} \cdot z, \quad \text{де}$$

$$\gamma_{\text{грунту}} = 2.2 \cdot 10^4 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{доба}^2}, \quad \gamma = 10^4 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2 \cdot \text{доба}^2}.$$

Як видно з рис. 3.86, 3.87 у випадку урахування впливу тепломасоперенесення швидкості зміщень отримуються в 1,5–2 рази меншими ніж у випадку без врахування даних факторів (при $\psi = 55$). Фізично дана задача моделює прогнозування зсувних процесів масиву ґрунту, який розміщений на сольовому пласті з дренажною нижньою межею. Як видно з рис. 3.86, деякі швидкості зміщень стають від'ємними, що рівнозначне відсутності зміщень. Отже, фактор тепломасоперенесення може мати не лише негативні наслідки (приклад 3.12), а й позитивні.

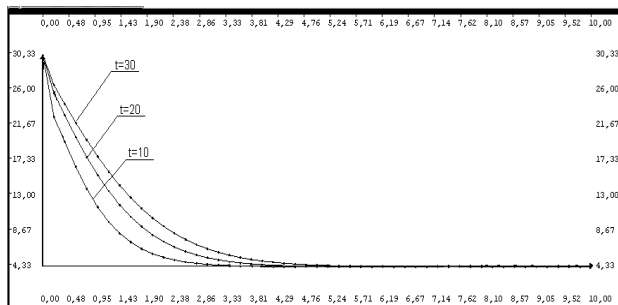


Рис. 3.82. Розподіл температури

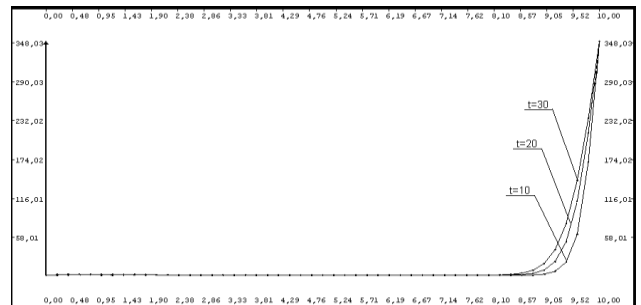


Рис. 3.83. Розподіл концентрації солей

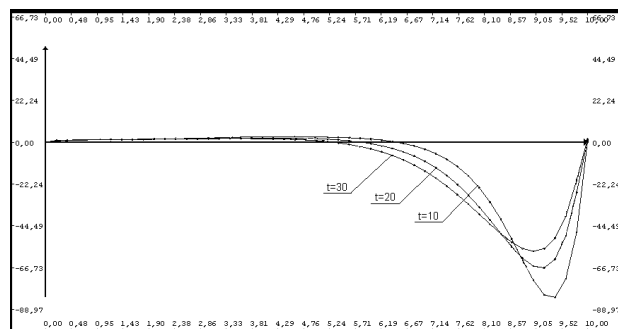


Рис. 3.84. Розподіл напорів з врахуванням тепломасоперенесення

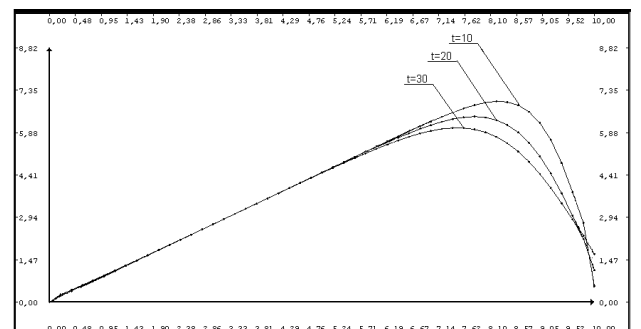


Рис. 3.85. Розподіл напорів без врахуванням тепломасоперенесення

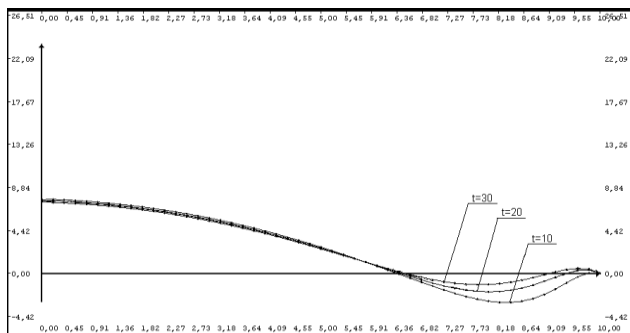


Рис. 3.86. Розподіл швидкостей
зміщень з врахуванням
тепломасоперенесення

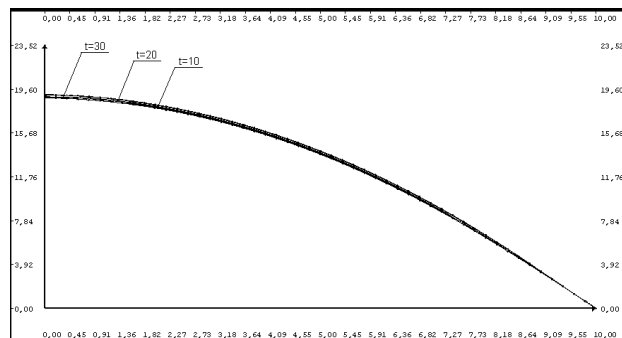


Рис. 3.87. Розподіл швидкостей
зміщень без врахуванням
тепломасоперенесення

3.6. Висновки до Розділу 3

Отже, в розділі 3 дисертації

1. Наведено постановки проблем фільтраційної консолідації гетерогенних пористих середовищ (на прикладі ґрунтів) з урахуванням впливу одночасно функціонуючих фізико–хімічних процесів переносу тепла, переносу солей та гетерогенних масообмінних процесів між рідкою та твердою фазами. Базуючись на результатах розділу 2, сформульовано нові математичні моделі розглянутих процесів в одно–, дво– та тривимірному випадках. Знайдено чисельні розв'язки відповідних нелінійних крайових задач сітковим методом скінченних елементів та безсітковим методом радіальних базисних функцій. З метою порівняння чисельних розв'язків, двовимірну нелінійну крайову задачу в прямокутній області також розв'язано методом скінченних різниць з використанням монотонних різницевих схем.
2. Проведено ряд чисельних експериментів, які дозволили уточнити прогнозні дані про динаміку розсіювання надлишкових напорів в умовах впливу температури, переносу солей, гетерогенних масообмінних процесів та нелінійної залежності коефіцієнта фільтрації від самих надлишкових напорів. Зокрема
 - 2.1. У випадку сезонних коливань температури (в межах додатніх температур від 4°C до 30°C на прикладі задачі фільтраційної консолідації ґрунту під флотбетом) відбуваються коливання

надлишкових напорів та концентрації солей, як зі сторони верхнього б'єфу, так і в області нижнього б'єфу. Коливання напорів сягають 1 м і лежать в межах 5%–10% від рівня напорів в поровій рідині.

Загалом, вплив явищ теплосолеперенесення сприяє швидшому розсіюванню поля надлишкових напорів в області біля дренажних меж і уповільненню такого розсіювання в областях біля непроникних меж (при комплексній дії температурного та хімічного полів уповільнення сягає близько 30%). Однак, тривала дія техногенних факторів в областях дренажних меж призводить до переходу ґрунту в переущільнений стан (напори стають меншими нуля). Такий стан не можна вважати стабілізованим. Адже припинення дії техногенних факторів призведе до всмоктування порової рідини, а звідси – до набухання ґрунту, що, в свою чергу, може викликати нерівномірні деформації ґрунтової поверхні.

2.2. В рамках одновимірної задачі встановлено, що урахування наявності солей в твердій фазі та гетерогенних масообмінних процесів призводить до отримання прогнозних розрахунків в бік уповільнення розсіювання надлишкових напорів. При цьому, наприклад, у випадку максимальної концентрації солей в твердій фазі 100 кг/м^3 уповільнення розсіювання напорів складає близько 25%.

2.3. Аналіз результатів проведених чисельних експериментів розрахунку полів надлишкових напорів в рамках одновимірної задачі засвідчив, що у випадку урахування термічного розширення порової рідини та твердого скелету в масиві ґрунту виникають стійкі поля надлишкових напорів, які повільно розсіюються в часі. При дренажній нижній межі напори досягають максимальних значень 11 м приблизно через два роки після початку дії високих температур ($T_{\text{max}} = 90^\circ \text{C}$) і майже повністю розсіюються через 20 років. При непроникній нижній межі надлишкові напори досягають максимального значення 27 м через 10 років після

початку дії високих температур, а ще через 10 років розсіюються лише наполовину.

- 2.4. У випадку прийняття залежності коефіцієнта фільтрації від концентрації солей, температури та функції надлишкових напорів отримані прогнозні дані показують, що самі надлишкові напори в масиві ґрунту розсіюються повільніше, ніж у випадку без урахування залежності коефіцієнта фільтрації від напору. Причому, максимальне прогнозне уточнення сягає 60 % від величини самих напорів в порівнянні з лінійною задачею без урахування впливу техногенних факторів (в рамках двовимірної задачі).
3. Порівнюючи розв'язки задач консолідації з однаковими вхідними даними в одно-, дво- та тривимірному випадках відмічено, що зі збільшенням розмірності задачі швидкість розсіювання надлишкових напорів зростає. Цей факт не залежить від урахування впливу техногенних факторів. Зростання швидкості розсіювання пропорційне розмірності задачі. Тому, наприклад, прогнози зроблені на основі одновимірної задачі будуть давати завищені показники термінів консолідації.
4. Проведено порівняння наближених розв'язків нелінійних крайових задач, якими описуються математичні моделі процесів фільтраційної консолідації, різними чисельними методами (методом скінченних елементів, методом скінченних різниць, методом радіальних базисних функцій) в одно- та двовимірному випадках. Якісна картина наближених розв'язків співпадає. Щодо кількісної – то максимальні похибки досягаються на межі області де для шуканих функцій задаються граничні умови другого та третього родів, або в околах кутових точок прикладеного навантаження (на прикладі двовимірної задачі).

Наприклад, для двовимірної задачі максимальна похибка між розподілом напорів, знайдених згідно МСР та МСЕ, складає 5.6%, концентрації солей – 10%, температури – 10% в околах кутових точок прикладення навантаження.

При порівнянні розв'язків отриманих згідно МСЕ та методу РБФ потрібно відмітити необхідність в спеціальних прийомах для покращення точності апроксимації в методі РБФ граничних умов другого та третього родів. В одновимірному випадку добре себе зарекомендував відомий спосіб задання змінних параметрів форми у внутрішніх та граничних вузлах області, в якій шукається розв'язок задачі. В двовимірному випадку ефективнішим виявився відомий спосіб модифікації методу РБФ, де в якості вузлових та коллокаційних використовуються різні множини точок. При цьому коллокаційних точок має бути набагато більше за вузлових і вузлові точки є лише внутрішніми.

5. В якості застосування розв'язків задачі фільтраційної консолідації, досліджено швидкість зміщень зсувонебезпечних схилів в умовах впливу техногенних факторів. Проведені чисельні експерименти дозволили уточнити прогностні розрахунки швидкостей зміщень масиву ґрунту як в сторону збільшення (в 3–4 рази), так і в сторону зменшення (в 1.5–2 рази) у випадку урахування впливу теплосолеперенесення (залежно від локалізації областей дії техногенних факторів та граничного режиму для напорів).

Результати розділу 3 опубліковано в роботах [40, 45, 54, 58, 64, 65, 72, 78, 79, 83, 86, 87, 89, 181, 185, 186, 188, 190, 192, 194–197, 205, 398, 399,].

РОЗДІЛ 4

ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОЦЕСІВ ФІЛЬТРАЦІЙНОЇ КОНСОЛІДАЦІЇ ШАРУВАТИХ ҐРУНТІВ ТА ҐРУНТІВ З НЕОДНОРІДНОСТЯМИ В УМОВАХ ВПЛИВУ ТЕХНОГЕННИХ ФАКТОРІВ

4.1. Математичні моделі фільтраційної консолідації ґрунтів при наявності природної і штучної шаруватості та напівпроникних включень

В процесі будівництва ґрунтова споруда зводиться не відразу, а поступовим нарощуванням кількості шарів. Кожен шар ґрунту може володіти власними властивостями, які суттєво відрізняються від властивостей інших шарів. Такий масив ґрунту будемо називати зростаючим. Відомо наукові роботи з дослідження консолідації зростаючого масиву ґрунту [108–110, 263]. Однак, в них в якості порової рідини приймалась чиста вода і не враховувався вплив температури.

Розглянемо одновимірну задачу ущільнення зростаючого масиву ґрунту, який розміщений на непроникній основі (рис. 4.1). Припустимо, що зростання відбувається дискретно в часі окремими шарами.

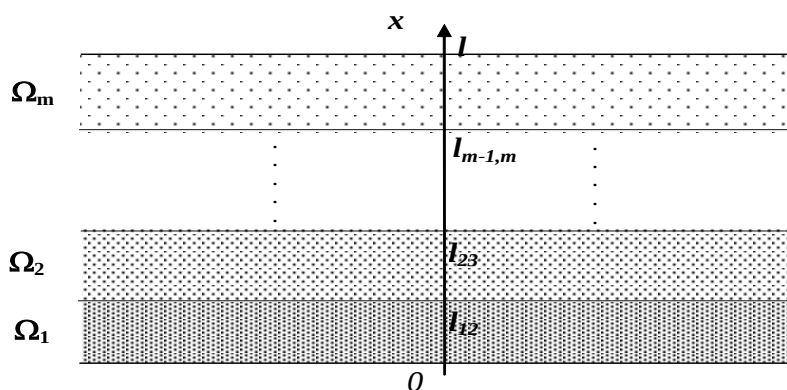


Рис. 4.1. Схема пошарово зростаючого масиву ґрунту

Математична модель вищевказаної задачі фільтраційної консолідації зростаючого масиву ґрунту з урахуванням впливу переносу солей в неізотермічному режимі, враховуючи результати розділу 2 та результати робіт [65, 115, 116, 247], описується наступною крайовою задачею:

$$\begin{aligned}
& \frac{1+e}{\gamma} \beta_1 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_{11}^{(h)}(c, T, h) \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(k_{11}^{(c)}(c) \frac{\partial c}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(k_{11}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right] + \\
& + \frac{(\alpha_p + (2q-1)\alpha_s)e}{\gamma} \beta_1 \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\varepsilon(1+e)}{\rho_c \gamma} \beta_1 \left[n \frac{\partial c}{\partial t} - e \frac{\partial N}{\partial t} \right] + \\
& + \frac{1+e}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_{11}^{(h)}(c, T, h) \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(k_{11}^{(c)}(c) \frac{\partial c}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(k_{11}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right] + \\
& + \frac{(\alpha_p + (2q-1)\alpha_s)e}{\gamma} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\varepsilon(1+e)}{\rho_c \gamma} \left[n \frac{\partial^2 c}{\partial t^2} - e \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} \right] + \\
& + \frac{a_0}{\gamma} \frac{\partial^2 (\Theta^* + \gamma h^*)}{\partial t^2} + \frac{\beta_1}{\gamma} (a_0 + a_1) \frac{\partial^2 (\Theta^* + \gamma h^*)}{\partial t^2} = \\
& = [a_0 + \beta(1+e)] \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + [\beta_1(a_0 + a_1) + \beta\beta_1(1+e)] \frac{\partial h}{\partial t}, \quad x \in \Omega, t > 0,
\end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(D_{11}(c, T, h) \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(D_{T11} \frac{\partial T}{\partial x} \right) - u \frac{\partial c}{\partial x} = n \frac{\partial c}{\partial t} + (\alpha_p + q\alpha_s) n c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t}, \quad x \in \Omega, t > 0, \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\gamma_1 (C_m - c) N^\chi, \quad x \in \bar{\Omega}, t > 0, \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_{11}(c) \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \rho c_\rho u \frac{\partial T}{\partial x} = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, \quad x \in \bar{\Omega}, t > 0, \tag{4.4}$$

$$\mathbf{u} = e\mathbf{v} - k_{11}^{(h)}(c, T, h) \frac{\partial h}{\partial x} + k_{11}^{(c)}(c) \frac{\partial c}{\partial x} + k_{11}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad x \in \bar{\Omega}, \tag{4.5}$$

$$\mathbf{q}_c = \mathbf{u}c - D_{11}(c, T, h) \frac{\partial c}{\partial x} - D_{T11} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \mathbf{q}_T = \rho c_\rho \mathbf{u}T - \lambda_{11}(c) \frac{\partial T}{\partial x}, \quad x \in \bar{\Omega}, \tag{4.6}$$

$$l_1 h(0, t) = h_1(t), \quad l_2 h(l, t) = h_2(t), \quad t \geq 0, \tag{4.7}$$

$$l_3 c(0, t) = c_1(t), \quad l_4 c(l, t) = c_2(t), \quad t \geq 0, \tag{4.8}$$

$$l_5 T(0, t) = T_1(t), \quad l_6 T(l, t) = T_2(t), \quad t \geq 0, \tag{4.9}$$

$$[h] \Big|_{x=l_{i,i+1}} = 0, \quad [c] \Big|_{x=l_{i,i+1}} = 0, \quad [N] \Big|_{x=l_{i,i+1}} = 0, \quad [T] \Big|_{x=l_{i,i+1}} = 0, \quad i = \overline{1, m-1}, \tag{4.10}$$

$$[\mathbf{u}] \Big|_{x=l_{i,i+1}} = 0, \quad [\mathbf{q}_c] \Big|_{x=l_{i,i+1}} = 0, \quad [\mathbf{q}_T] \Big|_{x=l_{i,i+1}} = 0, \quad i = \overline{1, m-1}, \tag{4.11}$$

$$h(x, 0) = h_0(x), \quad c(x, 0) = c_0(x), \quad T(x, 0) = T_0(x), \quad N(x, 0) = N_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}
(\gamma a_0 + \beta(1+e)\gamma) \frac{\partial h_0}{\partial t} = (1+e) \frac{\partial}{\partial x} \left(k_{11}^{(h)}(c_0, T_0, h_0) \frac{\partial h_0}{\partial x} - k_{11}^{(c)}(c_0) \frac{\partial c_0}{\partial x} - k_{11}^{(c)}(c_0) \frac{\partial T_0}{\partial x} \right) - \\
- \gamma a_1 \beta_1 h_0 + a_0 \left(\frac{\partial \Theta_0^*}{\partial t} + \frac{\partial p_0^*}{\partial t} \right) + a_1 \beta_1 (\Theta_0^* + p_0^*), \quad x \in \overline{\Omega}, t = 0,
\end{aligned} \quad (4.13)$$

де $x \in \overline{\Omega}$, $\Omega = \bigcup_i \Omega_i$, $\Omega_1 = (0; l_{12})$, $\Omega_i = (l_{i-1,i}; l_{i,i+1})$, $i = \overline{2, m-1}$, $\Omega_m = (l_{m-1,m}; l)$, $t \in (0; t_0]$; $h_0(x)$, $c_0(x)$, $N_0(x)$, $T_0(x)$ – задані функції; l_i , $i = \overline{1, 6}$ – оператори, що задають граничні умови для напору, концентрації та температури на кінцях відрізка $[0; l]$;

$$\begin{aligned}
h(x, t) &= \begin{cases} h_i(x, t), & (x, t) \in \overline{Q}_{t_0}^{(i)}; \\ c(x, t) &= \begin{cases} c_i(x, t), & (x, t) \in \overline{Q}_{t_0}^{(i)}; \\ N(x, t) &= \begin{cases} N_i(x, t), & (x, t) \in \overline{Q}_{t_0}^{(i)}; \\ T(x, t) &= \begin{cases} T_i(x, t), & (x, t) \in \overline{Q}_{t_0}^{(i)}; \end{cases} \end{cases} \end{cases} \\
k_{11}^{(h)}(c, T, h) &= \begin{cases} k_{(i)11}^{(h)}(c_i, T_i, h_i), & x \in \Omega_i; \\ D_{11}(c, T, h) &= \begin{cases} D_{(i)11}(c_i, T_i, h_i), & x \in \Omega_i; \\ k_{11}^{(c)}(c) &= \begin{cases} k_{(i)11}^{(c)}(c_i), & x \in \Omega_i; \\ k_{11}^{(T)} &= \begin{cases} k_{(i)11}^{(T)}, & x \in \Omega_i; \\ D_{11T} &= \begin{cases} D_{(i)11T}, & x \in \Omega_i; \end{cases} \end{cases} \end{cases} \\
e &= \begin{cases} e_i, & x \in \Omega_i; \\ n &= \begin{cases} n_i, & x \in \Omega_i; \\ \alpha_s &= \begin{cases} \alpha_{(i)s}, & x \in \Omega_i; \\ a_0 &= \begin{cases} a_{(i)0}, & x \in \Omega_i; \\ a_1 &= \begin{cases} a_{(i)1}, & x \in \Omega_i; \\ \beta_1 &= \begin{cases} \beta_{(i)1}, & x \in \Omega_i; \\ \gamma_1 &= \begin{cases} \gamma_{(i)1}, & x \in \Omega_i; \\ \chi &= \begin{cases} \chi_i, & x \in \Omega_i; \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases} \\
\lambda_{11}(c) &= \begin{cases} \lambda_{(i)11}(c_i), & x \in \Omega_i; \\ c_T &= \begin{cases} (c_T)_i, & x \in \Omega_i; \\ [f]_{\Gamma_i} &= f_i^+ - f_i^-, \quad f_i^+ = f|_{\Gamma_i+0}, \\ f_i^- &= f|_{\Gamma_i-0}, \quad Q_{t_0}^{(i)} = \Omega_i \times (0; t_0], \quad Q_{t_0} = \Omega \times (0; t_0].
\end{cases}
\end{cases}
\end{aligned}$$

Межа $x = l$ при поступовому зростанні шару ґрунту послідовно пробігає всі $l_{i-1,i}$, $i = \overline{2, m}$. Товщини шарів можуть відрізнятись одна від одної. На межах контакту між ґрунтовими шарами задаються умови спряження ідеального контакту (4.10), (4.11) [247].

Математична модель фільтраційної консолідації шаруватого масиву ґрунту в R -вимірному випадку з урахуванням впливу техногенних факторів описується наступною крайовою задачею:

$$\frac{(1+e)(1+(R-1)\xi)}{\gamma} \beta_1 [\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c, T, h) \nabla h) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_c(c) \nabla c) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla T)] +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(\alpha_\rho + (2q-1)\alpha_s)(1+(R-1)\xi)e}{\gamma} \beta_1 \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\varepsilon(1+e)(1+(R-1)\xi)}{\rho_c \gamma} \beta_1 \left[\frac{\partial(nc)}{\partial t} - e \frac{\partial N}{\partial t} \right] + \\
& + \frac{(1+e)(1+(R-1)\xi)}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c, T, h) \nabla h) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_c(c) \nabla c) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla T)] + \\
& + \frac{(\alpha_\rho + (2q-1)\alpha_s)(1+(R-1)\xi)e}{\gamma} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\varepsilon(1+e)(1+(R-1)\xi)}{\rho_c \gamma} \left[\frac{\partial^2(nc)}{\partial t^2} - e \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} \right] + \quad (4.14) \\
& + \frac{a_0}{\gamma} \frac{\partial^2 (\Theta^* + R\mathcal{H}^*)}{\partial^2} + \frac{\beta_1}{\gamma} (a_0 + a_1) \frac{\partial (\Theta^* + R\mathcal{H}^*)}{\partial} = [Ra_0 + \beta(1+e)(1+(R-1)\xi)] \times \\
& \times \frac{\partial^2 h}{\partial^2} + [\beta_1 R(a_0 + a_1) + \beta\beta_1(1+e)(1+(R-1)\xi)] \frac{\partial h}{\partial}, \mathbf{X} \in \Omega, t > 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \nabla \cdot (\mathbf{D}(c, T, h) \nabla c) + \nabla \cdot (\mathbf{D}_T \nabla T) - \mathbf{u} \nabla c = \\
& = n \frac{\partial c}{\partial t} + (\alpha_\rho + q\alpha_s) nc \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t}, \mathbf{X} \in \Omega, t > 0, \quad (4.15)
\end{aligned}$$

$$\nabla \cdot (\lambda(c) \nabla T) - \rho c_\rho \mathbf{u} \nabla T = c_T \frac{\partial T}{\partial}, \mathbf{X} \in \Omega, t > 0, \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\gamma_1 (C_m - c) N^\chi, \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, t > 0, \quad (4.17)$$

$$\mathbf{u} = e\mathbf{v} - \mathbf{K}_h(c, T, h) \nabla h + \mathbf{K}_c(c) \nabla c + \mathbf{K}_T \nabla T, \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, \quad (4.18)$$

$$\mathbf{q}_c = \mathbf{u}c - \mathbf{D}(c, T, h) \nabla c - \mathbf{D}_T \nabla T, \mathbf{q}_T = \rho c_\rho \mathbf{u}T - \lambda(c) \nabla T, \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, \quad (4.19)$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{\mathbf{X} \in \Gamma_1} = 0, h|_{\mathbf{X} \in \Gamma_2} = h_1(\mathbf{X}, t), \mathbf{X} \in \Gamma_2, \quad (4.20)$$

$$(\mathbf{q}_c, \mathbf{n})|_{\mathbf{X} \in \Gamma_3} = 0, c|_{\mathbf{X} \in \Gamma_4} = c_1(\mathbf{X}, t), \mathbf{X} \in \Gamma_4, \quad (4.21)$$

$$(\mathbf{q}_T, \mathbf{n})|_{\mathbf{X} \in \Gamma_5} = 0, T|_{\mathbf{X} \in \Gamma_6} = T_1(\mathbf{X}, t), \mathbf{X} \in \Gamma_6, \quad (4.22)$$

$$[h]|_{\Gamma_{ij}} = 0, [c]|_{\Gamma_{ij}} = 0, [N]|_{\Gamma_{ij}} = 0, [T]|_{\Gamma_{ij}} = 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, m}, \quad (4.23)$$

$$[\mathbf{u}]|_{\Gamma_{ij}} = 0, [\mathbf{q}_c]|_{\Gamma_{ij}} = 0, [\mathbf{q}_T]|_{\Gamma_{ij}} = 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, m}, \quad (4.24)$$

$$h(\mathbf{X}, 0) = h_0(\mathbf{X}), c(\mathbf{X}, 0) = C_0(\mathbf{X}), T(\mathbf{X}, 0) = T_0(\mathbf{X}), N(\mathbf{X}, 0) = N_0(\mathbf{X}), \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{R\gamma a_0}{1+(R-1)\xi} + \beta(1+e)\gamma \right) \frac{\partial h_0}{\partial t} = (1+e) \nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c_0, T_0, h_0) \nabla h_0 - \mathbf{K}_c(c_0) \nabla c_0 - \mathbf{K}_T \nabla T_0) - \\
& - \frac{R\gamma a_1 \beta_1}{1+(R-1)\xi} h_0 + \frac{a_0}{1+(R-1)\xi} \left(\frac{\partial \Theta_0^*}{\partial t} + R \frac{\partial p_0^*}{\partial t} \right) + \frac{a_1 \beta_1}{1+(R-1)\xi} (\Theta_0^* + R p_0^*), \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, t = 0, \quad (4.26)
\end{aligned}$$

дані екрани можуть спрацьовувати як напівпроникні мембрани і бути причиною виникнення аномальних осмотичних тисків в тілі греблі.

На даний час широко використовується технологія захоронення рідких токсичних речовин в глибокозалягаючі пласти–колектори [103], в тому числі і піщані [255]. Рідкі відходи закачуються під великим тиском, а тому виникає питання про їх вплив на загальний напружено–деформівний стан ґрунтового середовища та про час розсіювання утворених полів надлишкових тисків. Піщані сховища–колектори містять тонкі включення у вигляді лінз глинистих ґрунтів [255]. Тому є актуальною постановка задачі про можливість виникнення аномальних осмотичних тисків при фільтрації забруднень через такі включення та їх вплив на фізико–хімічні процеси в ґрунтах.

Дослідженню процесів фільтрації та масоперенесення в середовищах з тонкими неоднорідностями присвячено досить багато робіт. Серед них відмітимо класичні праці І. В. Сергієнка, В. В. Скопечького, В. С. Дейнеки, І. І. Ляшка та ін. [115, 116, 247] (див. також наведену там бібліографію). Опираючись на вказані роботи, разом з роботами [47, 48, 55, 56, 65, 182–184], сформулюємо відповідну математичну модель задачі нелінійної фільтраційної консолідації масиву ґрунту з тонкими напівпроникними включеннями з урахуванням впливу переносу солей в неізотермічному режимі.

Розглянемо одновимірну задачу ущільнення масиву ґрунту (рис. 4.2) і, не зменшуючи загальності, будемо вважати, що ґрунт містить одне включення, яке може мати властивості напівпроникної мембрани.

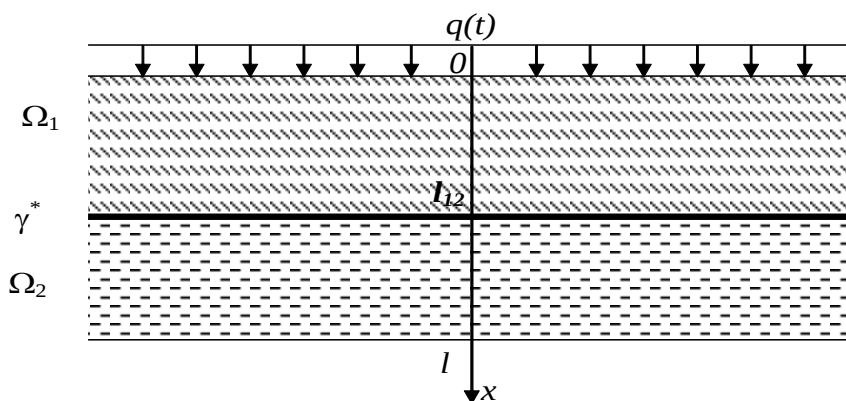


Рис. 4.2. Масив ґрунту з напівпроникним включенням

Математична модель вищевказаного процесу фільтраційної консолідації масиву ґрунту з тонким включенням з урахуванням впливу переносу солей в неізотермічному режимі описується наступною нелінійною крайовою задачею:

$$\begin{aligned}
& \frac{1+e}{\gamma} \beta_1 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_{11}^{(h)}(c, T, h) \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(k_{11}^{(c)}(c) \frac{\partial c}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(k_{11}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right] + \\
& + \frac{(\alpha_p + (2q-1)\alpha_s)e}{\gamma} \beta_1 \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\varepsilon(1+e)}{\rho_c \gamma} \beta_1 \left[n \frac{\partial c}{\partial t} - e \frac{\partial N}{\partial t} \right] + \\
& + \frac{1+e}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_{11}^{(h)}(c, T, h) \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(k_{11}^{(c)}(c) \frac{\partial c}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(k_{11}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right] + \\
& + \frac{(\alpha_p + (2q-1)\alpha_s)e}{\gamma} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\varepsilon(1+e)}{\rho_c \gamma} \left[n \frac{\partial^2 c}{\partial t^2} - e \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} \right] + \\
& + \frac{a_0}{\gamma} \frac{\partial^2 (\Theta^* + \gamma h^*)}{\partial t^2} + \frac{\beta_1}{\gamma} (a_0 + a_1) \frac{\partial^2 (\Theta^* + \gamma h^*)}{\partial t^2} = \\
& = [a_0 + \beta(1+e)] \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + [\beta_1(a_0 + a_1) + \beta\beta_1(1+e)] \frac{\partial h}{\partial t}, \quad x \in \Omega, t > 0,
\end{aligned} \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \left(D_{11}(c, T, h) \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(D_{T11} \frac{\partial T}{\partial x} \right) - u \frac{\partial c}{\partial x} = \\
& = n \frac{\partial c}{\partial t} + (\alpha_p + q\alpha_s) n c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t}, \quad x \in \Omega, t > 0,
\end{aligned} \tag{4.28}$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\gamma_1 (C_m - c) N^\chi, \quad x \in \bar{\Omega}, t > 0, \tag{4.29}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_{11}(c) \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \rho_c u \frac{\partial T}{\partial x} = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, \quad x \in \bar{\Omega}, t > 0, \tag{4.30}$$

$$\mathbf{u} = e\mathbf{v} - k_{11}^{(h)}(c, T, h) \frac{\partial h}{\partial x} + k_{11}^{(c)}(c) \frac{\partial c}{\partial x} + k_{11}^{(T)} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad x \in \bar{\Omega}, \tag{4.31}$$

$$\mathbf{q}_c = \mathbf{u}c - D_{11}(c, T, h) \frac{\partial c}{\partial x} - D_{T11} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \mathbf{q}_T = \rho_c \mathbf{u}T - \lambda_{11}(c) \frac{\partial T}{\partial x}, \quad x \in \bar{\Omega}, \tag{4.32}$$

$$l_1 h(0, t) = h_1(t), \quad l_2 h(l, t) = h_2(t), \quad t \geq 0, \tag{4.33}$$

$$l_3 c(0, t) = c_1(t), \quad l_4 c(l, t) = c_2(t), \quad t \geq 0, \tag{4.34}$$

$$l_5 T(0, t) = T_1(t), \quad l_6 T(l, t) = T_2(t), \quad t \geq 0, \tag{4.35}$$

$$\mathbf{u}^\pm = -\frac{k_h^\gamma}{d} (h^+ - h^-) + \frac{k_c^\gamma}{d} (c^+ - c^-) + \frac{k_T^\gamma}{d} (T^+ - T^-), \tag{4.36}$$

$$\mathbf{q}_c^\pm = (1 - \alpha) \cdot (\mathbf{u}^\pm c^\pm - \frac{D^{\gamma*}}{d} (c^+ - c^-) - \frac{D_T^{\gamma*}}{d} (T^+ - T^-)), \quad (4.37)$$

$$\mathbf{q}_T^\pm = \rho c_\rho \mathbf{u}^\pm T^\pm - \frac{\lambda^{\gamma*}}{d} (T^+ - T^-), \quad (4.38)$$

$$[\mathbf{u}]_{\gamma^*} = 0, [\mathbf{q}_c]_{\gamma^*} = 0, [\mathbf{q}_T]_{\gamma^*} = 0, [N]_{\gamma^*} = 0, \quad (4.39)$$

$$h(x, 0) = h_0(x), \quad c(x, 0) = c_0(x), \quad T(x, 0) = T_0(x), \quad N(x, 0) = N_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} (\gamma a_0 + \beta(1+e)\gamma) \frac{\partial h_0}{\partial t} = (1+e) \frac{\partial}{\partial x} \left(k_{11}^{(h)}(c_0, T_0, h_0) \frac{\partial h_0}{\partial x} - k_{11}^{(c)}(c_0) \frac{\partial c_0}{\partial x} - k_{11}^{(c)}(c_0) \frac{\partial T_0}{\partial x} \right) - \\ - \gamma a_1 \beta_1 h_0 + a_0 \left(\frac{\partial \Theta_0^*}{\partial t} + \frac{\partial p_0^*}{\partial t} \right) + a_1 \beta_1 (\Theta_0^* + p_0^*), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad t = 0, \end{aligned} \quad (4.41)$$

де $x \in \bar{\Omega}$, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega_1 = (0; l_{12})$, $\Omega_2 = (l_{12}; l)$, $t \in (0; t_0]$; $h_0(x)$, $c_0(x)$, $N_0(x)$, $T_0(x)$ – задані функції; d – товщина напівпроникного включення; $k_h^{\gamma*}$, $k_c^{\gamma*}$, $k_T^{\gamma*}$, D^Γ , $D_T^{\gamma*}$, $\lambda^{\gamma*}$ – характеристики напівпроникного включення;

$$h(x, t) = \begin{cases} h_1(x, t), & (x, t) \in \bar{Q}_{t_0}^{-1}, \\ h_2(x, t), & (x, t) \in \bar{Q}_{t_0}^{-2}, \end{cases} \quad c(x, t) = \begin{cases} c_1(x, t), & (x, t) \in \bar{Q}_{t_0}^{-1}, \\ c_2(x, t), & (x, t) \in \bar{Q}_{t_0}^{-2}, \end{cases}$$

$$N(x, t) = \begin{cases} N_1(x, t), & (x, t) \in \bar{Q}_{t_0}^{-1}, \\ N_2(x, t), & (x, t) \in \bar{Q}_{t_0}^{-2}, \end{cases} \quad T(x, t) = \begin{cases} T_1(x, t), & (x, t) \in \bar{Q}_{t_0}^{-1}, \\ T_2(x, t), & (x, t) \in \bar{Q}_{t_0}^{-2}, \end{cases}$$

$$k_{11}^{(h)}(c, T, h) = \begin{cases} k_{(1)11}^{(h)}(c_1, T_1, h_1), & x \in [0; l_{12}], \\ k_{(2)11}^{(h)}(c_2, T_2, h_2), & x \in [l_{12}; l], \end{cases} \quad k_{11}^{(c)}(c) = \begin{cases} k_{(1)11}^{(c)}(c_1), & x \in [0; l_{12}], \\ k_{(2)11}^{(c)}(c_2), & x \in [l_{12}; l], \end{cases}$$

$$k_{11}^{(T)} = \begin{cases} k_{(1)11}^{(T)}, & x \in [0; l_{12}], \\ k_{(2)11}^{(T)}, & x \in [l_{12}; l], \end{cases} \quad D_{11}(c, T, h) = \begin{cases} D_{(1)11}(c_1, T_1, h_1), & x \in [0; l_{12}], \\ D_{(2)11}(c_2, T_2, h_2), & x \in [l_{12}; l], \end{cases}$$

$$D_{11T} = \begin{cases} D_{(1)11T}, & x \in [0; l_{12}], \\ D_{(2)11T}, & x \in [l_{12}; l], \end{cases} \quad \lambda_{11}(c) = \begin{cases} \lambda_{(1)11}(c_1), & x \in [0; l_{12}], \\ \lambda_{(2)11}(c_2), & x \in [l_{12}; l], \end{cases} \quad c_T = \begin{cases} (c_T)_1, & x \in [0; l_{12}], \\ (c_T)_2, & x \in [l_{12}; l], \end{cases}$$

$$e = \begin{cases} e_1, & x \in [0; l_{12}], \\ e_2, & x \in [l_{12}; l], \end{cases} \quad n = \begin{cases} n_1, & x \in [0; l_{12}], \\ n_2, & x \in [l_{12}; l], \end{cases} \quad \alpha_s = \begin{cases} \alpha_{(1)s}, & x \in [0; l_{12}], \\ \alpha_{(2)s}, & x \in [l_{12}; l], \end{cases}$$

$$a_0 = \begin{cases} a_{(1)0}, & x \in [0; l_{12}], \\ a_{(2)0}, & x \in [l_{12}; l], \end{cases} \quad a_1 = \begin{cases} a_{(1)1}, & x \in [0; l_{12}], \\ a_{(2)1}, & x \in [l_{12}; l], \end{cases} \quad \beta_1 = \begin{cases} \beta_{(1)1}, & x \in [0; l_{12}], \\ \beta_{(2)1}, & x \in [l_{12}; l], \end{cases}$$

$$\gamma_1 = \begin{cases} \gamma_{(1)1}, & x \in [0; l_{12}], \\ \gamma_{(2)1}, & x \in [l_{12}; l], \end{cases} \quad \chi = \begin{cases} \chi_1, & x \in [0; l_{12}], \\ \chi_2, & x \in [l_{12}; l], \end{cases} \quad [f] = f^+ - f^-, \quad f^+ = f|_{x=l_{12}+0},$$

$$f^- = f|_{x=l_{12}-0}, \quad Q_{t_0}^1 = \Omega_1 \times (0; t_0], \quad Q_{t_0}^2 = \Omega_2 \times (0; t_0], \quad Q_{t_0} = \Omega \times (0; t_0].$$

На тонкому включенні виконуються умови спряження неідеального контакту (4.36)–(4.39) [115, 116, 247]. Параметр α , $0 \leq \alpha \leq 1$, в умові (4.37) визначає напівпроникні властивості тонкого включення [47, 65]. Якщо $\alpha = 1$, то тонке включення є ідеальною напівпроникною мембраною. У випадку $\alpha = 0$ включення γ^* не володіє властивостями напівпроникної мембрани.

Аналогічно ставиться фізична задача фільтраційної консолідації ґрунтів з тонкими напівпроникними включеннями в умовах впливу техногенних факторів в R -вимірному випадку. Зокрема, її математична модель буде описуватись наступною нелінійною крайовою задачею:

$$\begin{aligned} & \frac{(1+e)(1+(R-1)\xi)}{\gamma} \beta_1 [\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c, T, h) \nabla h) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_c(c) \nabla c) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla T)] + \\ & + \frac{(\alpha_p + (2q-1)\alpha_s)(1+(R-1)\xi)e}{\gamma} \beta_1 \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\varepsilon(1+e)(1+(R-1)\xi)}{\rho_c \gamma} \beta_1 \left[\frac{\partial(nc)}{\partial t} - e \frac{\partial N}{\partial t} \right] + \\ & + \frac{(1+e)(1+(R-1)\xi)}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c, T, h) \nabla h) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_c(c) \nabla c) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla T)] + \\ & + \frac{(\alpha_p + (2q-1)\alpha_s)(1+(R-1)\xi)e}{\gamma} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\varepsilon(1+e)(1+(R-1)\xi)}{\rho_c \gamma} \left[\frac{\partial^2(nc)}{\partial t^2} - e \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} \right] + \\ & + \frac{a_0}{\gamma} \frac{\partial^2 (\Theta^* + R\gamma h^*)}{\partial t^2} + \frac{\beta_1}{\gamma} (a_0 + a_1) \frac{\partial (\Theta^* + R\gamma h^*)}{\partial t} = [Ra_0 + \beta(1+e)(1+(R-1)\xi)] \times \\ & \times \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + [\beta_1 R(a_0 + a_1) + \beta \beta_1 (1+e)(1+(R-1)\xi)] \frac{\partial h}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, t > 0, \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot (\mathbf{D}(c, T, h) \nabla c) + \nabla \cdot (\mathbf{D}_T \nabla T) - \mathbf{u} \nabla c = \\ & = n \frac{\partial c}{\partial t} + (\alpha_p + q\alpha_s) nc \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, t > 0, \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\nabla \cdot (\lambda(c) \nabla T) - \rho c_p \mathbf{u} \nabla T = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, t > 0, \quad (4.44)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\gamma_1 (C_m - c) N^\lambda, \quad \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, t > 0, \quad (4.45)$$

$$\mathbf{u} = e\mathbf{v} - \mathbf{K}_h(c, T, h)\nabla h + \mathbf{K}_c(c)\nabla c + \mathbf{K}_T\nabla T, \quad \mathbf{X} \in \overline{\Omega}, \quad (4.46)$$

$$\mathbf{q}_c = \mathbf{u}c - \mathbf{D}(c, T, h)\nabla c - \mathbf{D}_T\nabla T, \quad \mathbf{q}_T = \rho c_\rho \mathbf{u}T - \lambda(c)\nabla T, \quad \mathbf{X} \in \overline{\Omega}, \quad (4.47)$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{\mathbf{X} \in \Gamma_1} = 0, \quad h|_{\mathbf{X} \in \Gamma_2} = h_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_2, \quad (4.48)$$

$$(\mathbf{q}_c, \mathbf{n})|_{\mathbf{X} \in \Gamma_3} = 0, \quad c|_{\mathbf{X} \in \Gamma_4} = c_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_4, \quad (4.49)$$

$$(\mathbf{q}_T, \mathbf{n})|_{\mathbf{X} \in \Gamma_5} = 0, \quad T|_{\mathbf{X} \in \Gamma_6} = T_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_6, \quad (4.50)$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{n})_{\gamma_i^*}^\pm = -\frac{k_h^{\gamma_i^*}}{d_i}(h^+ - h^-) + \frac{k_c^{\gamma_i^*}}{d_i}(c^+ - c^-) + \frac{k_T^{\gamma_i^*}}{d_i}(T^+ - T^-), \quad \mathbf{X} \in \gamma_i^*, \quad i = \overline{1, m}, \quad (4.51)$$

$$(\mathbf{q}_c, \mathbf{n})_{\gamma_i^*}^\pm = (1 - \alpha_i) \cdot ((\mathbf{u}, \mathbf{n})_{\gamma_i^*}^\pm c^\pm - \frac{D^{\gamma_i^*}}{d_i}(c^+ - c^-) - \frac{D_T^{\gamma_i^*}}{d_i}(T^+ - T^-)), \quad \mathbf{X} \in \gamma_i^*, \quad i = \overline{1, m}, \quad (4.52)$$

$$(\mathbf{q}_T, \mathbf{n})_{\gamma_i^*}^\pm = \rho c_\rho (\mathbf{u}, \mathbf{n})_{\gamma_i^*}^\pm T^\pm - \frac{\lambda^{\gamma_i^*}}{d_i}(T^+ - T^-), \quad \mathbf{X} \in \gamma_i^*, \quad i = \overline{1, m}, \quad (4.53)$$

$$[(\mathbf{u}, \mathbf{n})]_{\gamma_i^*} = 0, \quad [(\mathbf{q}_c, \mathbf{n})]_{\gamma_i^*} = 0, \quad [(\mathbf{q}_T, \mathbf{n})]_{\gamma_i^*} = 0, \quad [N]_{\gamma_i^*} = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (4.54)$$

$$h(\mathbf{X}, 0) = h_0(\mathbf{X}), \quad c(\mathbf{X}, 0) = C_0(\mathbf{X}), \quad T(\mathbf{X}, 0) = T_0(\mathbf{X}), \quad N(\mathbf{X}, 0) = N_0(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \overline{\Omega}, \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{R\gamma a_0}{1 + (R-1)\xi} + \beta(1+e)\gamma \right) \frac{\partial h_0}{\partial t} = (1+e)\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c_0, T_0, h_0)\nabla h_0 - \mathbf{K}_c(c_0)\nabla c_0 - \mathbf{K}_T\nabla T_0) - \\ & - \frac{R\gamma a_1\beta_1}{1 + (R-1)\xi} h_0 + \frac{a_0}{1 + (R-1)\xi} \left(\frac{\partial \Theta_0^*}{\partial t} + R \frac{\partial p_0^*}{\partial t} \right) + \frac{a_1\beta_1}{1 + (R-1)\xi} (\Theta_0^* + R p_0^*), \quad \mathbf{X} \in \overline{\Omega}, \quad t = 0, \end{aligned} \quad (4.56)$$

де $t > 0$, $\mathbf{X} \in \Omega$; m – кількість напівпроникних включень Γ_i в області Ω ; d_i – товщина напівпроникного включення γ_i^* , $i = \overline{1, m}$; $k_h^{\gamma_i^*}$, $k_c^{\gamma_i^*}$, $k_T^{\gamma_i^*}$, $D^{\gamma_i^*}$, $D_T^{\gamma_i^*}$, $\lambda^{\gamma_i^*}$ – характеристики напівпроникного включення γ_i^* , $i = \overline{1, m}$; $\mathbf{n}$ – певним чином зорієнтований вектор напрямних косинусів нормалі до напівпроникних включень; $h_0(\mathbf{X})$, $c_0(\mathbf{X})$, $N_0(\mathbf{X})$, $T_0(\mathbf{X})$ – задані функції.

В загальному випадку математична модель процесу фільтраційної консолідації шаруватого масиву ґрунту з тонкими напівпроникними включеннями в умовах впливу техногенних факторів в R -вимірному випадку буде описуватись наступною нелінійною крайовою задачею:

$$\begin{aligned}
& \frac{(1+e)(1+(R-1)\xi)}{\gamma} \beta_1 [\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c, T, h) \nabla h) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_c(c) \nabla c) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla T)] + \\
& + \frac{(\alpha_p + (2q-1)\alpha_s)(1+(R-1)\xi)e}{\gamma} \beta_1 \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\varepsilon(1+e)(1+(R-1)\xi)}{\rho_c \gamma} \beta_1 \left[\frac{\partial(nc)}{\partial t} - e \frac{\partial N}{\partial t} \right] + \\
& + \frac{(1+e)(1+(R-1)\xi)}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c, T, h) \nabla h) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_c(c) \nabla c) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla T)] + \\
& + \frac{(\alpha_p + (2q-1)\alpha_s)(1+(R-1)\xi)e}{\gamma} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\varepsilon(1+e)(1+(R-1)\xi)}{\rho_c \gamma} \left[\frac{\partial^2(nc)}{\partial t^2} - e \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} \right] + \\
& + \frac{a_0}{\gamma} \frac{\partial^2 (\Theta^* + R\gamma h^*)}{\partial t^2} + \frac{\beta_1}{\gamma} (a_0 + a_1) \frac{\partial (\Theta^* + R\gamma h^*)}{\partial t} = [Ra_0 + \beta(1+e)(1+(R-1)\xi)] \times \\
& \times \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + [\beta_1 R(a_0 + a_1) + \beta \beta_1 (1+e)(1+(R-1)\xi)] \frac{\partial h}{\partial t}, \mathbf{X} \in \Omega, t > 0,
\end{aligned} \tag{4.57}$$

$$\begin{aligned}
& \nabla \cdot (\mathbf{D}(c, T, h) \nabla c) + \nabla \cdot (\mathbf{D}_T \nabla T) - \mathbf{u} \nabla c = \\
& = n \frac{\partial c}{\partial t} + (\alpha_p + q\alpha_s) nc \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t}, \mathbf{X} \in \Omega, t > 0,
\end{aligned} \tag{4.58}$$

$$\nabla \cdot (\lambda(c) \nabla T) - \rho c \mathbf{u} \nabla T = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, \mathbf{X} \in \Omega, t > 0, \tag{4.59}$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\gamma_1 (C_m - c) N^\chi, \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, t > 0, \tag{4.60}$$

$$\mathbf{u} = e\mathbf{v} - \mathbf{K}_h(c, T, h) \nabla h + \mathbf{K}_c(c) \nabla c + \mathbf{K}_T \nabla T, \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, \tag{4.61}$$

$$\mathbf{q}_c = \mathbf{u}c - \mathbf{D}(c, T, h) \nabla c - \mathbf{D}_T \nabla T, \mathbf{q}_T = \rho c \mathbf{u} T - \lambda(c) \nabla T, \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, \tag{4.62}$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{\mathbf{X} \in \Gamma_1} = 0, h|_{\mathbf{X} \in \Gamma_2} = h_1(\mathbf{X}, t), \mathbf{X} \in \Gamma_2, \tag{4.63}$$

$$(\mathbf{q}_c, \mathbf{n})|_{\mathbf{X} \in \Gamma_3} = 0, c|_{\mathbf{X} \in \Gamma_4} = c_1(\mathbf{X}, t), \mathbf{X} \in \Gamma_4, \tag{4.64}$$

$$(\mathbf{q}_T, \mathbf{n})|_{\mathbf{X} \in \Gamma_5} = 0, T|_{\mathbf{X} \in \Gamma_6} = T_1(\mathbf{X}, t), \mathbf{X} \in \Gamma_6, \tag{4.65}$$

$$[h]|_{\Gamma_{ij}} = 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, m}, \tag{4.66}$$

$$[c]|_{\Gamma_{ij}} = 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, m}, \tag{4.67}$$

$$[N]|_{\Gamma_{ij}} = 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, m}, \tag{4.68}$$

$$[T]|_{\Gamma_{ij}} = 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, m}, \tag{4.69}$$

$$[\mathbf{u}]|_{\Gamma_{ij}} = 0, [\mathbf{q}_c]|_{\Gamma_{ij}} = 0, [\mathbf{q}_T]|_{\Gamma_{ij}} = 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, m}, \quad (4.70)$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{n})_{\gamma_i^*}^{\pm} = -\frac{k_h^{\gamma_i^*}}{d_i}(h^+ - h^-) + \frac{k_c^{\gamma_i^*}}{d_i}(c^+ - c^-) + \frac{k_T^{\gamma_i^*}}{d_i}(T^+ - T^-), \mathbf{X} \in \gamma_i^*, i = \overline{1, m}, \quad (4.71)$$

$$(\mathbf{q}_c, \mathbf{n})_{\gamma_i^*}^{\pm} = (1 - \alpha_i) \cdot ((\mathbf{u}, \mathbf{n})_{\gamma_i^*}^{\pm} c^{\pm} - \frac{D^{\gamma_i^*}}{d_i}(c^+ - c^-) - \frac{D_T^{\gamma_i^*}}{d_i}(T^+ - T^-)), \mathbf{X} \in \gamma_i^*, i = \overline{1, m}, \quad (4.72)$$

$$(\mathbf{q}_T, \mathbf{n})_{\gamma_i^*}^{\pm} = \rho c_{\rho} (\mathbf{u}, \mathbf{n})_{\gamma_i^*}^{\pm} T^{\pm} - \frac{\lambda^{\gamma_i^*}}{d_i}(T^+ - T^-), \mathbf{X} \in \gamma_i^*, i = \overline{1, m}, \quad (4.73)$$

$$[(\mathbf{u}, \mathbf{n})]|_{\gamma_i^*} = 0, [(\mathbf{q}_c, \mathbf{n})]|_{\gamma_i^*} = 0, [(\mathbf{q}_T, \mathbf{n})]|_{\gamma_i^*} = 0, i = \overline{1, m}, \quad (4.74)$$

$$h(\mathbf{X}, 0) = h_0(\mathbf{X}), c(\mathbf{X}, 0) = C_0(\mathbf{X}), T(\mathbf{X}, 0) = T_0(\mathbf{X}), N(\mathbf{X}, 0) = N_0(\mathbf{X}), \mathbf{X} \in \overline{\Omega}, \quad (4.75)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{R\gamma a_0}{1 + (R-1)\xi} + \beta(1+e)\gamma \right) \frac{\partial h_0}{\partial t} = (1+e) \nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c_0, T_0, h_0) \nabla h_0 - \mathbf{K}_c(c_0) \nabla c_0 - \mathbf{K}_T \nabla T_0) - \\ & - \frac{R\gamma a_1 \beta_1}{1 + (R-1)\xi} h_0 + \frac{a_0}{1 + (R-1)\xi} \left(\frac{\partial \Theta_0^*}{\partial t} + R \frac{\partial p_0^*}{\partial t} \right) + \frac{a_1 \beta_1}{1 + (R-1)\xi} (\Theta_0^* + R p_0^*), \mathbf{X} \in \overline{\Omega}, t = 0, \end{aligned} \quad (4.76)$$

де $t > 0$; m – кількість напівпроникних включень Γ_i в області Ω ; d_i – товщина напівпроникного включення γ_i^* , $i = \overline{1, m}$; $k_h^{\gamma_i^*}$, $k_c^{\gamma_i^*}$, $k_T^{\gamma_i^*}$, $D^{\gamma_i^*}$, $D_T^{\gamma_i^*}$, $\lambda^{\gamma_i^*}$ – характеристики напівпроникного включення γ_i^* , $i = \overline{1, m}$; $\mathbf{n}$ – певним чином зорієнтований вектор напрямних косинусів нормалі до напівпроникних включень; $\mathbf{X} \in \Omega$; $\Omega = \bigcup_{i=1}^m \Omega_i$; Γ_{ij} – межа контакту між областями Ω_i та Ω_j ; $h_0(\mathbf{X})$, $c_0(\mathbf{X})$, $T_0(\mathbf{X})$, $N_0(\mathbf{X})$, $h_1(\mathbf{X}, t)$, $c_1(\mathbf{X}, t)$, $T_1(\mathbf{X}, t)$ – задані функції; $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$, $\Gamma_3 \cup \Gamma_4 = \Gamma$, $\Gamma_5 \cup \Gamma_6 = \Gamma$;

$$h(\mathbf{X}, t) = \begin{cases} h_i(\mathbf{X}, t), & (\mathbf{X}, t) \in \overline{Q}_{t_0}^{(i)}; \end{cases} c(\mathbf{X}, t) = \begin{cases} c_i(\mathbf{X}, t), & (\mathbf{X}, t) \in \overline{Q}_{t_0}^{(i)}; \end{cases}$$

$$N(\mathbf{X}, t) = \begin{cases} N_i(\mathbf{X}, t), & (\mathbf{X}, t) \in \overline{Q}_{t_0}^{(i)}; \end{cases} T(\mathbf{X}, t) = \begin{cases} T_i(\mathbf{X}, t), & (\mathbf{X}, t) \in \overline{Q}_{t_0}^{(i)}; \end{cases}$$

$$\mathbf{K}_h(c, T, h) = \{ \mathbf{K}_i^{(h)}(c_i, T_i, h_i), \mathbf{X} \in \Omega_i; \mathbf{K}_c(c) = \{ \mathbf{K}_i^{(c)}(c_i), \mathbf{X} \in \Omega_i; \}$$

$$\mathbf{K}_T = \{ \mathbf{K}_i^{(T)}, \mathbf{X} \in \Omega_i; \mathbf{D}(c, T, h) = \{ \mathbf{D}_i(c_i, T_i, h_i), \mathbf{X} \in \Omega_i; \mathbf{D}_T = \{ \mathbf{D}_{(0)T}, \mathbf{X} \in \Omega_i; \}$$

$$\lambda(c) = \{ \lambda_i(c_i), \mathbf{X} \in \Omega_i; c_T = \{ (c_T)_i, \mathbf{X} \in \Omega_i; e = \{ e_i, \mathbf{X} \in \Omega_i; n = \{ n_i, \mathbf{X} \in \Omega_i; \}$$

$$\begin{aligned}\alpha_s &= \{ \alpha_{(i)s}, \quad \mathbf{X} \in \Omega_i; \quad a_0 = \{ a_{(i)0}, \quad \mathbf{X} \in \Omega_i; \quad a_1 = \{ a_{(i)1}, \quad \mathbf{X} \in \Omega_i; \\ \beta_1 &= \{ \beta_{(i)1}, \quad \mathbf{X} \in \Omega_i; \quad \gamma_1 = \{ \gamma_{(i)1}, \quad \mathbf{X} \in \Omega_i; \quad \chi = \{ \chi_i, \quad \mathbf{X} \in \Omega_i; \quad [f] \Big|_{\Gamma_i} = f_i^+ - f_i^-, \\ f_i^+ &= f \Big|_{\Gamma_i+0}, \quad f_i^- = f \Big|_{\Gamma_i-0}, \quad Q_{t_0}^{(i)} = \Omega_i \times (0; t_0], \quad Q_{t_0} = \Omega \times (0; t_0]; \\ \varphi &= \{ \varphi_i, \quad \mathbf{X} \in \Omega_i - \text{функція вибору, значення якої залежить від області } \Omega_i.\end{aligned}$$

4.2. Застосування методу скінченних елементів для чисельного розв'язання крайової задачі фільтраційної консолідації шаруватих ґрунтів, які містять напівпроникні включення в умовах впливу теплосолетранспорту

Аналогічно [115, 116, 247] означимо класичний розв'язок крайової задачі (4.57)–(4.76).

Означення 4.1. Класичним розв'язком крайової задачі (4.57)–(4.76) називається трійка функцій $h(\mathbf{X}, t)$, $c(\mathbf{X}, t)$, $T(\mathbf{X}, t)$, які неперервні разом зі своїми частинними похідними першого порядку по просторових змінних на кожній із областей $\overline{Q_{t_0}^{(i)}}$, $i = \overline{1, m}$, мають обмежені неперервні частинні похідні другого порядку по просторових змінних і $\frac{\partial(\bullet)}{\partial t}$ на $\overline{Q_{t_0}^{(i)}}$, $i = \overline{1, m}$, та функція $N(\mathbf{X}, t)$, яка має неперервну частинну похідну $\frac{\partial(\bullet)}{\partial t}$ на $\overline{Q_{t_0}^{(i)}}$, $i = \overline{1, m}$, і які задовольняють співвідношенням (4.57)–(4.76).

В означенні 4.1 область $Q_{t_0}^{(i)} = \Omega_i \times (0; t_0]$, $i = \overline{1, m}$.

Нехай H_0 – простір вектор-функцій $\mathbf{s}(\mathbf{X}) = (s_1(\mathbf{X}); s_2(\mathbf{X}); s_3(\mathbf{X}); s_4(\mathbf{X}))$, кожна із компонент $s_i(\mathbf{X})$, $i = \overline{1, 4}$ яких в кожній із областей Ω_j , $j = \overline{1, m}$, належать простору Соболева $W_2^1(\Omega_j)$, причому $s_1(\mathbf{X})$, $s_2(\mathbf{X})$ та $s_3(\mathbf{X})$ набувають нульових значень на тих частинах межі області Ω , де, відповідно для функцій $h(\mathbf{X}, t)$, $c(\mathbf{X}, t)$, $T(\mathbf{X}, t)$ задані граничні умови першого роду, тобто,

$s_1(\mathbf{X})|_{\Gamma_2} = 0$, $s_2(\mathbf{X})|_{\Gamma_4} = 0$, $s_3(\mathbf{X})|_{\Gamma_6} = 0$, а також задовольняють головним умовам спряження (4.66), (4.67), (4.69), відповідно.

Нехай H – простір вектор-функцій $\mathbf{f}(\mathbf{X}, t) = (f_1(\mathbf{X}, t); f_2(\mathbf{X}, t); f_3(\mathbf{X}, t); f_4(\mathbf{X}, t))$, кожна з компонент $f_i(\mathbf{X}, t)$, $i = \overline{1, 4}$ яких інтегровна з квадратом разом зі своїми першими частинними похідними по всіх змінних в кожній із областей Ω_j , $j = \overline{1, m}$, $\forall t \in (0; t_0]$, причому $f_1(\mathbf{X}, t)$, $f_2(\mathbf{X}, t)$ та $f_3(\mathbf{X}, t)$ задовольняють, відповідно, граничні умови першого роду, що і функції $h(\mathbf{X}, t)$, $c(\mathbf{X}, t)$, $T(\mathbf{X}, t)$, тобто, $f_1(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_2} = H_1(\mathbf{X}, t)$, $\mathbf{X} \in \Gamma_2$, $f_2(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_4} = C_1(\mathbf{X}, t)$, $\mathbf{X} \in \Gamma_4$, $f_3(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_6} = T_1(\mathbf{X}, t)$, $\mathbf{X} \in \Gamma_6$, а також задовольняють головним умовам спряження (4.66), (4.67), (4.69), відповідно.

Використовуючи стандартну процедуру: домноживши рівності (4.57)–(4.60), кожен з початкових умов (4.75) та початкову умову (4.76), відповідно, на довільні функції $s_1(\mathbf{X})$, $s_2(\mathbf{X})$, $s_3(\mathbf{X})$, $s_4(\mathbf{X})$ такі, що $(s_1(\mathbf{X}); s_2(\mathbf{X}); s_3(\mathbf{X}); s_4(\mathbf{X})) \in H_0$, інтегруючи їх по області Ω , застосовуючи формулу Остроградського–Гаусса та враховуючи перші із граничних умов (4.63)–(4.65), а також умови спряження (4.70)–(4.74), отримаємо

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a_0}{1 + (R-1)\xi} + \frac{\beta(1+e)}{R} \right) \int_{\Omega} \frac{\partial^2 h}{\partial^2} s_1(\mathbf{X}) d\Omega + \beta_1 \left(\frac{a_0 + a_1}{1 + (R-1)\xi} + \frac{\beta(1+e)}{R} \right) \int_{\Omega} \frac{\partial h}{\partial t} s_1(\mathbf{X}) d\Omega + \\ & + \frac{1+e}{R\gamma} \beta_1 \int_{\Omega} \{ (\mathbf{K}_h(c, T, h) \nabla h, \nabla s_1) - (\mathbf{K}_c(c) \nabla c, \nabla s_1) - (\mathbf{K}_T \nabla T, \nabla s_1) \} d\Omega + \\ & + \frac{1+e}{R\gamma} \sum_{i=1}^m \frac{\beta_1}{d_i} \int_{\gamma_i^*} (k_h^{\gamma_i^*}[h] - k_c^{\gamma_i^*}[c] - k_T^{\gamma_i^*}[T])[s_1] d\gamma_i^* + \\ & + \frac{1+e}{R\gamma} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \{ (\mathbf{K}_h(c, T, h) \nabla h, \nabla s_1) - (\mathbf{K}_c(c) \nabla c, \nabla s_1) - (\mathbf{K}_T \nabla T, \nabla s_1) \} d\Omega + \\ & + \frac{1+e}{R\gamma} \sum_{i=1}^m \frac{1}{d_i} \int_{\gamma_i^*} \frac{\partial}{\partial t} (k_h^{\gamma_i^*}[h] - k_c^{\gamma_i^*}[c] - k_T^{\gamma_i^*}[T])[s_1] d\gamma_i^* = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\beta_1(\alpha_\rho + (2q-1)\alpha_s)}{R\gamma} \int_{\Omega} \frac{\partial T}{\partial \hat{t}} s_1(\mathbf{X}) d\Omega + \frac{\varepsilon\beta_1(1+e)}{R\rho_c\gamma} \int_{\Omega} \left(n \frac{\partial \hat{c}}{\partial \hat{t}} - e \frac{\partial N}{\partial t} \right) s_1(\mathbf{X}) d\Omega \\
&+ \frac{e(\alpha_\rho + (2q-1)\alpha_s)}{R\gamma} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} s_1(\mathbf{X}) d\Omega + \frac{\varepsilon(1+e)}{R\rho_c\gamma} \int_{\Omega} \left[n \frac{\partial^2 c}{\partial t^2} - e \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} \right] s_1(\mathbf{X}) d\Omega + \\
&+ \frac{a_0}{\gamma R(1+(R-1)\xi)} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 (\Theta^* + R\gamma h^*)}{\partial \hat{t}^2} s_1(\mathbf{X}) d\Omega + \frac{\beta_1(a_0 + a_1)}{\gamma R(1+(R-1)\xi)} \int_{\Omega} \frac{\partial (\Theta^* + R\gamma h^*)}{\partial \hat{t}} s_1(\mathbf{X}) d\Omega,
\end{aligned} \tag{4.77}$$

$$\int_{\Omega} h(\mathbf{X}, 0) s_1(\mathbf{X}) d\Omega = \int_{\Omega} h_0(\mathbf{X}) s_1(\mathbf{X}) d\Omega, \tag{4.78}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \left(n \frac{\partial c}{\partial t} s_2(\mathbf{X}) + (\mathbf{D}(c, T, h) \nabla c, \nabla s_2) + (\mathbf{D}_T \nabla T, \nabla s_2) \right) d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{u} \nabla c s_2(\mathbf{X}) d\Omega + \\
&+ \sum_{i=1}^m \frac{(1-\alpha_i)}{d_i} \int_{\gamma_i^*} \{ (D^{\gamma_i^*}[c] + D_T^{\gamma_i^*}[T] - d_i(\mathbf{u}, \mathbf{n})_{\gamma_i^*}^- c^-) [s_2] + d_i(\mathbf{u}, \mathbf{n})_{\gamma_i^*}^- [cs_2] \} d\gamma_i^* =
\end{aligned} \tag{4.79}$$

$$\begin{aligned}
&= -(\alpha_\rho + q\alpha_s) \int_{\Omega} n c \frac{\partial T}{\partial t} s_2(\mathbf{X}) d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial N}{\partial t} s_2(\mathbf{X}) d\Omega, \\
&\int_{\Omega} c(\mathbf{X}, 0) s_2(\mathbf{X}) d\Omega = \int_{\Omega} c_0(\mathbf{X}) s_2(\mathbf{X}) d\Omega,
\end{aligned} \tag{4.80}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} (c_T \frac{\partial T}{\partial \hat{t}} s_3(\mathbf{X}) + (\lambda \nabla T, \nabla s_3) + \rho c_\rho \mathbf{u} \nabla T s_3(\mathbf{X})) d\Omega + \\
&+ \sum_{i=1}^m \frac{1}{d_i} \int_{\gamma_i^*} \{ (\lambda^{\gamma_i^*}[T] - d_i \rho c_\rho (\mathbf{u}, \mathbf{n})_{\gamma_i^*}^- T^-) [s_3] + d_i \rho c_\rho (\mathbf{u}, \mathbf{n})_{\gamma_i^*}^- [Ts_3] \} d\gamma_i^* = 0,
\end{aligned} \tag{4.81}$$

$$\int_{\Omega} T(\mathbf{X}, 0) s_3(\mathbf{X}) d\Omega = \int_{\Omega} T_0(\mathbf{X}) s_3(\mathbf{X}) d\Omega, \tag{4.82}$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial N}{\partial \hat{t}} s_4(\mathbf{X}) d\Omega - \gamma_1 \int_{\Omega} (c - C_m) N^Z(\mathbf{X}, t) s_4(\mathbf{X}) d\Omega = 0, \tag{4.83}$$

$$\int_{\Omega} N(\mathbf{X}, 0) s_4(\mathbf{X}) d\Omega = \int_{\Omega} N_0(\mathbf{X}) s_4(\mathbf{X}) d\Omega, \tag{4.84}$$

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{R\gamma a_0}{1+(R-1)\xi} + \gamma\beta(1+e) \right) \int_{\Omega} \frac{\partial h_0}{\partial t} s_1(\mathbf{X}) d\Omega + \\
&+ (1+e) \int_{\Omega} \{ (\mathbf{K}_h(c_0, T_0, h_0) \nabla h_0, \nabla s_1) - (\mathbf{K}_c(c_0) \nabla c_0, \nabla s_1) - (\mathbf{K}_T \nabla T_0, \nabla s_1) \} d\Omega + \\
&+ (1+e) \sum_{i=1}^m \frac{1}{d_i} \int_{\gamma_i^*} (k_h^{\gamma_i^*}[h_0] - k_c^{\gamma_i^*}[c_0] - k_T^{\gamma_i^*}[T_0]) [s_1] d\gamma_i^* + \frac{R\gamma a_1 \beta_1}{1+(R-1)\xi} \int_{\Omega} h_0(\mathbf{X}) s_1(\mathbf{X}) d\Omega = \\
&= \frac{a_0}{1+(R-1)\xi} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \Theta_0^*}{\partial t} + R \frac{\partial p_0^*}{\partial t} \right) s_1(\mathbf{X}) d\Omega + \frac{a_1 \beta_1}{1+(R-1)\xi} \int_{\Omega} (\Theta_0^* + R p_0^*) s_1(\mathbf{X}) d\Omega,
\end{aligned} \tag{4.85}$$

$$\forall (s_1(\mathbf{X}); s_2(\mathbf{X}); s_3(\mathbf{X}); s_4(\mathbf{X})) \in H_0, (h(\mathbf{X}, t); c(\mathbf{X}, t); T(\mathbf{X}, t); N(\mathbf{X}, t)) \in H.$$

Означення 4.2. Вектор-функція $(h(\mathbf{X}, t); c(\mathbf{X}, t); T(\mathbf{X}, t); N(\mathbf{X}, t)) \in H$, котра $\forall (s_1(\mathbf{X}); s_2(\mathbf{X}); s_3(\mathbf{X}); s_4(\mathbf{X})) \in H_0$ задовольняє інтегральним співвідношенням (4.77)–(4.85) називається узагальненим розв'язком крайової задачі (4.57)–(4.76).

Оскільки значення сіткових чисел Пекле рівнянь (4.58), (4.59)

$$Pe_c = \frac{1}{2} h_e \frac{\|\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{D}\|}, \quad Pe_T = \frac{1}{2} h_e \frac{\|\rho c_\rho \mathbf{u}\|}{\|\lambda\|}$$

можуть бути більшими за одиницю, то числовий розв'язок задачі (4.57)–(4.76), побудований за класичною схемою Гальоркіна, може сильно осцилювати у всій області визначення. Тут h_e – максимальна довжина сторони в усіх скінченних елементах. Тому, для стабілізації чисельних розв'язків рівнянь (4.58), (4.59) використаємо протипотокову схему Петрова–Гальоркіна [241, 310, 380], згідно якої маємо

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (n \frac{\partial}{\partial t} s_2(\mathbf{X}) + (\mathbf{D}(c, T, h) \nabla c, \nabla s_2) + (\mathbf{D}_T \nabla T, \nabla s_2)) d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{u} \nabla c s_2(\mathbf{X}) d\Omega + \\ & + \sum_{i=1}^m \frac{(1 - \alpha_i)}{d_i} \int_{\gamma_i^*} \{ (D_{\gamma_i}^*[c] + D_T^*[T] - d_i(\mathbf{u}, \mathbf{n})_{\gamma_i^*}^- c^-) [s_2] + d_i(\mathbf{u}, \mathbf{n})_{\gamma_i^*}^- [cs_2] \} d\gamma_i^* + \\ & + \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(c)} \int_{\Omega_e} (n \frac{\partial}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{D}(c, T, h) \nabla c) - \nabla \cdot (\mathbf{D}_T \nabla T) + \mathbf{u} \nabla c + (\alpha_\rho + q\alpha_s) nc \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t}) \times \\ & \times \mathbf{u} \nabla s_2 d\Omega = -(\alpha_\rho + q\alpha_s) \int_{\Omega} nc \frac{\partial T}{\partial t} s_2(\mathbf{X}) d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial N}{\partial t} s_2(\mathbf{X}) d\Omega, \end{aligned} \quad (4.86)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (c_T \frac{\partial T}{\partial t} s_3(\mathbf{X}) + (\lambda \nabla T, \nabla s_3) + \rho c_\rho \mathbf{u} \nabla T s_3(\mathbf{X})) d\Omega + \\ & + \sum_{i=1}^m \frac{1}{d_i} \int_{\gamma_i^*} \{ (\lambda_{\gamma_i}^*[T] - d_i \rho c_\rho (\mathbf{u}, \mathbf{n})_{\gamma_i^*}^- T^-) [s_3] + d_i \rho c_\rho (\mathbf{u}, \mathbf{n})_{\gamma_i^*}^- [Ts_3] \} d\gamma_i^* + \quad (4.87) \\ & + \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(T)} \int_{\Omega_e} (c_T \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \rho c_\rho \mathbf{u} \nabla T) \rho c_\rho \mathbf{u} \nabla s_3 d\Omega = 0; \end{aligned}$$

де $\Omega = \bigcup \Omega_e$, Ω_e – скінченні елементи; $\tau_e^{(c)}$, $\tau_e^{(T)}$ – параметри регуляризації.

Наближений розв'язок задачі (4.57)–(4.76) шукаємо у вигляді

$$\begin{aligned}
 (\hat{h}(\mathbf{X}, t); \hat{c}(\mathbf{X}, t); \hat{T}(\mathbf{X}, t); \hat{N}(\mathbf{X}, t)) = & \left(\sum_{i=1}^{n_1} h_i(t) \varphi_i^{(1)}(\mathbf{X}) + W_1(\mathbf{X}, t); \right. \\
 & \sum_{i=1}^{n_2} c_i(t) \varphi_i^{(2)}(\mathbf{X}) + W_2(\mathbf{X}, t); \sum_{i=1}^{n_3} T_i(t) \varphi_i^{(3)}(\mathbf{X}) + W_3(\mathbf{X}, t); \sum_{i=1}^{n_4} N_i(t) \varphi_i^{(4)}(\mathbf{X}) \Big), \\
 & (4.88)
 \end{aligned}$$

де $\Phi_i = (\varphi_i^{(1)}; 0; 0; 0)$, $i = \overline{1, n_1}$; $\Phi_i = (0; \varphi_{i-n_1}^{(2)}; 0; 0)$, $i = \overline{n_1+1, n_1+n_2}$; $\Phi_i = (0; 0; \varphi_{i-n_1-n_2}^{(3)}; 0)$, $i = \overline{n_1+n_2+1, n_1+n_2+n_3}$; $\Phi_i = (0; 0; 0; \varphi_{i-\sum_{j=1}^3 n_j}^{(4)})$, $i = \overline{\sum_{j=1}^3 n_j+1, \sum_{j=1}^4 n_j}$ – базисні вектор-функції скінченновимірного підпростору $M_0 \subset H_0$; $W_1(\mathbf{X}, t)$, $W_2(\mathbf{X}, t)$, $W_3(\mathbf{X}, t)$ – відомі функції, такі, що $W_1|_{\Gamma_2} = H_1(\mathbf{X}, t)$, $\mathbf{X} \in \Gamma_2$; $W_2|_{\Gamma_4} = C_1(\mathbf{X}, t)$, $\mathbf{X} \in \Gamma_4$; $W_3|_{\Gamma_6} = T_1(\mathbf{X}, t)$, $\mathbf{X} \in \Gamma_6$; $\Omega = \bigcup \Omega_e$, Ω_e – скінченні елементи; $\tau_e^{(c)}$, $\tau_e^{(T)}$ – параметри регуляризації.

Сукупність вектор-функцій, які можна подати у вигляді (4.88), породжують множину $M \subset H$.

О з н а ч е н н я 4.3. Наближеним узагальненим розв'язком крайової задачі (4.57)–(4.76) називається вектор-функція $(\hat{h}(\mathbf{X}, t); \hat{c}(\mathbf{X}, t); \hat{T}(\mathbf{X}, t); \hat{N}(\mathbf{X}, t)) \in M$, яка $\forall t \in (0, t_0]$ та довільної вектор-функції $(S_1(\mathbf{X}); S_2(\mathbf{X}); S_3(\mathbf{X}); S_4(\mathbf{X})) \in M_0$ задовольняє інтегральним співвідношенням

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{a_0}{1+(R-1)\xi} + \frac{\beta(1+e)}{R} \right) \int_{\Omega} \frac{\partial^2 \hat{h}}{\partial \alpha^2} S_1(\mathbf{X}) d\Omega + \beta_1 \left(\frac{a_0 + a_1}{1+(R-1)\xi} + \frac{\beta(1+e)}{R} \right) \int_{\Omega} \frac{\partial \hat{h}}{\partial \alpha} S_1(\mathbf{X}) d\Omega + \\
 & + \frac{1+e}{R\gamma} \beta_1 \int_{\Omega} \left\{ (\mathbf{K}_h(\hat{c}, \hat{T}, \hat{h}) \nabla \hat{h}, \nabla S_1) - (\mathbf{K}_c(\hat{c}) \nabla \hat{c}, \nabla S_1) - (\mathbf{K}_T \nabla \hat{T}, \nabla S_1) \right\} d\Omega + \\
 & + \frac{1+e}{R\gamma} \sum_{i=1}^m \frac{\beta_1}{d_i} \int_{\gamma_i^*} (k_h^{\gamma_i} [\hat{h}] - k_c^{\gamma_i} [\hat{c}] - k_T^{\gamma_i} [\hat{T}]) [S_1] d\gamma_i^* + \\
 & + \frac{1+e}{R\gamma} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ (\mathbf{K}_h(\hat{c}, \hat{T}, \hat{h}) \nabla \hat{h}, \nabla S_1) - (\mathbf{K}_c(\hat{c}) \nabla \hat{c}, \nabla S_1) - (\mathbf{K}_T \nabla \hat{T}, \nabla S_1) \right\} d\Omega + \\
 & + \frac{1+e}{R\gamma} \sum_{i=1}^m \frac{1}{d_i} \int_{\gamma_i^*} \frac{\partial}{\partial t} (k_h^{\gamma_i} [\hat{h}] - k_c^{\gamma_i} [\hat{c}] - k_T^{\gamma_i} [\hat{T}]) [S_1] d\gamma_i^* =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\beta_1(\alpha_\rho + (2q-1)\alpha_s)}{R\gamma} \int_{\Omega} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{\alpha}} S_1(\mathbf{X}) d\Omega + \frac{\varepsilon\beta_1(1+e)}{R\rho_c\gamma} \int_{\Omega} \left(n \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial \hat{\alpha}} - e \frac{\partial \hat{N}}{\partial t} \right) S_1(\mathbf{X}) d\Omega + \\
&+ \frac{e(\alpha_\rho + (2q-1)\alpha_s)}{R\gamma} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial t^2} S_1(\mathbf{X}) d\Omega + \frac{\varepsilon(1+e)}{R\rho_c\gamma} \int_{\Omega} \left[n \frac{\partial^2 \hat{\alpha}}{\partial t^2} - e \frac{\partial^2 \hat{N}}{\partial t^2} \right] S_1(\mathbf{X}) d\Omega + \\
&+ \frac{a_0}{\gamma R(1+(R-1)\xi)} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 (\Theta^* + R\gamma h^*)}{\partial \hat{\alpha}^2} S_1(\mathbf{X}) d\Omega + \frac{\beta_1(a_0 + a_1)}{\gamma R(1+(R-1)\xi)} \int_{\Omega} \frac{\partial (\Theta^* + R\gamma h^*)}{\partial \hat{\alpha}} S_1(\mathbf{X}) d\Omega,
\end{aligned} \tag{4.89}$$

$$\int_{\Omega} \hat{h}(\mathbf{X}, 0) S_1(\mathbf{X}) d\Omega = \int_{\Omega} h_0(\mathbf{X}) S_1(\mathbf{X}) d\Omega, \tag{4.90}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \left(n \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial t} S_2(\mathbf{X}) + (\mathbf{D}(\hat{\alpha}, \hat{T}, \hat{h}) \nabla \hat{\alpha}, \nabla S_2) + (\mathbf{D}_T \nabla \hat{T}, \nabla S_2) \right) d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{u} \nabla \hat{\alpha} S_2(\mathbf{X}) d\Omega + \\
&+ \sum_{i=1}^m \frac{(1-\alpha_i)}{d_i} \int_{\gamma_i^*} \{ (D^{\gamma_i^*}[\hat{\alpha}] + D_T^{\gamma_i^*}[\hat{T}] - d_i(\mathbf{u}, \mathbf{n})_{\gamma_i^*}^- c^-)[S_2] + d_i(\mathbf{u}, \mathbf{n})_{\gamma_i^*}^- [\hat{\alpha} S_2] \} d\gamma_i^* =
\end{aligned} \tag{4.91}$$

$$\begin{aligned}
&= -(\alpha_\rho + q\alpha_s) \int_{\Omega} n \hat{\alpha} \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} S_2(\mathbf{X}) d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \hat{N}}{\partial t} S_2(\mathbf{X}) d\Omega, \\
&\int_{\Omega} \hat{c}(\mathbf{X}, 0) S_2(\mathbf{X}) d\Omega = \int_{\Omega} c_0(\mathbf{X}) S_2(\mathbf{X}) d\Omega,
\end{aligned} \tag{4.92}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} (c_T \frac{\partial \hat{T}}{\partial \hat{\alpha}} S_3(\mathbf{X}) + (\lambda \nabla \hat{T}, \nabla S_3) + \rho c_\rho \mathbf{u} \nabla \hat{T} S_3(\mathbf{X})) d\Omega + \\
&+ \sum_{i=1}^m \frac{1}{d_i} \int_{\gamma_i^*} \{ (\lambda^{\gamma_i^*}[\hat{T}] - d_i \rho c_\rho(\mathbf{u}, \mathbf{n})_{\gamma_i^*}^- \hat{T}^-)[S_3] + d_i \rho c_\rho(\mathbf{u}, \mathbf{n})_{\gamma_i^*}^- [\hat{T} S_3] \} d\gamma_i^* = 0,
\end{aligned} \tag{4.93}$$

$$\int_{\Omega} \hat{T}(\mathbf{X}, 0) S_3(\mathbf{X}) d\Omega = \int_{\Omega} T_0(\mathbf{X}) S_3(\mathbf{X}) d\Omega, \tag{4.94}$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \hat{N}}{\partial \hat{\alpha}} S_4(\mathbf{X}) d\Omega - \gamma_1 \int_{\Omega} (\hat{\alpha} - C_m) \hat{N}^z(\mathbf{X}, t) S_4(\mathbf{X}) d\Omega = 0, \tag{4.95}$$

$$\int_{\Omega} \hat{N}(\mathbf{X}, 0) S_4(\mathbf{X}) d\Omega = \int_{\Omega} N_0(\mathbf{X}) S_4(\mathbf{X}) d\Omega, \tag{4.96}$$

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{R\gamma a_0}{1+(R-1)\xi} + \gamma\beta(1+e) \right) \int_{\Omega} \frac{\partial \hat{h}_0}{\partial t} S_1(\mathbf{X}) d\Omega + \\
&+ (1+e) \int_{\Omega} \{ (\mathbf{K}_h(\hat{\alpha}_0, \hat{T}_0, \hat{h}_0) \nabla \hat{h}_0, \nabla S_1) - (\mathbf{K}_c(\hat{\alpha}_0) \nabla \hat{\alpha}_0, \nabla S_1) - (\mathbf{K}_T \nabla \hat{T}_0, \nabla S_1) \} d\Omega + \\
&+ (1+e) \sum_{i=1}^m \frac{1}{d_i} \int_{\gamma_i^*} (k_h^{\gamma_i^*}[\hat{h}_0] - k_c^{\gamma_i^*}[\hat{\alpha}_0] - k_T^{\gamma_i^*}[\hat{T}_0])[S_1] d\gamma_i^* + \frac{R\gamma a_1 \beta_1}{1+(R-1)\xi} \int_{\Omega} \hat{h}_0(\mathbf{X}) S_1(\mathbf{X}) d\Omega = \\
&= \frac{a_0}{1+(R-1)\xi} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \Theta_0^*}{\partial t} + R \frac{\partial p_0^*}{\partial t} \right) S_1(\mathbf{X}) d\Omega + \frac{a_1 \beta_1}{1+(R-1)\xi} \int_{\Omega} (\Theta_0^* + R p_0^*) S_1(\mathbf{X}) d\Omega,
\end{aligned} \tag{4.97}$$

$$\forall (S_1(\mathbf{X}); S_2(\mathbf{X}); S_3(\mathbf{X}); S_4(\mathbf{X})) \in M_0, (\hat{h}(\mathbf{X}, t); \hat{c}(\mathbf{X}, t); \hat{T}(\mathbf{X}, t); \hat{N}(\mathbf{X}, t)) \in M.$$

Із інтегральних рівностей (4.86), (4.87) отримуємо

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(n \frac{\partial \hat{c}}{\partial t} S_2(\mathbf{X}) + (\mathbf{D}(\hat{c}, \hat{T}, \hat{h}) \nabla \hat{c}, \nabla S_2) + (\mathbf{D}_T \nabla \hat{T}, \nabla S_2) \right) d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{u} \nabla \hat{c} S_2(\mathbf{X}) d\Omega + \\ & + \sum_{i=1}^m \frac{(1 - \alpha_i)}{d_i} \int_{\gamma_i^*} \{ (D^{\gamma_i^*}[\hat{c}] + D_T^{\gamma_i^*}[\hat{T}] - d_i(\mathbf{u}, \mathbf{n})_{\gamma_i^*}^- \hat{c}^-) [S_2] + d_i(\mathbf{u}, \mathbf{n})_{\gamma_i^*}^- [\hat{c} S_2] \} d\gamma_i^* + \\ & + \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(c)} \int_{\Omega_e} \left(n \frac{\partial \hat{c}}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{D}(\hat{c}, \hat{T}, \hat{h}) \nabla \hat{c}) - \nabla \cdot (\mathbf{D}_T \nabla \hat{T}) + \mathbf{u} \nabla \hat{c} + (\alpha_p + q\alpha_s) n \hat{c} \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{N}}{\partial t} \right) \times \\ & \times \mathbf{u} \nabla S_2 d\Omega = -(\alpha_p + q\alpha_s) \int_{\Omega} n \hat{c} \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} S_2(\mathbf{X}) d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \hat{N}}{\partial t} S_2(\mathbf{X}) d\Omega, \end{aligned} \quad (4.98)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(c_T \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} S_3(\mathbf{X}) + (\lambda \nabla \hat{T}, \nabla S_3) + \rho c_p \mathbf{u} \nabla \hat{T} S_3(\mathbf{X}) \right) d\Omega + \\ & + \sum_{i=1}^m \frac{1}{d_i} \int_{\gamma_i^*} \{ (\lambda^{\gamma_i^*}[\hat{T}] - d_i \rho c_p(\mathbf{u}, \mathbf{n})_{\gamma_i^*}^- \hat{T}^-) [S_3] + d_i \rho c_p(\mathbf{u}, \mathbf{n})_{\gamma_i^*}^- [\hat{T} S_3] \} d\gamma_i^* + \quad (4.99) \\ & + \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(T)} \int_{\Omega_e} \left(c_T \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} - \nabla \cdot (\lambda \nabla \hat{T}) + \rho c_p \mathbf{u} \nabla \hat{T} \right) \rho c_p \mathbf{u} \nabla S_3 d\Omega = 0, \end{aligned}$$

$$\forall (S_1(\mathbf{X}); S_2(\mathbf{X}); S_3(\mathbf{X}); S_4(\mathbf{X})) \in M_0, (\hat{h}(\mathbf{X}, t); \hat{c}(\mathbf{X}, t); \hat{T}(\mathbf{X}, t); \hat{N}(\mathbf{X}, t)) \in M.$$

Зрозуміло, що в загальному випадку в області складної геометрії знайти функції $W_1(\mathbf{X}, t)$, $W_2(\mathbf{X}, t)$, $W_3(\mathbf{X}, t)$ без наближених обчислень практично неможливо. Тому, при реалізації схем МСЕ на практиці, на межах Γ_2 , Γ_4 , Γ_6 вводять додаткові вузли загальною кількістю n_2^Γ , n_4^Γ , n_6^Γ відповідно і функції $W_1(\mathbf{X}, t)$, $W_2(\mathbf{X}, t)$, $W_3(\mathbf{X}, t)$ наближено шукають за допомогою все тих же базисних функцій МСЕ у вигляді

$$\begin{aligned} W_1(\mathbf{X}, t) & \approx \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2^\Gamma} h_i(t) \varphi_i^{(1)}(\mathbf{X}), \quad W_2(\mathbf{X}, t) \approx \sum_{i=n_2+1}^{n_2+n_4^\Gamma} c_i(t) \varphi_i^{(2)}(\mathbf{X}), \\ W_3(\mathbf{X}, t) & \approx \sum_{i=n_3+1}^{n_3+n_6^\Gamma} T_i(t) \varphi_i^{(3)}(\mathbf{X}). \end{aligned} \quad (4.100)$$

Не зменшуючи загальності будемо вважати, що наближені розв'язки $\hat{h}(\mathbf{X}, t)$, $\hat{c}(\mathbf{X}, t)$, $\hat{T}(\mathbf{X}, t)$, $\hat{N}(\mathbf{X}, t)$ шукаються на одній скінченноелементній сітці при використанні одних і тих же базисних функцій. Тобто, $n_1 + n_2^\Gamma = n_2 + n_4^\Gamma = n_3 + n_6^\Gamma = n_4 = k$; $\varphi_i^{(1)}(\mathbf{X}) = \varphi_i^{(2)}(\mathbf{X}) = \varphi_i^{(3)}(\mathbf{X}) = \varphi_i^{(4)}(\mathbf{X}) = \varphi_i(\mathbf{X})$, $i = \overline{1, k}$. Тоді з (4.100) та (4.88) маємо

$$\begin{aligned} (\hat{h}(\mathbf{X}, t); \hat{c}(\mathbf{X}, t); \hat{T}(\mathbf{X}, t); \hat{N}(\mathbf{X}, t)) = & \left(\sum_{i=1}^k h_i(t) \varphi_i(\mathbf{X}); \right. \\ & \left. \sum_{i=1}^k c_i(t) \varphi_i(\mathbf{X}); \sum_{i=1}^k T_i(t) \varphi_i(\mathbf{X}); \sum_{i=1}^k N_i(t) \varphi_i(\mathbf{X}) \right). \end{aligned} \quad (4.101)$$

З рівностей (4.89), (4.90), (4.98), (4.99), (4.92), (4.94)–(4.97) з урахуванням (4.101), отримуємо задачу Коші для системи нелінійних диференціальних рівнянь відносно вектора $(\mathbf{h}(t); \mathbf{C}(t); \mathbf{T}(t); \mathbf{N}(t))$

$$\mathbf{M}^{(4)} \cdot \frac{d\mathbf{N}}{dt} + \mathbf{L}^{(4)}(\mathbf{C}, \mathbf{N}^\varepsilon) = \mathbf{0}, \quad (4.102)$$

$$\mathbf{M}^{(3)} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{dt} + \mathbf{L}^{(3)}(\mathbf{h}, \mathbf{C}, \mathbf{T}) \cdot \mathbf{T} = \mathbf{F}^{(3)}, \quad (4.103)$$

$$\mathbf{M}^{(2)} \cdot \frac{d\mathbf{C}}{dt} + \mathbf{L}^{(2)}(\mathbf{h}, \mathbf{C}, \mathbf{T}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{L}^{(21)} \cdot \mathbf{T}(t) + \mathbf{M}^{(21)} \cdot \frac{d\mathbf{N}}{dt} + \mathbf{M}^{(22)} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{dt} + \mathbf{F}^{(2)}, \quad (4.104)$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{Q}^{(1)} \cdot \frac{d^2 \mathbf{h}}{dt^2} + \mathbf{M}^{(1)} \cdot \frac{d\mathbf{h}}{dt} + \mathbf{L}^{(1)}(\mathbf{C}, \mathbf{T}, \mathbf{h}) \cdot \mathbf{h}(t) = \\ & = \mathbf{L}^{(12)} \cdot \mathbf{C}(t) + \mathbf{L}^{(13)} \cdot \mathbf{T}(t) + \mathbf{M}^{(12)} \cdot \frac{d\mathbf{C}}{dt} + \mathbf{M}^{(13)} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{dt} + \mathbf{M}^{(14)} \cdot \frac{d\mathbf{N}}{dt} + \\ & + \mathbf{Q}^{(12)} \cdot \frac{d^2 \mathbf{C}}{dt^2} + \mathbf{Q}^{(13)} \cdot \frac{d^2 \mathbf{T}}{dt^2} + \mathbf{Q}^{(14)} \cdot \frac{d^2 \mathbf{N}}{dt^2} + \mathbf{F}^{(1)}, \end{aligned} \quad (4.105)$$

$$\mathbf{M}^{(0)} \cdot \frac{d\mathbf{h}^{(0)}}{dt} + \mathbf{L}^{(0)}(\mathbf{C}^{(0)}, \mathbf{T}^{(0)}) \cdot \mathbf{h}^{(0)} = \mathbf{L}^{(01)} \cdot \mathbf{C}^{(0)} + \mathbf{L}^{(02)} \cdot \mathbf{T}^{(0)} + \mathbf{F}^{(0)}, \quad (4.106)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}^{(1)} \cdot \mathbf{h}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(1)}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(2)} \cdot \mathbf{C}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(2)}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(3)} \cdot \mathbf{T}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(3)}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(4)} \cdot \mathbf{N}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(4)}. \quad (4.107)$$

де

$$\mathbf{h}(t) = (h_i(t))_{i=1}^k, \mathbf{h}^{(0)} = (h_i(0))_{i=1}^k, \mathbf{C}(t) = (c_i(t))_{i=1}^k, \mathbf{C}^{(0)} = (c_i(0))_{i=1}^k, \mathbf{T}(t) = (T_i(t))_{i=1}^k,$$

$$\mathbf{T}^{(0)} = (T_i(0))_{i=1}^k, \mathbf{N}(t) = (N_i(t))_{i=1}^k, \mathbf{N}^{(0)} = (N_i(0))_{i=1}^k,$$

$$\mathbf{M}^{(s)} = (m_{ij}^{(s)})_{i,j=1}^k, s = \overline{0;4}, \mathbf{L}^{(s)} = (l_{ij}^{(s)})_{i,j=1}^k, \mathbf{F}^{(s)} = (f_i^{(s)})_{i=1}^k, s = \overline{0;3}, \mathbf{L}^{(4)} = (l_i^{(4)})_{i=1}^k,$$

$$\mathbf{L}^{(21)} = (l_{ij}^{(21)})_{i,j=1}^k, \mathbf{M}^{(21)} = (m_{ij}^{(21)})_{i,j=1}^k, \mathbf{Q}^{(1)} = (q_{ij}^{(1)})_{i,j=1}^k, \mathbf{Q}^{(1s)} = (q_{ij}^{(1s)})_{i,j=1}^k,$$

$$\mathbf{M}^{(1s)} = (m_{ij}^{(1s)})_{i,j=1}^k, s = \overline{2;4}, \mathbf{L}^{(1s)} = (l_{ij}^{(1s)})_{i,j=1}^k, s = 2;3, \mathbf{L}^{(0s)} = (l_{ij}^{(0s)})_{i,j=1}^k, s = 1;2,$$

$$\tilde{\mathbf{M}}^{(s)} = (\tilde{m}_{ij}^{(s)})_{i,j=1}^k, \tilde{\mathbf{F}}^{(s)} = (\tilde{f}_i^{(s)})_{i=1}^k, s = \overline{0;4},$$

$$\tilde{m}_{ij}^{(1)} = \tilde{m}_{ij}^{(2)} = \tilde{m}_{ij}^{(3)} = \tilde{m}_{ij}^{(4)} = \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\Omega, \tilde{f}_i^{(1)} = \int_{\Omega} h_0 \varphi_i d\Omega, \tilde{f}_i^{(2)} = \int_{\Omega} c_0 \varphi_i d\Omega,$$

$$\tilde{f}_i^{(3)} = \int_{\Omega} T_0 \varphi_i d\Omega, \tilde{f}_i^{(4)} = \int_{\Omega} N_0 \varphi_i d\Omega, m_{ij}^{(2)} = n \left(\int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\Omega + \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(c)} \int_{\Omega_e} \varphi_j \mathbf{u} \nabla \varphi_i d\Omega \right),$$

$$f_i^{(2)} = 0, f_i^{(3)} = 0, m_{ij}^{(3)} = c_T \left(\int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\Omega + \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(T)} \int_{\Omega_e} \rho c_{\rho} \varphi_j \mathbf{u} \nabla \varphi_i d\Omega \right), m_{ij}^{(4)} = \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\Omega,$$

$$l_{ij}^{(21)} = - \int_{\Omega} (\mathbf{D}_T \nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) d\Omega - \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(c)} \int_{\Omega_e} \nabla \cdot (\mathbf{D}_T \nabla \varphi_j) \mathbf{u} \nabla \varphi_i d\Omega - \sum_{s=1}^m \frac{1-\alpha_s}{d_s} \int_{\gamma_s^*} D_T^{\gamma_s^*} [\varphi_j] [\varphi_i] d\gamma_s^*,$$

$$l_{ij}^{(3)} = \int_{\Omega} ((\lambda \nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) + \rho c_{\rho} \varphi_i \mathbf{u} \nabla \varphi_j) d\Omega +$$

$$+ \sum_{s=1}^m \frac{1}{d_s} \int_{\gamma_s^*} \{ (\lambda^{\gamma_s^*} [\varphi_j] - d_s \rho c_{\rho} (\mathbf{u}, \mathbf{n})_{\gamma_s^*}^- \varphi_j^-) [\varphi_i] + d_s \rho c_{\rho} (\mathbf{u}, \mathbf{n})_{\gamma_s^*}^- [\varphi_i \varphi_j] \} d\gamma_s^* +$$

$$+ \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(T)} \int_{\Omega_e} \rho c_{\rho} (-\nabla \cdot (\lambda \nabla \varphi_j) + \rho c_{\rho} \mathbf{u} \nabla \varphi_j) \mathbf{u} \nabla \varphi_i d\Omega,$$

$$l_i^{(4)} = -\gamma_1 \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^k c_j(t) \varphi_j - C_m \right) \left(\sum_{j=1}^k N_j(t) \varphi_j \right)^{\chi} \varphi_i d\Omega,$$

$$l_{ij}^{(2)} = \int_{\Omega} \left((\mathbf{D} \nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j) + \varphi_i \mathbf{u} \nabla \varphi_j + (\alpha_{\rho} + q \alpha_s) n \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} \varphi_i \varphi_j \right) d\Omega +$$

$$+ \sum_{s=1}^m \frac{1-\alpha_s}{d_s} \int_{\gamma_s^*} \{ (D^{\gamma_s^*} [\varphi_j] - d_s (\mathbf{u}, \mathbf{n})_{\gamma_s^*}^- \varphi_j^-) [\varphi_i] + d_s (\mathbf{u}, \mathbf{n})_{\gamma_s^*}^- [\varphi_i \varphi_j] \} d\gamma_s^* +$$

$$+ \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(c)} \int_{\Omega_e} (-\nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla \varphi_j) + \mathbf{u} \nabla \varphi_j + (\alpha_{\rho} + q \alpha_s) n \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} \varphi_j) \mathbf{u} \nabla \varphi_i d\Omega,$$

$$m_{ij}^{(21)} = -\int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\Omega - \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(c)} \int_{\Omega_e} \mathbf{u} \varphi_i \varphi_j d\Omega, \quad m_{ij}^{(14)} = -\frac{\varepsilon e \beta_1 (1+e)}{R \rho_c \gamma} \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\Omega,$$

$$q_{ij}^{(12)} = \frac{\varepsilon n (1+e)}{R \rho_c \gamma} \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\Omega, \quad q_{ij}^{(13)} = \frac{e(\alpha_{\rho} + (2q-1)\alpha_s)}{R\gamma} \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\Omega,$$

$$q_{ij}^{(14)} = -\frac{\varepsilon n (1+e)}{R \rho_c \gamma} \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\Omega,$$

$$l_{ij}^{(12)} = \frac{1+e}{R\gamma} \left(\beta_1 \int_{\Omega} (\mathbf{K}_c \nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) d\Omega + \sum_{s=1}^m \frac{\beta_1}{d_s} \int_{\gamma_s^*} k_c^{\gamma_s^*} [\varphi_j] [\varphi_i] d\gamma_s^* + \int_{\Omega} \left(\frac{d\mathbf{K}_c}{dt} \nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i \right) d\Omega \right),$$

$$l_{ij}^{(13)} = \frac{1+e}{R\gamma} \left(\beta_1 \int_{\Omega} (\mathbf{K}_T \nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) d\Omega + \sum_{s=1}^m \frac{\beta_1}{d_s} \int_{\gamma_s^*} k_T^{\gamma_s^*} [\varphi_j] [\varphi_i] d\gamma_s^* + \int_{\Omega} \left(\frac{d\mathbf{K}_T}{dt} \nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i \right) d\Omega \right),$$

$$q_{ij}^{(1)} = \left(\frac{a_0}{1+(R-1)\xi} + \frac{\beta(1+e)}{R} \right) \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\Omega,$$

$$m_{ij}^{(1)} = \gamma_1 \left(\frac{a_0 + a_1}{1+(R-1)\xi} + \frac{\beta(1+e)}{R} \right) \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\Omega + \frac{1+e}{R\gamma} \int_{\Omega} (\mathbf{K}_h(\hat{c}, \hat{T}) \nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) d\Omega + \\ + \frac{1+e}{R\gamma} \sum_{s=1}^m \frac{1}{d_s} \int_{\gamma_s^*} k_h^{\gamma_s^*} [\varphi_j] [\varphi_i] d\gamma_s^*,$$

$$l_{ij}^{(1)} = \frac{1+e}{R\gamma} \left(\beta_1 \int_{\Omega} (\mathbf{K}_h \nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) d\Omega + \int_{\Omega} \left(\frac{d\mathbf{K}_h}{dt} \nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i \right) d\Omega + \sum_{s=1}^m \frac{\beta_1}{d_s} \int_{\gamma_s^*} k_h^{\gamma_s^*} [\varphi_j] [\varphi_i] d\gamma_s^* \right),$$

$$m_{ij}^{(0)} = \left(\frac{R\gamma a_0}{1+(R-1)\xi} + \gamma\beta(1+e) \right) \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\Omega,$$

$$l_{ij}^{(01)} = (1+e) \int_{\Omega} (\mathbf{K}_c \nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) d\Omega + (1+e) \sum_{s=1}^m \frac{1}{d_s} \int_{\gamma_s^*} k_c^{\gamma_s^*} [\varphi_j] [\varphi_i] d\gamma_s^*,$$

$$m_{ij}^{(12)} = \frac{\varepsilon n \beta_1 (1+e)}{R \rho_c \gamma} \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\Omega + \frac{1+e}{R\gamma} \left(\int_{\Omega} (\mathbf{K}_c(\hat{c}) \nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) d\Omega + \sum_{s=1}^m \frac{1}{d_s} \int_{\gamma_s^*} k_c^{\gamma_s^*} [\varphi_j] [\varphi_i] d\gamma_s^* \right),$$

$$m_{ij}^{(13)} = \frac{\beta_1 (\alpha_{\rho} + (2q-1)\alpha_s)}{R\gamma} \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\Omega + \frac{1+e}{R\gamma} \int_{\Omega} (\mathbf{K}_T(\hat{c}) \nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) d\Omega + \\ + \frac{1+e}{R\gamma} \sum_{s=1}^m \frac{1}{d_s} \int_{\gamma_s^*} k_T^{\gamma_s^*} [\varphi_j] [\varphi_i] d\gamma_s^*,$$

$$\begin{aligned}
l_{ij}^{(0)} &= (1+e) \int_{\Omega} (\mathbf{K}_h(\hat{c}_0, \hat{T}_0) \nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) d\Omega + (1+e) \sum_{s=1}^m \frac{1}{d_s} \int_{\gamma_s^*} k_h^{\gamma_s^*} [\varphi_j] [\varphi_i] d\gamma_s^* + \\
&\quad + \frac{R\gamma a_1 \beta_1}{1+(R-1)\xi} \int_{\Omega} \varphi_j \varphi_i d\Omega, \\
l_{ij}^{(02)} &= (1+e) \int_{\Omega} (\mathbf{K}_T \nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) d\Omega + (1+e) \sum_{s=1}^m \frac{1}{d_s} \int_{\gamma_s^*} k_T^{\gamma_s^*} [\varphi_j] [\varphi_i] d\gamma_s^*, \\
f_i^{(1)} &= \frac{a_0}{\gamma R(1+(R-1)\xi)} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 (\Theta^* + R\mathcal{H}^*)}{\partial^2} \varphi_i d\Omega + \frac{\beta_1(a_0 + a_1)}{\gamma R(1+(R-1)\xi)} \int_{\Omega} \frac{\partial (\Theta^* + R\mathcal{H}^*)}{\partial \mathcal{A}} \varphi_i d\Omega, \\
f_i^{(0)} &= \frac{a_0}{1+(R-1)\xi} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \Theta_0^*}{\partial t} + R \frac{\partial p_0^*}{\partial t} \right) \varphi_i d\Omega + \frac{a_1 \beta_1}{1+(R-1)\xi} \int_{\Omega} (\Theta_0^* + R p_0^*) \varphi_i d\Omega.
\end{aligned}$$

Параметри регуляризації $\tau_e^{(T)}$, $\tau_e^{(c)}$ в (4.98), (4.99) згідно [241, 380] вибираються наступним чином:

$$\tau_e^{(T)} = \frac{h_e}{a \|\rho_{\rho} \mathbf{u}\|_{\infty, e}} \gamma(Pe_T), \quad \tau_e^{(c)} = \frac{h_e}{a \|\mathbf{u}\|_{\infty, e}} \gamma(Pe_c),$$

$$\text{де } a = 3, \quad \gamma(z) = \begin{cases} z, & 0 \leq z \leq 1; \\ 1, & 1 \leq z < \infty. \end{cases}$$

Потрібно відмітити особливості у визначенні елементів матриць задачі Коші (4.102)–(4.107), якщо вузол скінченноелементної сітки під номером i попадає на частину межі Γ , де для невідомої функції задано граничні умови першого роду. Маємо:

1. Якщо $\mathbf{X}_i \in \Gamma_2$, то в системі (4.105) всі елементи i -го рядка покладаються рівними нулю і лише $l_{ii}^{(1)} := 1$ (де " := " – символ присвоєння). Також $f_i^{(1)} := H_1(\mathbf{X}_i, t)$.
2. Якщо $\mathbf{X}_i \in \Gamma_4$, то в системі (4.104) всі елементи i -го рядка покладаються рівними нулю і лише $l_{ii}^{(2)} := 1$, причому $f_i^{(2)} := C_1(\mathbf{X}_i, t)$.
3. Якщо $\mathbf{X}_i \in \Gamma_6$, то в системі (4.103) всі елементи i -го рядка покладаються рівними нулю і лише $l_{ii}^{(3)} := 1$, причому $f_i^{(3)} := T_1(\mathbf{X}_i, t)$.

Схеми дискретизації в часі для відшукування наближеного розв'язку задачі Коші (4.102)–(4.107) розглянуті в попередньому розділі.

4.3. Аналіз чисельних експериментів фільтраційної консолідації шаруватих ґрунтів з напівпроникними включеннями

Програмна реалізація алгоритмів чисельного розв'язання крайової задачі фільтраційної консолідації шаруватих ґрунтів та ґрунтів з напівпроникними включеннями в умовах впливу техногенних факторів методом скінченних елементів виконана з використанням сучасних технологій об'єктно-орієнтованого та візуально-подійного програмування [65].

Для чисельного знаходження інтегралів при формуванні матриць методу скінченних елементів використовувались квадратурні формули Гауса [162]. Системи лінійних алгебричних рівнянь методу скінченних елементів розв'язувались прямим методом Гауса з вибором головного елемента та з урахуванням розрідженості матриці [118].

Приклад 4.1.

1. Розмірність задачі: $R=1$.

2. Область розв'язання задачі: Область фільтраційної консолідації – зростаючий масив глинистого ґрунту загальною товщиною $l = 24$ м (див. рис. 4.1).

3. Чисельний метод: Чисельні розрахунки проведено методом скінченних елементів при лінійних та квадратичних базисних функціях з довжиною скінченного елемента 0.5 м.

4. Схеми дискретизації в часі: Для дискретизації в часі використано схему предиктор–коректор з рівномірним кроком за часом $\tau = 30$ діб.

5. Вплив масоперенесення: Враховувався через явище хімічного осмосу зі сталим коефіцієнтом $k_{11}^{(c)} = 2.8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^5/\text{кг} \cdot \text{доба}$ та через

залежність коефіцієнта фільтрації від концентрації порового сольового розчину. Параметри масоперенесення: $D_{11} = 0.002 \text{ м}^2/\text{доба}$.

6. Вплив теплоперенесення: Враховувався через явище термічного осмосу зі сталим коефіцієнтом $k_{11}^{(T)} = 2.8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{град} \cdot \text{доба}$, через явище термічної дифузії з коефіцієнтом $D_{11T} = 0.002 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{град} \cdot \text{доба} \cdot \text{літр}$ та через залежність коефіцієнта фільтрації від температури ґрунту. Параметри теплоперенесення: $\lambda_{11} = 108 \text{ кДж}/\text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба}$, $c_\rho = 4,2 \text{ кДж}/\text{кг} \cdot \text{град}$, $c_T = 2137 \text{ кДж}/\text{м}^3 \cdot \text{град}$, $\rho = 1100 \text{ кг}/\text{м}^3$.

7. Вплив наявності солей в рідкій та твердій фазах на рівняння нерозривності: Не враховувався.

8. Вплив термічного розширення фаз ґрунту: Не враховувалось.

9. Наявність газу: Не враховувалось. Ґрунт вважався двофазним при середньому значенні коефіцієнта пористості $e = 0.62$ та пористості $n = 0.38$.

10. Залежність коефіцієнта фільтрації від надлишкових напорів, температури та концентрації солей в рідкій фазі: Коефіцієнт фільтрації покладался незалежним від функції надлишкових напорів. Для випадку постійного коефіцієнта фільтрації

$k_{11}^{(h)} = k_{20} = 10^{-3} \frac{\text{м}}{\text{доба}}$. Залежність $k_{11}^{(h)} = k(c, T)$ визначалася шляхом апроксимації

функції $k(c, T)$ радіальними базисними функціями [300, 340, 402] аналогічно прикладу 3.1.

11. Повзучість скелету ґрунту: Не враховувалась. Між сумою головних напружень та коефіцієнтом пористості приймалась лінійна залежність (2.9) у вигляді спрямленого відрізка компресійної кривої при $a = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{Н}$. В узагальненому законі Дарсі–Герсєванова знехтувано швидкістю руху твердих частинок ґрунту.

12. М а с о о б м і н н і п р о ц е с и: Не враховувались і коефіцієнт швидкості масообміну $\gamma_1 = 0$ доба⁻¹.

13. Г р а н и ч н і у м о в и:

$$\left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad h(l, t) = 0, \quad c(0, t) = C_m, \quad \left. \frac{\partial c}{\partial x} \right|_{x=l} = 0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad T(l, t) = T_1(t),$$

де $C_m = 350 \text{ г/л}$, $T_1(t) = 17 + 13 \cos\left(\frac{\pi t}{180}\right)$. Вважалося, що верхня межа масиву

грунту дренажена, а нижня – непроникна. Причому, непроникність зумовлюється заляганням пласта солі. Функція $T_1(t)$ визначається з умови сезонних коливань температури, причому $T_{\max} = 30^\circ \text{C}$, $T_{\min} = 4^\circ \text{C}$.

14. П о ч а т к о в і у м о в и: Початковий розподіл концентрації солей

$$c_0(x) = \begin{cases} C_m, & x = 0; \\ C_1, & x \neq 0; \end{cases} \quad C_1 = 8 \text{ г/літр}, \quad \text{а температури} \quad T_0(x) = \begin{cases} T_{\max}, & x = 0; \\ T_{\min}, & x \neq 0. \end{cases} \quad \text{В}$$

початковий момент часу $l = l_{12} = 2 \text{ м}$ і $h_0(x) = (l - x) \cdot (\gamma_n - \gamma) / \gamma$, де

$\gamma_n = 2.16 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^3$ – питома вага насиченого ґрунту, $\gamma = 1.1 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^3$ – питома

вага порового розчину. В рівнянні консолідації $\frac{\partial h^*}{\partial t} = 0$, оскільки остаточний

розподіл надлишкових напорів в стабілізованому стані є незмінним у часі. При

рівномірному дискретному зростанні висоти шару ґрунту $\frac{\partial \Theta^*}{\partial t} = \frac{1}{n} \Theta^*$, де n –

кількість проміжків часу, протягом яких відбувається збільшення товщини масиву ґрунту.

15. О с н о в н і з а в д а н н я ч и с е л ь н о г о е к с п е р и м е н т у:

Вияснення відмінностей розподілу надлишкових напорів при дослідженні фільтраційної консолідації зростаючого та миттєво зведеного масиву ґрунту в умовах впливу теплосолеперенесення.

На рис. 4.3 наведені графіки розподілу поля надлишкових напорів в масиві ґрунту для різного часу від початку процесу фільтраційної консолідації без

урахування та з урахуванням поступового зростання шару ґрунту. Як видно з рис. 4.3 у випадку миттєвого зведення шару ґрунту надлишкові напори отримуються меншими, аніж при поступовому зведенні шару ґрунту. Пояснення даного явища полягає в тому, що за час зростання шару ґрунту, коли надлишкові напори за рахунок прикладеного навантаження збільшуються, в миттєво зведеному масиві ґрунту напори на певний рівень розсіюються.

На рис. 4.4–4.6 наведено графіки розподілу надлишкових напорів, концентрації солей та температури в зростаючому шарі ґрунту. При урахуванні впливу осмотичних явищ, залежності $k_{11}^{(h)} = k(c, T)$ та змінних характеристик ґрунту надлишкові напори розсіюються повільніше, аніж у випадку неврахування впливу температури, концентрації солей та змінних характеристик ґрунту. Це пояснюється тим, що при $c > 60 \text{ г/літр}$ (рис. 4.5) та при зменшенні коефіцієнта пористості біля нижньої непроникувальної основи значно зменшується коефіцієнт фільтрації, що призводить до уповільненого розсіювання надлишкових напорів. Також уповільненню розсіювання напорів в околі нижньої межі сприяє урахування нормальної осмотичної фільтрації. Температура практично не впливає на розподіл надлишкових напорів поблизу нижньої межі, оскільки, як видно з рис. 4.6, температурне поле в околі даної межі практично не змінюється.

Отже, урахування поступового зростання шару ґрунту призводить до відмінностей в розподілі полів надлишкових напорів в порівнянні при миттєвому зведенні шару ґрунту. Урахування змінних характеристик ґрунту, неізотермічного режиму та наявності концентрації солей в поровій воді порушує очікуване співвідношення напорів в масиві ґрунту, який консолидується.

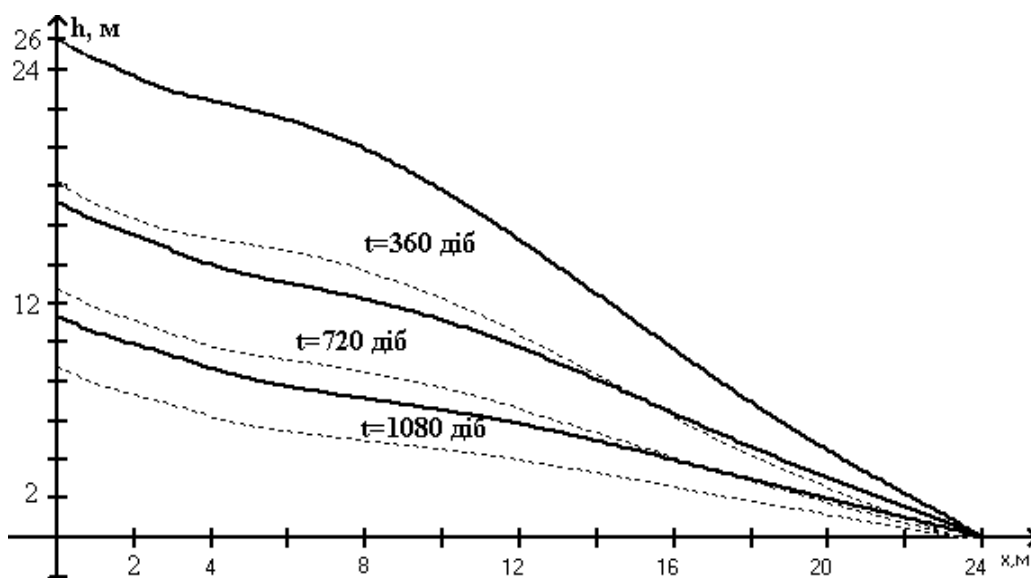


Рис. 4.3. Графіки розподілу поля надлишкових напорів в ґрунті з урахуванням впливу осмотичних явищ та залежності

$$k_{11}^{(h)} = k(c, T):$$

“—” при миттєвому зведенні всього шару ґрунту;

“---” з урахуванням поступового зростання шару ґрунту.

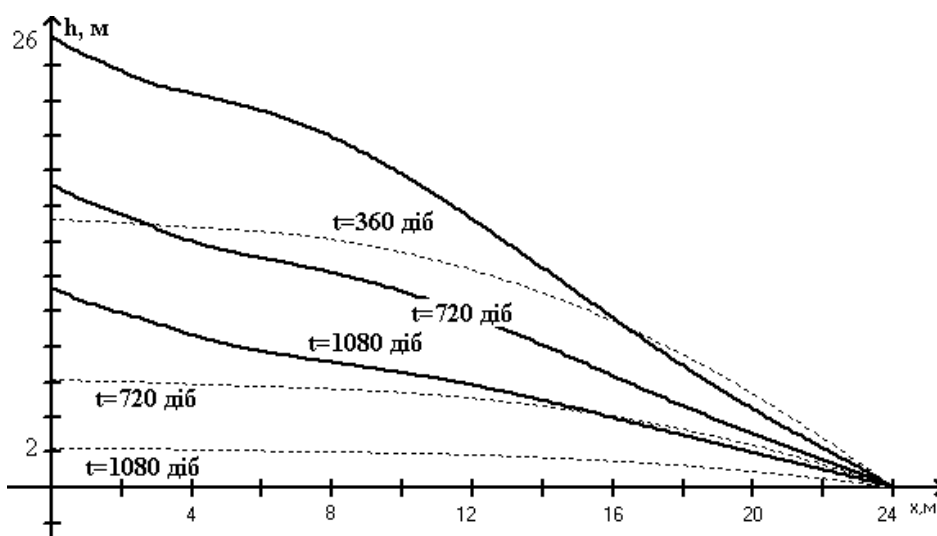


Рис. 4.4. Графіки розподілу поля надлишкових напорів в зростаючому шарі ґрунту:

“—” без урахування впливу температури, концентрації солей та змінних характеристик ґрунту;

“---” з урахуванням впливу осмотичних явищ, залежності $k_{11}^{(h)} = k(c, T)$ та змінних характеристик ґрунту.

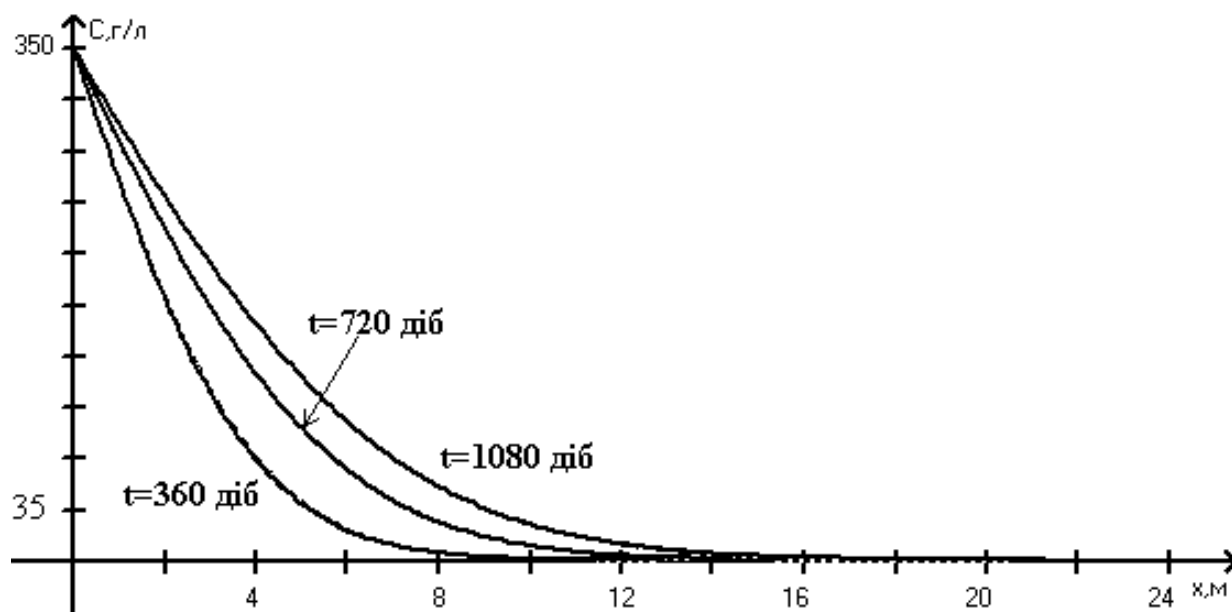


Рис. 4.5. Графіки розподілу поля концентрації солей в зростаючому шарі ґрунту:

“—” без урахування впливу температури, концентрації солей та змінних характеристик ґрунту;

“—” з урахуванням впливу осмотичних явищ, залежності $k_{11}^{(h)} = k(c, T)$ та змінних характеристик ґрунту.

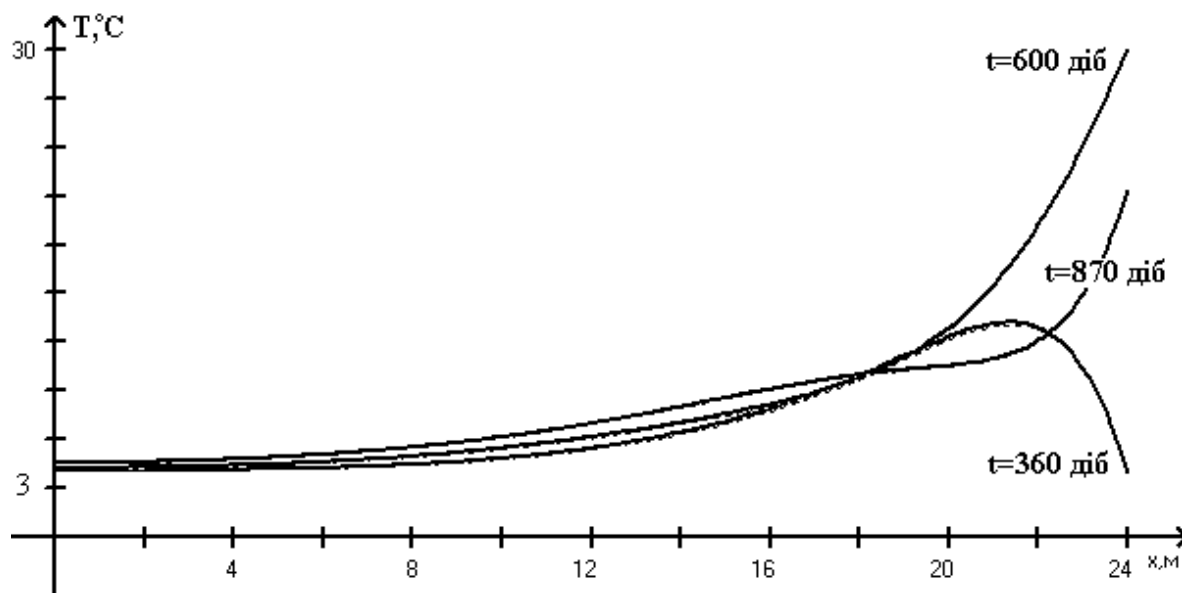


Рис. 4.6. Графіки розподілу поля температури в зростаючому шарі ґрунту:

“—” без урахування впливу температури, концентрації солей та змінних характеристик ґрунту;

“—” з урахуванням впливу осмотичних явищ, залежності $k_{11}^{(h)} = k(c, T)$ та змінних характеристик ґрунту.

Приклад 4.2.

1. Розмірність задачі: $R=1$.

2. Область розв'язання задачі: Область фільтраційної консолідації – масив ґрунту з тонким напівпроникним включенням (рис. 4.2) загальною товщиною $l = 25$ м та $l_{12} = 13$ м.

3. Чисельний метод: Чисельні розрахунки проведено методом скінченних елементів при лінійних та квадратичних базисних функціях з довжиною скінченного елемента 0.5 м.

4. Схема дискретизації в часі: Для дискретизації в часі використано схему предиктор–коректор з рівномірним кроком за часом $\tau = 30$ діб.

5. Вплив масоперенесення: Враховувався через явище хімічного осмосу зі сталим коефіцієнтом $k_{11}^{(1)(c)} = k_{11}^{(2)(c)} = 2.8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^5/\text{кг} \cdot \text{доба}$ та через залежність коефіцієнта фільтрації від концентрації порового сольового розчину. Параметри масоперенесення: $D_{11}^{(1)} = D_{11}^{(2)} = 0.02 \text{ м}^2/\text{доба}$.

6. Вплив теплоперенесення: Враховувався через явище термічного осмосу зі сталим коефіцієнтом $k_{11}^{(1)(T)} = k_{11}^{(2)(T)} = 2.8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{град} \cdot \text{доба}$, через явище термічної дифузії з коефіцієнтом $D_{11T}^{(1)} = D_{11T}^{(2)} = 0.002 \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{град} \cdot \text{доба} \cdot \text{літр}$ та через залежність коефіцієнта фільтрації від температури ґрунту. Параметри теплоперенесення: $\lambda_{11}^{(1)} = \lambda_{11}^{(2)} = 108 \text{ кДж}/\text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба}$, $c_\rho = 4,2 \text{ кДж}/\text{кг} \cdot \text{град}$, $c_T^{(1)} = c_T^{(2)} = 2137 \text{ кДж}/\text{м}^3 \cdot \text{град}$, $\rho = 1100 \text{ кг}/\text{м}^3$.

7. Вплив наявності солей в рідкій та твердій фазах на рівняння нерозривності: Не враховувався.

8. Вплив термічного розширення фаз ґрунту: Не враховувалось.

9. Наявність газу: Ґрунт вважався двофазним при середньому значенні коефіцієнта пористості $e = 0.70$ та пористості $n = 0.40$.

10. Залежність коефіцієнта фільтрації від надлишкових напорів, температури та концентрації солей в рідкій фазі: Коефіцієнт фільтрації покладался незалежним від функції надлишкових напорів. Для випадку постійного коефіцієнта фільтрації

$k_{11}^{(1)(h)} = k_{11}^{(2)(h)} = k_{20} = 10^{-3} \frac{\mathcal{M}}{\text{доба}}$. Залежність $k_{11}^{(1)(h)} = k_{11}^{(2)(h)} = k(c, T)$ визначалася

шляхом апроксимації функції $k(c, T)$ радіальними базисними функціями [300, 340, 402] аналогічно прикладу 3.1.

11. Повзучість скелету ґрунту: Не враховувалась. Між сумою головних напружень та коефіцієнтом пористості приймалась лінійна залежність (2.9) у вигляді спрямленого відрізка компресійної кривої при $a^{(1)} = a^{(2)} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{Н}$. В узагальненому законі Дарсі–Герсеванова знехтувано швидкістю руху твердих частинок ґрунту.

12. Масообмінні процеси: Не враховувались і коефіцієнт швидкості масообміну $\gamma_1 = 0 \text{ доба}^{-1}$.

13. Граничні умови:

$$h(0, t) = 0, \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=l} = 0, c(0, t) = C_m, \left. \frac{\partial c}{\partial x} \right|_{x=l} = 0, T(0, t) = T_1(t), \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=l} = 0,$$

де $C_m = 350 \text{ г/л}$, $T_1 = 17 + 13 \cos\left(\frac{\pi t}{180}\right)$. Функцію $T_1(t)$ визначено з умови сезонних коливань температури, причому $T_{\max} = 30^\circ \text{C}$, $T_{\min} = 4^\circ \text{C}$.

14. Початкові умови: Початковий розподіл концентрації солей

$$c_0(x) = \begin{cases} C_m, & x = 0; \\ C_1, & x \neq 0; \end{cases} \quad C_1 = 8 \text{ г/літр}, \quad \text{а температури} \quad T_0(x) = \begin{cases} T_{\max}, & x = 0; \\ T_{\min}, & x \neq 0. \end{cases}$$

Початковий розподіл напорів $h_0(x) = 10 \text{ м}$. В рівнянні консолідації $\frac{\partial h^*}{\partial t} = 0$,

$$\frac{\partial \Theta^*}{\partial t} = 0 \quad \text{оскільки зовнішнє навантаження вважається миттєво прикладеним і}$$

незмінним у часі.

15. Параметри напівпроникного включення: $d = 0.2 \text{ м}$,

$$k_h^* = 0.0001 \text{ м/доба}, \quad k_c^* = 10^{-5} \text{ м}^5/\text{кг} \cdot \text{доба}, \quad k_T^* = 10^{-6} \text{ м}^2/\text{град} \cdot \text{доба},$$

$$D^* = 0.0002 \text{ м}^2/\text{доба}, \quad D_T^* = 2 \cdot 10^{-5} \text{ кг} \cdot \text{м}^2/\text{град} \cdot \text{доба} \cdot \text{літр},$$

$$\lambda^* = 108 \text{ кДж} / \text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба}, \quad \alpha = 0.1.$$

16. Основні завдання чисельного експерименту:

Вияснення впливу напівпроникного включення на розподіл надлишкових напорів при дослідженні фільтраційної консолідації масиву ґрунту в умовах впливу теплосолеперенесення.

На рис. 4.7 наведені графіки розподілу поля надлишкових напорів в масиві ґрунту для різного часу від початку процесу фільтраційної консолідації без урахування та з урахуванням впливу переносу солей та температури. Як видно з рис. 4.7, при врахуванні осмотичних явищ та залежності $k_{11}^{(1)(h)} = k_{11}^{(2)(h)} = k(c, T)$ надлишкові напори в підобласті між нижньою непроникною основою та тонким

включенням розсіюються швидше, аніж при фільтраційній консолидації без урахування впливу переносу солей та температури, і з часом вони стають меншими нуля. Тобто, ґрунт в даній підобласті переходить в стан переущільнення. У верхній підобласті масиву ґрунту ситуація прямо протилежна: напори розсіюються повільніше у випадку урахування впливу солей та температури. Тонке включення моделюється як напівпроникна мембрана, в результаті чого осмотичні явища призводять до уповільненого розсіювання надлишкових напорів у верхній області і до напорів, менших нуля, у нижній області ґрунту.

На основі отриманих результатів можна стверджувати, що при врахуванні переносу солей та неізотермічних умов ґрунт перебуває в нестабілізованому стані і зміна сольового та температурного режимів ґрунтових вод відразу ж впливає на розподіл поля надлишкових напорів в даному ґрунті, як в бік його переущільнення, так і в бік недоущільнення. На самому напівпроникному включенні спостерігається різкий стрибок напорів (на момент часу 10 років стрибок дорівнює 5 м). Такі дані якісно узгоджуються із спостереженням аномальних напорів та їх перепадів на тонких включеннях в природних неоднорідних геологічних формаціях [371]. В дисертаційному дослідженні вперше вдалося математично змоделювати це явище через використання в умовах спряження ступеня ідеальності напівпроникного включення. Окрім того, наявність тонкого напівпроникного включення також впливає на розподіл концентрації солей і менше на розподіл температури в масиві ґрунту (див. рис. 4.8, 4.9).

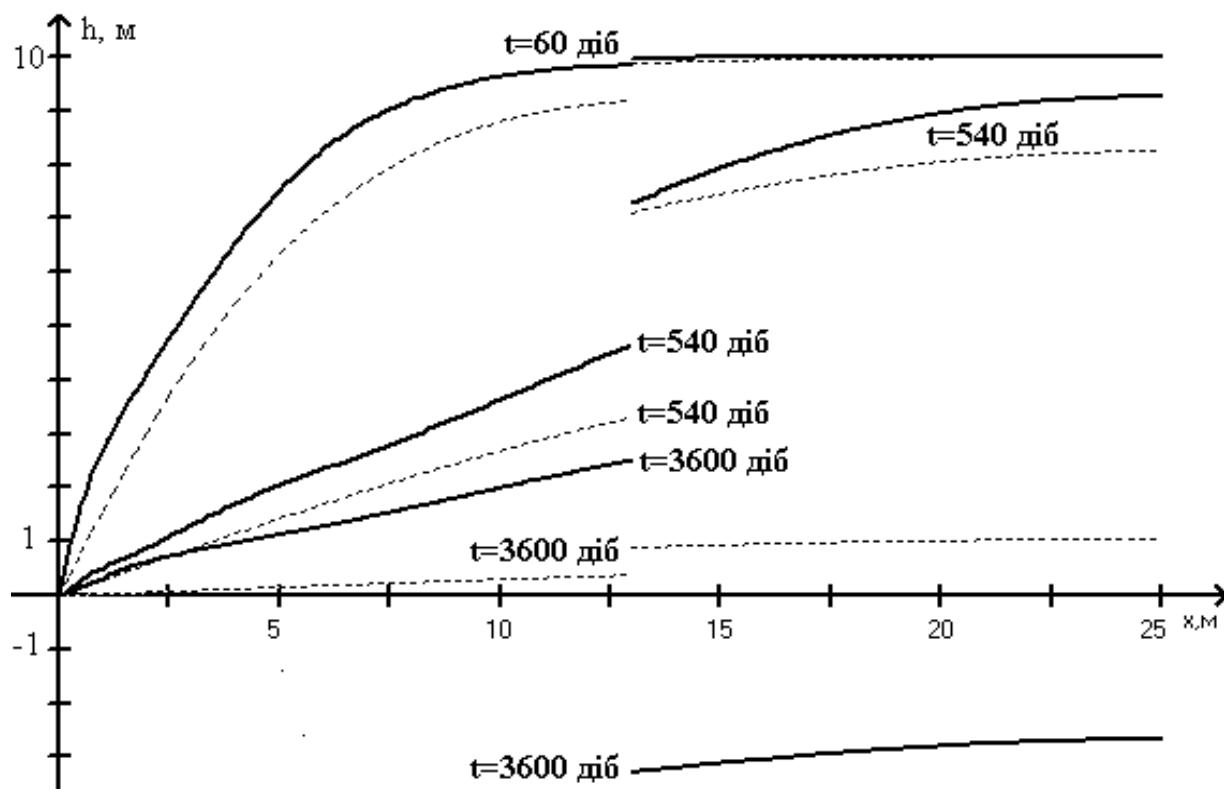


Рис. 4.7. Графіки розподілу надлишкових напорів в масиві ґрунту:
 “—” без урахування впливу переносу солей та температури;
 “—” з урахуванням впливу осмотичних явищ та залежності $k_{11}^{(1)(h)} = k_{11}^{(2)(h)} = k(c, T)$.

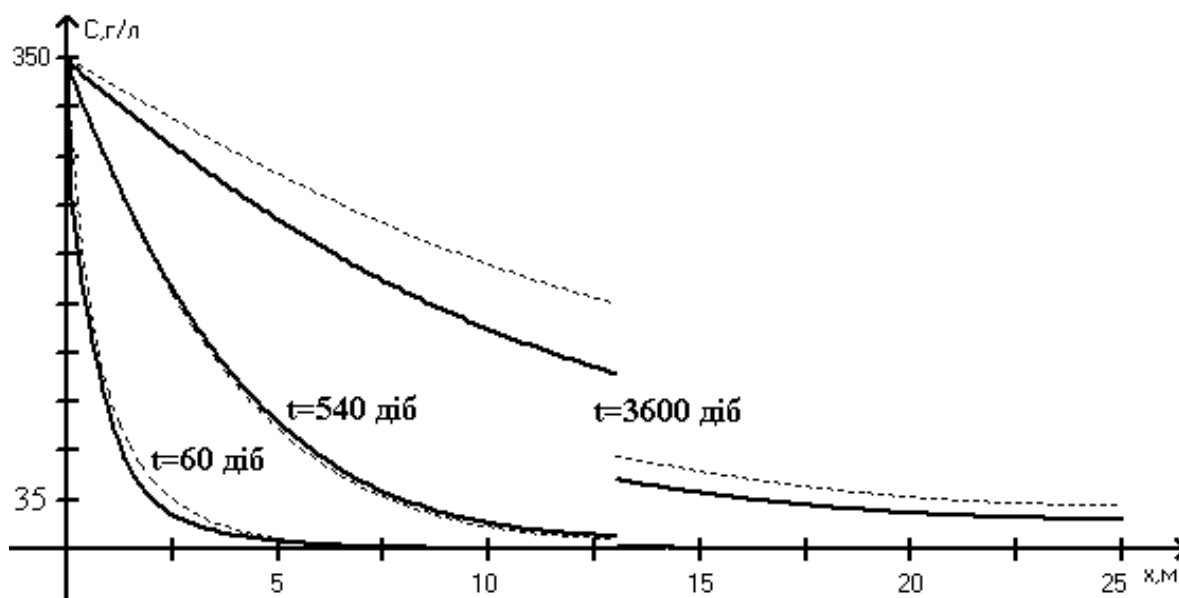


Рис. 4.8. Графіки розподілу концентрації солей в масиві ґрунту:
 “—” без урахування впливу переносу солей та температури;
 “—” з урахуванням впливу осмотичних явищ та залежності
 $k_{11}^{(1)(h)} = k_{11}^{(2)(h)} = k(c, T)$.

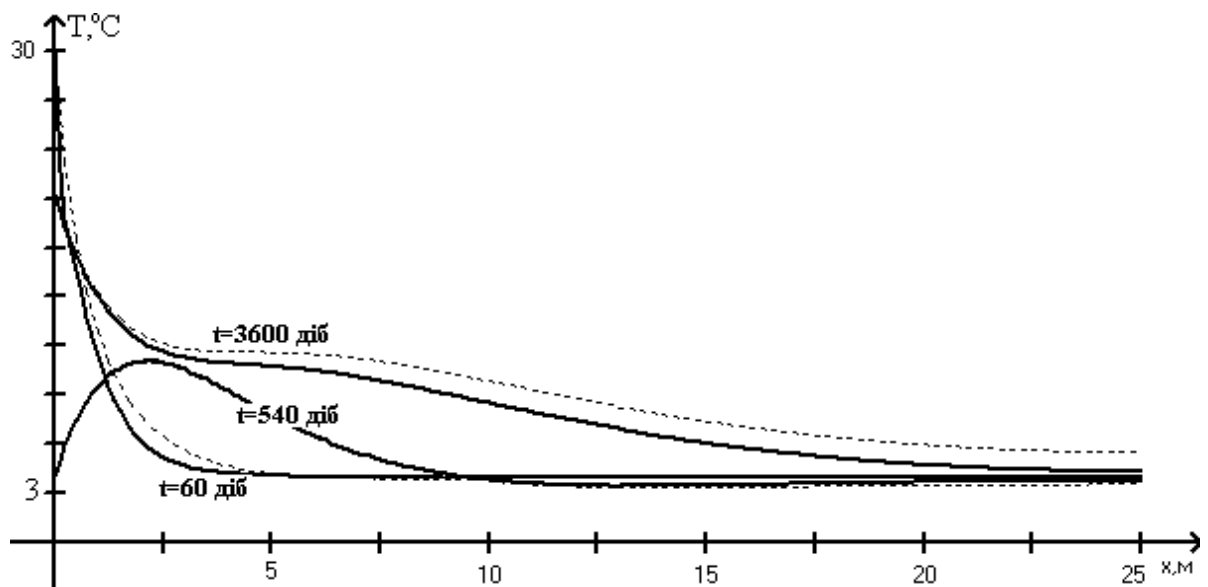


Рис. 4.9. Графіки розподілу температури в масиві ґрунту:

“—” без урахування впливу переносу солей та температури;

“---” з урахуванням впливу осмотичних явищ та залежності

$$k_{11}^{(1)(h)} = k_{11}^{(2)(h)} = k(c, T).$$

4.4. Висновки до Розділу 4

Отже, в розділі 4 дисертації

1. Наведено постановки проблем фільтраційної консолідації шаруватих ґрунтів та ґрунтів з неоднорідностями з урахуванням впливу одночасно функціонуючих фізико-хімічних процесів тепло– та солеперенесення. До розглянутого класу відноситься класична задача з механіки ґрунтів про поступове зведення ґрунтової споруди, задача консолідації природних шаруватих ґрунтів, а також задача консолідації ґрунтів з тонкими включеннями. Останню відрізняє від класичної постановки можлива властивість напівпроникності у включення (аналогія з напівпроникними мембранами, властивостями яких в природних умовах володіють глинисті ґрунти). Сформовано математичні моделі сформульованих задач.
2. Наближені розв'язки відповідних нелінійних крайових задач з умовами спряження знайдено методом скінченних елементів. При цьому використані

результати класичних праць І. В. Сергієнка, В. С. Дейнеки та В. В. Скопечького. Проведено ряд чисельних експериментів та здійснено їх аналіз.

3. При урахуванні впливу осмотичних явищ, залежності коефіцієнта фільтрації від концентрації солей та температури, змінних характеристиках ґрунту (на прикладі одновимірної задачі консолідації поступово зростаючого масиву ґрунту) надлишкові напори розсіюються повільніше, аніж у випадку неврахування впливу вказаних факторів. Причому в околі нижньої непроникної межі спостерігається стабільна різниця в 10 м в розподілі надлишкових напорів протягом часу досліджень (3 роки). Це пояснюється тим, що нижня непроникна межа моделюється сольовим пластом. В результаті при $c > 60 \text{ г/літр}$ та при зменшенні коефіцієнта пористості в околі цієї межі значно зменшується коефіцієнт фільтрації, що призводить до уповільненого розсіювання надлишкових напорів. Також уповільненню розсіювання напорів в околі нижньої межі сприяє урахування нормальної осмотичної фільтрації. Температура практично не впливає на розподіл надлишкових напорів поблизу нижньої межі, оскільки температурне поле в околі даної межі практично не змінюється.
4. Дослідження впливу напівпроникного включення на фільтраційну консолідацію гетерогенного пористого середовища моделювалось, коли на верхню основу ґрунту діє концентроване поле сольового розчину. Поставлена задача може розглядатись як модельна при дослідженні процесів консолідації в ґрунтах поблизу сховищ відходів рідких токсичних речовин. При врахуванні осмотичних явищ та залежності коефіцієнта фільтрації від концентрації солей та температури надлишкові напори в підобласті між нижньою непроникною межею та тонким включенням розсіюються швидше, аніж у випадку без урахування впливу переносу солей та температури, і з часом вони стають меншими нуля. Ґрунт в даній підобласті переходить в стан переущільнення. Напори за 10 років знижуються до рівня (–3 м), в той

же час без урахування впливу теплосолеперенесення вони практично розсіюються. У верхній підобласті масиву ґрунту ситуація прямо протилежна: напори розсіюються повільніше у випадку урахування впливу солей та температури. Тонке включення моделюється як напівпроникна мембрана, в результаті чого осмотичні явища призводять до уповільненого розсіювання надлишкових напорів у верхній області і до напорів, менших нуля, у нижній області ґрунту. На самому напівпроникному включенні спостерігається різкий стрибок напорів (на момент часу 10 років стрибок дорівнює 5 м). Такі дані якісно узгоджуються із спостереженням аномальних напорів та їх перепадів на тонких включеннях в природних неоднорідних геологічних формаціях [371]. В даному розділі дисертаційного дослідження вперше вдалося математично змодельовати це явище через використання в умовах спряження ступеня ідеальності напівпроникного включення.

Результати розділу 4 опубліковані в роботах [42, 47, 48, 55, 65, 182].

РОЗДІЛ 5

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЛЬТРАЦІЙНОЇ КОНСОЛІДАЦІЇ
ГРУНТІВ В ОБЛАСТЯХ З РУХОМИМИ МЕЖАМИ5.1. Математичні моделі процесів фільтраційної консолідації ґрунтів в
змінних областях

Розглянемо R -вимірну задачу фільтраційної консолідації масиву трифазного ґрунту під впливом прикладеного зовнішнього навантаження або власної ваги ґрунту. В процесі фільтраційної консолідації відбувається зміна пористості ґрунту за рахунок зміни об'єму порової рідини, розчинення або випадання солей в осад, теплового розширення фаз ґрунту і, як результат, область фільтраційної консолідації змінюється з часом [49, 56, 65, 69, 83–85]. В розділах 3, 4 дане явище явно не враховувалось. Однак в інженерних проектах та будівельних вишукуваннях інколи більш потрібними є саме прогнозні розрахунки просідань поверхні ґрунту для передбачення критичних ситуацій під час будівництва та експлуатації цивільних та промислових споруд, зведених на цих ґрунтах.

Математичну модель R -вимірної задачі фільтраційної консолідації гетерогенного пористого середовища (на прикладі ґрунту) в умовах теплосолеперенесення при урахуванні просідань верхньої межі області консолідації можна описати наступною крайовою задачею:

$$\begin{aligned}
 & \frac{(1+e)(1+(R-1)\xi)}{\gamma} \beta_1 [\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c, T, h) \nabla h) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_c(c) \nabla c) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla T)] + \\
 & + \frac{(\alpha_\rho + (2q-1)\alpha_s)(1+(R-1)\xi)e}{\gamma} \beta_1 \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\varepsilon(1+e)(1+(R-1)\xi)}{\rho_c \gamma} \beta_1 \left[n \frac{\partial c}{\partial t} - e \frac{\partial N}{\partial t} \right] + \\
 & + \frac{(1+e)(1+(R-1)\xi)}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c, T, h) \nabla h) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_c(c) \nabla c) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla T)] + \quad (5.1) \\
 & + \frac{(\alpha_\rho + (2q-1)\alpha_s)(1+(R-1)\xi)e}{\gamma} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\varepsilon(1+e)(1+(R-1)\xi)}{\rho_c \gamma} \left[n \frac{\partial^2 c}{\partial t^2} - e \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} \right] + \\
 & + \frac{a_0}{\gamma} \frac{\partial^2 (\Theta^* + R\gamma h^*)}{\partial t^2} + \frac{\beta_1}{\gamma} (a_0 + a_1) \frac{\partial (\Theta^* + R\gamma h^*)}{\partial t} = [Ra_0 + \beta(1+e)(1+(R-1)\xi)] \times
 \end{aligned}$$

$$\times \frac{\partial^2 h}{\partial \mathcal{A}^2} + [\beta_1 R(a_0 + a_1) + \beta \beta_1(1+e)(1+(R-1)\xi)] \frac{\partial h}{\partial \mathcal{A}}, \mathbf{X} \in \Omega, t > 0,$$

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot (\mathbf{D}(c, T, h) \nabla c) + \nabla \cdot (\mathbf{D}_T \nabla T) - \mathbf{u} \nabla c = \\ & = n \frac{\partial c}{\partial t} + (\alpha_p + q\alpha_s)nc \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, t > 0, \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\nabla \cdot (\lambda(c) \nabla T) - \rho c_p \mathbf{u} \nabla T = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, t > 0, \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\gamma_1 (C_m - c) N^\gamma, \quad \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, t > 0, \quad (5.4)$$

$$\mathbf{u} = e\mathbf{v} - \mathbf{K}_h(c, T, h) \nabla h + \mathbf{K}_c(c) \nabla c + \mathbf{K}_T \nabla T, \quad (5.5)$$

$$\mathbf{q}_c = \mathbf{u} \cdot c - \mathbf{D}(c, T, h) \nabla c - \mathbf{D}_T \nabla T, \quad (5.6)$$

$$\mathbf{q}_T = \rho c_p \mathbf{u} \cdot T - \lambda(c, T) \nabla T, \quad (5.7)$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{\Gamma_1} = 0, \quad h|_{\Gamma_2} = H_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_2, \quad (5.8)$$

$$(\mathbf{q}_c, \mathbf{n})|_{\Gamma_3} = 0, \quad c|_{\Gamma_4} = C_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_4, \quad (5.9)$$

$$(\mathbf{q}_T, \mathbf{n})|_{\Gamma_5} = 0, \quad T|_{\Gamma_6} = T_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_6, \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(x, y, t)}{\partial t} &= \frac{R\gamma}{(1+\bar{e})(1+(R-1)\xi)} \int_{\varphi(x, y)}^{l(x, y, t)} \left(a_0 \left(\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial h^*}{\partial t} - \frac{1}{R\gamma} \frac{\partial \Theta^*}{\partial t} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{a_1 \beta_1}{\gamma} \left(p(t) - p^*(t) - \frac{\Theta^*(t)}{R} \right) + \frac{a_1 \beta_1^2}{\gamma} \int_{\tau_1}^t \left(\frac{\Theta^*(t)}{R} + p^*(t) - p(t) \right) \exp(-\beta_1(t-\tau)) d\tau \right) dz, \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$h(\mathbf{X}, 0) = h_0(\mathbf{X}), \quad c(\mathbf{X}, 0) = C_0(\mathbf{X}), \quad T(\mathbf{X}, 0) = T_0(\mathbf{X}), \quad N(\mathbf{X}, 0) = N_0(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{R\gamma a_0}{1+(R-1)\xi} + \beta(1+e)\gamma \right) \frac{\partial h_0}{\partial t} = (1+e) \nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c_0, T_0, h_0) \nabla h_0 - \mathbf{K}_c(c_0) \nabla c_0 - \mathbf{K}_T \nabla T_0) - \\ & - \frac{R\gamma a_1 \beta_1}{1+(R-1)\xi} h_0 + \frac{a_0}{1+(R-1)\xi} \left(\frac{\partial \Theta_0^*}{\partial t} + R \frac{\partial p_0^*}{\partial t} \right) + \frac{a_1 \beta_1}{1+(R-1)\xi} (\Theta_0^* + R p_0^*), \quad \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, t = 0, \end{aligned} \quad (5.13)$$

де $t \in (0; t_0]$; $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma_3 \cup \Gamma_4 = \Gamma_5 \cup \Gamma_6$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\Gamma_3 \cap \Gamma_4 = \emptyset$, $\Gamma_5 \cap \Gamma_6 = \emptyset$, $C_1(\mathbf{X}, t)$, $T_1(\mathbf{X}, t)$, $H_1(\mathbf{X}, t)$, $h_0(\mathbf{X})$, $c_0(\mathbf{X})$, $T_0(\mathbf{X})$, $N_0(\mathbf{X})$ – задані функції; R – розмірність задачі ($R=2$ або $R=3$); $\mathbf{X}=(x, y)$ при $R=2$, $\mathbf{X}=(x, y, z)$ при $R=3$.

Кінематична гранична умова (5.11) описує зміну з часом положення верхньої рухомої межі області консолідації, яка (рухома межа) задається

рівнянням $z = l(x, y, t)$. Тут функція $z = \varphi(x, y)$ задає нижній нерухомий контур області консолідації.

Надлишкові напори можуть виникати і від власної ваги ґрунту. Особливо це стосується будівництва ґрунтових гребель. Надлишкові напори в тілі греблі є однією з основних причин виникнення критичних ситуацій при експлуатації гідротехнічної споруди. Руйнування греблі може призвести до аварій з відповідними матеріальними збитками та наслідками для екологічної ситуації в регіоні. Так, в серпні 1983 року на греблі хвостосховища Стебницького Державного гірничо-хімічного підприємства „Полімінерал” (Львівська область), яке призначене для зберігання відходів виробництва калійних добрив, а також шахтних вод, трапилась відома аварія, коли внаслідок зсуву низового укосу, який викликав осідання гребеня греблі, виникло переливання і розмивання частини споруди [124]. Особливістю задачі консолідації тіла ґрунтової греблі є наявність рухомої депресійної поверхні [104].

Математична модель задачі фільтраційної консолідації тіла ґрунтової греблі (рис.5.1) з урахуванням впливу переносу солей в неізотермічних умовах описується наступною крайовою задачею ($R = 2$ або $R = 3$):

$$\begin{aligned}
 & \frac{(1+e)(1+(R-1)\xi)}{\gamma} \beta_1 [\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c, T, h) \nabla h) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_c(c) \nabla c) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla T)] + \\
 & + \frac{(\alpha_p + (2q-1)\alpha_s)(1+(R-1)\xi)e}{\gamma} \beta_1 \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\varepsilon(1+e)(1+(R-1)\xi)}{\rho_c \gamma} \beta_1 \left[n \frac{\partial c}{\partial t} - e \frac{\partial N}{\partial t} \right] + \\
 & + \frac{(1+e)(1+(R-1)\xi)}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c, T, h) \nabla h) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_c(c) \nabla c) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla T)] + \\
 & + \frac{(\alpha_p + (2q-1)\alpha_s)(1+(R-1)\xi)e}{\gamma} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\varepsilon(1+e)(1+(R-1)\xi)}{\rho_c \gamma} \left[n \frac{\partial^2 c}{\partial t^2} - e \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} \right] + \\
 & + \frac{a_0}{\gamma} \frac{\partial^2 (\Theta^* + R\gamma h^*)}{\partial t^2} + \frac{\beta_1}{\gamma} (a_0 + a_1) \frac{\partial (\Theta^* + R\gamma h^*)}{\partial t} = [Ra_0 + \beta(1+e)(1+(R-1)\xi)] \times \\
 & \times \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + [\beta_1 R(a_0 + a_1) + \beta \beta_1 (1+e)(1+(R-1)\xi)] \frac{\partial h}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, t > 0,
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

$$\begin{aligned}
 & \nabla \cdot (\mathbf{D}(c, T, h) \nabla c) + \nabla \cdot (\mathbf{D}_T \nabla T) - \mathbf{u} \nabla c = \\
 & = n \frac{\partial c}{\partial t} + (\alpha_p + q\alpha_s) nc \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, t > 0,
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

$$\nabla \cdot (\lambda(c) \nabla T) - \rho c_p \mathbf{u} \nabla T = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (5.16)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\gamma_1 (C_m - c) N^\chi, \quad \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, \quad t > 0, \quad (5.17)$$

$$\mathbf{u} = e\mathbf{v} - \mathbf{K}_h(c, T, h) \nabla h + \mathbf{K}_c(c) \nabla c + \mathbf{K}_T \nabla T, \quad (5.18)$$

$$\mathbf{q}_c = \mathbf{u} \cdot c - \mathbf{D}(c, T, h) \nabla c - \mathbf{D}_T \nabla T, \quad (5.19)$$

$$\mathbf{q}_T = \rho c_p \mathbf{u} \cdot T - \lambda(c, T) \nabla T, \quad (5.20)$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{\Gamma_1} = 0, \quad h|_{\Gamma_2} = H_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_2, \quad (5.21)$$

$$(\mathbf{q}_c, \mathbf{n})|_{\Gamma_3} = 0, \quad c|_{\Gamma_4} = C_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_4, \quad (5.22)$$

$$(\mathbf{q}_T, \mathbf{n})|_{\Gamma_5} = 0, \quad T|_{\Gamma_6} = T_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_6, \quad (5.23)$$

$$h(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma \cup \Gamma_v} = z, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{\Gamma} = n \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (5.24)$$

$$(\mathbf{D} \nabla c + \mathbf{D}_T \nabla T, \mathbf{n})|_{\Gamma \cup \Gamma_v} = 0, \quad (5.25)$$

$$(\mathbf{q}_T, \mathbf{n})|_{\Gamma} = 0, \quad (5.26)$$

$$h(\mathbf{X}, 0) = h_0(\mathbf{X}), \quad c(\mathbf{X}, 0) = C_0(\mathbf{X}), \quad T(\mathbf{X}, 0) = T_0(\mathbf{X}), \quad N(\mathbf{X}, 0) = N_0(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{R\gamma a_0}{1 + (R-1)\xi} + \beta(1+e)\gamma \right) \frac{\partial h_0}{\partial t} = (1+e) \nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c_0, T_0, h_0) \nabla h_0 - \mathbf{K}_c(c_0) \nabla c_0 - \mathbf{K}_T \nabla T_0) - \\ & - \frac{R\gamma a_1 \beta_1}{1 + (R-1)\xi} h_0 + \frac{a_0}{1 + (R-1)\xi} \left(\frac{\partial \Theta_0^*}{\partial t} + R \frac{\partial p_0^*}{\partial t} \right) + \frac{a_1 \beta_1}{1 + (R-1)\xi} (\Theta_0^* + R p_0^*), \quad \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, \quad t = 0, \end{aligned} \quad (5.28)$$

де $t \in (0; t_0]$; $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma_3 \cup \Gamma_4 = \Gamma_5 \cup \Gamma_6$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\Gamma_3 \cap \Gamma_4 = \emptyset$, $\Gamma_5 \cap \Gamma_6 = \emptyset$, $C_1(\mathbf{X}, t)$, $T_1(\mathbf{X}, t)$, $H_1(\mathbf{X}, t)$, $h_0(\mathbf{X})$, $c_0(\mathbf{X})$, $T_0(\mathbf{X})$, $N_0(\mathbf{X})$ – задані функції; Γ – депресійна поверхня; Γ_v – проміжок височування. Співвідношення $\varphi(\mathbf{X}, t) = (z - h(\mathbf{X}, t))|_{\Gamma} = 0$ описує депресійну поверхню Γ .

У вищенаведеній постановці задачі припускається, що тіло греблі зводиться миттєво. На практиці ж ґрунтова споруда зводиться поетапно, шарами, де кожен шар ґрунту може володіти власними фізичними властивостями: пористістю, коефіцієнтом стисливості, коефіцієнтом фільтрації і ін. [108–110, 263]. Розглянемо задачу ущільнення зростаючого тіла ґрунтової

греблі, розміщену на непроникній основі OA (рис. 5.2). Припустимо, що зростання відбувається дискретно в часі окремими шарами. При цьому, кожен шар ґрунту може мати свої власні характеристики, відмінні від характеристик інших шарів.

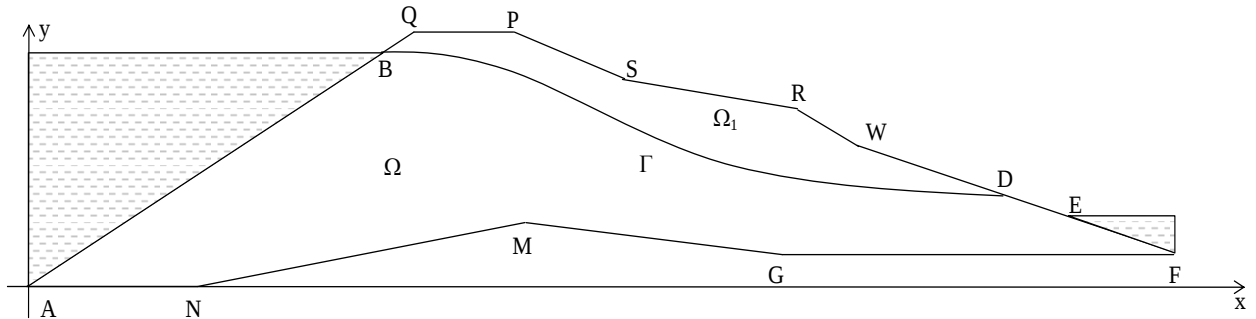


Рис. 5.1. Ґрунтова гребля з депресійною поверхнею Γ

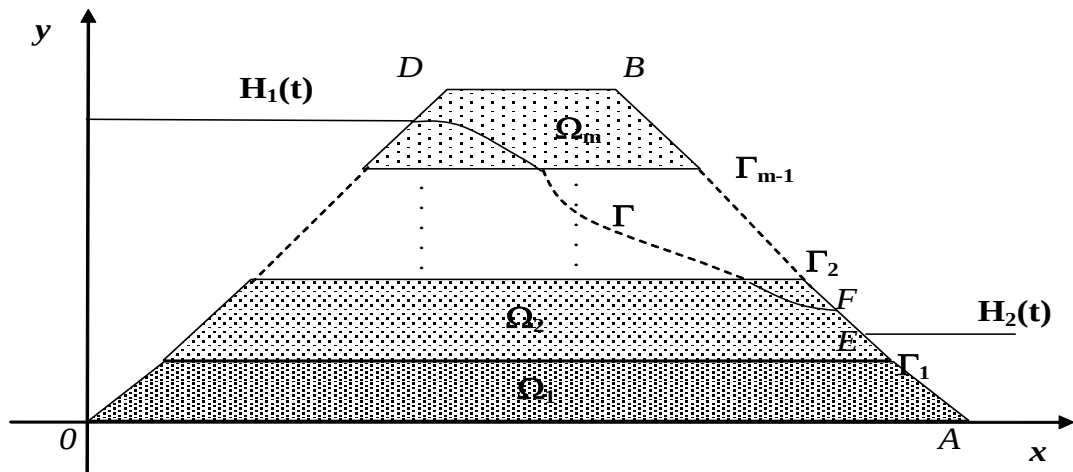


Рис. 5.2. Схема зростаючого тіла ґрунтової греблі

Математична модель вищевказаної задачі фільтраційної консолідації зростаючого тіла ґрунтової греблі з урахуванням впливу переносу солей в неізотермічному режимі та змінності характеристик ґрунту описується наступною крайовою задачею:

$$\begin{aligned}
 & \frac{(1+e)(1+(R-1)\xi)}{\gamma} \beta_1 [\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c, T, h) \nabla h) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_c(c) \nabla c) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla T)] + \\
 & + \frac{(\alpha_p + (2q-1)\alpha_s)(1+(R-1)\xi)e}{\gamma} \beta_1 \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\varepsilon(1+e)(1+(R-1)\xi)}{\rho_c \gamma} \beta_1 \left[n \frac{\partial c}{\partial t} - e \frac{\partial N}{\partial t} \right] + \quad (5.29) \\
 & + \frac{(1+e)(1+(R-1)\xi)}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c, T, h) \nabla h) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_c(c) \nabla c) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla T)] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(\alpha_\rho + (2q-1)\alpha_s)(1+(R-1)\xi)e}{\gamma} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\varepsilon(1+e)(1+(R-1)\xi)}{\rho_c \gamma} \left[n \frac{\partial^2 c}{\partial t^2} - e \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} \right] + \\
& + \frac{a_0}{\gamma} \frac{\partial^2 (\Theta^* + R\mathcal{H}^*)}{\partial \mathcal{A}^2} + \frac{\beta_1}{\gamma} (a_0 + a_1) \frac{\partial (\Theta^* + R\mathcal{H}^*)}{\partial \mathcal{A}} = [Ra_0 + \beta(1+e)(1+(R-1)\xi)] \times \\
& \times \frac{\partial^2 h}{\partial \mathcal{A}^2} + [\beta_1 R(a_0 + a_1) + \beta\beta_1(1+e)(1+(R-1)\xi)] \frac{\partial h}{\partial \mathcal{A}}, \mathbf{X} \in \Omega, t > 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \nabla \cdot (\mathbf{D}(c, T, h) \nabla c) + \nabla \cdot (\mathbf{D}_T \nabla T) - \mathbf{u} \nabla c = \\
& = n \frac{\partial c}{\partial t} + (\alpha_\rho + q\alpha_s) nc \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, t > 0,
\end{aligned} \tag{5.30}$$

$$\nabla \cdot (\lambda(c) \nabla T) - \rho c_\rho \mathbf{u} \nabla T = c_T \frac{\partial T}{\partial \mathcal{A}}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, t > 0, \tag{5.31}$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\gamma_1 (C_m - c) N^\chi, \quad \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, t > 0, \tag{5.32}$$

$$\mathbf{u} = e\mathbf{v} - \mathbf{K}_h(c, T, h) \nabla h + \mathbf{K}_c(c) \nabla c + \mathbf{K}_T \nabla T, \tag{5.33}$$

$$\mathbf{q}_c = \mathbf{u} \cdot c - \mathbf{D}(c, T, h) \nabla c - \mathbf{D}_T \nabla T, \tag{5.34}$$

$$\mathbf{q}_T = \rho c_\rho \mathbf{u} \cdot T - \lambda(c) \nabla T, \tag{5.35}$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{\Gamma_1} = 0, \quad h|_{\Gamma_2} = H_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_2, \tag{5.36}$$

$$(\mathbf{q}_c, \mathbf{n})|_{\Gamma_3} = 0, \quad c|_{\Gamma_4} = C_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_4, \tag{5.37}$$

$$(\mathbf{q}_T, \mathbf{n})|_{\Gamma_5} = 0, \quad T|_{\Gamma_6} = T_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_6, \tag{5.38}$$

$$[h]|_{\Gamma_i} = 0, [c]|_{\Gamma_i} = 0, [N]|_{\Gamma_i} = 0, [T]|_{\Gamma_i} = 0, \quad i = \overline{1, m-1}, \tag{5.39}$$

$$[\mathbf{u}]|_{\Gamma_i} = 0, [\mathbf{q}_c]|_{\Gamma_i} = 0, [\mathbf{q}_T]|_{\Gamma_i} = 0, \quad i = \overline{1, m-1}, \tag{5.40}$$

$$h(\mathbf{X}, t)|_\Gamma = z, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{n})|_\Gamma = n \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \tag{5.41}$$

$$(\mathbf{D} \nabla c + \mathbf{D}_T \nabla T, \mathbf{n})|_{\Gamma \cup \Gamma_v} = 0, \tag{5.42}$$

$$(\mathbf{q}_T, \mathbf{n})|_\Gamma = 0, \tag{5.43}$$

$$h(\mathbf{X}, 0) = h_0(\mathbf{X}), \quad c(\mathbf{X}, 0) = C_0(\mathbf{X}), \quad T(\mathbf{X}, 0) = T_0(\mathbf{X}), \quad N(\mathbf{X}, 0) = N_0(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, \tag{5.44}$$

$$\left(\frac{R\gamma a_0}{1+(R-1)\xi} + \beta(1+e)\gamma \right) \frac{\partial h_0}{\partial t} = (1+e) \nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c_0, T_0, h_0) \nabla h_0 - \mathbf{K}_c(c_0) \nabla c_0 - \mathbf{K}_T \nabla T_0) -$$

$$-\frac{R\gamma a_1\beta_1}{1+(R-1)\xi}h_0 + \frac{a_0}{1+(R-1)\xi}\left(\frac{\partial\Theta_0^*}{\partial t} + R\frac{\partial p_0^*}{\partial t}\right) + \frac{a_1\beta_1}{1+(R-1)\xi}(\Theta_0^* + Rp_0^*), \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, t=0, \quad (5.45)$$

де $t \in (0; t_0]$; $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma_3 \cup \Gamma_4 = \Gamma_5 \cup \Gamma_6$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\Gamma_3 \cap \Gamma_4 = \emptyset$, $\Gamma_5 \cap \Gamma_6 = \emptyset$, $C_1(\mathbf{X}, t)$, $T_1(\mathbf{X}, t)$, $H_1(\mathbf{X}, t)$, $h_0(\mathbf{X})$, $c_0(\mathbf{X})$, $T_0(\mathbf{X})$, $N_0(\mathbf{X})$ – задані функції; Γ – депресійна поверхня; Γ_v – проміжок височування;

$$h(\mathbf{X}, t) = \begin{cases} h_i(\mathbf{X}, t), & (\mathbf{X}, t) \in \bar{Q}_{t_0}^{(i)}; \\ c(\mathbf{X}, t) = \begin{cases} c_i(\mathbf{X}, t), & (\mathbf{X}, t) \in \bar{Q}_{t_0}^{(i)}; \end{cases} \end{cases}$$

$$N(\mathbf{X}, t) = \begin{cases} N_i(\mathbf{X}, t), & (\mathbf{X}, t) \in \bar{Q}_{t_0}^{(i)}; \\ T(\mathbf{X}, t) = \begin{cases} T_i(\mathbf{X}, t), & (\mathbf{X}, t) \in \bar{Q}_{t_0}^{(i)}; \end{cases} \end{cases}$$

$$\mathbf{K}_h(c, T, h) = \{\mathbf{K}_i^{(h)}(c_i, T_i, h_i), \mathbf{X} \in \Omega_i; \mathbf{K}_c(c) = \{\mathbf{K}_i^{(c)}(c_i), \mathbf{X} \in \Omega_i;$$

$$\mathbf{K}_T = \{\mathbf{K}_i^{(T)}, \mathbf{X} \in \Omega_i; \mathbf{D}(c, T, h) = \{\mathbf{D}_i(c_i, T_i, h_i), \mathbf{X} \in \Omega_i; \mathbf{D}_T = \{\mathbf{D}_{(i)T}, \mathbf{X} \in \Omega_i;$$

$$\lambda(c) = \{\lambda_i(c_i), \mathbf{X} \in \Omega_i; c_T = \{(c_T)_i, \mathbf{X} \in \Omega_i; e = \{e_i, \mathbf{X} \in \Omega_i; n = \{n_i, \mathbf{X} \in \Omega_i;$$

$$\alpha_s = \{\alpha_{(i)s}, \mathbf{X} \in \Omega_i; a_0 = \{a_{(i)0}, \mathbf{X} \in \Omega_i; a_1 = \{a_{(i)1}, \mathbf{X} \in \Omega_i;$$

$$\beta_1 = \{\beta_{(i)1}, \mathbf{X} \in \Omega_i; \gamma_1 = \{\gamma_{(i)1}, \mathbf{X} \in \Omega_i; \chi = \{\chi_i, \mathbf{X} \in \Omega_i; [f]_{\Gamma_i} = f_i^+ - f_i^-,$$

$$f_i^+ = f|_{\Gamma_i+0}, f_i^- = f|_{\Gamma_i-0}, Q_{t_0}^{(i)} = \Omega_i \times (0; t_0], Q_{t_0} = \Omega \times (0; t_0];$$

$\varphi = \{\varphi_i, \mathbf{X} \in \Omega_i$ – функція вибору, значення якої залежить від області Ω_i .

На межах контакту між ґрунтовими шарами задаються умови спряження ідеального контакту (5.39)–(5.40) [115, 116, 247].

5.2. Чисельний розв'язок нелінійної крайової задачі фільтраційної консолидації в області з вільними межами в умовах впливу теплосолеперенесення методом скінченних елементів

Аналогічно [115, 116, 247] дамо означення класичних розв'язків крайових задач (5.1)–(5.13), (5.14)–(5.28) та (5.29)–(5.45).

О з н а ч е н н я 5.1. Класичним розв'язком крайових задач (5.1)–(5.13) та (5.14)–(5.28) називається трійка функцій $h(\mathbf{X}, t)$, $c(\mathbf{X}, t)$, $T(\mathbf{X}, t)$, які неперервні разом зі своїми частинними похідними першого порядку по просторових змінних в замиканні $\bar{Q}_{t_0}$ області $Q_{t_0} = \Omega \times (0; t_0]$, мають обмежені неперервні

частинні похідні другого порядку по просторових змінних і $\frac{\partial(\bullet)}{\partial t}$ на Q_{t_0} та функція $N(\mathbf{X}, t)$, яка має неперервну частинну похідну $\frac{\partial(\bullet)}{\partial t}$ на $\overline{Q}_{t_0}$ і які задовольняють співвідношенням (5.1)–(5.13) та (5.14)–(5.28) відповідно.

О з н а ч е н н я 5.2. Класичним розв'язком крайової задачі (5.29)–(5.45) називається трійка функцій $h(\mathbf{X}, t)$, $c(\mathbf{X}, t)$, $T(\mathbf{X}, t)$, які неперервні разом зі своїми частинними похідними першого порядку по просторових змінних на замиканні $\overline{Q}_{t_0}^{(i)}$ кожної із областей $Q_{t_0}^{(i)} = \Omega_i \times (0; t_0]$, $i = \overline{1, m}$, мають обмежені неперервні частинні похідні другого порядку по просторових змінних і $\frac{\partial(\bullet)}{\partial t}$ на $Q_{t_0}^{(i)}$, $i = \overline{1, m}$, та функція $N(\mathbf{X}, t)$, яка має неперервну частинну похідну $\frac{\partial(\bullet)}{\partial t}$ на $\overline{Q}_{t_0}^{(i)}$, $i = \overline{1, m}$, і які задовольняють співвідношенням (5.29)–(5.45).

Повністю викладки проведемо на прикладі крайової задачі (5.29)–(5.45). Для задач (5.1)–(5.13) та (5.14)–(5.28) запишемо по аналогії.

Нехай H_0 – простір вектор–функцій $\mathbf{s}(\mathbf{X}) = (s_1(\mathbf{X}); s_2(\mathbf{X}); s_3(\mathbf{X}); s_4(\mathbf{X}))$, кожна із компонент $s_i(\mathbf{X})$, $i = \overline{1, 4}$ яких в кожній із областей Ω_j , $j = \overline{1, m}$, належать простору Соболева $W_2^1(\Omega_j)$, причому $s_1(\mathbf{X})$, $s_2(\mathbf{X})$ та $s_3(\mathbf{X})$ набувають нульових значень на тих частинах межі області Ω , де, відповідно для функцій $h(\mathbf{X}, t)$, $c(\mathbf{X}, t)$, $T(\mathbf{X}, t)$ задані граничні умови першого роду, тобто, $s_1(\mathbf{X})|_{\Gamma_2} = 0$, $s_1(\mathbf{X})|_{\Gamma \cup \Gamma_v} = 0$, $s_2(\mathbf{X})|_{\Gamma_4} = 0$, $s_3(\mathbf{X})|_{\Gamma_6} = 0$, а також задовольняють головним умовам спряження (5.39) відповідно.

Нехай H – простір вектор–функцій $\mathbf{f}(\mathbf{X}, t) = (f_1(\mathbf{X}, t); f_2(\mathbf{X}, t); f_3(\mathbf{X}, t); f_4(\mathbf{X}, t))$, кожна з компонент $f_i(\mathbf{X}, t)$, $i = \overline{1, 4}$ яких інтегровна з квадратом разом зі своїми першими частинними похідними по всіх змінних в кожній із областей Ω_j , $j = \overline{1, m}$, $\forall t \in (0; t_0]$, причому $f_1(\mathbf{X}, t)$, $f_2(\mathbf{X}, t)$ та $f_3(\mathbf{X}, t)$ задовольняють, відповідно, граничні умови першого роду, що і функції $h(\mathbf{X}, t)$,

$c(\mathbf{X}, t)$, $T(\mathbf{X}, t)$, тобто, $f_1(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_2} = H_1(\mathbf{X}, t)$, $\mathbf{X} \in \Gamma_2$, $f_1(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma \cup \Gamma_v} = z$, $\mathbf{X} \in \Gamma \cup \Gamma_v$,
 $f_2(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_4} = C_1(\mathbf{X}, t)$, $\mathbf{X} \in \Gamma_4$, $f_3(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_6} = T_1(\mathbf{X}, t)$, $\mathbf{X} \in \Gamma_6$, а також задовольняють
головним умовам спряження (5.39) відповідно.

Використовуючи стандартну процедуру: домноживши рівності (5.29)–(5.31), кожен з початкових умов (5.44), (5.45), відповідно, на довільні функції $s_1(\mathbf{X})$, $s_2(\mathbf{X})$, $s_3(\mathbf{X})$, $s_4(\mathbf{X})$ такі, що $(s_1(\mathbf{X}); s_2(\mathbf{X}); s_3(\mathbf{X}); s_4(\mathbf{X})) \in H_0$, інтегруючи їх по області Ω , застосовуючи формулу Остроградського–Гаусса та враховуючи перші із граничних умов (5.36)–(5.38), граничні умови (5.42), (5.43), а також умови спряження (5.40), отримаємо

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{a_0}{1+(R-1)\xi} + \frac{\beta(1+e)}{R} \right) \int_{\Omega} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} s_1(\mathbf{X}) d\Omega + \beta_1 \left(\frac{a_0 + a_1}{1+(R-1)\xi} + \frac{\beta(1+e)}{R} \right) \int_{\Omega} \frac{\partial h}{\partial t} s_1(\mathbf{X}) d\Omega + \\
& + \frac{1+e}{R\gamma} \beta_1 \int_{\Omega} \{ (\mathbf{K}_h(c, T, h) \nabla h, \nabla s_1) - (\mathbf{K}_c(c) \nabla c, \nabla s_1) - (\mathbf{K}_T \nabla T, \nabla s_1) \} d\Omega + \\
& + \frac{1+e}{R\gamma} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \{ (\mathbf{K}_h(c, T, h) \nabla h, \nabla s_1) - (\mathbf{K}_c(c) \nabla c, \nabla s_1) - (\mathbf{K}_T \nabla T, \nabla s_1) \} d\Omega = \\
& = \frac{\beta_1(\alpha_\rho + (2q-1)\alpha_s)}{R\gamma} \int_{\Omega} \frac{\partial T}{\partial t} s_1(\mathbf{X}) d\Omega + \frac{\varepsilon \beta_1(1+e)}{R\rho_c\gamma} \int_{\Omega} \left(n \frac{\partial c}{\partial t} - e \frac{\partial N}{\partial t} \right) s_1(\mathbf{X}) d\Omega \\
& + \frac{e(\alpha_\rho + (2q-1)\alpha_s)}{R\gamma} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} s_1(\mathbf{X}) d\Omega + \frac{\varepsilon(1+e)}{R\rho_c\gamma} \int_{\Omega} \left[n \frac{\partial^2 c}{\partial t^2} - e \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} \right] s_1(\mathbf{X}) d\Omega + \\
& + \frac{a_0}{\gamma R(1+(R-1)\xi)} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 (\Theta^* + R\gamma h^*)}{\partial t^2} s_1(\mathbf{X}) d\Omega + \frac{\beta_1(a_0 + a_1)}{\gamma R(1+(R-1)\xi)} \int_{\Omega} \frac{\partial (\Theta^* + R\gamma h^*)}{\partial t} s_1(\mathbf{X}) d\Omega,
\end{aligned} \tag{5.46}$$

$$\int_{\Omega} h(\mathbf{X}, 0) s_1(\mathbf{X}) d\Omega = \int_{\Omega} h_0(\mathbf{X}) s_1(\mathbf{X}) d\Omega, \tag{5.47}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left(n \frac{\partial c}{\partial t} s_2(\mathbf{X}) + (\mathbf{D}(c, T, h) \nabla c, \nabla s_2) + (\mathbf{D}_T \nabla T, \nabla s_2) \right) d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{u} \nabla c s_2(\mathbf{X}) d\Omega = \\
& = -(\alpha_\rho + q\alpha_s) \int_{\Omega} n c \frac{\partial T}{\partial t} s_2(\mathbf{X}) d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial N}{\partial t} s_2(\mathbf{X}) d\Omega,
\end{aligned} \tag{5.48}$$

$$\int_{\Omega} c(\mathbf{X}, 0) s_2(\mathbf{X}) d\Omega = \int_{\Omega} c_0(\mathbf{X}) s_2(\mathbf{X}) d\Omega, \tag{5.49}$$

$$\int_{\Omega} (c_T \frac{\partial T}{\partial t} s_3(\mathbf{X}) + (\lambda \nabla T, \nabla s_3) + \rho c_{\rho} \mathbf{u} \nabla T s_3(\mathbf{X})) d\Omega = 0, \quad (5.50)$$

$$\int_{\Omega} T(\mathbf{X}, 0) s_3(\mathbf{X}) d\Omega = \int_{\Omega} T_0(\mathbf{X}) s_3(\mathbf{X}) d\Omega, \quad (5.51)$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial N}{\partial t} s_4(\mathbf{X}) d\Omega - \gamma_1 \int_{\Omega} (c - C_m) N^z(\mathbf{X}, t) s_4(\mathbf{X}) d\Omega = 0, \quad (5.52)$$

$$\int_{\Omega} N(\mathbf{X}, 0) s_4(\mathbf{X}) d\Omega = \int_{\Omega} N_0(\mathbf{X}) s_4(\mathbf{X}) d\Omega, \quad (5.53)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{R\gamma a_0}{1 + (R-1)\xi} + \gamma\beta(1+e) \right) \int_{\Omega} \frac{\partial h_0}{\partial t} s_1(\mathbf{X}) d\Omega + \\ & + (1+e) \int_{\Omega} \{ (\mathbf{K}_h(c_0, T_0, h_0) \nabla h_0, \nabla s_1) - (\mathbf{K}_c(c_0) \nabla c_0, \nabla s_1) - (\mathbf{K}_T \nabla T_0, \nabla s_1) \} d\Omega + \\ & + \frac{R\gamma a_1 \beta_1}{1 + (R-1)\xi} \int_{\Omega} h_0(\mathbf{X}) s_1(\mathbf{X}) d\Omega = \\ & = \frac{a_0}{1 + (R-1)\xi} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \Theta_0^*}{\partial t} + R \frac{\partial p_0^*}{\partial t} \right) s_1(\mathbf{X}) d\Omega + \frac{a_1 \beta_1}{1 + (R-1)\xi} \int_{\Omega} (\Theta_0^* + R p_0^*) s_1(\mathbf{X}) d\Omega, \end{aligned} \quad (5.54)$$

$$\forall (s_1(\mathbf{X}); s_2(\mathbf{X}); s_3(\mathbf{X}); s_4(\mathbf{X})) \in H_0, \quad (h(\mathbf{X}, t); c(\mathbf{X}, t); T(\mathbf{X}, t); N(\mathbf{X}, t)) \in H.$$

О з н а ч е н н я 5.3. Вектор-функція $(h(\mathbf{X}, t); c(\mathbf{X}, t); T(\mathbf{X}, t); N(\mathbf{X}, t)) \in H$, котра $\forall (s_1(\mathbf{X}); s_2(\mathbf{X}); s_3(\mathbf{X}); s_4(\mathbf{X})) \in H_0$ задовольняє інтегральним співвідношенням (5.46)–(5.54) називається узагальненим розв'язком крайової задачі (5.29)–(5.45).

Оскільки значення сіткових чисел Пекле рівнянь (5.30), (5.31)

$$Pe_c = \frac{1}{2} h_e \frac{\|\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{D}\|}, \quad Pe_T = \frac{1}{2} h_e \frac{\|\rho c_{\rho} \mathbf{u}\|}{\|\lambda\|}$$

можуть бути більшими за одиницю, то числовий розв'язок задачі (5.29)–(5.45), побудований за класичною схемою Гальоркіна, може сильно осцилювати у всій області визначення. Тут h_e – максимальна довжина сторони в усіх скінченних елементах. Тому, для стабілізації чисельних розв'язків рівнянь (5.30), (5.31) використаємо протипотокову схему Петрова–Гальоркіна [241, 310, 380]. Маємо

$$\int_{\Omega} \left(n \frac{\partial c}{\partial t} s_2(\mathbf{X}) + (\mathbf{D}(c, T, h) \nabla c, \nabla s_2) + (\mathbf{D}_T \nabla T, \nabla s_2) \right) d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{u} \nabla c s_2(\mathbf{X}) d\Omega +$$

$$+ \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(c)} \int_{\Omega_e} \left(n \frac{\partial c}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla c) - \nabla \cdot (\mathbf{D}_T \nabla T) + \mathbf{u} \nabla c + (\alpha_p + q\alpha_s) n c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t} \right) \times (5.55)$$

$$\times \mathbf{u} \nabla s_2 d\Omega = -(\alpha_p + q\alpha_s) \int_{\Omega} n c \frac{\partial T}{\partial t} s_2(\mathbf{X}) d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial N}{\partial t} s_2(\mathbf{X}) d\Omega,$$

$$\int_{\Omega} \left(c_T \frac{\partial T}{\partial t} s_3(\mathbf{X}) + (\lambda \nabla T, \nabla s_3) + \rho c_{\rho} \mathbf{u} \nabla T s_3(\mathbf{X}) \right) d\Omega +$$

$$+ \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(T)} \int_{\Omega_e} \left(c_T \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \rho c_{\rho} \mathbf{u} \nabla T \right) \rho c_{\rho} \mathbf{u} \nabla s_3 d\Omega = 0; \quad (5.56)$$

де $\Omega = \bigcup \Omega_e$, Ω_e – скінченні елементи; $\tau_e^{(c)}$, $\tau_e^{(T)}$ – параметри регуляризації.

Наближений розв'язок задачі (5.29)–(5.45) шукаємо у вигляді

$$(\hat{h}(\mathbf{X}, t); \hat{c}(\mathbf{X}, t); \hat{T}(\mathbf{X}, t); \hat{N}(\mathbf{X}, t)) = \left(\sum_{i=1}^{n_1} h_i(t) \varphi_i^{(1)}(\mathbf{X}) + W_1(\mathbf{X}, t); \right. \quad (5.57)$$

$$\left. \sum_{i=1}^{n_2} c_i(t) \varphi_i^{(2)}(\mathbf{X}) + W_2(\mathbf{X}, t); \sum_{i=1}^{n_3} T_i(t) \varphi_i^{(3)}(\mathbf{X}) + W_3(\mathbf{X}, t); \sum_{i=1}^{n_4} N_i(t) \varphi_i^{(4)}(\mathbf{X}) \right),$$

де $\Phi_i = (\varphi_i^{(1)}; 0; 0; 0)$, $i = \overline{1, n_1}$; $\Phi_i = (0; \varphi_{i-n_1}^{(2)}; 0; 0)$, $i = \overline{n_1 + 1, n_1 + n_2}$;

$\Phi_i = (0; 0; \varphi_{i-n_1-n_2}^{(3)}; 0)$, $i = \overline{n_1 + n_2 + 1, n_1 + n_2 + n_3}$; $\Phi_i = (0; 0; 0; \varphi_{i-\sum_{j=1}^3 n_j}^{(4)})$,

$i = \overline{\sum_{j=1}^3 n_j + 1, \sum_{j=1}^4 n_j}$ – базисні вектор–функції скінченновимірного підпростору

$M_0 \subset H_0$; $W_1(\mathbf{X}, t)$, $W_2(\mathbf{X}, t)$, $W_3(\mathbf{X}, t)$ – відомі функції, такі, що $W_1|_{\Gamma_2} = H_1(\mathbf{X}, t)$,

$\mathbf{X} \in \Gamma_2$; $W_1|_{\Gamma \cup \Gamma_v} = z$, $\mathbf{X} \in \Gamma \cup \Gamma_v$; $W_2|_{\Gamma_4} = C_1(\mathbf{X}, t)$, $\mathbf{X} \in \Gamma_4$; $W_3|_{\Gamma_6} = T_1(\mathbf{X}, t)$, $\mathbf{X} \in \Gamma_6$;

$\Omega = \bigcup \Omega_e$, Ω_e – скінченні елементи; $\tau_e^{(c)}$, $\tau_e^{(T)}$ – параметри регуляризації.

Сукупність вектор–функцій, які можна подати у вигляді (5.57), породжують множину $M \subset H$.

Означення 5.4. Наближеним узагальненим розв'язком крайової задачі (4.57)–(4.76) називається вектор–функція $(\hat{h}(\mathbf{X}, t); \hat{c}(\mathbf{X}, t); \hat{T}(\mathbf{X}, t); \hat{N}(\mathbf{X}, t)) \in M$,

яка $\forall t \in (0, t_0]$ та довільної вектор-функції $(S_1(\mathbf{X}); S_2(\mathbf{X}); S_3(\mathbf{X}); S_4(\mathbf{X})) \in M_0$ задовольняє інтегральним співвідношенням

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{a_0}{1+(R-1)\xi} + \frac{\beta(1+e)}{R} \right) \int_{\Omega} \frac{\partial^2 \hat{h}}{\partial t^2} S_1(\mathbf{X}) d\Omega + \beta_1 \left(\frac{a_0 + a_1}{1+(R-1)\xi} + \frac{\beta(1+e)}{R} \right) \int_{\Omega} \frac{\partial \hat{h}}{\partial t} S_1(\mathbf{X}) d\Omega + \\
& + \frac{1+e}{R\gamma} \beta_1 \int_{\Omega} \{ (\mathbf{K}_h(\hat{c}, \hat{T}, \hat{h}) \nabla \hat{h}, \nabla S_1) - (\mathbf{K}_c(\hat{c}) \nabla \hat{c}, \nabla S_1) - (\mathbf{K}_T \nabla \hat{T}, \nabla S_1) \} d\Omega + \\
& + \frac{1+e}{R\gamma} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \{ (\mathbf{K}_h(\hat{c}, \hat{T}, \hat{h}) \nabla \hat{h}, \nabla S_1) - (\mathbf{K}_c(\hat{c}) \nabla \hat{c}, \nabla S_1) - (\mathbf{K}_T \nabla \hat{T}, \nabla S_1) \} d\Omega = \\
& = \frac{\beta_1(\alpha_p + (2q-1)\alpha_s)}{R\gamma} \int_{\Omega} \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} S_1(\mathbf{X}) d\Omega + \frac{\varepsilon \beta_1(1+e)}{R\rho_c \gamma} \int_{\Omega} \left(n \frac{\partial \hat{c}}{\partial t} - e \frac{\partial \hat{N}}{\partial t} \right) S_1(\mathbf{X}) d\Omega \\
& + \frac{e(\alpha_p + (2q-1)\alpha_s)}{R\gamma} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 \hat{T}}{\partial t^2} S_1(\mathbf{X}) d\Omega + \frac{\varepsilon(1+e)}{R\rho_c \gamma} \int_{\Omega} \left[n \frac{\partial^2 \hat{c}}{\partial t^2} - e \frac{\partial^2 \hat{N}}{\partial t^2} \right] S_1(\mathbf{X}) d\Omega + \\
& + \frac{a_0}{\gamma R(1+(R-1)\xi)} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 (\Theta^* + R\gamma h^*)}{\partial t^2} S_1(\mathbf{X}) d\Omega + \frac{\beta_1(a_0 + a_1)}{\gamma R(1+(R-1)\xi)} \int_{\Omega} \frac{\partial (\Theta^* + R\gamma h^*)}{\partial t} S_1(\mathbf{X}) d\Omega,
\end{aligned} \tag{5.58}$$

$$\int_{\Omega} \hat{h}(\mathbf{X}, 0) S_1(\mathbf{X}) d\Omega = \int_{\Omega} h_0(\mathbf{X}) S_1(\mathbf{X}) d\Omega, \tag{5.59}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left(n \frac{\partial \hat{c}}{\partial t} S_2(\mathbf{X}) + (\mathbf{D}(\hat{c}, \hat{T}, \hat{h}) \nabla \hat{c}, \nabla S_2) + (\mathbf{D}_T \nabla \hat{T}, \nabla S_2) \right) d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{u} \nabla \hat{c} S_2(\mathbf{X}) d\Omega = \\
& = -(\alpha_p + q\alpha_s) \int_{\Omega} n \hat{c} \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} S_2(\mathbf{X}) d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \hat{N}}{\partial t} S_2(\mathbf{X}) d\Omega,
\end{aligned} \tag{5.60}$$

$$\int_{\Omega} \hat{c}(\mathbf{X}, 0) S_2(\mathbf{X}) d\Omega = \int_{\Omega} c_0(\mathbf{X}) S_2(\mathbf{X}) d\Omega, \tag{5.61}$$

$$\int_{\Omega} \left(c_T \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} S_3(\mathbf{X}) + (\lambda \nabla \hat{T}, \nabla S_3) + \rho c_p \mathbf{u} \nabla \hat{T} S_3(\mathbf{X}) \right) d\Omega = 0, \tag{5.62}$$

$$\int_{\Omega} \hat{T}(\mathbf{X}, 0) S_3(\mathbf{X}) d\Omega = \int_{\Omega} T_0(\mathbf{X}) S_3(\mathbf{X}) d\Omega, \tag{5.63}$$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \hat{N}}{\partial t} S_4(\mathbf{X}) d\Omega - \gamma_1 \int_{\Omega} (\hat{c} - C_m) \hat{N}^z(\mathbf{X}, t) S_4(\mathbf{X}) d\Omega = 0, \tag{5.64}$$

$$\int_{\Omega} \hat{N}(\mathbf{X}, 0) S_4(\mathbf{X}) d\Omega = \int_{\Omega} N_0(\mathbf{X}) S_4(\mathbf{X}) d\Omega, \tag{5.65}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{R\gamma a_0}{1+(R-1)\xi} + \gamma\beta(1+e) \right) \int_{\Omega} \frac{\partial \hat{h}_0}{\partial t} S_1(\mathbf{X}) d\Omega + \\
& + (1+e) \int_{\Omega} \left\{ (\mathbf{K}_h(\hat{c}_0, \hat{T}_0, \hat{h}_0) \nabla \hat{h}_0, \nabla S_1) - (\mathbf{K}_c(\hat{c}_0) \nabla \hat{c}_0, \nabla S_1) - (\mathbf{K}_T \nabla \hat{T}_0, \nabla S_1) \right\} d\Omega + \\
& + \frac{R\gamma a_1 \beta_1}{1+(R-1)\xi} \int_{\Omega} \hat{h}_0(\mathbf{X}) S_1(\mathbf{X}) d\Omega = \\
& = \frac{a_0}{1+(R-1)\xi} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \Theta_0^*}{\partial t} + R \frac{\partial p_0^*}{\partial t} \right) S_1(\mathbf{X}) d\Omega + \frac{a_1 \beta_1}{1+(R-1)\xi} \int_{\Omega} (\Theta_0^* + R p_0^*) S_1(\mathbf{X}) d\Omega,
\end{aligned} \tag{5.66}$$

$$\forall (S_1(\mathbf{X}); S_2(\mathbf{X}); S_3(\mathbf{X}); S_4(\mathbf{X})) \in M_0, (\hat{h}(\mathbf{X}, t); \hat{c}(\mathbf{X}, t); \hat{T}(\mathbf{X}, t); \hat{N}(\mathbf{X}, t)) \in M.$$

Із інтегральних рівностей (5.55), (5.56) отримуємо

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left(n \frac{\partial \hat{c}}{\partial t} S_2(\mathbf{X}) + (\mathbf{D}(\hat{c}, \hat{T}, \hat{h}) \nabla \hat{c}, \nabla S_2) + (\mathbf{D}_T \nabla \hat{T}, \nabla S_2) \right) d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{u} \nabla \hat{c} S_2(\mathbf{X}) d\Omega + \\
& + \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(c)} \int_{\Omega_e} \left(n \frac{\partial \hat{c}}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla \hat{c}) - \nabla \cdot (\mathbf{D}_T \nabla \hat{T}) + \mathbf{u} \nabla \hat{c} + (\alpha_p + q\alpha_s) n \hat{c} \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{N}}{\partial t} \right) \times \\
& \times \mathbf{u} \nabla S_2 d\Omega = -(\alpha_p + q\alpha_s) \int_{\Omega} n \hat{c} \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} S_2(\mathbf{X}) d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \hat{N}}{\partial t} S_2(\mathbf{X}) d\Omega, \\
& \int_{\Omega} \left(c_T \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} S_3(\mathbf{X}) + (\lambda \nabla \hat{T}, \nabla S_3) + \rho c_p \mathbf{u} \nabla \hat{T} S_3(\mathbf{X}) \right) d\Omega + \\
& + \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(T)} \int_{\Omega_e} \left(c_T \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} - \nabla \cdot (\lambda \nabla \hat{T}) + \rho c_p \mathbf{u} \nabla \hat{T} \right) \rho c_p \mathbf{u} \nabla S_3 d\Omega = 0;
\end{aligned} \tag{5.68}$$

$$\forall (S_1(\mathbf{X}); S_2(\mathbf{X}); S_3(\mathbf{X}); S_4(\mathbf{X})) \in M_0, (\hat{h}(\mathbf{X}, t); \hat{c}(\mathbf{X}, t); \hat{T}(\mathbf{X}, t); \hat{N}(\mathbf{X}, t)) \in M.$$

В загальному випадку в області складної геометрії знайти функції $W_1(\mathbf{X}, t)$, $W_2(\mathbf{X}, t)$, $W_3(\mathbf{X}, t)$ без наближених обчислень практично неможливо. Тому, при реалізації схем МСЕ на практиці, на межах $\Gamma \cup \Gamma_v \cup \Gamma_2, \Gamma_4, \Gamma_6$ вводять додаткові вузли загальною кількістю $n_2^\Gamma, n_4^\Gamma, n_6^\Gamma$ відповідно і функції $W_1(\mathbf{X}, t)$, $W_2(\mathbf{X}, t)$, $W_3(\mathbf{X}, t)$ наближено шукають за допомогою все тих же базисних функцій МСЕ у вигляді

$$W_1(\mathbf{X}, t) \approx \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2^\Gamma} h_i(t) \varphi_i^{(1)}(\mathbf{X}), \quad W_2(\mathbf{X}, t) \approx \sum_{i=n_2+1}^{n_2+n_4^\Gamma} c_i(t) \varphi_i^{(2)}(\mathbf{X}),$$

$$W_3(\mathbf{X}, t) \approx \sum_{i=n_3+1}^{n_3+n_6^\Gamma} T_i(t) \varphi_i^{(3)}(\mathbf{X}). \quad (5.69)$$

Не зменшуючи загальності будемо вважати, що наближені розв'язки $\hat{h}(\mathbf{X}, t)$, $\hat{c}(\mathbf{X}, t)$, $\hat{T}(\mathbf{X}, t)$, $\hat{N}(\mathbf{X}, t)$ шукаються на одній скінченноелементній сітці при використанні одних і тих же базисних функцій. Тобто, $n_1 + n_2^\Gamma = n_2 + n_4^\Gamma = n_3 + n_6^\Gamma = n_4 = k$; $\varphi_i^{(1)}(\mathbf{X}) = \varphi_i^{(2)}(\mathbf{X}) = \varphi_i^{(3)}(\mathbf{X}) = \varphi_i^{(4)}(\mathbf{X}) = \varphi_i(\mathbf{X})$, $i = \overline{1, k}$. Тоді з (5.69) та (5.57) маємо

$$\begin{aligned} (\hat{h}(\mathbf{X}, t); \hat{c}(\mathbf{X}, t); \hat{T}(\mathbf{X}, t); \hat{N}(\mathbf{X}, t)) = & \left(\sum_{i=1}^k h_i(t) \varphi_i(\mathbf{X}); \right. \\ & \left. \sum_{i=1}^k c_i(t) \varphi_i(\mathbf{X}); \sum_{i=1}^k T_i(t) \varphi_i(\mathbf{X}); \sum_{i=1}^k N_i(t) \varphi_i(\mathbf{X}) \right). \end{aligned} \quad (5.70)$$

З рівностей (5.58), (5.59), (5.67), (5.68), (5.61), (5.63)–(5.66) з урахуванням (5.70), отримуємо задачу Коші для системи нелінійних диференціальних рівнянь відносно вектора $(\mathbf{h}(t); \mathbf{C}(t); \mathbf{T}(t); \mathbf{N}(t))$

$$\mathbf{M}^{(4)} \cdot \frac{d\mathbf{N}}{dt} + \mathbf{L}^{(4)}(\mathbf{C}, \mathbf{N}^\times) = \mathbf{0}, \quad (5.71)$$

$$\mathbf{M}^{(3)} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{dt} + \mathbf{L}^{(3)}(\mathbf{h}, \mathbf{C}, \mathbf{T}) \cdot \mathbf{T} = \mathbf{F}^{(3)}, \quad (5.72)$$

$$\mathbf{M}^{(2)} \cdot \frac{d\mathbf{C}}{dt} + \mathbf{L}^{(2)}(\mathbf{h}, \mathbf{C}, \mathbf{T}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{L}^{(21)} \cdot \mathbf{T}(t) + \mathbf{M}^{(21)} \cdot \frac{d\mathbf{N}}{dt} + \mathbf{M}^{(22)} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{dt} + \mathbf{F}^{(2)}, \quad (5.73)$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{Q}^{(1)} \cdot \frac{d^2 \mathbf{h}}{dt^2} + \mathbf{M}^{(1)} \cdot \frac{d\mathbf{h}}{dt} + \mathbf{L}^{(1)}(\mathbf{C}, \mathbf{T}, \mathbf{h}) \cdot \mathbf{h}(t) = \\ & = \mathbf{L}^{(12)} \cdot \mathbf{C}(t) + \mathbf{L}^{(13)} \cdot \mathbf{T}(t) + \mathbf{M}^{(12)} \cdot \frac{d\mathbf{C}}{dt} + \mathbf{M}^{(13)} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{dt} + \mathbf{M}^{(14)} \cdot \frac{d\mathbf{N}}{dt} + \\ & + \mathbf{Q}^{(12)} \cdot \frac{d^2 \mathbf{C}}{dt^2} + \mathbf{Q}^{(13)} \cdot \frac{d^2 \mathbf{T}}{dt^2} + \mathbf{Q}^{(14)} \cdot \frac{d^2 \mathbf{N}}{dt^2} + \mathbf{F}^{(1)}, \end{aligned} \quad (5.74)$$

$$\mathbf{M}^{(0)} \cdot \frac{d\mathbf{h}^{(0)}}{dt} + \mathbf{L}^{(0)}(\mathbf{C}^{(0)}, \mathbf{T}^{(0)}) \cdot \mathbf{h}^{(0)} = \mathbf{L}^{(01)} \cdot \mathbf{C}^{(0)} + \mathbf{L}^{(02)} \cdot \mathbf{T}^{(0)} + \mathbf{F}^{(0)}, \quad (5.75)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}^{(1)} \cdot \mathbf{h}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(1)}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(2)} \cdot \mathbf{C}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(2)}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(3)} \cdot \mathbf{T}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(3)}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(4)} \cdot \mathbf{N}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(4)}. \quad (5.76)$$

де

$$\mathbf{h}(t) = (h_i(t))_{i=1}^k, \mathbf{h}^{(0)} = (h_i(0))_{i=1}^k, \mathbf{C}(t) = (c_i(t))_{i=1}^k, \mathbf{C}^{(0)} = (c_i(0))_{i=1}^k, \mathbf{T}(t) = (T_i(t))_{i=1}^k,$$

$$\mathbf{T}^{(0)} = (T_i(0))_{i=1}^k, \mathbf{N}(t) = (N_i(t))_{i=1}^k, \mathbf{N}^{(0)} = (N_i(0))_{i=1}^k,$$

$$\mathbf{M}^{(s)} = (m_{ij}^{(s)})_{i,j=1}^k, s = \overline{0,4}; \mathbf{L}^{(s)} = (l_{ij}^{(s)})_{i,j=1}^k, \mathbf{F}^{(s)} = (f_i^{(s)})_{i=1}^k, s = \overline{0,3}; \mathbf{L}^{(4)} = (l_i^{(4)})_{i=1}^k;$$

$$\mathbf{L}^{(21)} = (l_{ij}^{(21)})_{i,j=1}^k; \mathbf{M}^{(21)} = (m_{ij}^{(21)})_{i,j=1}^k; \mathbf{Q}^{(1)} = (q_{ij}^{(1)})_{i,j=1}^k; \mathbf{Q}^{(1s)} = (q_{ij}^{(1s)})_{i,j=1}^k,$$

$$\mathbf{M}^{(1s)} = (m_{ij}^{(1s)})_{i,j=1}^k, s = \overline{2,4}; \mathbf{L}^{(1s)} = (l_{ij}^{(1s)})_{i,j=1}^k, s = 2, 3; \mathbf{L}^{(0s)} = (l_{ij}^{(0s)})_{i,j=1}^k, s = 1, 2;$$

$$\tilde{\mathbf{M}}^{(s)} = (\tilde{m}_{ij}^{(s)})_{i,j=1}^k, \tilde{\mathbf{F}}^{(s)} = (\tilde{f}_i^{(s)})_{i=1}^k, s = \overline{0,4};$$

$$\tilde{m}_{ij}^{(1)} = \tilde{m}_{ij}^{(2)} = \tilde{m}_{ij}^{(3)} = \tilde{m}_{ij}^{(4)} = \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\Omega; \tilde{f}_i^{(1)} = \int_{\Omega} h_0 \varphi_i d\Omega; \tilde{f}_i^{(2)} = \int_{\Omega} c_0 \varphi_i d\Omega;$$

$$\tilde{f}_i^{(3)} = \int_{\Omega} T_0 \varphi_i d\Omega; \tilde{f}_i^{(4)} = \int_{\Omega} N_0 \varphi_i d\Omega; f_i^{(2)} = 0; f_i^{(3)} = 0; m_{ij}^{(4)} = \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\Omega;$$

$$m_{ij}^{(3)} = c_T \left(\int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\Omega + \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(T)} \int_{\Omega_e} \rho_c \varphi_j \mathbf{u} \nabla \varphi_i d\Omega \right); m_{ij}^{(2)} = n \left(\int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\Omega + \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(c)} \int_{\Omega_e} \varphi_j \mathbf{u} \nabla \varphi_i d\Omega \right);$$

$$l_{ij}^{(3)} = \int_{\Omega} ((\lambda \nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) + \rho_c \varphi_i \mathbf{u} \nabla \varphi_j) d\Omega + \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(T)} \int_{\Omega_e} \rho_c \rho (-\nabla \cdot (\lambda \nabla \varphi_j) + \rho_c \mathbf{u} \nabla \varphi_j) \mathbf{u} \nabla \varphi_i d\Omega;$$

$$l_{ij}^{(21)} = - \int_{\Omega} (\mathbf{D}_T \nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) d\Omega - \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(c)} \int_{\Omega_e} \nabla \cdot (\mathbf{D}_T \nabla \varphi_j) \mathbf{u} \nabla \varphi_i d\Omega;$$

$$l_i^{(4)} = -\gamma_1 \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^k c_j(t) \varphi_j - C_m \right) \left(\sum_{j=1}^k N_j(t) \varphi_j \right)^{\chi} \varphi_i d\Omega;$$

$$l_{ij}^{(2)} = \int_{\Omega} \left((\mathbf{D} \nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j) + \varphi_i \mathbf{u} \nabla \varphi_j + (\alpha_{\rho} + q \alpha_s) n \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} \varphi_i \varphi_j \right) d\Omega +$$

$$+ \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(c)} \int_{\Omega_e} (-\nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla \varphi_j) + \mathbf{u} \nabla \varphi_j + (\alpha_{\rho} + q \alpha_s) n \frac{\partial \hat{T}}{\partial t} \varphi_j) \mathbf{u} \nabla \varphi_i d\Omega;$$

$$m_{ij}^{(21)} = - \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\Omega - \sum_{\Omega_e} \tau_e^{(c)} \int_{\Omega_e} \mathbf{u} \varphi_i \varphi_j d\Omega; m_{ij}^{(14)} = - \frac{\varepsilon \beta_1 (1+e)}{R \rho_c \gamma} \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\Omega;$$

$$q_{ij}^{(12)} = \frac{\varepsilon n (1+e)}{R \rho_c \gamma} \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\Omega; q_{ij}^{(13)} = \frac{e(\alpha_{\rho} + (2q-1)\alpha_s)}{R \gamma} \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\Omega;$$

$$l_{ij}^{(12)} = \frac{1+e}{R \gamma} \left(\beta_1 \int_{\Omega} (\mathbf{K}_c \nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) d\Omega + \int_{\Omega} \left(\frac{d\mathbf{K}_c}{dt} \nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i \right) d\Omega \right);$$

$$\begin{aligned}
l_{ij}^{(13)} &= \frac{1+e}{R\gamma} \left(\beta_1 \int_{\Omega} (\mathbf{K}_T \nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) d\Omega + \int_{\Omega} \left(\frac{d\mathbf{K}_T}{dt} \nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i \right) d\Omega \right); \\
q_{ij}^{(14)} &= -\frac{\varepsilon n(1+e)}{R\rho_c \gamma} \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\Omega; \quad q_{ij}^{(1)} = \left(\frac{a_0}{1+(R-1)\xi} + \frac{\beta(1+e)}{R} \right) \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\Omega; \\
m_{ij}^{(1)} &= \gamma_1 \left(\frac{a_0 + a_1}{1+(R-1)\xi} + \frac{\beta(1+e)}{R} \right) \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\Omega + \frac{1+e}{R\gamma} \int_{\Omega} (\mathbf{K}_h(\hat{c}, \hat{T}, \hat{h}) \nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) d\Omega; \\
l_{ij}^{(1)} &= \frac{1+e}{R\gamma} \left(\beta_1 \int_{\Omega} (\mathbf{K}_h \nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) d\Omega + \int_{\Omega} \left(\frac{d\mathbf{K}_h}{dt} \nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i \right) d\Omega \right); \\
m_{ij}^{(0)} &= \left(\frac{R\gamma a_0}{1+(R-1)\xi} + \gamma\beta(1+e) \right) \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\Omega; \quad l_{ij}^{(01)} = (1+e) \int_{\Omega} (\mathbf{K}_c \nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) d\Omega; \\
m_{ij}^{(12)} &= \frac{\varepsilon n \beta_1 (1+e)}{R\rho_c \gamma} \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\Omega + \frac{1+e}{R\gamma} \int_{\Omega} (\mathbf{K}_c(\hat{c}) \nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) d\Omega; \\
m_{ij}^{(13)} &= \frac{\beta_1(\alpha_\rho + (2q-1)\alpha_s)}{R\gamma} \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j d\Omega + \frac{1+e}{R\gamma} \int_{\Omega} (\mathbf{K}_T \nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) d\Omega; \\
l_{ij}^{(0)} &= (1+e) \int_{\Omega} (\mathbf{K}_h(\hat{c}_0, \hat{T}_0, \hat{h}_0) \nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) d\Omega + \frac{R\gamma a_1 \beta_1}{1+(R-1)\xi} \int_{\Omega} \varphi_j \varphi_i d\Omega; \\
l_{ij}^{(02)} &= (1+e) \int_{\Omega} (\mathbf{K}_T \nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) d\Omega; \\
f_i^{(1)} &= \frac{a_0}{\gamma R(1+(R-1)\xi)} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 (\Theta^* + R\mathcal{H}^*)}{\partial \mathcal{A}^2} \varphi_i d\Omega + \frac{\beta_1(a_0 + a_1)}{\gamma R(1+(R-1)\xi)} \int_{\Omega} \frac{\partial (\Theta^* + R\mathcal{H}^*)}{\partial \mathcal{A}} \varphi_i d\Omega; \\
f_i^{(0)} &= \frac{a_0}{1+(R-1)\xi} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \Theta_0^*}{\partial t} + R \frac{\partial p_0^*}{\partial t} \right) \varphi_i d\Omega + \frac{a_1 \beta_1}{1+(R-1)\xi} \int_{\Omega} (\Theta_0^* + R p_0^*) \varphi_i d\Omega.
\end{aligned}$$

Параметри регуляризації $\tau_e^{(T)}$, $\tau_e^{(c)}$ в (5.67), (5.68) згідно [241, 380] вибираються наступним чином:

$$\tau_e^{(T)} = \frac{h_e}{a \|\rho c_\rho \mathbf{u}\|_{\infty, e}} \gamma(Pe_T), \quad \tau_e^{(c)} = \frac{h_e}{a \|\mathbf{u}\|_{\infty, e}} \gamma(Pe_c),$$

$$\text{де } a = 3, \quad \gamma(z) = \begin{cases} z, & 0 \leq z \leq 1; \\ 1, & 1 \leq z < \infty. \end{cases}$$

Потрібно відмітити особливості у визначенні елементів матриць задачі Коші (5.71)–(5.76), якщо вузол скінченноелементної сітки під номером i попадає на частину межі Γ , де для невідомої функції задано граничні умови першого роду. Маємо:

1. Якщо $\mathbf{X}_i \in \Gamma_2$, то в системі (5.74) всі елементи i -го рядка покладаються рівними нулю і лише $l_{ii}^{(1)} := 1$ (де " := " – символ присвоєння). Також $f_i^{(1)} := H_1(\mathbf{X}_i, t)$.
2. Якщо $\mathbf{X}_i = (x_i, y_i, z_i) \in \Gamma \cup \Gamma_v$, то в системі (5.74) всі елементи i -го рядка покладаються рівними нулю і лише $l_{ii}^{(1)} := 1$, причому $f_i^{(1)} := z_i$.
3. Якщо $\mathbf{X}_i \in \Gamma_4$, то в системі (5.73) всі елементи i -го рядка покладаються рівними нулю і лише $l_{ii}^{(2)} := 1$, причому $f_i^{(2)} := C_1(\mathbf{X}_i, t)$.
3. Якщо $\mathbf{X}_i \in \Gamma_6$, то в системі (5.72) всі елементи i -го рядка покладаються рівними нулю і лише $l_{ii}^{(3)} := 1$, причому $f_i^{(3)} := T_1(\mathbf{X}_i, t)$.

Схеми дискретизації в часі задачі Коші (5.71)–(5.76) розглянуті в розділі 3.

5.3. Безсітковий метод радіальних базисних функцій для чисельного розв'язання нелінійної крайової задачі фільтраційної консолидації в області з рухомими межами

Для чисельного розв'язання задачі (5.29)–(5.45) безсітковим методом РБФ дискретизуємо замикання $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma_{\Omega}$ області Ω вузлами–центрами $\mathbf{X}_i = (x_i^x; y_i^x; z_i^x)$, $i = \overline{1, s}$ та колокаційними точками $\mathbf{Y}_i = (x_i^y; y_i^y; z_i^y)$, $i = \overline{1, k}$. Введемо наступні позначення: 1) k^{Ω_j} , $j = \overline{1, m}$, – множини номерів колокаційних точок, які лежать в областях Ω_j ; 2) $k^{\Omega} = \bigcup_{j=1}^m k^{\Omega_j}$; 3) $k_{\Gamma_{j,j+1}}^{\Omega_j}$, $k_{\Gamma_{j,j+1}}^{\Omega_{j+1}}$, $j = \overline{1, m-1}$, – множини номерів колокаційних точок, які лежать на межі спряження $\Gamma_{j,j+1}$ з боку областей Ω_j та Ω_{j+1} відповідно; 4) k^{Γ} , k^{Γ_v} , – множини

номерів колокаційних точок, які лежать на депресійній поверхні Γ та проміжку височування Γ_v ; 5) k^{Γ_j} – множини номерів колокаційних точок, які належать відповідним частинам Γ_j , $j = \overline{1,6}$, межі Γ_Ω . Вимагаємо $k \geq s$. Вимагаємо, що на межах спряження $\Gamma_{j,j+1}$ координати відповідних колокаційних точок в обох областях Ω_j та Ω_{j+1} , $j = \overline{1, m-1}$, співпадають. В загальному випадку множини вузлових точок $\mathbf{X}_i$, $i = \overline{1, s}$ та колокаційних точок $\mathbf{Y}_i$, $i = \overline{1, k}$ не співпадають. Хоча, при практичній реалізації методу, такий випадок не виключається.

Наближений розв'язок крайової задачі (5.29)–(5.45) шукаємо у вигляді

$$\begin{aligned} h(\mathbf{X}, t) &\approx \sum_{i=1}^s h_i(t) \varphi_i(r_i, \varepsilon_h), \quad c(\mathbf{X}, t) \approx \sum_{i=1}^s c_i(t) \varphi_i(r_i, \varepsilon_c), \quad T(\mathbf{X}, t) \approx \sum_{i=1}^s T_i(t) \varphi_i(r_i, \varepsilon_T), \\ N(\mathbf{X}, t) &\approx \sum_{i=1}^s N_i(t) \varphi_i(r_i, \varepsilon_N), \end{aligned} \quad (5.77)$$

де $h_i(t), c_i(t), T_i(t), N_i(t), i = \overline{1, s}$, – невідомі коефіцієнти, які залежать лише від часу; $\varphi(r_i, \varepsilon)$, $i = \overline{1, s}$, – відомі, у випадку крайової задачі (5.29)–(5.45) розривні [183, 184], РБФ, причому $r_i = \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_i\|_2$; $\varepsilon_h > 0$, $\varepsilon_c > 0$, $\varepsilon_T > 0$, $\varepsilon_N > 0$ – параметри форми.

Тоді, використовуючи метод колокації в точці [34], зокрема його модифікований варіант, де множини вузлових та колокаційних точок не співпадають [347, 359], з рівнянь (5.29)–(5.32), умов спряження (5.39), (5.40), граничних умов (5.36)–(5.38), (5.41)–(5.43) та початкових умов (5.44), (5.45) отримуємо задачу Коші (5.71)–(5.76) для системи нелінійних диференціальних рівнянь відносно векторів невідомих $\mathbf{h}(t) = \{h_i(t)\}_{i=1}^s$, $\mathbf{C}(t) = \{c_i(t)\}_{i=1}^s$, $\mathbf{T}(t) = \{T_i(t)\}_{i=1}^s$, $\mathbf{N}(t) = \{N_i(t)\}_{i=1}^s$ де

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^{(0)} &= (h_i(0))_{i=1}^s, \quad \mathbf{C}^{(0)} = (c_i(0))_{i=1}^s, \quad \mathbf{T}^{(0)} = (T_i(0))_{i=1}^s, \quad \mathbf{N}^{(0)} = (N_i(0))_{i=1}^s, \\ \mathbf{M}^{(\alpha)} &= (m_{ij}^{(\alpha)})_{i,j=1}^{k,s}, \quad \alpha = \overline{0;4}, \quad \mathbf{L}^{(\alpha)} = (l_{ij}^{(\alpha)})_{i,j=1}^{k,s}, \quad \mathbf{F}^{(\alpha)} = (f_i^{(\alpha)})_{i=1}^k, \quad \alpha = \overline{0;3}, \quad \mathbf{L}^{(4)} = (l_i^{(4)})_{i=1}^k, \\ \mathbf{L}^{(21)} &= (l_{ij}^{(21)})_{i,j=1}^{k,s}, \quad \mathbf{M}^{(21)} = (m_{ij}^{(21)})_{i,j=1}^{k,s}, \quad \mathbf{Q}^{(1)} = (q_{ij}^{(1)})_{i,j=1}^{k,s}, \quad \mathbf{Q}^{(1\alpha)} = (q_{ij}^{(1\alpha)})_{i,j=1}^{k,s}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{M}^{(1\alpha)} = (m_{ij}^{(1\alpha)})_{i,j=1}^{k,s}, \quad s = \overline{2,4}, \quad \mathbf{L}^{(1\alpha)} = (l_{ij}^{(1\alpha)})_{i,j=1}^{k,s}, \quad \alpha = 2; 3, \quad \mathbf{L}^{(0\alpha)} = (l_{ij}^{(0\alpha)})_{i,j=1}^{k,s}, \quad \alpha = 1; 2,$$

$$\tilde{\mathbf{M}}^{(\alpha)} = (\tilde{m}_{ij}^{(\alpha)})_{i,j=1}^{k,s}, \quad \tilde{\mathbf{F}}^{(\alpha)} = (\tilde{f}_i^{(\alpha)})_{i=1}^k, \quad \alpha = \overline{0,4}, \quad m_{ij}^{(3)} = \begin{cases} c_T \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T), & i \in k^\Omega, \\ 0, & i \notin k^\Omega, \end{cases}$$

$$m_{ij}^{(2)} = \begin{cases} n \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c), & i \in k^\Omega, \\ 0, & i \notin k^\Omega, \end{cases} \quad f_i^{(3)} = \begin{cases} 0, & i \in k^\Omega, \\ 0, & i \in k^{\Gamma_5} \cup k^\Gamma, \\ T_1(\mathbf{Y}_i, t), & i \in k^{\Gamma_6} \cup k^{\Gamma_v}, \end{cases}$$

$$l_{ij}^{(3)} = \begin{cases} -\nabla \cdot (\lambda \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T)) + \rho c_\rho \mathbf{u} \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T), & i \in k^\Omega, \\ (-\lambda \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T) + \rho c_\rho \mathbf{u} \cdot \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T), \mathbf{n}), & i \in k^{\Gamma_5} \cup k^\Gamma, \\ \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T), & i \in k^{\Gamma_6} \cup k^{\Gamma_v}, \end{cases} \quad f_i^{(2)} = \begin{cases} 0, & i \notin k^{\Gamma_4}, \\ C_1(\mathbf{Y}_i, t), & i \in k^{\Gamma_4}, \end{cases}$$

$$m_{ij}^{(4)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_N), \quad l_{ij}^{(4)} = -\gamma_1 \left(\sum_{j=1}^s c_j(t) \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c) - C_m \right) \left(\sum_{j=1}^s N_j(t) \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_N) \right)^\chi,$$

$$l_{ij}^{(2)} = \begin{cases} -\nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c)) + \mathbf{u} \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c), & i \in k^\Omega, \\ (-\mathbf{D} \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c) + \mathbf{u} \cdot \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c), \mathbf{n}), & i \in k^{\Gamma_3} \cup k^\Gamma \cup k^{\Gamma_v}, \\ \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c), & i \in k^{\Gamma_4}, \end{cases}$$

$$m_{ij}^{(21)} = \begin{cases} -\varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_N), & i \in k^\Omega, \\ 0, & i \notin k^\Omega, \end{cases} \quad l_{ij}^{(21)} = \begin{cases} \nabla \cdot (\mathbf{D}_T \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T)), & i \in k^\Omega, \\ (-\mathbf{D}_T \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T), \mathbf{n}), & i \in k^{\Gamma_3} \cup k^\Gamma \cup k^{\Gamma_v}, \\ 0, & i \in k^{\Gamma_4}, \end{cases}$$

$$m_{ij}^{(22)} = \begin{cases} -(\alpha_\rho + q \alpha_s) \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T), & i \in k^\Omega, \\ 0, & i \notin k^\Omega, \end{cases}$$

$$q_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \left(\frac{a_0}{1 + (R-1)\xi} + \frac{\beta(1+e)}{R} \right) \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h), & i \in k^\Omega, \\ 0, & i \notin k^\Omega, \end{cases}$$

$$m_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \beta_1 \left(\frac{a_0 + a_1}{1 + (R-1)\xi} + \frac{\beta(1+e)}{R} \right) \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h) - \frac{1+e}{R\gamma} \nabla \cdot (\mathbf{K}_h(\mathbf{C}, \mathbf{T}) \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h)), & i \in k^\Omega, \\ 0, & i \notin k^\Omega, \end{cases}$$

$$l_{ij}^{(1)} = \begin{cases} -\frac{1+e}{R\gamma} \beta_1 \nabla \cdot (\mathbf{K}_h \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h)), & i \in k^\Omega, \\ (-\mathbf{K}_h \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h), \mathbf{n}), & i \in k^{\Gamma_1}, \\ \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h), & i \in k^{\Gamma_2} \cup k^\Gamma \cup k^{\Gamma_v}, \end{cases}$$

$$l_{ij}^{(12)} = \begin{cases} -\frac{1+e}{R\gamma}\beta_1\nabla\cdot(\mathbf{K}_c\nabla\varphi_j(r_{ji},\varepsilon_c)), & i\in k^\Omega, \\ (\mathbf{K}_c\nabla\varphi_j(r_{ji},\varepsilon_c),\mathbf{n}), & i\in k^{\Gamma_1}, \\ 0, & i\in k^{\Gamma_2}\cup k^\Gamma\cup k^{\Gamma_v}, \end{cases}$$

$$l_{ij}^{(13)} = \begin{cases} -\frac{1+e}{R\gamma}\beta_1\nabla\cdot(\mathbf{K}_T\nabla\varphi_j(r_{ji},\varepsilon_T)), & i\in k^\Omega, \\ (\mathbf{K}_T\nabla\varphi_j(r_{ji},\varepsilon_T),\mathbf{n}), & i\in k^{\Gamma_1}, \\ 0, & i\in k^{\Gamma_2}\cup k^\Gamma\cup k^{\Gamma_v}, \end{cases}$$

$$m_{ij}^{(12)} = \begin{cases} -\frac{1+e}{R\gamma}\nabla\cdot(\mathbf{K}_c\nabla\varphi_j(r_{ji},\varepsilon_c)) + \frac{\varepsilon\beta_1(1+e)n}{R\rho_c\gamma}\varphi_j(r_{ji},\varepsilon_c), & i\in k^\Omega, \\ 0, & i\notin k^\Omega, \end{cases}$$

$$m_{ij}^{(13)} = \begin{cases} -\frac{1+e}{R\gamma}\nabla\cdot(\mathbf{K}_T\nabla\varphi_j(r_{ji},\varepsilon_T)) + \frac{(\alpha_\rho + (2q-1)\alpha_s)e\beta_1}{R\gamma}\varphi_j(r_{ji},\varepsilon_T), & i\in k^\Omega, \\ 0, & i\notin k^\Omega, \end{cases}$$

$$f_i^{(1)} = \begin{cases} \frac{1}{1+(R-1)\xi}\left(\frac{a_0}{R\gamma}\frac{\partial^2(\Theta^*+R\gamma h^*)}{\partial t^2} + \frac{\beta_1(a_0+a_1)}{R\gamma}\frac{\partial(\Theta^*+R\gamma h^*)}{\partial t}\right)\Bigg|_{\mathbf{X}=\mathbf{Y}_i}, & i\in k^\Omega, \\ 0, & i\in k^{\Gamma_1}, \\ H_1(\mathbf{Y}_i,t), & i\in k^{\Gamma_2}, \\ \mathbf{z}_i^Y, & i\in k^\Gamma\cup k^{\Gamma_v}, \end{cases}$$

$$f_i^{(0)} = \left(\frac{a_0}{1+(R-1)\xi}\left(\frac{\partial\Theta_0^*}{\partial t} + R\frac{\partial p_0^*}{\partial t}\right) + \frac{a_1\beta_1}{1+(R-1)\xi}(\Theta_0^* + Rp_0^*)\right)\Bigg|_{\mathbf{X}=\mathbf{Y}_i},$$

$$m_{ij}^{(14)} = \begin{cases} -\frac{\varepsilon e(1+e)\beta_1}{R\rho_c\gamma}\varphi_j(r_{ji},\varepsilon_N), & i\in k^\Omega, \\ 0, & i\notin k^\Omega, \end{cases} \quad q_{ij}^{(12)} = \begin{cases} \frac{\varepsilon n(1+e)}{R\rho_c\gamma}\varphi_j(r_{ji},\varepsilon_c), & i\in k^\Omega, \\ 0, & i\notin k^\Omega, \end{cases}$$

$$q_{ij}^{(13)} = \begin{cases} \frac{e(\alpha_\rho + (2q-1)\alpha_s)}{R\gamma}\varphi_j(r_{ji},\varepsilon_T), & i\in k^\Omega, \\ 0, & i\notin k^\Omega, \end{cases} \quad q_{ij}^{(14)} = \begin{cases} -\frac{\varepsilon e(1+e)}{R\rho_c\gamma}\varphi_j(r_{ji},\varepsilon_c), & i\in k^\Omega, \\ 0, & i\notin k^\Omega, \end{cases}$$

$$m_{ij}^{(0)} = \left(\gamma\beta(1+e) + \frac{R\gamma a_0}{1+(R-1)\xi}\right)\varphi_j(r_{ji},\varepsilon_h),$$

$$l_{ij}^{(0)} = -(1+e)\nabla \cdot (\mathbf{K}_h \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h)) + \frac{R\gamma a_1 \beta_1}{1+(R-1)\xi} \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h),$$

$$l_{ij}^{(01)} = -(1+e)\nabla \cdot (\mathbf{K}_c \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c)), \quad l_{ij}^{(02)} = -(1+e)\nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T)),$$

$$\tilde{m}_{ij}^{(1)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h), \quad \tilde{m}_{ij}^{(2)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c), \quad \tilde{m}_{ij}^{(3)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T), \quad \tilde{m}_{ij}^{(4)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_N),$$

$$\tilde{f}_i^{(1)} = h_0(\mathbf{Y}_i), \quad \tilde{f}_i^{(2)} = c_0(\mathbf{Y}_i), \quad \tilde{f}_i^{(3)} = T_0(\mathbf{Y}_i), \quad \tilde{f}_i^{(4)} = N_0(\mathbf{Y}_i), \quad i = \overline{1; k}, \quad r_{ji} = \|\mathbf{Y}_i - \mathbf{X}_j\|_2.$$

Особливого визначення вимагають елементи матриць та вектор-стовпців задачі Коші (5.71)–(5.76) для колокаційних точок, які лежать на межах спряження. Нехай $\mathbf{Y}_\alpha$ та $\mathbf{Y}_\beta$ дві колокаційні точки, координати яких співпадають і $\alpha \in k_{\Gamma_{i,i+1}}^{\Omega_i}$, $\beta \in k_{\Gamma_{i,i+1}}^{\Omega_{i+1}}$. Тоді всі елементи рядків під номерами α та β систем рівнянь (5.72)–(5.74) покладаються рівними нулю і їм присвоюються значення згідно наступного правила:

$$l_{\alpha,j}^{(3)} = \begin{cases} \varphi_j(r_{j\alpha}, \varepsilon_T), & j \in \overline{k^{\Omega_i}}, \\ -\varphi_j(r_{j\beta}, \varepsilon_T), & j \in \overline{k^{\Omega_{i+1}}}, \end{cases}$$

$$l_{\beta,j}^{(3)} = \begin{cases} (-\lambda \nabla \varphi_j(r_{j\alpha}, \varepsilon_T) + \rho c_\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi_j(r_{j\alpha}, \varepsilon_T), \mathbf{n}), & j \in \overline{k^{\Omega_i}}, \\ -(-\lambda \nabla \varphi_j(r_{j\beta}, \varepsilon_T) + \rho c_\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi_j(r_{j\beta}, \varepsilon_T), \mathbf{n}), & j \in \overline{k^{\Omega_{i+1}}}, \end{cases}$$

$$l_{\alpha,j}^{(2)} = \begin{cases} \varphi_j(r_{j\alpha}, \varepsilon_c), & j \in \overline{k^{\Omega_i}}, \\ -\varphi_j(r_{j\beta}, \varepsilon_c), & j \in \overline{k^{\Omega_{i+1}}}, \end{cases}$$

$$l_{\beta,j}^{(2)} = \begin{cases} (-\mathbf{D} \nabla \varphi_j(r_{j\alpha}, \varepsilon_c) + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi_j(r_{j\alpha}, \varepsilon_c), \mathbf{n}), & j \in \overline{k^{\Omega_i}}, \\ -(-\mathbf{D} \nabla \varphi_j(r_{j\beta}, \varepsilon_c) + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi_j(r_{j\beta}, \varepsilon_c), \mathbf{n}), & j \in \overline{k^{\Omega_{i+1}}}, \end{cases}$$

$$l_{\beta,j}^{(21)} = \begin{cases} (-\mathbf{D}_T \nabla \varphi_j(r_{j\alpha}, \varepsilon_T), \mathbf{n}), & j \in \overline{k^{\Omega_i}}, \\ -(-\mathbf{D}_T \nabla \varphi_j(r_{j\beta}, \varepsilon_T), \mathbf{n}), & j \in \overline{k^{\Omega_{i+1}}}, \end{cases} \quad l_{\alpha,j}^{(1)} = \begin{cases} \varphi_j(r_{j\alpha}, \varepsilon_h), & j \in \overline{k^{\Omega_i}}, \\ -\varphi_j(r_{j\beta}, \varepsilon_h), & j \in \overline{k^{\Omega_{i+1}}}, \end{cases}$$

$$l_{\beta,j}^{(1)} = \begin{cases} (-\mathbf{K}_h \nabla \varphi_j(r_{j\alpha}, \varepsilon_h), \mathbf{n}), & j \in \overline{k^{\Omega_i}}, \\ -(-\mathbf{K}_h \nabla \varphi_j(r_{j\beta}, \varepsilon_h), \mathbf{n}), & j \in \overline{k^{\Omega_{i+1}}}, \end{cases} \quad l_{\beta,j}^{(12)} = \begin{cases} (\mathbf{K}_c \nabla \varphi_j(r_{j\alpha}, \varepsilon_c), \mathbf{n}), & j \in \overline{k^{\Omega_i}}, \\ -(\mathbf{K}_c \nabla \varphi_j(r_{j\beta}, \varepsilon_c), \mathbf{n}), & j \in \overline{k^{\Omega_{i+1}}}, \end{cases}$$

$$l_{\beta,j}^{(13)} = \begin{cases} (\mathbf{K}_T \nabla \varphi_j(r_{j\alpha}, \varepsilon_T), \mathbf{n}), & j \in \overline{k^{\Omega_i}}, \\ -(\mathbf{K}_T \nabla \varphi_j(r_{j\beta}, \varepsilon_T), \mathbf{n}), & j \in \overline{k^{\Omega_{i+1}}}. \end{cases}$$

Аналогічно всі елементи рядка під номерами α (або рядка під номером β) системи рівнянь (5.71) покладаються рівними нулю і їм присвоюються значення згідно наступного правила:

$$l_{\alpha,j}^{(4)} = \begin{cases} \varphi_j(r_{j\alpha}, \varepsilon_N), & j \in \overline{k^{\Omega_i}}, \\ -\varphi_j(r_{j\beta}, \varepsilon_N), & j \in \overline{k^{\Omega_{i+1}}}. \end{cases}$$

Зауважимо, що якщо при деякому наборі індексів коефіцієнт однієї із матриць або вектор–стовпця задачі Коші (5.71)–(5.76) згідно вищенаведених формул не визначений, то він приймається рівним нулю. Також відмітимо, що значення коефіцієнтів рівнянь крайової задачі (5.29)–(5.45) у колокаційній точці залежать від області, в яку дана точка попадає. Для уникнення громіздкості та зайвої індексації цього не відображено при визначенні елементів відповідних матриць та вектор–стовпців задачі Коші (5.71)–(5.76), однак це потрібно мати на увазі.

5.4. Визначення зміщень вузлів розрахункових сіток при чисельному розв'язанні крайової задачі фільтраційної консолідації в областях з рухомими межами

Припустимо, що на часовому шарі (S) задача (5.1)–(5.13) вже розв'язана при відомих координатах вузлів $(x_i^{(S-1)}, y_i^{(S-1)}, z_i^{(S-1)})$ скінченних елементів. Аналогічне стосується вузлових та колокаційних точок методу РБФ. Щоб розв'язати задачу на часовому шарі $(S+1)$, потрібно провести коригування координат вузлів $(x_i^{(S-1)}, y_i^{(S-1)}, z_i^{(S-1)})$ на величини $\Delta z_i^{(S-1)}$ (в припущенні лише вертикальних зміщень). Згідно (5.11) маємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_i}{\partial t} = & \frac{R\gamma}{(1+\bar{e})(1+(R-1)\xi)} \int_{\varphi(x_i, y_i)}^{l(x_i, y_i, t)} \left(a_0 \left(\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial h^*}{\partial t} - \frac{1}{R\gamma} \frac{\partial \Theta^*}{\partial t} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{a_1 \beta_1}{\gamma} \left(p(t) - p^*(t) - \frac{\Theta^*(t)}{R} \right) + \frac{a_1 \beta_1^2}{\gamma} \int_0^t \left(\frac{\Theta^*(t)}{R} + p^*(t) - p(t) \right) \exp(-\beta_1(t-\tau)) d\tau \right) dz. \end{aligned}$$

Далі

$$\begin{aligned}
& \frac{z_i^{(S)} - z_i^{(S-1)}}{\tau} = \frac{R\gamma}{(1+\bar{e})(1+(R-1)\xi)} \times \\
& \times \int_{\varphi(x_i, y_i)}^{l^{(S-1)}(x_i, y_i)} \left(a_0 \left(\frac{h^{(S)}(\mathbf{X}) - h^{(S-1)}(\mathbf{X})}{\tau} - \frac{\partial h^*}{\partial t} \Big|_{t=(S-1)\tau} - \frac{1}{R\gamma} \frac{\partial \Theta^*}{\partial t} \Big|_{t=(S-1)\tau} \right) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{a_1 \beta_1}{\gamma} \left(p^{(S)}(\mathbf{X}) - p^* \Big|_{t=(S-1)\tau} - \frac{\Theta^*(t)}{R} \Big|_{t=(S-1)\tau} \right) + \right. \\
& \quad \left. + a_1 \beta_1^2 \int_0^{(S-1)\tau} \left(\frac{\Theta^*(\tau_1)}{R} + p^*(\tau_1) - p(\tau_1) \right) \exp(-\beta_1(t - \tau_1)) d\tau_1 \right) dz.
\end{aligned}$$

Тут інтегрування проводиться по вертикальному відрізку $[z_i^{(S)}; \varphi(x_i^{(S)}, y_i^{(S)})]$, а функція $z = \varphi(x, y)$ задає нижній нерухомий контур області фільтраційної консолідації. З вищенаведеної залежності знаходимо $z_i^{(S)}$, де i пробігає номери всіх вузлів в скінченноелементній сітці або номери вузлових і колокаційних точок в методі РБФ.

5.5. Алгоритм чисельного розв'язання задачі фільтраційної консолідації тіла ґрунтової греблі та алгоритм апроксимації депресійної поверхні

Особливість задачі фільтраційної консолідації тіла ґрунтової греблі полягає в тому, що область фільтраційної консолідації змінюється з часом за рахунок зміни положення депресійної поверхні (Γ на рис. 5.2). Тому, постає необхідність в алгоритмі ітерування депресійної поверхні. Для цього можна використати метод, запропонований в [247] і адаптований до задач фільтраційної консолідації з урахуванням впливу тепломасоперенесення [49].

Нехай задача розв'язується методом скінченних елементів. Тоді область консолідації дискретизується відповідною скінченноелементною сіткою. Припустимо, що на часовому шарі (S) задача (5.14)–(5.28) (або (5.29)–(5.45)) розв'язана. Тобто, знайдено положення кривої депресії $\Gamma^{(S)}$. Тоді, етапи алгоритму наступні:

1. Знаходимо значення напору $h(\mathbf{X}, t_{S+1})$ на часовому шарі $(S+1)$, використовуючи положення кривої депресії $\Gamma^{(S)}$. У вузлах, які лежать вище кривої депресії коефіцієнти фільтрації та осмосу покладаються рівними нулю. Для того, щоб матриця МСЕ була не виродженою, її діагональні елементи, які відповідають вузлам над вільною поверхнею, покладаються рівними деякому додатному числу (наприклад 1).

2. Знаходимо положення кривої депресії на часовому шарі $(S+1)$. Для цього знаходимо в кожній вузловій точці значення тиску $p_i(\mathbf{X}_i, t_{S+1}) = h(\mathbf{X}_i, t_{S+1}) - z_i$. Тут ми покладемо $\gamma = 1$. Далі, по кожному скінченному елементу E підраховуємо середнє значення тиску $p_E = \frac{1}{s_1} \cdot \sum_i p_i$, де s_1 – кількість вузлів, які належать елементу E . Нове положення депресійної кривої визначається на основі умови, що для всіх скінченних елементів, які лежать під депресійною кривою має виконуватись співвідношення $p_E > \varepsilon \geq 0$ для заданого достатньо малого значення ε .

3. Знаходимо значення концентрацій $N(\mathbf{X}, t_{S+1})$, $c(\mathbf{X}, t_{S+1})$ та температури $T(\mathbf{X}, t_{S+1})$ на часовому шарі $(S+1)$, використовуючи знайдене положення кривої депресії $\Gamma^{(S+1)}$. У вузлах, які лежать вище кривої депресії елементи тензорів $\mathbf{D}$, $\mathbf{D}_T$, λ , коефіцієнт γ_1 та швидкість фільтрації покладаються рівними нулю. Для того, щоб матриці МСЕ були не виродженими, їх діагональні елементи, які відповідають вузлам над вільною поверхнею, покладаються рівними деякому додатному числу.

4. Присвоюємо для S значення $(S+1)$ та розпочинаємо алгоритм з першого кроку.

Для апроксимації положення кривої депресії як в методі скінченних елементів, так і в методі РБФ можна використати кінематичну граничну умову (друга з умов (5.24) або (5.41)). Тоді для вузла $\mathbf{X}_i \in \Gamma^{(S)}$ маємо

$$(\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{\mathbf{x}_i} = n \frac{\Gamma_i^{(S+1)} - \Gamma_i^{(S)}}{\tau},$$

де

$\Gamma_i^{(S)}$ – відоме положення депресійної кривої у вузлі $\mathbf{X}_i$;

$\Gamma_i^{(S+1)}$ – нове положення депресійної кривої у вказаному вузлі.

Згідно вищенаведеного співвідношення визначаємо зміщення вузла з номером i в напрямку зовнішньої нормалі до депресійної поверхні. Відповідно до знайденого зміщення коригується положення вказаного вузла на наступному часовому шарі.

5.6. Результати чисельних експериментів та аналіз впливу техногенних факторів на процеси консолідації ґрунтів в областях з рухомими межами

Для чисельного знаходження інтегралів при формуванні матриць методу скінченних елементів (у випадку змінних коефіцієнтів відповідних диференціальних рівнянь) використовувались квадратурні формули Гаусса [162]. Системи лінійних алгебричних рівнянь методу скінченних елементів розв'язувались прямим методом Гауса з вибором головного елемента з урахуванням розрідженої структури матриці [118]. Системи лінійних алгебричних рівнянь методу РБФ розв'язувались методом найменших квадратів [139, 206, 281] з подальшим застосуванням методу Крейга [215].

Приклад 5.1.

1. Розмірність задачі: $R=2$. Коефіцієнт бічного тиску $\xi=0.75$.

2. Область розв'язання задачі: Область фільтраційної консолідації масиву глинистого ґрунту прямокутної форми зображена на рис. 5.3 при розмірах $l=10\text{м}$, $b=20\text{м}$, $d_1=-10\text{м}$, $d_2=10\text{м}$.

3. Чисельний метод: Чисельні розрахунки проведено методом скінченних елементів на трикутній сітці при лінійних базисних функціях.

4. Схема дискретизації в часі: Для дискретизації в часі використано схему предиктор–коректор з рівномірним кроком за часом $\tau = 30$ діб.

5. Вплив масоперенесення: Враховувався через явище хімічного осмосу зі сталими коефіцієнтами $k_{11}^{(c)} = k_{22}^{(c)} = 2.8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^5/\text{кг} \cdot \text{доба}$, $k_{12}^{(c)} = k_{21}^{(c)} = 0 \text{ м}^5/\text{кг} \cdot \text{доба}$ та через залежність коефіцієнта фільтрації від концентрації порового сольового розчину. Параметри масоперенесення: $D_{11} = D_{22} = 0.02 \text{ м}^2/\text{доба}$, $D_{12} = D_{21} = 0 \text{ м}^2/\text{доба}$.

6. Вплив теплоперенесення: Враховувався через явище термічного осмосу зі сталими коефіцієнтами $k_{11}^{(T)} = k_{22}^{(T)} = 2.8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{град} \cdot \text{доба}$, $k_{12}^{(T)} = k_{21}^{(T)} = 0 \text{ м}^2/\text{град} \cdot \text{доба}$ та через залежність коефіцієнта фільтрації від температури пористого середовища. Також враховувалось явище термодифузії з коефіцієнтом $D_{11}^{(T)} = D_{22}^{(T)} = 0.002 \text{ кг}/(\text{м} \cdot \text{доба} \cdot ^\circ \text{C})$, $D_{21}^{(T)} = D_{12}^{(T)} = 0 \text{ кг}/(\text{м} \cdot \text{доба} \cdot ^\circ \text{C})$. Параметри теплоперенесення:

$$\lambda_{11} = \lambda_{22} = 108 \text{ кДж}/\text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба}, \lambda_{12} = \lambda_{21} = 0 \text{ кДж}/\text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба},$$

$$c_\rho = 4,2 \text{ кДж}/\text{кг} \cdot \text{град}, c_T = 2137 \text{ кДж}/\text{м}^3 \cdot \text{град}, \rho = 1100 \text{ кг}/\text{м}^3.$$

7. Вплив наявності солей в рідкій та твердій фазах на рівняння нерозривності: Не враховувалось.

8. Вплив термічного розширення фаз ґрунту: Не враховувалось.

9. Наявність газу: Ґрунт вважався двофазним при середньому значенні коефіцієнта пористості $e = 0.65$ та пористості $n = 0.39$.

10. Залежність коефіцієнта фільтрації від напорів, температури та концентрації солей в рідкій фазі: Від функції надлишкових напорів коефіцієнт фільтрації покладался незалежним.

Для випадку постійного коефіцієнта фільтрації $k_{11}^{(h)} = k_{22}^{(h)} = k_{20} = 10^{-3} \frac{\text{м}}{\text{доба}}$.

Залежність $k_{11}^{(h)} = k_{22}^{(h)} = k(c, T)$ визначалася шляхом апроксимації функції $k(c, T)$ радіальними базисними функціями [300, 340, 402] аналогічно прикладу 3.1.

11. Повзучість скелету ґрунту: Не враховувалась. Між сумою головних напружень та коефіцієнтом пористості приймалась лінійна залежність (2.9) у вигляді спрямленого відрізка компресійної кривої при $a = 5.6 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{Н}$.

12. Масообмінні процеси: Не враховувались і коефіцієнт швидкості масообміну $\gamma_1 = 0 \text{ доба}^{-1}$.

13. Граничні умови:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{DC} = (\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{CA} = (\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{BA} = (\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{L_1 L_2} = 0, \quad h|_{DL_1} = H_1(t), \quad h|_{L_2 B} = H_2(t),$$

$$(\mathbf{q}_c, \mathbf{n})|_{DC} = (\mathbf{q}_c, \mathbf{n})|_{CA} = (\mathbf{q}_c, \mathbf{n})|_{BA} = (\mathbf{q}_c, \mathbf{n})|_{L_1 L_2} = 0, \quad c|_{DL_1} = C_m, \quad c|_{L_2 B} = C_{\min},$$

$$(\mathbf{q}_T, \mathbf{n})|_{DC} = (\mathbf{q}_T, \mathbf{n})|_{CA} = (\mathbf{q}_T, \mathbf{n})|_{BA} = (\mathbf{q}_T, \mathbf{n})|_{L_1 L_2} = 0, \quad T|_{DL_1} = T_{\max}, \quad T|_{L_2 B} = T_{\max},$$

де $T_{\max} = 30^\circ \text{C}$, $T_{\min} = 4^\circ \text{C}$, $H_1(t) = 0 \text{ м}$, $H_2(t) = 0 \text{ м}$, $C_m = 350 \text{ г/літр}$, $C_{\min} = 8 \text{ г/літр}$.

14. Початкові умови: Початковий розподіл концентрації солей

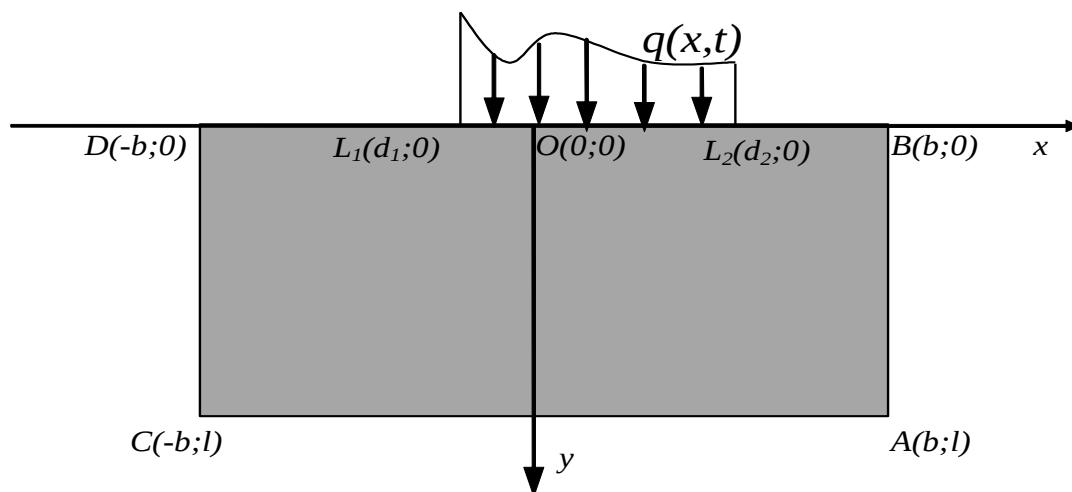
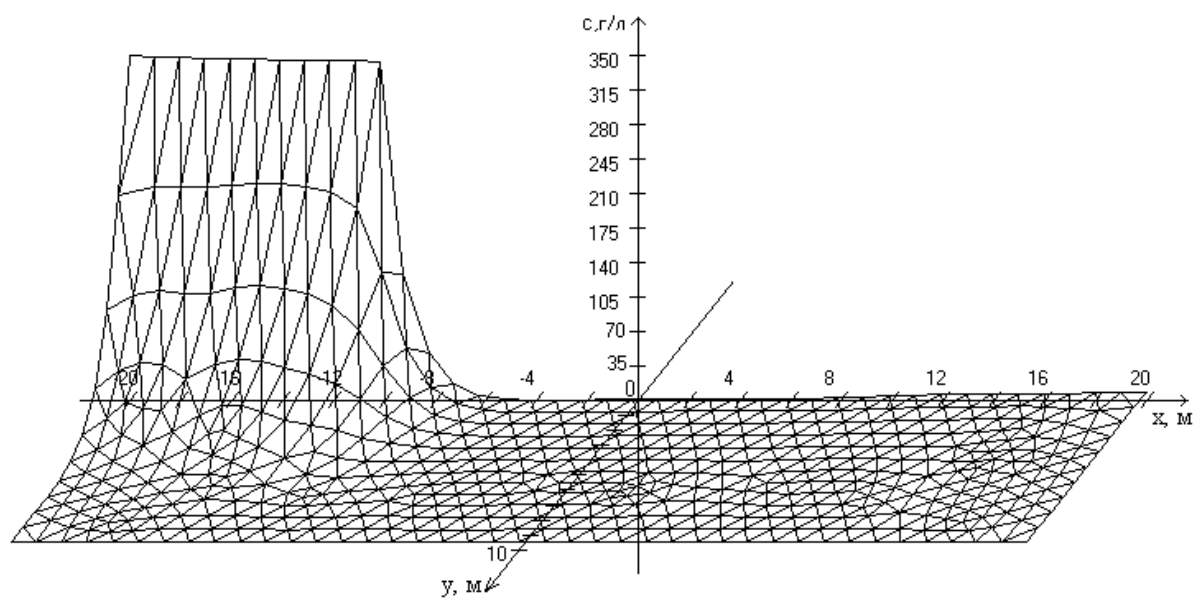
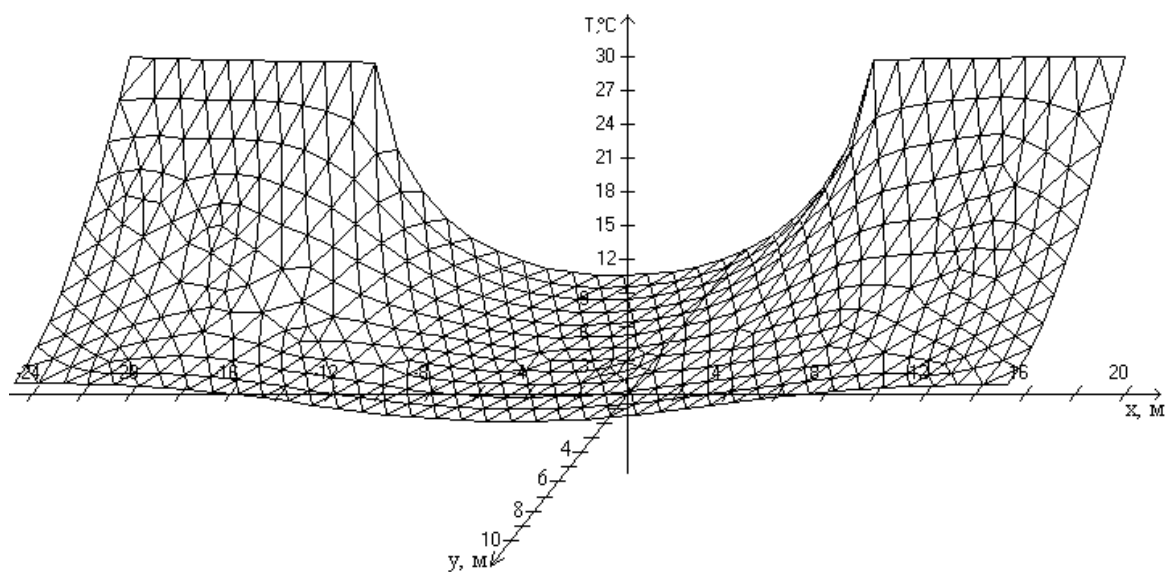
$$c_0(x, y) = \begin{cases} C_m, & (x, y) \in DL_1; \\ C_{\min}, & (x, y) \notin DL_1; \end{cases} \quad \text{та температури } T_0(x, y) = \begin{cases} T_{\max}, & (x, y) \in DL_1 \cup L_2 B; \\ T_{\min}, & (x, y) \notin DL_1 \cup L_2 B. \end{cases}$$

Початковий розподіл напорів $h_0(x, y)$ визначався згідно формули [254]

$$h_0(x, y) = \frac{1}{2\gamma} \left(\frac{qd_2}{b} \cdot \frac{1}{1-\nu} + \frac{4q}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi d_2}{b}}{m} \cdot \frac{\text{sh} \frac{m\pi l}{b} \cdot \text{ch} \frac{m\pi(y-l)}{b}}{\text{sh} \frac{2m\pi l}{b} + \frac{2m\pi l}{b}} \cdot \cos \frac{m\pi x}{b} \right),$$

де $\nu = \xi/(1+\xi)$ – коефіцієнт Пуассона в умовах неможливості бічного розширення; $q = 2,2 \cdot 10^5 \text{ Па}$ – інтенсивність миттєво прикладеного зовнішнього навантаження.

15. Основні завдання чисельного експерименту: Дослідити вплив процесів тепломасоперенесення на величини просідань верхньої межі ґрунту.

Рис. 5.3. Область грунту Ω прикладу 5.1Рис. 5.4. Розподіл концентрації солей ($t=360$ діб)Рис. 5.5. Розподіл температури ($t=360$ діб)

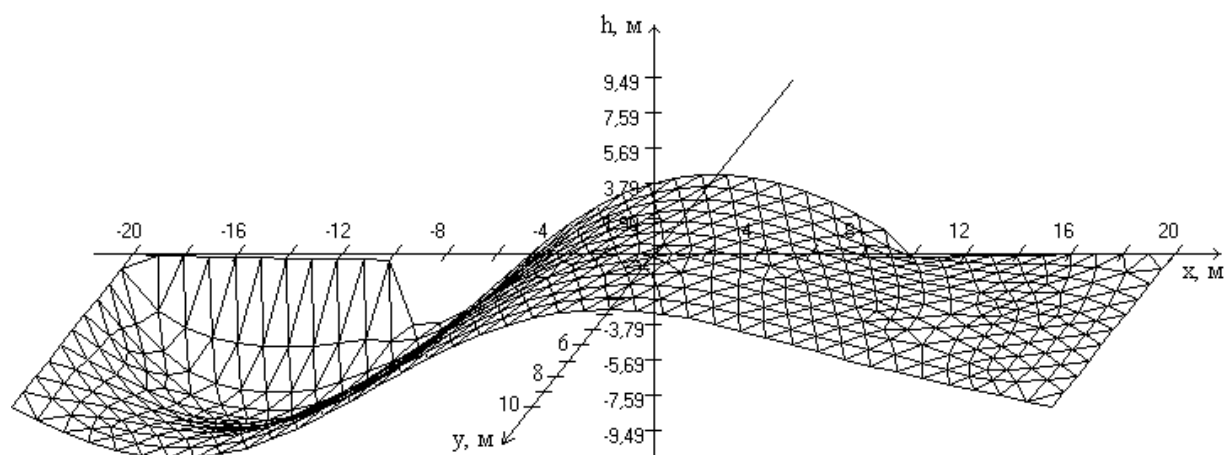


Рис. 5.6. Розподіл надлишкових напорів з урахуванням впливу теплосолеперенесення ($t=360$ діб)

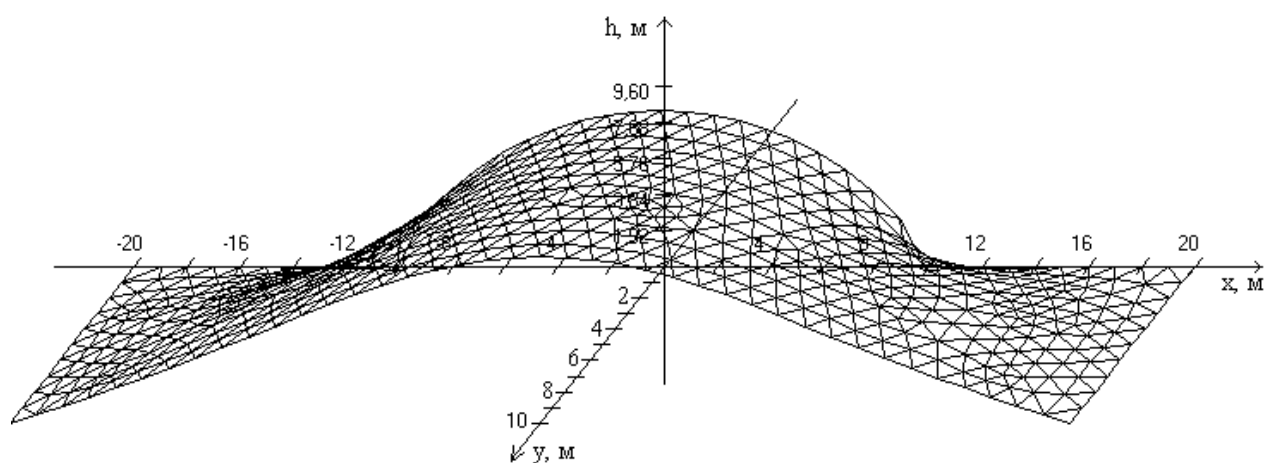


Рис. 5.7. Розподіл надлишкових напорів без урахування впливу теплосолеперенесення ($t=360$ діб)

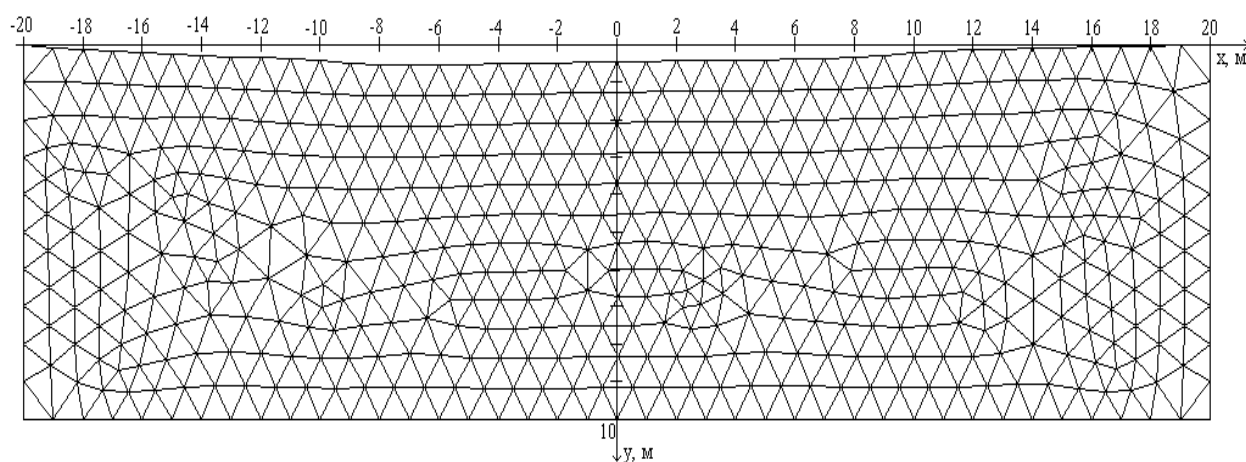


Рис. 5.8. Зміна положення верхньої межі ґрунту у випадку урахування впливу теплосолеперенесення ($t=360$ діб)

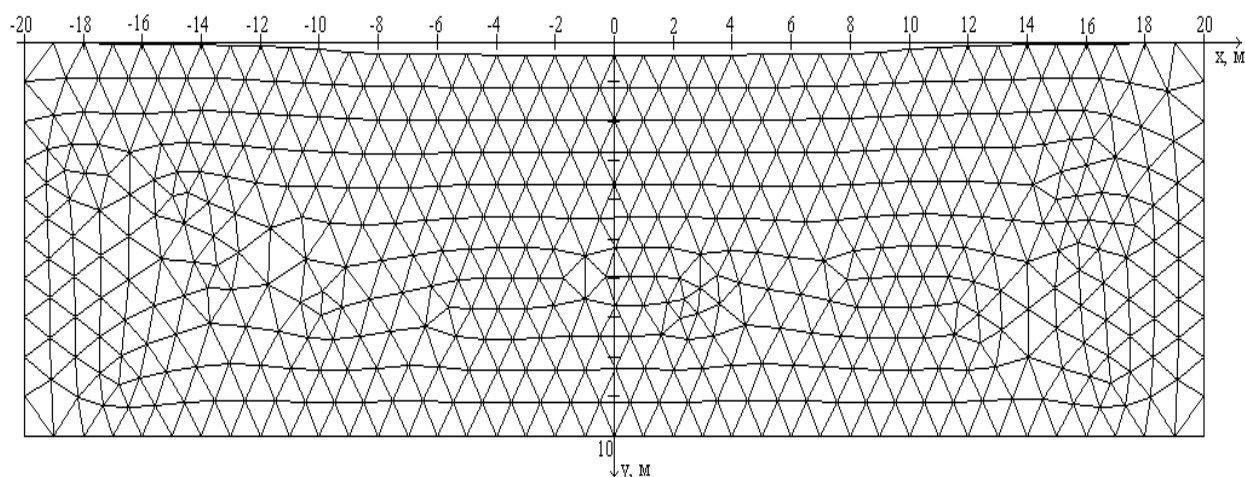


Рис. 5.9. Зміна положення верхньої межі ґрунту у випадку без урахування впливу теплосолеперенесення ($t=360$ діб)

Деякі з результатів експерименту 5.1 в графічному вигляді наведено на рис. 5.4–5.9.

В табл. 5.1 позначення “ Δy ” означає величину просідання у вертикальному напрямку. Позначення “ $-c$ ”, “ $-T$ ” означають, що впливи переносу солей та температури не враховуються, а “ $+c$ ”, “ $+T$ ” – враховується. У відсотках вказано відносне збільшення вертикальних просідань порівняно з просіданнями при фільтрації чистої води в ізотермічних умовах.

Дані табл. 5.1 показують, що просідання не є симетричними відносно початку координат (див. також рис. 5.8). Це пояснюється урахуванням впливу на процес консолідації явищ теплосолеперенесення. При нехтуванні даними явищами зміщення є симетричними (див. рис. 5.9).

У випадку урахування впливу теплосолеперенесення, в області дії високих концентрацій солей, пришвидшується просідання ґрунту. Так, наприклад, просідання точки з координатами $(-10; 0)$ при урахуванні обох факторів зростають на 150%. При врахуванні лише впливу солеперенесення просідання зростають на 179%, а при врахуванні лише теплоперенесення – на 21%. Це означає, що комплексний вплив теплосолеперенесення не можна відобразити простим сумарним впливом (суперпозицією). Процеси та залежності є

нелінійними, а тому сумарне просідання при окремому урахуванні факторів не дорівнює просіданню при урахуванні обох факторів одночасно.

При віддаленні від області високих концентрацій вплив масоперенесення знижується. Так вже для вузла (10; 0) приріст просідання при урахуванні впливу теплосолеперенесення складає 32 %. Це ще раз показує можливість несиметричних та нерівномірних просідань залежно від розподілу полів концентрації солей та температури.

Приклад 5.2.

1. Розмірність задачі: $R=2$. Коефіцієнт бічного тиску $\xi=0.75$.

2. Область розв'язання задачі: Область фільтраційної консолідації тіла ґрунтової греблі зображена на рис. 5.1 при наступних координатах вершин (розмірність визначається в метрах): $A(0;0)$, $N(10;0)$, $M(60;6)$, $G(80;2)$, $F(100;2)$, $E(100;2)$, $W(88;9)$, $R(80;13)$, $S(52;18)$, $P(44;20)$, $Q(40;20)$, $B(38;19)$.

3. Чисельний метод: Чисельні розрахунки проведено методом скінченних елементів на сітці з 1148 трикутних скінченних елементів при кусково–квадратичних базисних функціях.

4. Схема дискретизації в часі: Для дискретизації в часі використано схему предиктор–коректор з рівномірним кроком за часом $\tau=30$ діб.

5. Вплив масоперенесення: Враховувався через явище хімічного осмосу зі сталими коефіцієнтами $k_{11}^{(c)} = k_{22}^{(c)} = 2.8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^5/\text{кг} \cdot \text{доба}$, $k_{12}^{(c)} = k_{21}^{(c)} = 0 \text{ м}^5/\text{кг} \cdot \text{доба}$ та через залежність коефіцієнта фільтрації від концентрації порового сольового розчину. Параметри масоперенесення: $D_{11} = D_{22} = 0.02 \text{ м}^2/\text{доба}$, $D_{12} = D_{21} = 0 \text{ м}^2/\text{доба}$.

6. Вплив теплоперенесення: Враховувався через явище термічного осмосу зі сталими коефіцієнтами $k_{11}^{(T)} = k_{22}^{(T)} = 2.8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{град} \cdot \text{доба}$, $k_{12}^{(T)} = k_{21}^{(T)} = 0 \text{ м}^2/\text{град} \cdot \text{доба}$ та через залежність коефіцієнта фільтрації від

температури пористого середовища. Також враховувалось явище термодифузії з коефіцієнтом $D_{11}^{(T)} = D_{22}^{(T)} = 0.002 \text{ кг}/(\text{м} \cdot \text{доба} \cdot ^\circ \text{C})$,

$D_{21}^{(T)} = D_{12}^{(T)} = 0 \text{ кг}/(\text{м} \cdot \text{доба} \cdot ^\circ \text{C})$. Параметри теплоперенесення:

$$\lambda_{11} = \lambda_{22} = 108 \text{ кДж}/\text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба}, \lambda_{12} = \lambda_{21} = 0 \text{ кДж}/\text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба},$$

$$c_\rho = 4,2 \text{ кДж}/\text{кг} \cdot \text{град}, c_T = 2137 \text{ кДж}/\text{м}^3 \cdot \text{град}, \rho = 1100 \text{ кг}/\text{м}^3.$$

7. Вплив наявності солей в рідкій та твердій фазах на рівняння нерозривності: Не враховувалось.

8. Вплив термічного розширення фаз ґрунту: Не враховувалось.

9. Наявність газу: Ґрунт вважався двофазним при середньому значенні коефіцієнта пористості $e = 0.70$ та пористості $n = 0.40$.

10. Залежність коефіцієнта фільтрації від напорів, температури та концентрації солей в рідкій фазі: Коефіцієнт фільтрації покладался незалежним від функції надлишкових напорів. Для випадку постійного коефіцієнта фільтрації

$$k_{11}^{(h)} = k_{22}^{(h)} = k_{20} = 10^{-3} \frac{\text{м}}{\text{доба}}. \text{ Залежність } k_{11}^{(h)} = k_{22}^{(h)} = k(c, T) \text{ визначалася шляхом}$$

апроксимації функції $k(c, T)$ радіальними базисними функціями [300, 340, 402] аналогічно прикладу 3.1.

11. Повзучість скелету ґрунту: Не враховувалась. Між сумою головних напружень та коефіцієнтом пористості приймалась лінійна залежність (2.9) у вигляді спрямленого відрізка компресійної кривої при $a = 5.12 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{Н}$.

12. Масообмінні процеси: Не враховувались і коефіцієнт швидкості масообміну $\gamma_1 = 0 \text{ доба}^{-1}$.

Табл. 5.1. Порівняльна таблиця величини просідання верхньої межі ґрунту (t=360 діб)

(x(0);y(0))	(-15;0)	(-12;0)	(-10;0)	(-8;0)	(-7;0)	(-6;0)	(-2;0)	(0;0)	(2;0)	(6;0)	(10;0)	(12;0)	(15;0)
$\Delta y(-c; -T)$	0,045	0,098	0,171	0,276	0,293	0,302	0,309	0,309	0,309	0,302	0,171	0,098	0,045
$\Delta y(+c; +T)$	0,257	0,348	0,427	0,541	0,549	0,542	0,478	0,449	0,427	0,389	0,225	0,137	0,067
	+471%	+255%	+150%	+96%	+87%	+79%	+55%	+45%	+38%	+29%	+32%	+40%	+49%
$\Delta y (+c; -T)$	0,333	0,418	0,477	0,570	0,567	0,552	0,466	0,430	0,402	0,353	0,194	0,112	0,052
	+640%	+327%	+179%	+107%	+94%	+83%	+51%	+39%	+30%	+17%	+13%	+14%	+16%
$\Delta y(-c; +T)$	0,062	0,125	0,206	0,319	0,337	0,346	0,348	0,346	0,348	0,346	0,206	0,125	0,062
	+38%	+28%	+21%	+16%	+15%	+15%	+13%	+12%	+13%	+15%	+21%	+28%	+38%

13. Граничні умови:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{ANMGF} = 0, h|_{AB} = H_1(x, y, t), (x, y) \in AB, h|_{EF} = H_2(x, y, t), (x, y) \in EF,$$

$$h|_{DE} = y, (x, y) \in DE;$$

$$(\mathbf{q}_c, \mathbf{n})|_{ANMGF} = 0, (\mathbf{q}_c, \mathbf{n})|_{DE} = 0, c|_{AB} = C_m, c|_{EF} = C_{\min};$$

$$(\mathbf{q}_T, \mathbf{n})|_{ANMGF} = 0, T|_{AB} = T_1(x, y, t), (x, y) \in AB, T|_{EF} = T_2(x, y, t), (x, y) \in EF,$$

$$T|_{\Gamma} = T|_{DE} = T_3(x, y, t), (x, y) \in \Gamma \cup DE;$$

$$\text{де } T_1 = T_2 = T_3 = 17 + 13 \cos\left(\frac{\pi t}{180}\right), H_1 = 20 \text{ м}, H_2 = 0 \text{ м}, C_m = 350 \text{ г/л}, C_{\min} = 8 \text{ г/л}.$$

Функції T_1 , T_2 та T_3 визначалися з умови сезонних коливань температури, причому $T_{\max} = 30^\circ \text{C}$, $T_{\min} = 4^\circ \text{C}$.

14. Початкові умови: Початковий розподіл концентрації солей

$$c_0(x, y) = \begin{cases} C_m, & (x, y) \in AB; \\ C_{\min}, & (x, y) \notin AB; \end{cases} \text{ та температури } T_0(x, y) = \begin{cases} T_{\max}, & (x, y) \in AB \cup DF; \\ T_{\min}, & (x, y) \notin AB \cup DF. \end{cases}$$

Вважалося, що початковий розподіл напорів в тілі греблі зумовлюється власною вагою ґрунту. Тобто, $h_0(x, y) = y_{\Gamma} \cdot \gamma_{\Gamma} / \gamma + y$, де y_{Γ} – вертикальна відстань від точки з координатами (x, y) до верхньої межі греблі (висота стовпа ґрунту прикладеного до даної точки); $\gamma_{\Gamma} = 1,95 \cdot 10^4 \text{ Па/м}^3$ – питома вага ґрунту; $\gamma = 1,1 \cdot 10^4 \text{ Па/м}^3$ – питома вага порового сольового розчину.

$$\text{В рівнянні консолідації } \frac{\partial h^*}{\partial t} = 0, \frac{\partial \Theta^*}{\partial t} = 0, \text{ оскільки тіло греблі вважається}$$

миттєво зведеним. Також в узагальненому законі Дарсі–Герсеванова знехтувано швидкістю руху твердих частинок ґрунту.

15. Основні завдання чисельного експерименту:

Дослідити вплив тепломасоперенесення на процес фільтраційної консолідації тіла ґрунтової греблі.

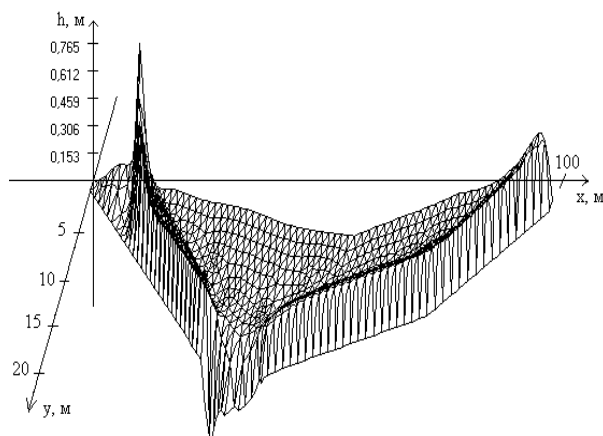


Рис. 5.10. Графік розподілу різниці полів двох напорів при $t=810$ діб

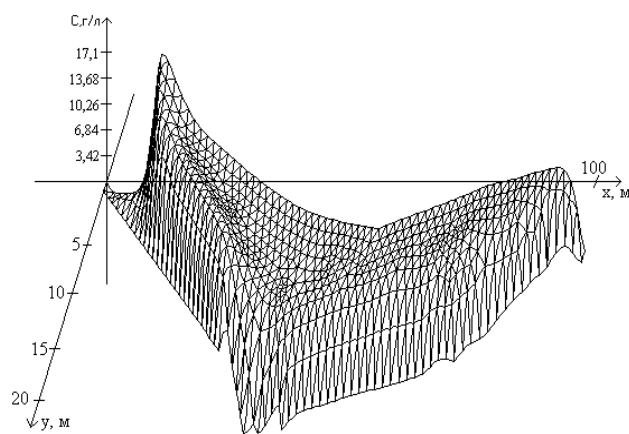


Рис. 5.11. Графік розподілу різниці полів концентрації солей при $t=810$ діб

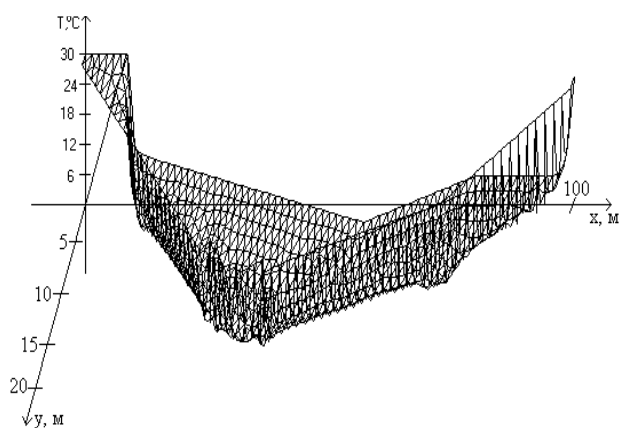


Рис. 5.12. Графік розподілу поля температури при $t=810$ діб

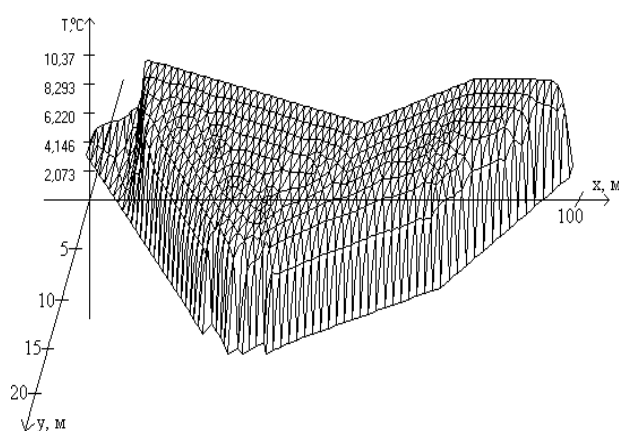


Рис. 5.13. Графік розподілу поля температури при $t=990$ діб

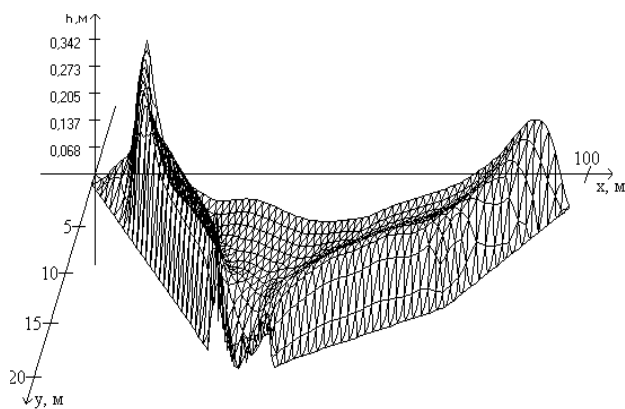


Рис. 5.14. Графік розподілу різниці полів двох напорів при $t=990$ діб

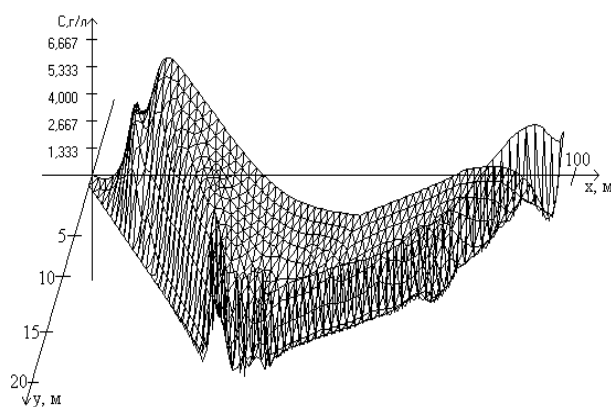


Рис. 5.15. Графік розподілу різниці полів концентрації солей при $t=990$ діб

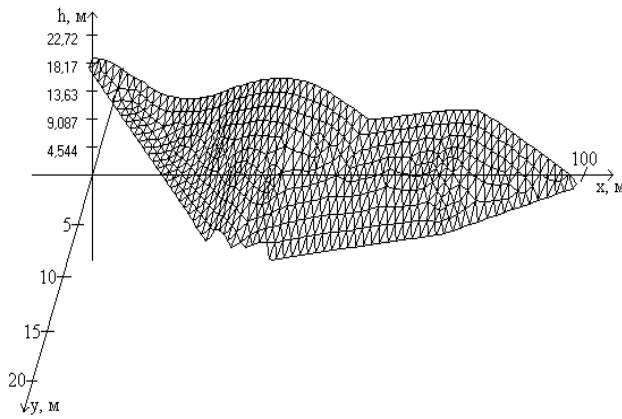


Рис. 5.16. Графік розподілу полів напорів в неізотермічному режимі при $t=990$ діб

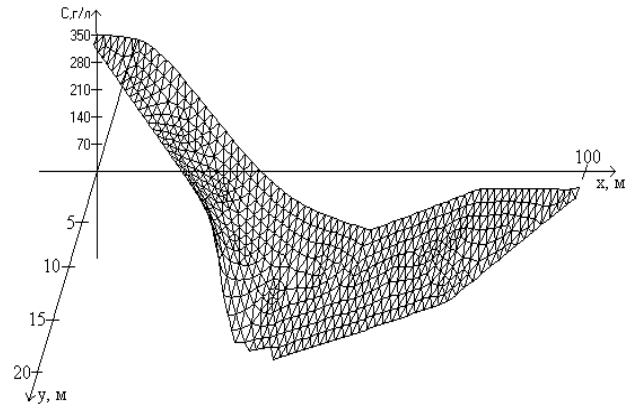


Рис. 5.17. Графік розподілу полів концентрації солей в неізотермічному режимі при $t=990$ діб

На рис. 5.10, 5.14 наведено графіки розподілу різниці напорів $\Delta h(x, y, t) = h_2(x, y, t) - h_1(x, y, t)$ при $t = 810$ діб та $t = 990$ діб відповідно, де $h_1(x, y, t)$ – напір при нехтуванні термодифузії та термоосмосом; $h_2(x, y, t)$ – напір при урахуванні термодифузії та термоосмосу (в обох випадках враховується вплив нормального хімічного осмосу). На рис. 5.11, 5.15 наведені аналогічні графіки розподілу різниці концентрації солей.

Аналіз результатів проведених числових експериментів розрахунку полів напорів, концентрації солей та температури для даної задачі показав, що у випадку врахування термодифузії, термоосмосу та впливу переносу солей на процес фільтраційної консолідації в околах депресійної поверхні та межі, що прилягає до лівого укосу греблі, відбуваються коливання надлишкових напорів та концентрації солей, які залежать від сезонних коливань температури. Щоб пояснити дані явища потрібно звернути увагу на розподіл температури та концентрації солей по області консолідації, а також на характер залежності коефіцієнта фільтрації від концентрації солей розчину. При $t = 810$ діб в області лівого укосу $c_1(x, y, t) < c_2(x, y, t)$, де $c_1(x, y, t)$ – розподіл концентрації солей при нехтуванні термодифузії та термоосмосом; $c_2(x, y, t)$ – розподіл концентрації солей в неізотермічних умовах. Тобто, в даному випадку градієнт концентрації солей в неізотермічних умовах менший, аніж в ізотермічних. Хімічний осмос при зменшенні градієнта концентрації солей зменшує свій

вплив, а тому напори в ізотермічних умовах в області лівого укосу розсіюються повільніше, ніж в неізотермічних умовах. Якщо звернути увагу на розподіл температури (рис. 5.12, 5.13), то аналогічний вплив на напірну функцію має і термічний осмос. Але вплив термічного осмосу менший за вплив хімічного осмосу. Тому при сезонному коливанні температури відбувається сезонне коливання різниці напорів, однак завжди $(h_2(x, y, t) - h_1(x, y, t)) > 0$. Відмінність спостерігається лише на вільній поверхні (див., наприклад рис. 5.10), де вищевказана різниця може ставати меншою нуля. Пояснення даного явища полягає в граничних умовах для напірної функції. Розподіл різниці концентрації солей (див. рис. 5.11, 5.15) в свою чергу пояснюється розподілом температури (див. рис. 5.12, 5.13) та явищем термодифузії.

Наявність градієнта концентрації солей в поровій воді та градієнта температури в ґрунті порушує очікуване співвідношення напорів у ньому, що може призвести до негативних наслідків, пов'язаних зі стійкістю укосів ґрунтової греблі. Зокрема, як показав тестовий приклад, сезонні коливання температури можуть спричинити коливання напорів в районах лівого та правого укосів, а також в околі депресійної поверхні.

Приклад 5.3.

Також були проведені порівняння натурних даних спостережень з результатами чисельних експериментів [123] щодо консолідації греблі хвостосховища Стебницького (Львівська область) Державного гірничо-хімічного підприємства (ДГХП) “Полімінерал”.

Хвостосховище Стебницького (Львівська область) Державного гірничо-хімічного підприємства (ДГХП) “Полімінерал” призначене для зберігання відходів виробництва калійних добрив, а також шахтних вод і складається з двох секцій №1 і №2. Загальний об'єм речовин (концентрованих калійних та натрієвих розсолів і твердої фази), які знаходяться в цих секціях складає відповідно 8,52 млн. м³ та 4,95 млн. м³.

У серпні 1983 року на греблі трапилась відома аварія, коли внаслідок зсуву низового укосу, який спричинив осідання гребеня греблі, виникло переливання і розмивання частини споруди на ПК 8+16. Пізніше греблю було реконструйовано. На аварійній ділянці (ПК 7+50...ПК 8+40) греблю було повністю розібрано і видалено верхній шар основи до відмітки 288м. На решті частин було зрізано гребінь греблі на висоту приблизно 5м, значно виположено низовий укіс, видалено верхній шар основи, влаштовано площинний дренаж з галькового ґрунту товщиною 3м.

Після цих заходів гребля секції № 2 має такі параметри (рис. 5.18): абсолютна відмітка гребеня греблі – 305,8м; допустимий рівень заповнення – 304,0м; максимальна висота греблі – 21,4м (ПК 10); довжина греблі по гребеню – 1200 м; ширина гребеня – 7м; закладення укосів: верхового – 1:3,5; низового – від 1:4 до 1:10 в залежності від висоти та планового розташування.

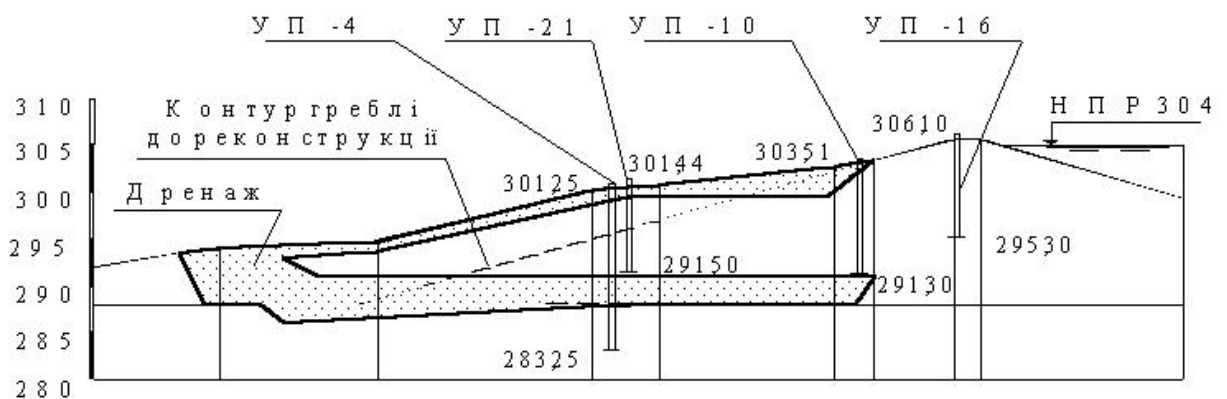


Рис. 5.18. Поперечний переріз греблі на ПК 8+16 (УП–4, 10, 16, 21 – п'єзометри)

Насипні ґрунти, що складають тіло греблі, є суглинки та глини від м'якопластичної до напівтвердої консистенції, неоднорідні за складом, вологістю і щільністю. Безпосередньо під греблею залягають четвертинні тугопластичні суглинки алювіального походження товщиною 3,9...8,5м, нижче напівтверді глини неогенового віку, прошарками тверді, грудкуваті. Товща цих глин складає не менше 50м, поверхня слабохвиляста.

Гідрогеологічні умови характеризуються наявністю водоносних горизонтів техногенних і четвертинних відкладень. Ґрунтові води виявлені при контрольному бурінні свердловин на глибинах 1...4,5м в межах низового укосу

та на глибинах 9...11м на гребені. Водотривом є покрівля неогенових глин. Живлення водоносного горизонту відбувається за рахунок інфільтрації атмосферних опадів та фільтрації води з хвостосховища. Коефіцієнт фільтрації ґрунтів насипу греблі змінюється в межах $2 \cdot 10^{-5} \dots 9 \cdot 10^{-5} \text{ м/доба}$.

Було проведено аналіз роботи контрольно–вимірювальної апаратури (КВА: марок і п'єзометрів), що встановлена на греблі. Період спостережень за КВА 1988...2000 рр.* Ретельний аналіз динаміки надлишкових напорів в поперечному і поздовжньому перерізах греблі, а також концентрації порових розчинів і деформацій протягом часу наведено в статті [124].

Розрахунки здійснювалися для умов консолідації ґрунту тіла греблі з урахуванням масоперенесення і без нього; розрахунки виконувались для різних значень коефіцієнта осмосу і коефіцієнта конвективної дифузії, які приймалися у відповідності із планом розрахунку, оскільки дійсні значення цих коефіцієнтів невідомі. Інтервали варіювання значень цих коефіцієнтів, які охоплюють допустимі межі варіювання для певних розрахунків вказані в табл. 5.2. Розрахункова область та інші вхідні параметри відповідають прикладу 5.2. Результати числових експериментів порівняно з результатами натурних спостережень (рис. 5.19, 5.20).

Табл. 5.2. План розрахунку

		Коефіцієнт конвективної дифузії $D, \text{м}^2/\text{доба}$	
		$2 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-3}$
Коефіцієнт хімічного осмосу, $k_c, \text{м}^5/\text{кг} \cdot \text{доба} (x_2)$	$8 \cdot 10^{-6}$	Розрахунковий. випадок №2	Розрахунковий. випадок №4
	$2 \cdot 10^{-6}$	Розрахунковий. випадок №1	Розрахунковий. випадок №3

Аналіз порівняння заміряних рівнів води в п'єзометрах встановлених на греблі хвостосховища за період часу 10 років з рівнями води розрахованими за математичною моделлю показує задовільне їх співпадання (рис. 5.19, 5.20).

* Заміри проводились маркшейдерським відділом Стебницького ДГХП "Полімінерал"

Різниця між розрахунковими та заміряними значеннями пояснюється неоднорідностями ґрунтового середовища, яка спричиняє гідравлічну дисперсію і коливання рівнів у п'єзометрі, а також наявність факторів, які не враховані у даній моделі.

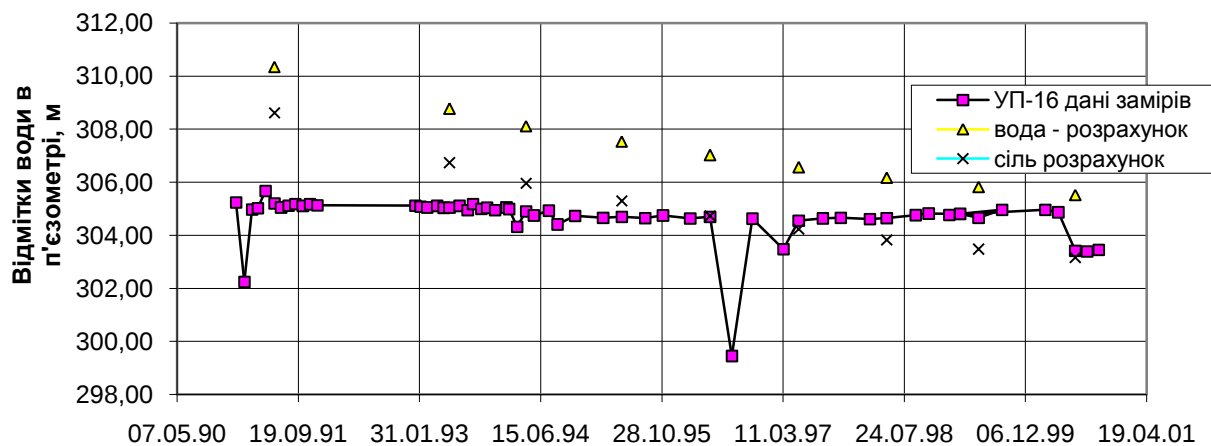


Рис. 5.19 а) Порівняння замірянних рівнів води в п'єзометрі УП-16 з розрахунковими значеннями, розр. випадок №1

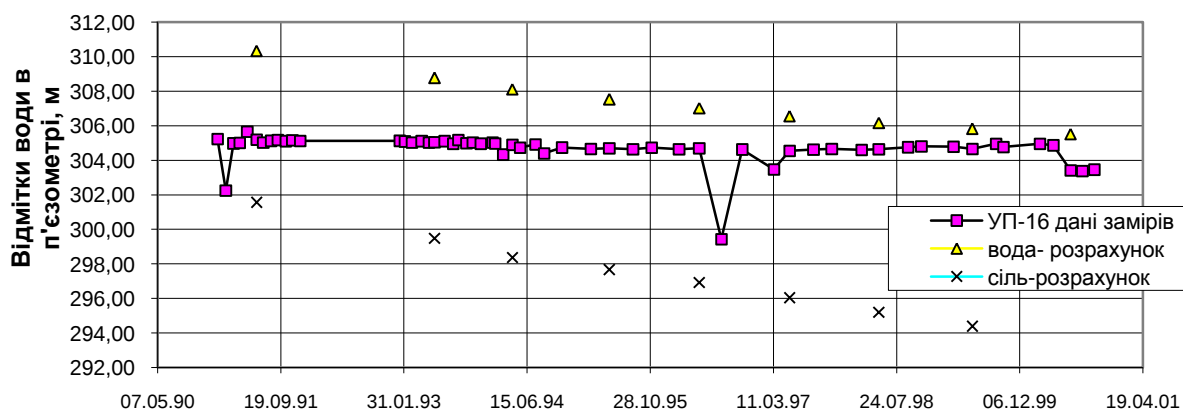


Рис. 5.19 б) Порівняння замірянних рівнів води в п'єзометрі УП-16 з розрахунковими значеннями, розр. випадок №2

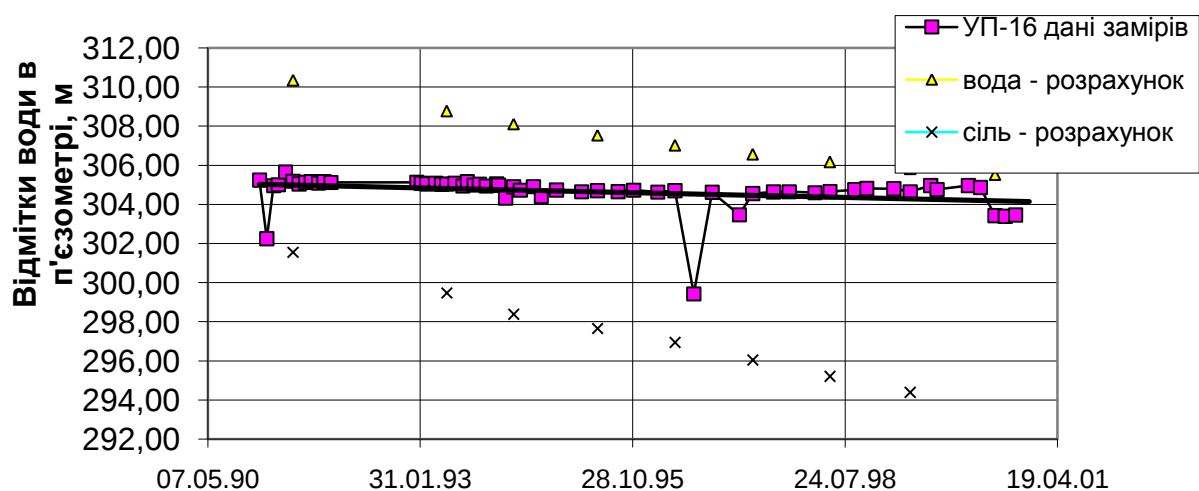


Рис. 5.19 в) Порівняння заміряних рівнів води в п'єзометрі УП-16 з розрахунковими значеннями, розр. випадок №3

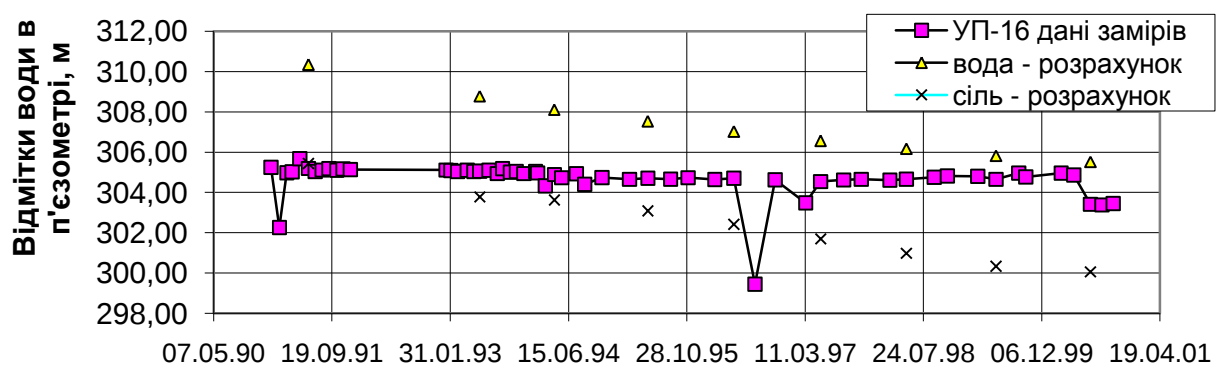


Рис. 5.19 г) Порівняння заміряних рівнів води в п'єзометрі УП-16 з розрахунковими значеннями, розр. випадок №4

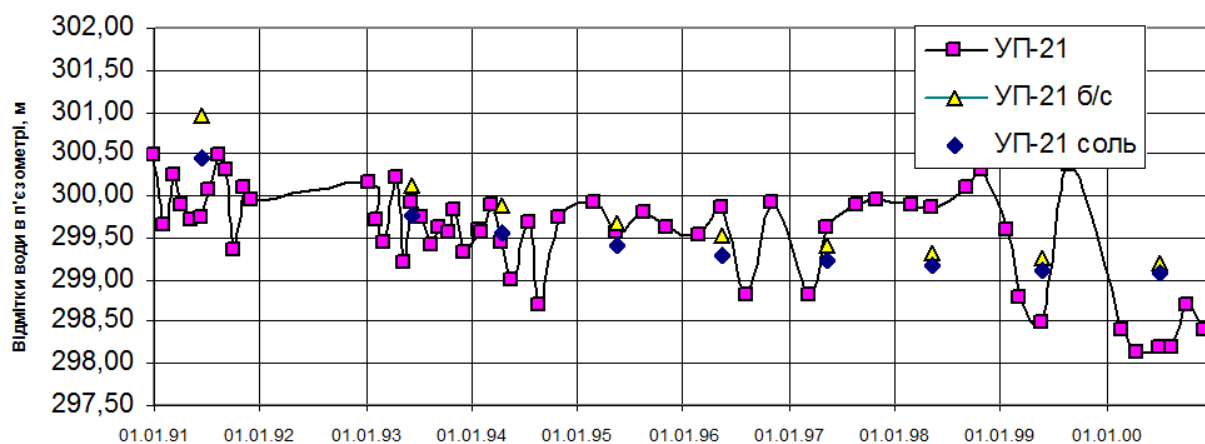


Рис. 5.20 а) Порівняння заміряних рівнів води в п'єзометрі УП-21 з розрахунковими значеннями, розр. випадок №1

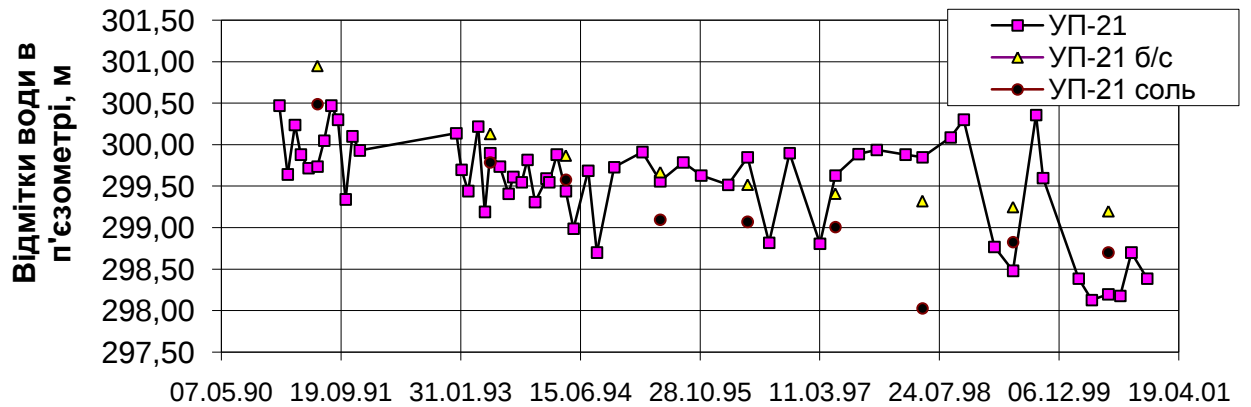


Рис. 5.20 б) Порівняння заміряних рівнів води в п'єзометрі УП-21 з розрахунковими значеннями розр. випадок №2

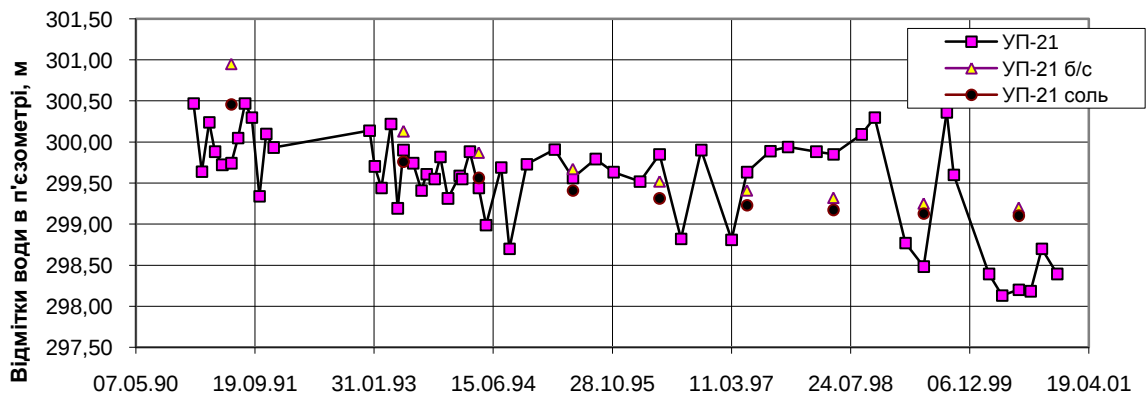


Рис. 5.20 в, г) Порівняння заміряних рівнів води в п'єзометрі УП-21 з розрахунковими значеннями, розр. випадки № №3, 4

Приклад 5.4.

1. Розмірність задачі: $R=2$. Коефіцієнт бічного тиску $\xi = 0.75$.
2. Область розв'язання задачі: Область фільтраційної консолідації тіла ґрунтової греблі зображена на рис. 5.2. при наступних координатах вершин: $O(0;0)$, $A(100;0)$, $B(45;20)$, $D(40;20)$.
3. Чисельний метод: Чисельні розрахунки проведено методом скінченних елементів на сітці трикутних скінченних елементів при лінійних та квадратичних розривних поліноміальних базисних функціях [247].

4. Схема дискретизації в часі: Для дискретизації в часі використано схему предиктор–коректор з рівномірним кроком за часом $\tau = 30$ діб.

5. Вплив масоперенесення: Враховувався через явище хімічного осмосу зі сталими коефіцієнтами $k_{11}^{(c)} = k_{22}^{(c)} = 6 \cdot 10^{-7} \text{ м}^5/\text{кг} \cdot \text{доба}$, $k_{12}^{(c)} = k_{21}^{(c)} = 0 \text{ м}^5/\text{кг} \cdot \text{доба}$ та через залежність коефіцієнта фільтрації від концентрації порового сольового розчину. Параметри масоперенесення: $D_{11} = D_{22} = 0.02 \text{ м}^2/\text{доба}$, $D_{12} = D_{21} = 0 \text{ м}^2/\text{доба}$.

6. Вплив теплоперенесення: Враховувався через явище термічного осмосу зі сталими коефіцієнтами $k_{11}^{(T)} = k_{22}^{(T)} = 8 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/\text{град} \cdot \text{доба}$, $k_{12}^{(T)} = k_{21}^{(T)} = 0 \text{ м}^2/\text{град} \cdot \text{доба}$ та через залежність коефіцієнта фільтрації від температури пористого середовища. Також враховувалось явище термодифузії з коефіцієнтом $D_{11}^{(T)} = D_{22}^{(T)} = 0.005 \text{ кг}/(\text{м} \cdot \text{доба} \cdot ^\circ \text{C})$, $D_{21}^{(T)} = D_{12}^{(T)} = 0 \text{ кг}/(\text{м} \cdot \text{доба} \cdot ^\circ \text{C})$. Параметри теплоперенесення:

$$\lambda_{11} = \lambda_{22} = 108 \text{ кДж}/\text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба}, \lambda_{12} = \lambda_{21} = 0 \text{ кДж}/\text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба},$$

$$c_\rho = 4,2 \text{ кДж}/\text{кг} \cdot \text{град}, c_T = 2137 \text{ кДж}/\text{м}^3 \cdot \text{град}, \rho = 1100 \text{ кг}/\text{м}^3.$$

7. Вплив наявності солей в рідкій та твердій фазах на рівняння нерозривності: Не враховувалось.

8. Вплив термічного розширення фаз ґрунту: Не враховувалось.

9. Наявність газу: Ґрунт вважався двофазним при середньому значенні коефіцієнта пористості $e = 0.62$ та пористості $n = 0.38$.

10. Залежність коефіцієнта фільтрації від напорів, температури та концентрації солей в рідкій фазі: Від функції надлишкових напорів коефіцієнт фільтрації покладался незалежним.

Для випадку постійного коефіцієнта фільтрації $k_{11}^{(h)} = k_{22}^{(h)} = k_{20} = 10^{-4} \frac{\text{м}}{\text{доба}}$.

Залежність $k_{11}^{(h)} = k_{22}^{(h)} = k(c, T)$ визначалася шляхом апроксимації функції $k(c, T)$ радіальними базисними функціями [300, 340, 402] аналогічно прикладу 3.1.

11. Повзучість скелету ґрунту: Не враховувалась. Між сумою головних напружень та коефіцієнтом пористості приймалась лінійна залежність (2.9) у вигляді спрямленого відрізка компресійної кривої при $a = 5.12 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{Н}$.

12. Масообмінні процеси: Не враховувались і коефіцієнт швидкості масообміну $\gamma_1 = 0 \text{ доба}^{-1}$.

13. Граничні умови:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{OA} = 0, h|_{OD} = H_1(t), h|_{AE} = H_2(t), h|_{DE} = y, (x, y) \in DE;$$

$$(\mathbf{q}_c, \mathbf{n})|_{OA} = 0, (\mathbf{q}_c, \mathbf{n})|_{DE} = 0, c|_{OD} = C_m, c|_{AE} = C_{\min};$$

$$(\mathbf{q}_T, \mathbf{n})|_{OA} = 0, T|_{OD} = T_1(x, y, t), (x, y) \in OD, T|_{AE} = T_2(x, y, t), (x, y) \in AE,$$

$$T|_{\Gamma} = T|_{DE} = T_3(x, y, t), (x, y) \in \Gamma \cup DE;$$

де $C_m = 350 \text{ г/л}$, $T_1 = T_2 = T_3 = 17 + 13 \cos\left(\frac{\pi t}{180}\right)$, $C_{\min} = 8 \text{ г/л}$. Функції T_1 , T_2 та

T_3 визначалися з умови сезонних коливань температури, причому $T_{\max} = 30^\circ \text{ C}$, $T_{\min} = 4^\circ \text{ C}$.

14. Початкові умови: Початковий розподіл концентрації солей

$$c_0(x, y) = \begin{cases} C_m, & (x, y) \in OD; \\ C_{\min}, & (x, y) \notin OD; \end{cases} \quad \text{та температури} \quad T_0(x, y) = \begin{cases} T_{\max}, & (x, y) \in OD \cup AF; \\ T_{\min}, & (x, y) \notin OD \cup AF. \end{cases}$$

Вважалось, що початковий розподіл напорів в тілі греблі зумовлюється власною вагою ґрунту. Тобто, $h_0(x, y) = y_{\Gamma} \cdot \frac{\gamma_{\Gamma}}{\gamma} + y$, де y_{Γ} – вертикальна відстань від точки з координатами (x, y) до верхньої межі греблі (висота стовпа ґрунту прикладеного до даної точки) або вертикальна відстань до верхньої межі першого шару греблі, у випадку її поступового зведення; $\gamma_{\Gamma} = 1.95 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^3$ – питома вага насиченого ґрунту; $\gamma = 1.1 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^3$ – питома вага порового

сольового розчину. При поступовому зведенні тіла греблі вважалось, що тіло зростає дискретно в часі шарами, висотою 4 м з часовим інтервалом 30 діб. В рівнянні консолідації $\frac{\partial h^*}{\partial t} = 0$ оскільки остаточний розподіл надлишкових напорів в стабілізованому стані є незмінним у часі. Згідно [263] $\frac{\partial \Theta^*}{\partial t} = 2\gamma_{\Gamma}\gamma_{\Gamma}$. Також в узагальненому законі Дарсі–Герсегова знехтувано швидкістю руху твердих частинок ґрунту.

15. Основні завдання чисельного експерименту: Дослідити вплив тепломасоперенесення на процес фільтраційної консолідації тіла ґрунтової греблі, яке поступово зводиться.

Як видно з рис. 5.21 при припущенні миттєвого зведення тіла ґрунтової греблі надлишкові напори є більшими, аніж при поступовому зведенні гідротехнічної споруди. Пояснення даного явища полягає у визначенні початкового розподілу надлишкових напорів в тілі греблі. При миттєвому зведенні греблі надлишкові напори поблизу нижньої непроникної основи отримуються досить великими. В той час, як при поступовому зведенні, черговий прикладений шар ґрунту зумовлює появу надлишкових напорів лише в околі власного впливу, і зі збільшенням висоти тіла греблі цей вплив на напори поблизу нижньої непроникної межі зменшується.

Рис. 5.22 показує, що урахування термічного впливу прискорює зменшення надлишкових напорів в тілі греблі. Це пояснюється збільшенням коефіцієнта фільтрації при зростанні температури та наявністю термічного осмосу. Причому, коливання температури на межі ґрунтової греблі спричиняє і коливання надлишкових напорів в її тілі.

Отже, урахування поступового зростання тіла ґрунтової греблі призводить до відмінностей в розподілі полів надлишкових напорів в порівнянні при його(тіла) миттєвому зведенні. Урахування змінних характеристик ґрунту,

наявність концентрації солей в поровій воді та зміна температури порушує очікуване співвідношення напорів в гідротехнічній споруді.

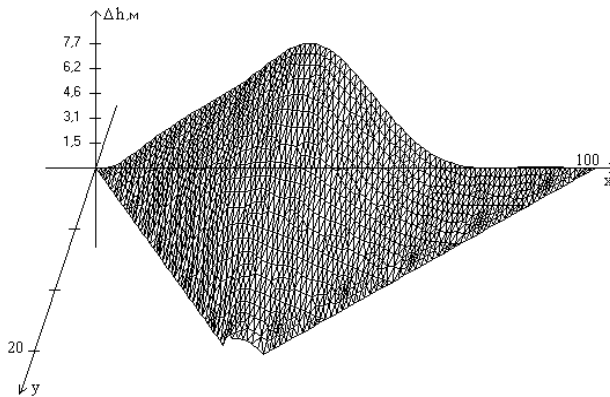


Рис. 5.21. Графік розподілу різниці полів двох напорів в миттєво зведеному та поступовому зростаючому тілі греблі з урахуванням термічного впливу при 330 діб

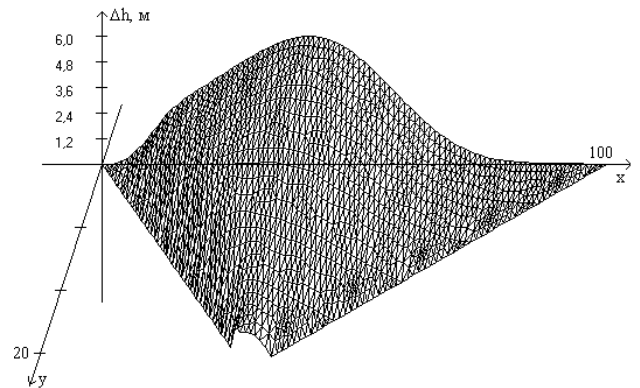


Рис. 5.22. Графік розподілу різниці полів двох напорів в поступово зростаючому тілі греблі без та з урахуванням термічного впливу при 330 діб

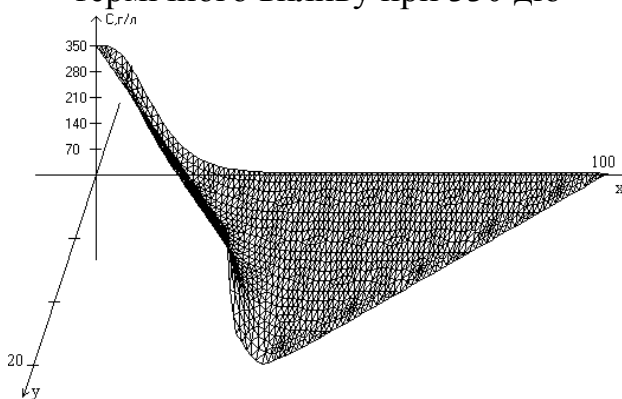


Рис. 5.23. Графік розподілу поля концентрації солей в поступово зростаючому тілі ґрунтової греблі при 330 діб

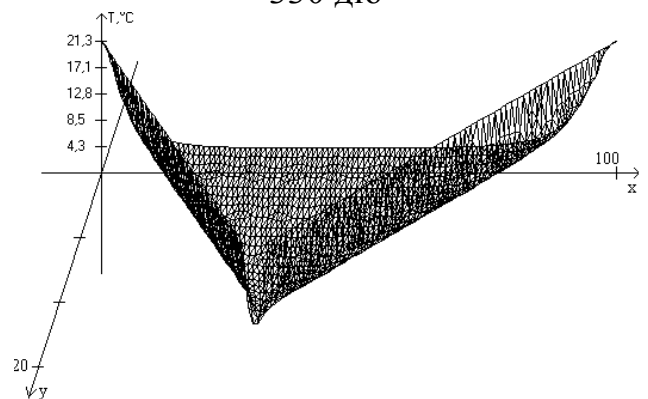


Рис. 5.24. Графік розподілу поля температури в поступово зростаючому тілі ґрунтової греблі при 330 діб

Приклад 5.5.

1. Розмірність задачі: $R=2$. Коефіцієнт бічного тиску $\xi = 0.75$.

2. Область розв'язання задачі: Область фільтраційної консолідації масиву глинистого ґрунту прямокутної форми при $l=10$ м, $b=10$ м, $a=5$ м (рис.5.25).

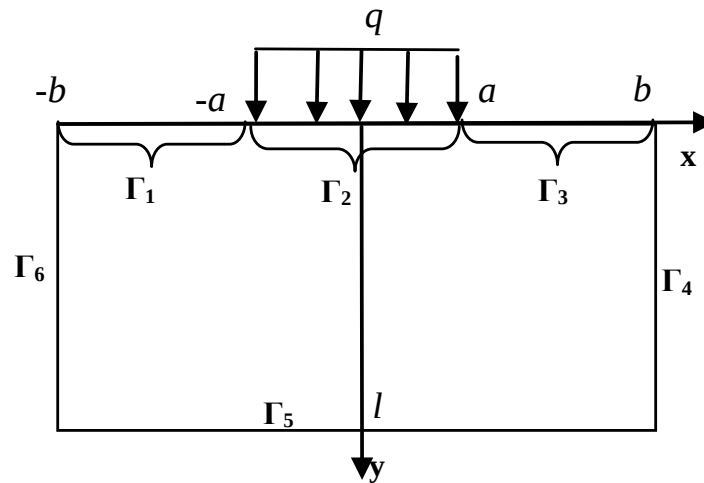


Рис.5.25. Область фільтраційної консолідації в прикладі 5.5

3. Чисельний метод: Чисельні розрахунки проведено методом радіальних базисних функцій з використанням мультіквадратичної РБФ та РБФ з компактним носієм [401]

$$\varphi^{[\alpha]}(r) = \left(1 - \frac{r}{\alpha}\right)_+^6 \left(35 \left(\frac{r}{\alpha}\right)^2 + 18 \frac{r}{\alpha} + 3\right), \quad \alpha > 0.$$

Також обчислення проводились методом скінченних елементів.

4. Схема дискретизації в часі: Час, протягом якого досліджувався процес консолідації, дорівнює 1 рік. Для дискретизації в часі використано повністю неявну лінеаризовану різницеву схему з кроком $\tau = 10$ діб.

5. Вплив масоперенесення: Враховувався через явище хімічного осмосу зі сталими коефіцієнтами $k_{11}^{(c)} = k_{22}^{(c)} = 2,8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^5 / \text{кг} \cdot \text{доба}$, $k_{12}^{(c)} = k_{21}^{(c)} = 0 \text{ м}^5 / \text{кг} \cdot \text{доба}$ та через залежність коефіцієнта фільтрації від концентрації порового сольового розчину. Параметри масоперенесення: $D_{11}^{(c)} = D_{22}^{(c)} = 0,02 \text{ м}^2 / \text{доба}$, $D_{12}^{(c)} = D_{21}^{(c)} = 0 \text{ м}^2 / \text{доба}$.

6. Вплив теплоперенесення: Враховувався через явище термічного осмосу зі сталими коефіцієнтами $k_{11}^{(T)} = k_{22}^{(T)} = 2,8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{град} \cdot \text{доба}$,

$k_{12}^{(T)} = k_{21}^{(T)} = 0 \text{ м}^2 / \text{град} \cdot \text{доба}$, явище термодифузії зі сталими коефіцієнтами
 $D_{11}^{(T)} = D_{22}^{(T)} = 0.002 \text{ кг} / (\text{м} \cdot \text{доба} \cdot ^\circ \text{C})$, $D_{21}^{(T)} = D_{12}^{(T)} = 0 \text{ кг} / (\text{м} \cdot \text{доба} \cdot ^\circ \text{C})$. Параметри
 теплоперенесення: $\lambda_{11} = \lambda_{22} = 108 \text{ кДж} / \text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба}$, $\lambda_{12} = \lambda_{21} = 0 \text{ кДж} / \text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба}$,
 $c_p = 4,2 \text{ кДж} / \text{кг} \cdot \text{град}$, $c_T = 2137 \text{ кДж} / \text{м}^3 \cdot \text{град}$, $\rho = 1100 \text{ кг} / \text{м}^3$.

7. Вплив наявності солей в рідкій та твердій фазах на рівняння нерозривності: Не враховувався.

8. Вплив термічного розширення фаз ґрунту: Не враховувалося.

9. Наявність газу: Не враховувався.

10. Залежність коефіцієнта фільтрації від надлишкових напорів, температури та концентрації солей в рідкій фазі: Коефіцієнт фільтрації покладался незалежним від функції надлишкових напорів. Для випадку постійного коефіцієнта фільтрації

$$k_{11}^{(h)} = k_{22}^{(h)} = k_{20} = 10^{-3} \frac{\text{м}}{\text{доба}}, \quad k_{21}^{(h)} = k_{12}^{(h)} = k_{20} = 0 \frac{\text{м}}{\text{доба}}. \quad \text{Залежність } k_{11}^{(h)} = k_{22}^{(h)} = k(c, T)$$

визначалася шляхом апроксимації функції $k(c, T)$ радіальними базисними функціями [300, 340, 402] аналогічно прикладу 3.1.

11. Повзучість скелету ґрунту: Враховувалась при параметрах повзучості $a_0 = 0 \frac{\text{м}^2}{\text{кг}}$, $a_1 = 5,12 \cdot 10^{-7} \frac{\text{м}^2}{\text{кг}}$, $\beta_1 = 10^{-4} \text{ доба}^{-1}$.

12. Масообмінні процеси: Не враховувались і коефіцієнт швидкості масообміну $\gamma_1 = 0 \text{ доба}^{-1}$.

13. Граничні умови: Межі Γ_2 та Γ_5 непроникні, а межі Γ_1 , Γ_3 дренавані. Межі Γ_4 та Γ_6 є межами симетрії.

14. Початкові умови: Початковий розподіл концентрації солей брався у вигляді $c_0(x, y) = \begin{cases} C_m, & (x, y) \in \Gamma_1; \\ 8 \text{ г/л}, & (x, y) \notin \Gamma_1; \end{cases}$ а температури

$$T_0(x, y) = \begin{cases} 30^\circ \text{C}, (x, y) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_3; \\ 4^\circ \text{C}, (x, y) \notin \Gamma_1 \cup \Gamma_3. \end{cases} \text{ Початковий розподіл напорів } h_0(x, y) \text{ визначався,}$$

як в прикладі 3.7, де зовнішнє навантаження інтенсивністю $q = 10^5 \text{ Н/м}^2$ вважалось миттєво прикладеним та незмінним в часі.

15. Основні завдання чисельного експерименту: Згідно теореми про точність скінченноелементних розв'язків, яка доведена в роботі [65, глава 10] для одновимірної нелінійної задачі фільтраційної консолідації в умовах впливу теплосолеперенесення у фіксованій області при застосуванні схеми Кранка–Ніколсона, похибка є обмеженою величиною порядку $O(h_{\max}^p, \tau^2)$. Тут p – степінь поліноміальних базисних функцій МСЕ; $h_{\max}$ – максимальна із довжин всіх скінченних елементів, τ – крок по часу. Метою є перевірка методом чисельного експерименту, що у випадку застосування повністю неявної лінеаризованої різницевої схеми та лінійних базисних функцій ($p=1$) похибка скінченноелементних розв'язків для двовимірної задачі в області з рухомими межами буде величиною порядку $O(h_{\max}, \tau)$, де $h_{\max}$ – максимальна із довжин сторін всіх трикутних скінченних елементів.

В табл. 5.3 та 5.4 наведені величини просідань початкових точок $(-10;0)$ та $(10;0)$ в момент часу $t=360$ діб при різних значеннях $h_{\max}$ та τ . В дужках наведено збільшення (додатне значення) або зменшення (від'ємне значення) просідання відносно посідання при $h_{\max} = 0.7 \text{ м}$ та $\tau = 10$ діб.

Табл. 5.3. Просідання початкової точки $(-10;0)$

$h_{\max}, \text{м} / \tau, \text{доба}$	40	20	10
1.15	0.389 м(–12.78%)	0.401 м(–10.09%)	0.406 м(–8.97%)
1.0	0.422 м(–5.38%)	0.432 м(–3.14%)	0.437 м(–2.02%)
0.7	0.433 м(–2.92%)	0.442 м(–0.9%)	0.446 м

Табл. 5.4. Просідання початкової точки (10;0)

$h_{\max}$, м/τ, доба	40	20	10
1.15	0.201 м(−17.96%)	0.213 м(−13.06%)	0.219 м(−10.61%)
1.0	0.219 м(−10.61%)	0.231 м(−5.71%)	0.237 м(−3.27%)
0.7	0.227 м(−7.35%)	0.239 м(−2.45%)	0.245 м

Розглянемо значення з табл. 5.3. Використовуючи метод найменших квадратів, отримали наступну апроксимацію даних таблиці 5.3

$$E = -18.857h_{\max} - 0.113\tau + 15.409. \quad (5.78)$$

Похибки, обраховані згідно формули (5.78), наведені в табл. 5.5. Порівняння даних табл. 5.3 та табл. 5.5 показує, що дані добре узгоджуються і можна стверджувати про лінійну залежність похибки апроксимації від $h_{\max}$ та τ .

Табл. 5.5. Похибки згідно формули (5.78)

$h_{\max}$, м/τ, доба	40	20	10
1.15	−10.78%	−8.53%	−7.40%
1.0	−7.95%	−5.70%	−3.57%
0.7	−2.30%	−0.04%	1.08%

5.7. Висновки до Розділу 5

Отже, в розділі 5 дисертаційного дослідження

1. Наведено постановки задач фільтраційної консолідації гетерогенних пористих середовищ (на прикладі ґрунтів) в областях із рухомими межами з урахуванням впливу теплосолеперенесення. Розглянуто рухомі межі двох типів: межі, які змінюють своє положення в результаті ущільнення (або набухання) пористого середовища і рухомі депресійні криві при дослідженнях консолідаційних процесів в ґрунтових греблях. Сформовано нові математичні моделі.
2. Знайдено чисельні розв'язки відповідних нелінійних крайових задач методами скінченних елементів та радіальних базисних функцій. Запропоновано схему для визначення вертикальних зміщень вузлів

розрахункової сітки в задачах консолідації з урахуванням посідань. Також запропоновано подібну схему для апроксимації положення депресійної поверхні в задачі консолідації тіла ґрунтової греблі.

3. Проведено серію чисельних експериментів і зроблено ряд висновків.

Результати експериментів (на прикладі двовимірної задачі) показують, що у випадку нерівномірних одночасно діючих температурних полів та полів концентрації солей просідання (в околі прикладеного навантаження) не є симетричними. При нехтуванні явищами теплосолеперенесення просідання поверхні ґрунтового масиву є симетричними.

Урахування впливу теплосолеперенесення в області дії високих концентрацій солей та дренажних меж, пришвидшує просідання ґрунту. Так, наприклад, просідання кутової точки прикладеного навантаження при урахуванні обох факторів зростають на 150% (становить 43 см., а без урахування впливу техногенних факторів – 17 см.). При врахуванні лише впливу солеперенесення просідання зростають на 179%, а при врахуванні лише теплоперенесення – на 21%. Це означає, що комплексний вплив теплосолеперенесення не можна відобразити простим сумарним впливом (суперпозицією). Процеси та залежності є нелінійними, а тому сумарне просідання при окремому урахуванні факторів не дорівнює просіданню при урахуванні обох факторів одночасно.

4. Аналіз результатів проведених чисельних експериментів розрахунку полів напорів, концентрації солей та температури для задачі фільтраційної консолідації тіла ґрунтової греблі показав, що у випадку врахування термодифузії, термоосмосу та впливу переносу солей на процес фільтраційної консолідації в околах вільної поверхні та межі, що прилягає до лівого укосу греблі, відбуваються коливання надлишкових напорів та концентрації солей, які залежать від сезонних коливань температури. В області верхнього б'єфу коливання складають близько 4% (напір зростає від 20 м до 20.8 м). В той же час в області низового укосу напори зростають

приблизно на 30% (від 1 м до 1.3 м), що становить набагато більшу небезпеку для виникнення зсувонебезпечних процесів в цій області ґрунтової греблі.

5. Порівняно дані натурних спостережень з результатами чисельних експериментів щодо консолідації греблі хвостосховища Стебницького Державного гірничо-хімічного підприємства «Полімінерал». Розрахунки здійснювалися для умов консолідації ґрунту тіла греблі з урахуванням солеперенесення і без нього. Аналіз порівняння заміряних рівнів води в п'єзометрах встановлених на греблі хвостосховища за період часу 10 років з рівнями води розрахованими за математичною моделлю показує задовільне їх співпадання.
6. Урахування поступового зростання тіла ґрунтової греблі призводить до відмінностей в розподілі полів надлишкових напорів в порівнянні при його (тіла) миттєвому зведенні. У випадку миттєвого зведення тіла ґрунтової греблі надлишкові напори є більшими, аніж при поступовому зведенні гідротехнічної споруди. Урахування термічного впливу прискорює зменшення надлишкових напорів в тілі греблі. Це пояснюється збільшенням коефіцієнта фільтрації при зростанні температури та наявністю термічного осмосу. Причому, коливання температури на межі ґрунтової греблі спричиняє і коливання надлишкових напорів в її тілі.
7. Методом чисельного експерименту показано, що у випадку застосування повністю неявної лінеаризованої різницевої схеми та лінійних базисних функцій похибка скінченноелементних розв'язків для двовимірної задачі в області з рухомими межами є величиною порядку $O(h_{\max}, \tau)$, де $h_{\max}$ – максимальна із довжин сторін всіх трикутних скінченних елементів, τ – крок по часу. Цим самим підтверджено гіпотезу, що похибка скінченноелементних розв'язків є обмеженою величиною порядку $O(h_{\max}^p, \tau)$, де p – степінь поліноміальних базисних функцій МСЕ.

Результати розділу 5 опубліковані в роботах [49, 56, 58, 65, 69, 81, 83–85, 92, 123, 187].

РОЗДІЛ 6

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВЗАЄМОЗВ'ЯЗАНИХ ПРОЦЕСІВ
ФІЛЬТРАЦІЙНОЇ КОНСОЛІДАЦІЇ ТА КОНТАКТНОГО РОЗМИВУ
ГРУНТІВ З УРАХУВАННЯМ НАЯВНОСТІ ЗОСЕРЕДЖЕНИХ ШЛЯХІВ
ФІЛЬТРАЦІЇ ТА ВПЛИВУ ТЕХНОГЕННИХ ФАКТОРІВ**

6.1. Математичні моделі фільтраційної консолідації та контактного розмиву гетерогенних пористих середовищ

Нехай в області Ω_1 міститься ґрунт, який під впливом прикладеного зовнішнього навантаження у вигляді плоского флютбету знаходиться в процесі фільтраційної консолідації (рис.6.1). Область Ω_2 , яку займає суспензія, утворюється в результаті контактної розмиву ґрунту вздовж бетонної основи E_1E_2 флютбету в області Ω_1 .

Згідно результатів розділу 2, математичну модель взаємозв'язаних процесів фільтраційної консолідації ґрунту з урахуванням перенесення солей в неізотермічному режимі та контактної розмиву в R – вимірному випадку можна описати наступною крайовою задачею [70, 74, 80]:

$$\begin{aligned}
 & \frac{(1+e)(1+(R-1)\xi)}{\gamma} \beta_1 [\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c, T, h) \nabla h) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_c(c) \nabla c) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla T)] + \\
 & + \frac{(\alpha_p + (2q-1)\alpha_s)(1+(R-1)\xi)e}{\gamma} \beta_1 \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\varepsilon(1+e)(1+(R-1)\xi)}{\rho_c \gamma} \beta_1 \left[n \frac{\partial c}{\partial t} - e \frac{\partial N}{\partial t} \right] + \\
 & + \frac{(1+e)(1+(R-1)\xi)}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c, T, h) \nabla h) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_c(c) \nabla c) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla T)] + \\
 & + \frac{(\alpha_p + (2q-1)\alpha_s)(1+(R-1)\xi)e}{\gamma} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\varepsilon(1+e)(1+(R-1)\xi)}{\rho_c \gamma} \left[n \frac{\partial^2 c}{\partial t^2} - e \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} \right] + \\
 & + \frac{a_0}{\gamma} \frac{\partial^2 (\Theta^* + R\gamma h^*)}{\partial t^2} + \frac{\beta_1}{\gamma} (a_0 + a_1) \frac{\partial (\Theta^* + R\gamma h^*)}{\partial t} = [Ra_0 + \beta(1+e)(1+(R-1)\xi)] \times \\
 & \times \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + [\beta_1 R(a_0 + a_1) + \beta\beta_1(1+e)(1+(R-1)\xi)] \frac{\partial h}{\partial t}, \mathbf{X} \in \Omega_g, t > 0,
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla u_1 = \nu \Delta u_1 - g \frac{\partial h}{\partial x}, \mathbf{X} \in \Omega_r, t > 0, \tag{6.2}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla u_2 = \nu \Delta u_2 - g \frac{\partial h}{\partial y}, \quad \mathbf{X} \in \Omega_r, \quad t > 0, \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla u_3 = \nu \Delta u_3 - g \frac{\partial h}{\partial z}, \quad \mathbf{X} \in \Omega_r, \quad t > 0, \quad (6.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = 0, \quad \mathbf{X} \in \Omega_r, \quad t > 0, \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot (\mathbf{D}(c, T, h) \nabla c) + \nabla \cdot (\mathbf{D}_T \nabla T) - \mathbf{u} \nabla c = \\ & = n \frac{\partial c}{\partial t} + (\alpha_p + q \alpha_s) n c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad t > 0, \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$\nabla \cdot (\lambda(c) \nabla T) - \rho c_p \mathbf{u} \nabla T = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\gamma_1 (C_m - c) N^\gamma, \quad \mathbf{X} \in \bar{\Omega}_g, \quad t > 0, \quad (6.8)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{D}_s \nabla s) - (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \nabla s, \quad \mathbf{X} \in \Omega_r, \quad t > 0, \quad (6.9)$$

$$\mathbf{u} = e\mathbf{v} - \mathbf{K}_h(c, T, h) \nabla h + \mathbf{K}_c(c) \nabla c + \mathbf{K}_T \nabla T, \quad \mathbf{X} \in \Omega_g, \quad (6.10)$$

$$\mathbf{q}_c = \mathbf{u} \cdot c - \mathbf{D}(c, T, h) \nabla c - \mathbf{D}_T \nabla T, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad (6.11)$$

$$\mathbf{q}_T = \rho c_p \mathbf{u} \cdot T - \lambda(c) \nabla T, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad (6.12)$$

$$\mathbf{q}_s = (\mathbf{u} - \mathbf{w}) s - \mathbf{D}_s \nabla s, \quad \mathbf{X} \in \Omega_r, \quad (6.13)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t, \mathbf{u}), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_{12}, \quad (6.14)$$

$$h|_{\Gamma_1^{(h)}} = H_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_1^{(h)}, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{\Gamma_2^{(h)}} = 0, \quad h|_{\Gamma_1^{(u)}} = H_2(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_1^{(u)}, \quad (\nabla h, \mathbf{n})|_{\Gamma_2^{(u)}} = 0, \quad (6.15)$$

$$c|_{\Gamma_1^{(c)}} = C_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_1^{(c)}, \quad (\mathbf{q}_c, \mathbf{n})|_{\Gamma_2^{(c)}} = 0, \quad (6.16)$$

$$T|_{\Gamma_1^{(T)}} = T_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_1^{(T)}, \quad (\mathbf{q}_T, \mathbf{n})|_{\Gamma_2^{(T)}} = 0, \quad (6.17)$$

$$\begin{aligned} u_1|_{\Gamma_1^{(u_1)}} &= U_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_1^{(u_1)}, \quad u_2|_{\Gamma_1^{(u_2)}} = U_2(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_1^{(u_2)}, \quad u_3|_{\Gamma_1^{(u_3)}} = U_3(\mathbf{X}, t), \\ &\mathbf{X} \in \Gamma_1^{(u_3)}, \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$s|_{\Gamma_1^{(s)}} = S(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_1^{(s)}, \quad (\mathbf{q}_s, \mathbf{n})|_{\Gamma_2^{(s)}} = 0, \quad (\mathbf{q}_s, \mathbf{n})|_{\Gamma} = -(1-n) \frac{d\Gamma_{12}}{dt}, \quad (6.19)$$

$$[h]_{\Gamma_{12}} = 0, \left[\frac{\partial h}{\partial n} \right]_{\Gamma_{12}} = 0, [\mathbf{u}]_{\Gamma_{12}} = 0, \mathbf{X} \in \Gamma_{12}, \quad (6.20)$$

$$[c]_{\Gamma_{12}} = 0, [\mathbf{q}_c]_{\Gamma_{12}} = 0, [T]_{\Gamma_{12}} = 0, [\mathbf{q}_T]_{\Gamma_{12}} = 0, \mathbf{X} \in \Gamma_{12}, \quad (6.21)$$

$$k_{er}^{(12)} s(\mathbf{X}, t) ((\mathbf{v}, \mathbf{n}) + |(\mathbf{v}, \mathbf{d})|) = -(1-n) \rho_T \frac{d\Gamma_{12}}{dt}, \mathbf{X} \in \Gamma_{12}, \quad (6.22)$$

$$h(\mathbf{X}, 0) = h_0(\mathbf{X}), N(\mathbf{X}, 0) = N_0(\mathbf{X}), \mathbf{X} \in \Omega_g, \quad (6.23)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{X}), s(\mathbf{X}, 0) = s_0(\mathbf{X}), \mathbf{X} \in \Omega_r, \quad (6.24)$$

$$c(\mathbf{X}, 0) = c_0(\mathbf{X}), T(\mathbf{X}, 0) = T_0(\mathbf{X}), \mathbf{X} \in \Omega, \quad (6.25)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{R\gamma a_0}{1+(R-1)\xi} + \beta(1+e)\gamma \right) \frac{\partial h_0}{\partial t} = (1+e) \nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c_0, T_0, h_0) \nabla h_0 - \mathbf{K}_c(c_0) \nabla c_0 - \mathbf{K}_T \nabla T_0) - \\ & - \frac{R\gamma a_1 \beta_1}{1+(R-1)\xi} h_0 + \frac{a_0}{1+(R-1)\xi} \left(\frac{\partial \Theta_0^*}{\partial t} + R \frac{\partial p_0^*}{\partial t} \right) + \frac{a_1 \beta_1}{1+(R-1)\xi} (\Theta_0^* + R p_0^*), \mathbf{X} \in \bar{\Omega}_g, t = 0. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Тут $\Omega = \bigcup_{i=1}^2 \Omega_i$; $\Omega_g = \Omega_1$; $\Omega_r = \Omega_2$; $k_{er}^{(12)}$ – коефіцієнт розмиву ґрунту на межі Γ_{12}

[297, 339, 355]. В граничних умовах (6.15), наприклад, для функції надлишкових напорів $h(\mathbf{X}, t)$: $\Gamma_1^{(h)} \cup \Gamma_2^{(h)}$ – зовнішня межа області Ω_g ; $\Gamma_1^{(u)} \cup \Gamma_2^{(u)}$ – зовнішня межа області Ω_r . Це ж саме стосується граничних умов для інших функцій.

Продиференціюємо рівняння (6.2) по x і додамо його до рівнянь (6.3), (6.4), попередньо продиференціювавши їх по y та z відповідно. Враховуючи рівняння нерозривності (6.5), отримуємо [238]

$$\Delta h(\mathbf{X}, t) = -\frac{2}{g} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial z} \frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_3}{\partial z} - \frac{\partial u_2}{\partial y} \frac{\partial u_3}{\partial z} \right),$$

$$\mathbf{X} \in \Omega_r, t > 0. \quad (6.5')$$

Розглянемо тепер задачу про консолідацію тіла ґрунтової греблі та ґрунту в її основі. Нехай тіло ґрунтової греблі (область Ω_3 на рис. 6.2) та її основа (область Ω_1) під впливом власної ваги ґрунту знаходяться в стані фільтраційної

консолідації. Область Ω_2 , яку займає суспензія, утворюється в результаті контактної розмиву ґрунту основи греблі вздовж межі E_1E_2 .

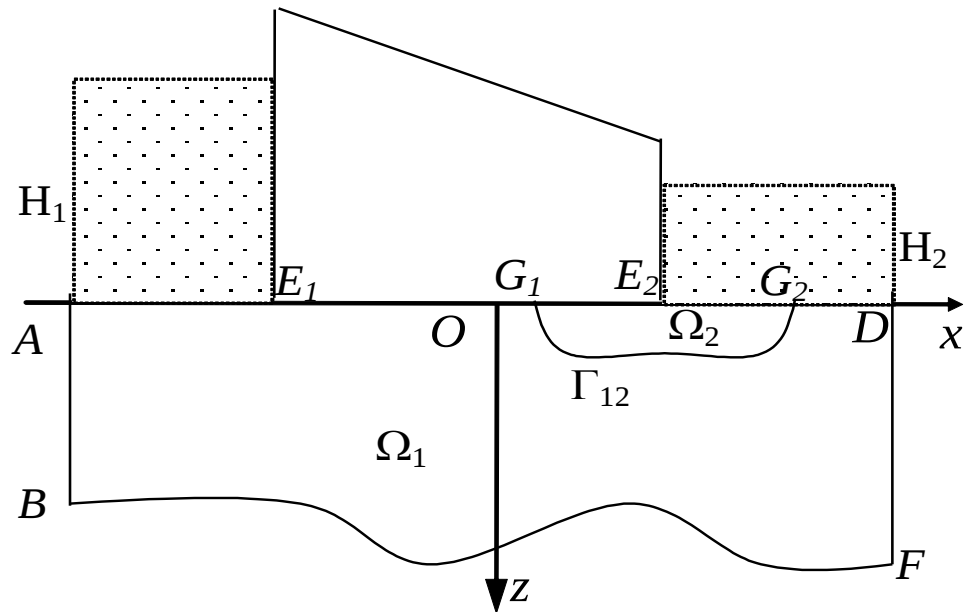


Рис. 6.1. Схема областей фільтраційної консолідації та контактної розмиву ґрунту під плоским бетонним флютбетом

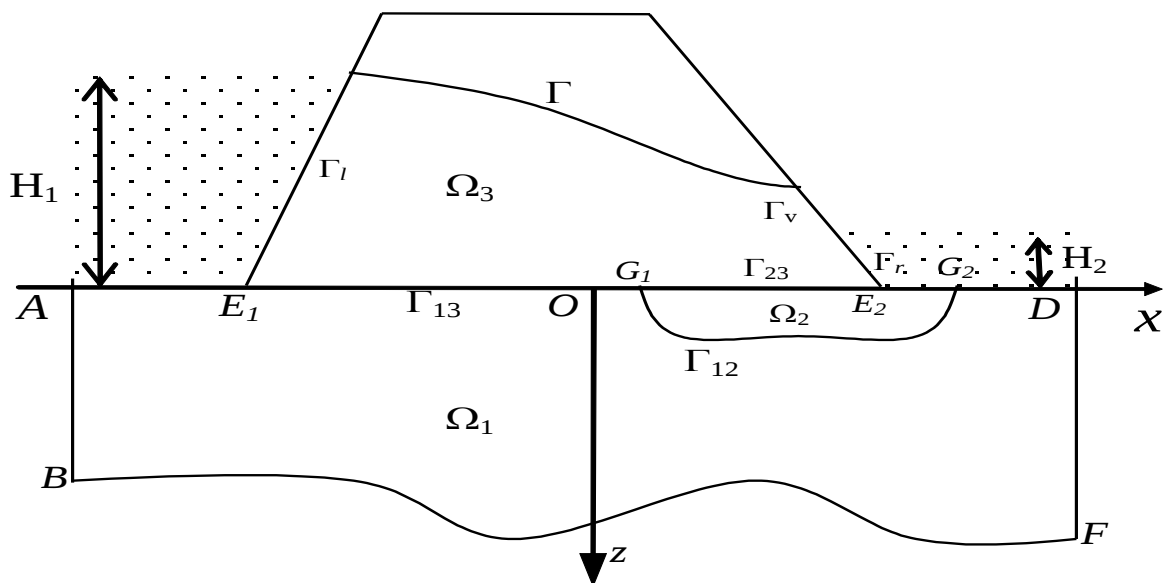


Рис. 6.2. Схема областей фільтраційної консолідації та контактної розмиву тіла та основи ґрунтової греблі

Згідно результатів розділу 2, математичну модель задачі нелінійної фільтраційної консолідації тіла греблі та її основи з урахуванням перенесення солей в неізотермічному режимі при утворенні області контактної розмиву можна описати наступною крайовою задачею [70, 74, 80]:

$$\begin{aligned}
& \frac{(1+e)(1+(R-1)\xi)}{\gamma} \beta_1 [\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c, T, h) \nabla h) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_c(c) \nabla c) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla T)] + \\
& + \frac{(\alpha_p + (2q-1)\alpha_s)(1+(R-1)\xi)e}{\gamma} \beta_1 \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\varepsilon(1+e)(1+(R-1)\xi)}{\rho_c \gamma} \beta_1 \left[n \frac{\partial c}{\partial t} - e \frac{\partial N}{\partial t} \right] + \\
& + \frac{(1+e)(1+(R-1)\xi)}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c, T, h) \nabla h) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_c(c) \nabla c) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla T)] + \\
& + \frac{(\alpha_p + (2q-1)\alpha_s)(1+(R-1)\xi)e}{\gamma} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\varepsilon(1+e)(1+(R-1)\xi)}{\rho_c \gamma} \left[n \frac{\partial^2 c}{\partial t^2} - e \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} \right] + \\
& + \frac{a_0}{\gamma} \frac{\partial^2 (\Theta^* + R\gamma h^*)}{\partial t^2} + \frac{\beta_1}{\gamma} (a_0 + a_1) \frac{\partial (\Theta^* + R\gamma h^*)}{\partial t} = [Ra_0 + \beta(1+e)(1+(R-1)\xi)] \times \\
& \times \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + [\beta_1 R(a_0 + a_1) + \beta \beta_1 (1+e)(1+(R-1)\xi)] \frac{\partial h}{\partial t}, \mathbf{X} \in \Omega_g, t > 0,
\end{aligned} \tag{6.27}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla u_1 = \nu \Delta u_1 - g \frac{\partial h}{\partial x}, \mathbf{X} \in \Omega_r, t > 0, \tag{6.28}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla u_2 = \nu \Delta u_2 - g \frac{\partial h}{\partial y}, \mathbf{X} \in \Omega_r, t > 0, \tag{6.29}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla u_3 = \nu \Delta u_3 - g \frac{\partial h}{\partial z}, \mathbf{X} \in \Omega_r, t > 0, \tag{6.30}$$

$$\begin{aligned}
\Delta h(\mathbf{X}, t) = & -\frac{2}{g} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial z} \frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_3}{\partial z} - \frac{\partial u_2}{\partial y} \frac{\partial u_3}{\partial z} \right), \\
& \mathbf{X} \in \Omega_r, t > 0, \tag{6.31}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \nabla \cdot (\mathbf{D}(c, T, h) \nabla c) + \nabla \cdot (\mathbf{D}_T \nabla T) - \mathbf{u} \nabla c = \\
& = n \frac{\partial c}{\partial t} + (\alpha_p + q\alpha_s) n c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t}, \mathbf{X} \in \Omega, t > 0,
\end{aligned} \tag{6.32}$$

$$\nabla \cdot (\lambda(c) \nabla T) - \rho_c \mathbf{u} \nabla T = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, \mathbf{X} \in \Omega, t > 0, \tag{6.33}$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\gamma_1 (C_m - c) N^\chi, \mathbf{X} \in \bar{\Omega}_g, t > 0, \tag{6.34}$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{D}_s \nabla s) - (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \nabla s, \mathbf{X} \in \Omega_r, t > 0, \tag{6.35}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{e}v - \mathbf{K}_h(c, T, h) \nabla h + \mathbf{K}_c(c) \nabla c + \mathbf{K}_T \nabla T, \mathbf{X} \in \Omega_g, \tag{6.36}$$

$$\mathbf{q}_c = \mathbf{u} \cdot c - \mathbf{D}(c, T, h) \nabla c - \mathbf{D}_T \nabla T, \mathbf{X} \in \Omega, \tag{6.37}$$

$$\mathbf{q}_T = \rho c_\rho \mathbf{u} \cdot T - \lambda(c) \nabla T, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad (6.38)$$

$$\mathbf{q}_s = (\mathbf{u} - \mathbf{w})s - \mathbf{D}_s \nabla s, \quad \mathbf{X} \in \Omega_r, \quad (6.39)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t, \mathbf{u}), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_{12}, \quad (6.40)$$

$$h|_{\Gamma_1^{(h)}} = H_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_1^{(h)}, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{\Gamma_2^{(h)}} = 0, \quad h|_{\Gamma_1^{(u)}} = H_2(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_1^{(u)}, \quad (\nabla h, \mathbf{n})|_{\Gamma_2^{(u)}} = 0, \quad (6.41)$$

$$c|_{\Gamma_1^{(c)}} = C_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_1^{(c)}, \quad (\mathbf{q}_c, \mathbf{n})|_{\Gamma_2^{(c)}} = 0, \quad (6.42)$$

$$T|_{\Gamma_1^{(T)}} = T_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_1^{(T)}, \quad (\mathbf{q}_T, \mathbf{n})|_{\Gamma_2^{(T)}} = 0, \quad (6.43)$$

$$u_1|_{\Gamma_1^{(u_1)}} = U_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_1^{(u_1)}, \quad u_2|_{\Gamma_1^{(u_2)}} = U_2(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_1^{(u_2)}, \quad u_3|_{\Gamma_1^{(u_3)}} = U_3(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_1^{(u_3)}, \quad (6.44)$$

$$s|_{\Gamma_1^{(s)}} = S(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_1^{(s)}, \quad (\mathbf{q}_s, \mathbf{n})|_{\Gamma_2^{(s)}} = 0, \quad (\mathbf{q}_s, \mathbf{n})|_\Gamma = -(1-n) \frac{d\Gamma_{12}}{dt}, \quad (6.45)$$

$$[h]|_{\Gamma_z} = 0, \quad \left[\frac{\partial h}{\partial n} \right]_{\Gamma_{12} \cup \Gamma_{23}} = 0, \quad [\mathbf{u}]|_{\Gamma_z} = 0, \quad (6.46)$$

$$[c]|_{\Gamma_z} = 0, \quad [T]|_{\Gamma_z} = 0, \quad [\mathbf{q}_c]|_{\Gamma_z} = 0, \quad [\mathbf{q}_T]|_{\Gamma_z} = 0, \quad (6.47)$$

$$h|_{\Gamma \cup \Gamma_v} = -z, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{n})|_\Gamma = -n \frac{d\varphi(\mathbf{X}, t)}{dt}, \quad \mathbf{X} \in \Gamma, \quad (6.48)$$

$$k_{er}^{(12)} s(\mathbf{X}, t) ((\mathbf{v}, \mathbf{n}) + |(\mathbf{v}, \mathbf{d})|) = -(1-n) \rho_T \frac{d\Gamma_{12}(\mathbf{X}, t)}{dt}, \quad \mathbf{X} \in \Gamma_{12}, \quad (6.49)$$

$$h(\mathbf{X}, 0) = h_0(\mathbf{X}), \quad N(\mathbf{X}, 0) = N_0(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \overline{\Omega}_g, \quad (6.50)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{X}), \quad s(\mathbf{X}, 0) = s_0(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \overline{\Omega}_r, \quad (6.51)$$

$$c(\mathbf{X}, 0) = c_0(\mathbf{X}), \quad T(\mathbf{X}, 0) = T_0(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \overline{\Omega}, \quad (6.52)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{R\gamma a_0}{1 + (R-1)\xi} + \beta(1+e)\gamma \right) \frac{\partial h_0}{\partial t} = (1+e) \nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c_0, T_0, h_0) \nabla h_0 - \mathbf{K}_c(c_0) \nabla c_0 - \mathbf{K}_T \nabla T_0) - \\ & - \frac{R\gamma a_1 \beta_1}{1 + (R-1)\xi} h_0 + \frac{a_0}{1 + (R-1)\xi} \left(\frac{\partial \Theta_0^*}{\partial t} + R \frac{\partial p_0^*}{\partial t} \right) + \frac{a_1 \beta_1}{1 + (R-1)\xi} (\Theta_0^* + R p_0^*), \quad \mathbf{X} \in \overline{\Omega}_g, \quad t = 0. \end{aligned} \quad (6.53)$$

$$\text{Тут } \Omega = \bigcup_{i=1}^3 \Omega_i; \quad \Omega_g = \Omega_1 \cup \Omega_3; \quad \Omega_r = \Omega_2; \quad \mathbf{X} = (x, y, z); \quad \Gamma_z = \Gamma_{12} \cup \Gamma_{13} \cup \Gamma_{23};$$

$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$; $k_{er}^{(12)}$ – коефіцієнт розмиву ґрунту на межі Γ_{12} [297, 339, 355].

В граничних умовах (6.41), наприклад, для функції надлишкових напорів $h(\mathbf{X}, t)$: $\Gamma_1^{(h)} \cup \Gamma_2^{(h)}$ – зовнішня межа області Ω_g ; $\Gamma_1^{(u)} \cup \Gamma_2^{(u)}$ – зовнішня межа області Ω_r . Це ж саме стосується граничних умов для інших функцій.

Припускається, що на межах контакту Γ_{12} , Γ_{13} , Γ_{23} областей Ω_1 , Ω_2 та Ω_3 виконуються умови спряження ідеального контакту (6.46), (6.47) [247]. Функція $\mathbf{v} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t, \mathbf{u})$ пов'язує вектор швидкості фільтрації $\mathbf{u} = (u_1; u_2; u_3)$ та вектор швидкості руху твердих частинок ґрунту $\mathbf{v} = (v_1; v_2; v_3)$ на рухомій межі Γ_{12} . Залежність $\varphi(\mathbf{X}, t) = h(\mathbf{X}, t) + z$ задає рівняння депресійної поверхні Γ [247].

Значення всіх коефіцієнтів в рівняннях математичної моделі (6.27)–(6.53) залежать від області, в якій досліджується процес. Для уникнення зайвої індексації та громіздкості, даний аспект у формулах не відображено.

Згідно розділу 2, (6.49) являє собою кінематичну граничну умову на межі Γ_{12} можливого контактного розмиву. Третя з умов спряження (6.46) пов'язує між собою швидкості руху рідини на межі Γ_z . Тому замість вектора $\mathbf{u}$ з боку областей Ω_1 та Ω_3 потрібно брати вектор $\mathbf{u}/n$.

Також розглянемо наступну задачу. Нехай тіло ґрунтової греблі та її основа під впливом власної ваги ґрунту знаходяться в стані фільтраційної консолідації (рис. 6.3). Тіло греблі містить глинисте ядро (області Ω_2 та Ω_4) в якому утворилась тріщина і сформувався зосереджений шлях фільтрації. В результаті фільтрації суспензії через зосереджений шлях фільтрації в області Ω_1 утворилась зона розмиву Ω_3 . Область Ω_7 , яку займає суспензія, утворюється в результаті контактного розмиву ґрунту основи греблі вздовж межі контакту AD [70, 75]. Між кожними областями є межі спряження, які, для уникнення зайвої громіздкості, на рис. 6.3 не позначені. Надалі вважаємо, що межа спряження Γ_{ij} знаходиться на контакті областей Ω_i та Ω_j , $i < j$.

Як показано в розділі 2, математичну модель задачі фільтраційної консолідації тіла та основи ґрунтової греблі та її основи з урахуванням перенесення солей в неізотермічному режимі, наявності областей контактної розмиву та зосередженого шляху фільтрації можна описати наступною крайовою задачею [65, 70]:

$$\begin{aligned}
& \frac{(1+e)(1+(R-1)\xi)}{\gamma} \beta_1 [\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c, T, h) \nabla h) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_c(c) \nabla c) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla T)] + \\
& + \frac{(\alpha_p + (2q-1)\alpha_s)(1+(R-1)\xi)e}{\gamma} \beta_1 \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\varepsilon(1+e)(1+(R-1)\xi)}{\rho_c \gamma} \beta_1 \left[n \frac{\partial c}{\partial t} - e \frac{\partial N}{\partial t} \right] + \\
& + \frac{(1+e)(1+(R-1)\xi)}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c, T, h) \nabla h) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_c(c) \nabla c) - \nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla T)] + \\
& + \frac{(\alpha_p + (2q-1)\alpha_s)(1+(R-1)\xi)e}{\gamma} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\varepsilon(1+e)(1+(R-1)\xi)}{\rho_c \gamma} \left[n \frac{\partial^2 c}{\partial t^2} - e \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} \right] + \\
& + \frac{a_0}{\gamma} \frac{\partial^2 (\Theta^* + R\gamma h^*)}{\partial t^2} + \frac{\beta_1}{\gamma} (a_0 + a_1) \frac{\partial (\Theta^* + R\gamma h^*)}{\partial t} = [Ra_0 + \beta(1+e)(1+(R-1)\xi)] \times \\
& \times \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + [\beta_1 R(a_0 + a_1) + \beta \beta_1 (1+e)(1+(R-1)\xi)] \frac{\partial h}{\partial t}, \mathbf{X} \in \Omega_g, t > 0,
\end{aligned} \tag{6.54}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla u_1 = \nu \Delta u_1 - g \frac{\partial h}{\partial x}, \mathbf{X} \in \Omega_r, t > 0, \tag{6.55}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla u_2 = \nu \Delta u_2 - g \frac{\partial h}{\partial y}, \mathbf{X} \in \Omega_r, t > 0, \tag{6.56}$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla u_3 = \nu \Delta u_3 - g \frac{\partial h}{\partial z}, \mathbf{X} \in \Omega_r, t > 0, \tag{6.57}$$

$$\begin{aligned}
\Delta h(\mathbf{X}, t) = & -\frac{2}{g} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial z} \frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_3}{\partial z} - \frac{\partial u_2}{\partial y} \frac{\partial u_3}{\partial z} \right), \\
& \mathbf{X} \in \Omega_r, t > 0,
\end{aligned} \tag{6.58}$$

$$\begin{aligned}
& \nabla \cdot (\mathbf{D}(c, T, h) \nabla c) + \nabla \cdot (\mathbf{D}_T \nabla T) - \mathbf{u} \nabla c = \\
& = n \frac{\partial c}{\partial t} + (\alpha_p + q\alpha_s) n c \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t}, \mathbf{X} \in \Omega, t > 0,
\end{aligned} \tag{6.59}$$

$$\nabla \cdot (\lambda(c) \nabla T) - \rho_c \mathbf{u} \nabla T = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, \mathbf{X} \in \Omega, t > 0, \tag{6.60}$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\gamma_1 (C_m - c) N^\chi, \mathbf{X} \in \bar{\Omega}_g, t > 0, \tag{6.61}$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \nabla \cdot (\mathbf{D}_s \nabla s) - (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \nabla s, \quad \mathbf{X} \in \Omega_r, \quad t > 0, \quad (6.62)$$

$$h|_{\Gamma_1^{(h)}} = H_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_1^{(h)}, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{\Gamma_2^{(h)}} = 0, \quad h|_{\Gamma_1^{(u)}} = H_2(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_1^{(u)}, \quad (\nabla h, \mathbf{n})|_{\Gamma_2^{(u)}} = 0, \quad (6.63)$$

$$c|_{\Gamma_1^{(c)}} = C_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_1^{(c)}, \quad (\mathbf{q}_c, \mathbf{n})|_{\Gamma_2^{(c)}} = 0, \quad (6.64)$$

$$T|_{\Gamma_1^{(T)}} = T_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_1^{(T)}, \quad (\mathbf{q}_T, \mathbf{n})|_{\Gamma_2^{(T)}} = 0, \quad (6.65)$$

$$u_1|_{\Gamma_1^{(u_1)}} = U_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_1^{(u_1)}, \quad u_2|_{\Gamma_1^{(u_2)}} = U_2(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_1^{(u_2)}, \quad u_3|_{\Gamma_1^{(u_3)}} = U_3(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_1^{(u_3)}, \quad (6.66)$$

$$s|_{\Gamma_1^{(s)}} = S(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_1^{(s)}, \quad (\mathbf{q}_s, \mathbf{n})|_{\Gamma_2^{(s)}} = 0, \quad (6.67)$$

$$(\mathbf{q}_s, \mathbf{n})|_{\Gamma_{ij}} = -(1-n) \frac{d\Gamma_{ij}}{dt}, \quad \Gamma_{ij} \in \{\Gamma_{13}; \Gamma_{23}; \Gamma_{34}; \Gamma_{57}\}, \quad (6.68)$$

$$[h]|_{\Gamma_z} = 0, \quad \left[\frac{\partial h}{\partial n} \right]_{\Gamma_{ij}} = 0, \quad \Gamma_{ij} \in \{\Gamma_{13}; \Gamma_{23}; \Gamma_{34}; \Gamma_{57}\}, \quad [\mathbf{u}]|_{\Gamma_z} = 0, \quad (6.69)$$

$$[c]|_{\Gamma_z} = 0, \quad [\mathbf{q}_c]|_{\Gamma_z} = 0, \quad [T]|_{\Gamma_z} = 0, \quad [\mathbf{q}_T]|_{\Gamma_z} = 0, \quad (6.70)$$

$$h|_{\Gamma \cup \Gamma_v} = z, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{\Gamma} = n \frac{d\varphi(\mathbf{X}, t)}{dt}, \quad \mathbf{X} \in \Gamma, \quad (6.71)$$

$$k_{er}^{(ij)} s(\mathbf{X}, t) ((\mathbf{v}, \mathbf{n}) + |(\mathbf{v}, \mathbf{d})|) = -(1-n) \rho_T \frac{d\Gamma_{ij}}{dt}, \quad \mathbf{X} \in \Gamma_{ij}, \quad \Gamma_{ij} \in \{\Gamma_{13}; \Gamma_{23}; \Gamma_{34}; \Gamma_{57}\}, \quad (6.72)$$

$$\mathbf{u} = e\mathbf{v} - \mathbf{K}_h(c, T, h) \nabla h + \mathbf{K}_c(c) \nabla c + \mathbf{K}_T \nabla T, \quad \mathbf{X} \in \Omega_g, \quad (6.73)$$

$$\mathbf{q}_c = \mathbf{u}c - \mathbf{D}_c(c, T, h) \nabla c - \mathbf{D}_T \nabla T, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad (6.74)$$

$$\mathbf{q}_T = \rho c_p \mathbf{u}T - \lambda(c) \nabla T, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad (6.75)$$

$$\mathbf{q}_s = (\mathbf{u} - \mathbf{w})s - \mathbf{D}_s \nabla s, \quad \mathbf{X} \in \Omega_r, \quad (6.76)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t, \mathbf{u}), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_{13} \cup \Gamma_{23} \cup \Gamma_{34} \cup \Gamma_{57}, \quad (6.77)$$

$$h(\mathbf{X}, 0) = h_0(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \overline{\Omega}_g, \quad (6.78)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{X}), \quad s(\mathbf{X}, 0) = s_0(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \overline{\Omega}_r, \quad (6.79)$$

$$c(\mathbf{X}, 0) = c_0(\mathbf{X}), \quad T(\mathbf{X}, 0) = T_0(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \overline{\Omega}, \quad (6.80)$$

$$\left(\frac{R\gamma a_0}{1+(R-1)\xi} + \beta(1+e)\gamma \right) \frac{\partial h_0}{\partial t} = (1+e) \nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c_0, T_0, h_0) \nabla h_0 - \mathbf{K}_c(c_0) \nabla c_0 - \mathbf{K}_T \nabla T_0) -$$

$$- \frac{R\gamma a_1 \beta_1}{1+(R-1)\xi} h_0 + \frac{a_0}{1+(R-1)\xi} \left(\frac{\partial \Theta_0^*}{\partial t} + R \frac{\partial p_0^*}{\partial t} \right) + \frac{a_1 \beta_1}{1+(R-1)\xi} (\Theta_0^* + R p_0^*), \mathbf{X} \in \bar{\Omega}_g, t = 0.$$

(6.81)

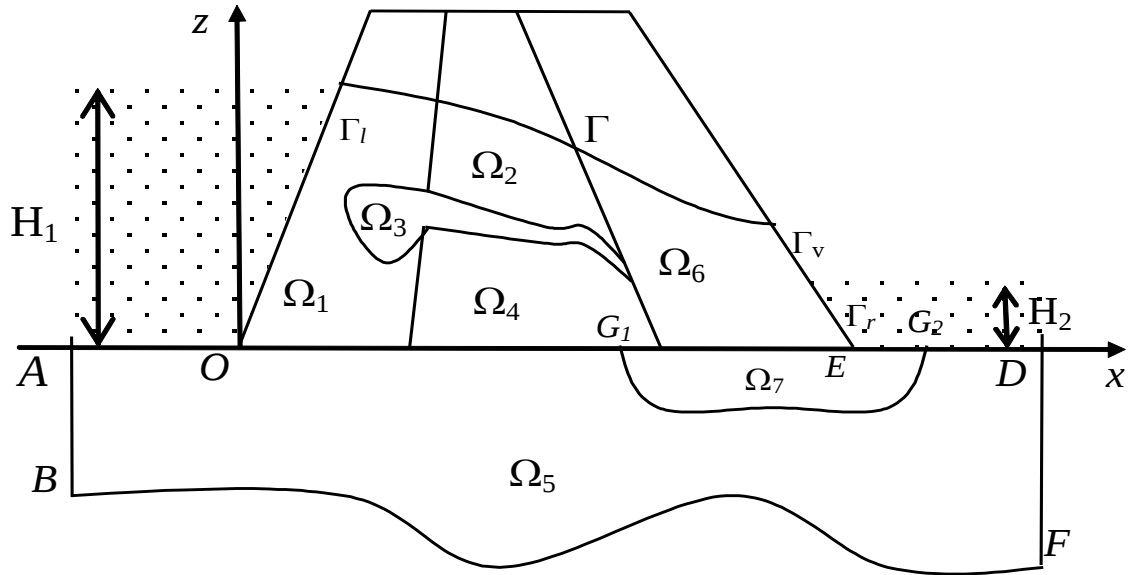


Рис. 6.3. Схема областей фільтраційної консолідації та контактного розмиву ґрунту в основі греблі за наявності зосередженого шляху фільтрації

Припускається, що на межах контакту Γ_{ij} областей Ω_i та Ω_j , $i = \overline{1,7}$, $j = \overline{1,7}$, $i < j$, виконуються умови спряження ідеального контакту (6.69), (6.70) [247]. Функція $\mathbf{v} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t, \mathbf{u})$ в (6.77) пов'язує вектор швидкості фільтрації $\mathbf{u} = (u_1; u_2; u_3)$ та вектор швидкості руху твердих частинок ґрунту $\mathbf{v} = (v_1; v_2; v_3)$ на рухомих межах областей розмиву. Залежність $\varphi(\mathbf{X}, t) = h(\mathbf{X}, t) - z$ задає рівняння депресійної поверхні Γ [247]. Умова (6.72) задає кінематичну граничну умову на межах можливого контактного розмиву [70]. Тут: $k_{er}^{(ij)}$ – коефіцієнт розмиву ґрунту на межі Γ_{ij} [297, 339, 355]; $\mathbf{X} = (x, y, z)$; $\Gamma_z = \bigcup_{i=1, j=1}^7 \Gamma_{ij}$, $i < j$; $\Omega = \bigcup_{i=1}^7 \Omega_i$; $\Omega_g = \bigcup_{i=1}^2 \Omega_i \bigcup_{i=4}^6 \Omega_i$; $\Omega_r = \Omega_3 \cup \Omega_7$. В граничних умовах (6.63), наприклад, для функції надлишкових напорів $h(\mathbf{X}, t)$: $\Gamma_1^{(h)} \cup \Gamma_2^{(h)}$ – зовнішня

межа області Ω_g ; $\Gamma_1^{(u)} \cup \Gamma_2^{(u)}$ – зовнішня межа області Ω_r . Це ж саме стосується граничних умов для інших функцій.

Значення всіх коефіцієнтів в математичній моделі (6.54)–(6.81) залежать від того, в якій області досліджується процес. Для уникнення зайвої індексації та громіздкості, даний аспект у формулах не відображено.

6.2. Схеми застосування методу радіальних базисних функцій в математичних моделях взаємозв'язаних процесів фільтраційної консолидації та контактного розмиву гетерогенних пористих середовищ

Для чисельного розв'язання задачі (6.1)–(6.26) безсітковим методом РБФ [70, 359] дискретизуємо замикання області $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$ вузловими $\mathbf{X}_i = (x_i^X; y_i^X; z_i^X)$, $i = \overline{1, \omega}$ та колокаційними точками $\mathbf{Y}_i = (x_i^Y; y_i^Y; z_i^Y)$, $i = \overline{1, k}$. Введемо наступні позначення: 1) k^{Ω_1} , k^{Ω_2} – множини номерів колокаційних точок, які лежать в областях Ω_1 та Ω_2 відповідно; 2) $k^{\Omega_g} = k^{\Omega_1}$, $k^{\Omega_r} = k^{\Omega_2}$; 3) $k^{\Omega} = k^{\Omega_1} \cup k^{\Omega_2}$; 4) $k_{\Gamma_{12}}^{\Omega_1}$, $k_{\Gamma_{12}}^{\Omega_2}$ – множини номерів колокаційних точок, які лежать на межі спряження Γ_{12} з боку областей Ω_1 та Ω_2 відповідно.

Також визначимо множини номерів колокаційних точок, які належать відповідним елементам зовнішніх меж областей Ω_1 та Ω_2 . Наприклад, $k_{\Gamma_1}^{(h)}$ – множина номерів колокаційних точок, які належать межі $\Gamma_1^{(h)}$.

Вимагаємо $k \geq \omega$. Вимагаємо, що на межі розмиву Γ_{12} координати відповідних колокаційних точок в обох областях Ω_1 та Ω_2 співпадають. В загальному випадку множини вузлових точок $\mathbf{X}_i$, $i = \overline{1, \omega}$ та колокаційних точок $\mathbf{Y}_i$, $i = \overline{1, k}$ не співпадають. Хоча, при практичній реалізації методу, такий випадок не виключається.

Аналогічно, для чисельного розв'язання задачі (6.27)–(6.53) безсітковим методом РБФ [70, 359] дискретизуємо замикання області $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2 \cup \bar{\Omega}_3$

вузловими $\mathbf{X}_i = (x_i^X; y_i^X; z_i^X)$, $i = \overline{1, \omega}$ та колокаційними точками $\mathbf{Y}_i = (x_i^Y; y_i^Y; z_i^Y)$, $i = \overline{1, k}$, та введемо наступні позначення: 1) k^{Ω_1} , k^{Ω_2} , k^{Ω_3} – множини номерів колокаційних точок, які лежать в областях Ω_1 , Ω_2 та Ω_3 відповідно; 2) $k^{\Omega_g} = k^{\Omega_1} \cup k^{\Omega_3}$, $k^{\Omega_r} = k^{\Omega_2}$; 3) $k^{\Omega} = k^{\Omega_1} \cup k^{\Omega_2} \cup k^{\Omega_3}$; 4) $k_{\Gamma_{12}}^{\Omega_1}$, $k_{\Gamma_{13}}^{\Omega_1}$, $k_{\Gamma_{12}}^{\Omega_2}$, $k_{\Gamma_{23}}^{\Omega_2}$, $k_{\Gamma_{13}}^{\Omega_3}$, $k_{\Gamma_{23}}^{\Omega_3}$ – множини номерів колокаційних точок, які лежать на відповідних межах спряження з боку відповідних областей.

Для чисельного розв'язання крайової задачі (6.54)–(6.81) безсітковим методом РБФ [70, 359] дискретизуємо замикання області $\overline{\Omega}$ вузловими точками $\mathbf{X}_j = (x_j^X; y_j^X; z_j^X)$, $j = \overline{1, \omega}$ та колокаційними точками $\mathbf{Y}_i = (x_i^Y; y_i^Y; z_i^Y)$, $i = \overline{1, k}$, причому $k \geq \omega$. Введемо наступні позначення: 1) k^{Ω_i} – множини номерів колокаційних точок, які належать для областей Ω_i , $i = \overline{1, 7}$; 2) $k^{\Omega_r} = k^{\Omega_3} \cup k^{\Omega_7}$, $k^{\Omega_g} = \bigcup_{i=1}^2 k^{\Omega_i} \bigcup_{i=3}^6 k^{\Omega_i}$; 3) $k^{\Omega} = \bigcup_{i=1}^7 k^{\Omega_i}$; 4) $k_{\Gamma_{ij}}^{\Omega_i}$, $k_{\Gamma_{ij}}^{\Omega_j}$ – множини номерів колокаційних точок, які лежать на межі спряження Γ_{ij} зі сторони областей Ω_i та Ω_j відповідно. Також визначимо множини номерів колокаційних точок, які належать відповідним елементам зовнішніх меж областей. Наприклад, $k_{\Gamma_1}^{(h)}$ – множина номерів колокаційних точок, які належать межі $\Gamma_1^{(h)}$. В загальному випадку множини вузлових точок $\mathbf{X}_j$, $j = \overline{1, \omega}$ та колокаційних точок $\mathbf{Y}_i$, $i = \overline{1, k}$ не співпадають. Хоча, при практичній реалізації методу такий випадок не виключається.

Наближені розв'язки крайових задач (6.1)–(6.26), (6.27)–(6.53) та (6.54)–(6.81) згідно методу РБФ шукаємо у вигляді

$$h(\mathbf{X}, t) \approx \sum_{i=1}^{\omega} h_i(t) \varphi_i(r_i, \varepsilon_h), \quad c(\mathbf{X}, t) \approx \sum_{i=1}^{\omega} c_i(t) \varphi_i(r_i, \varepsilon_c), \quad T(\mathbf{X}, t) \approx \sum_{i=1}^{\omega} T_i(t) \varphi_i(r_i, \varepsilon_T),$$

$$N(\mathbf{X}, t) \approx \sum_{i=1}^{\omega} N_i(t) \varphi_i(r_i, \varepsilon_N), \quad s(\mathbf{X}, t) \approx \sum_{i=1}^{\omega} s_i(t) \varphi_i(r_i, \varepsilon_s), \quad u_j(\mathbf{X}, t) \approx \sum_{i=1}^{\omega} u_i^j(t) \varphi_i(r_i, \varepsilon_u^j), \quad j = \overline{1, 3}, \quad (6.82)$$

де $h_i(t), c_i(t), T_i(t), N_i(t), s_i(t), u_i^j(t)$, $i = \overline{1, \omega}$, $j = \overline{1, 3}$, – невідомі коефіцієнти, які залежать лише від часу; $\varphi(r_i, \varepsilon)$, $i = \overline{1, \omega}$, – відомі розривні РБФ [183, 184], причому $r_i = \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_i\|_2$; $\varepsilon_h > 0$, $\varepsilon_c > 0$, $\varepsilon_T > 0$, $\varepsilon_N > 0$, $\varepsilon_s > 0$, $\varepsilon_u^j > 0$, $j = \overline{1, 3}$, – параметри форми.

Тоді, використовуючи метод колокацій в точці [34], зокрема його модифікований варіант, де множини вузлових та колокаційних точок не співпадають [347, 359], з крайової задачі (6.1)–(6.26) отримуємо наступну задачу Коші для системи нелінійних диференціальних рівнянь відносно векторів невідомих $\mathbf{h}(t) = \{h_i(t)\}_{i=1}^\omega$, $\mathbf{C}(t) = \{c_i(t)\}_{i=1}^\omega$, $\mathbf{T}(t) = \{T_i(t)\}_{i=1}^\omega$, $\mathbf{N}(t) = \{N_i(t)\}_{i=1}^\omega$, $\mathbf{S}(t) = \{s_i(t)\}_{i=1}^\omega$, $\mathbf{U}^j(t) = \{u_i^j(t)\}_{i=1}^\omega$, $j = \overline{1, 3}$:

$$\mathbf{M}^{(8)} \cdot \frac{d\mathbf{U}^1}{dt} + \mathbf{L}^{(8)} \cdot \mathbf{U}^1(t) = \mathbf{L}^{(81)} \cdot \mathbf{h}(t) + \mathbf{F}^{(8)}, \quad (6.83)$$

$$\mathbf{M}^{(7)} \cdot \frac{d\mathbf{U}^2}{dt} + \mathbf{L}^{(7)} \cdot \mathbf{U}^2(t) = \mathbf{L}^{(71)} \cdot \mathbf{h}(t) + \mathbf{F}^{(7)}, \quad (6.84)$$

$$\mathbf{M}^{(6)} \cdot \frac{d\mathbf{U}^3}{dt} + \mathbf{L}^{(6)} \cdot \mathbf{U}^3(t) = \mathbf{L}^{(61)} \cdot \mathbf{h}(t) + \mathbf{F}^{(6)}, \quad (6.85)$$

$$\mathbf{M}^{(5)} \cdot \frac{d\mathbf{S}}{dt} + \mathbf{L}^{(5)}(\mathbf{h}, \mathbf{C}, \mathbf{T}) \cdot \mathbf{S} = \mathbf{F}^{(5)}, \quad (6.86)$$

$$\mathbf{M}^{(4)} \cdot \frac{d\mathbf{N}}{dt} + \mathbf{L}^{(4)}(\mathbf{C}, \mathbf{N}^\times) = \mathbf{0}, \quad (6.87)$$

$$\mathbf{M}^{(3)} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{dt} + \mathbf{L}^{(3)}(\mathbf{h}, \mathbf{C}, \mathbf{T}) \cdot \mathbf{T} = \mathbf{F}^{(3)}, \quad (6.88)$$

$$\mathbf{M}^{(2)} \cdot \frac{d\mathbf{C}}{dt} + \mathbf{L}^{(2)}(\mathbf{h}, \mathbf{C}, \mathbf{T}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{L}^{(21)} \cdot \mathbf{T}(t) + \mathbf{M}^{(21)} \cdot \frac{d\mathbf{N}}{dt} + \mathbf{M}^{(22)} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{dt} + \mathbf{F}^{(2)}, \quad (6.89)$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{Q}^{(1)} \cdot \frac{d^2 \mathbf{h}}{dt^2} + \mathbf{M}^{(1)} \cdot \frac{d\mathbf{h}}{dt} + \mathbf{L}^{(1)}(\mathbf{h}, \mathbf{C}, \mathbf{T}) \cdot \mathbf{h}(t) = \\ & = \mathbf{L}^{(12)} \cdot \mathbf{C}(t) + \mathbf{L}^{(13)} \cdot \mathbf{T}(t) + \mathbf{M}^{(12)} \cdot \frac{d\mathbf{C}}{dt} + \mathbf{M}^{(13)} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{dt} + \mathbf{M}^{(14)} \cdot \frac{d\mathbf{N}}{dt} + \\ & + \mathbf{Q}^{(12)} \cdot \frac{d^2 \mathbf{C}}{dt^2} + \mathbf{Q}^{(13)} \cdot \frac{d^2 \mathbf{T}}{dt^2} + \mathbf{Q}^{(14)} \cdot \frac{d^2 \mathbf{N}}{dt^2} + \mathbf{F}^{(1)}, \end{aligned} \quad (6.90)$$

$$\mathbf{M}^{(0)} \cdot \frac{d\mathbf{h}^{(0)}}{dt} + \mathbf{L}^{(0)}(\mathbf{C}^{(0)}, \mathbf{T}^{(0)}) \cdot \mathbf{h}^{(0)} = \mathbf{L}^{(01)} \cdot \mathbf{C}^{(0)} + \mathbf{L}^{(02)} \cdot \mathbf{T}^{(0)} + \mathbf{F}^{(0)}, \quad (6.91)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{M}}^{(1)} \cdot \mathbf{h}^{(0)} &= \tilde{\mathbf{F}}^{(1)}, \tilde{\mathbf{M}}^{(2)} \cdot \mathbf{C}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(2)}, \tilde{\mathbf{M}}^{(3)} \cdot \mathbf{T}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(3)}, \tilde{\mathbf{M}}^{(4)} \cdot \mathbf{N}^{(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(4)}, \\ \tilde{\mathbf{M}}^{(5)} \cdot \mathbf{S}^{(0)} &= \tilde{\mathbf{F}}^{(5)}, \tilde{\mathbf{M}}^{(6)} \cdot \mathbf{U}^{3(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(6)}, \tilde{\mathbf{M}}^{(7)} \cdot \mathbf{U}^{2(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(7)}, \tilde{\mathbf{M}}^{(8)} \cdot \mathbf{U}^{1(0)} = \tilde{\mathbf{F}}^{(8)},\end{aligned}\quad (6.92)$$

де

$$\mathbf{h}^{(0)} = (h_i(0))_{i=1}^\omega, \mathbf{C}^{(0)} = (c_i(0))_{i=1}^\omega, \mathbf{T}^{(0)} = (T_i(0))_{i=1}^\omega, \mathbf{N}^{(0)} = (N_i(0))_{i=1}^\omega, \mathbf{S}^{(0)} = (s_i(0))_{i=1}^\omega,$$

$$\mathbf{U}^{\alpha(0)} = (u_i^\alpha(0))_{i=1}^\omega, \alpha = \overline{1;3}, \mathbf{M}^{(\alpha)} = (m_{ij}^{(\alpha)})_{i,j=1}^{k,\omega}, \alpha = \overline{0;8}, \mathbf{L}^{(\alpha)} = (l_{ij}^{(\alpha)})_{i,j=1}^{k,\omega},$$

$$\mathbf{F}^{(\alpha)} = (f_i^{(\alpha)})_{i=1}^k, \alpha = \overline{0;3}, \alpha = \overline{5;8}, \mathbf{L}^{(4)} = (l_i^{(4)})_{i=1}^k, \mathbf{L}^{(21)} = (l_{ij}^{(21)})_{i,j=1}^{k,\omega}, \mathbf{M}^{(21)} = (m_{ij}^{(21)})_{i,j=1}^{k,\omega},$$

$$\mathbf{Q}^{(1)} = (q_{ij}^{(1)})_{i,j=1}^{k,\omega}, \mathbf{Q}^{(1\alpha)} = (q_{ij}^{(1\alpha)})_{i,j=1}^{k,\omega}, \mathbf{M}^{(1\alpha)} = (m_{ij}^{(1\alpha)})_{i,j=1}^{k,\omega}, s = \overline{2;4}, \mathbf{L}^{(1\alpha)} = (l_{ij}^{(1\alpha)})_{i,j=1}^{k,\omega},$$

$$\alpha = \overline{2;3}, \mathbf{L}^{(0\alpha)} = (l_{ij}^{(0\alpha)})_{i,j=1}^{k,\omega}, \alpha = \overline{1;2}, \tilde{\mathbf{M}}^{(\alpha)} = (\tilde{m}_{ij}^{(\alpha)})_{i,j=1}^{k,\omega}, \tilde{\mathbf{F}}^{(\alpha)} = (\tilde{f}_i^{(\alpha)})_{i=1}^k, \alpha = \overline{0;8},$$

$$\mathbf{L}^{(\alpha 1)} = (l_{ij}^{(\alpha 1)})_{i,j=1}^{k,\omega}, s = \overline{6;8}, m_{ij}^{(3)} = c_T \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T), i \in k^\Omega, m_{ij}^{(2)} = n \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c), i \in k^\Omega,$$

$$f_i^{(3)} = T_1(\mathbf{Y}_i, t), i \in k^{\Gamma_1^{(T)}}, l_{ij}^{(3)} = \begin{cases} -\nabla \cdot (\lambda \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T)) + \rho c_\rho \mathbf{u} \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T), & i \in k^\Omega, \\ (-\lambda \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T) + \rho c_\rho \mathbf{u} \cdot \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T), \mathbf{n}), & i \in k^{\Gamma_2^{(T)}}, \\ \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T), & i \in k^{\Gamma_1^{(T)}}, \end{cases}$$

$$m_{ij}^{(4)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_N), l_{ij}^{(4)} = -\gamma_1 \left(\sum_{j=1}^\omega c_j(t) \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c) - C_m \right) \left(\sum_{j=1}^\omega N_j(t) \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_N) \right)^\chi,$$

$$m_{ij}^{(5)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_s), i \in k^{\Omega_r},$$

$$l_{ij}^{(5)} = \begin{cases} -\nabla \cdot (\mathbf{D}_s \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_s)) + (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_s), & i \in k^{\Omega_r}, \\ (-\mathbf{D}_s \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_s) + (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_s), \mathbf{n}), & i \in k^{\Gamma_2^{(s)}} \cup k^{\Omega_2}, \\ \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_s), & i \in k^{\Gamma_1^{(s)}}, \end{cases}$$

$$f_i^{(5)} = -(1-n) \frac{d\Gamma_{12}}{dt} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{y}_i}, i \in k^{\Omega_2}, m_{ij}^{(\alpha)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_u^\alpha), i \in k^{\Omega_r}, f_i^{(\alpha)} = 0, \alpha = \overline{6;8},$$

$$l_{ij}^{(6)} = \begin{cases} -v \Delta \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_u^3) + \mathbf{u} \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_u^3), & i \in k^{\Omega_r}, \\ \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_u^3), & i \in k^{\Gamma_1^{(u_3)}}, \end{cases} l_{ij}^{(61)} = -g \frac{\partial \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h)}{\partial z}, i \in k^{\Omega_r},$$

$$l_{ij}^{(7)} = \begin{cases} -v \Delta \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_u^2) + \mathbf{u} \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_u^2), & i \in k^{\Omega_r}, \\ \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_u^2), & i \in k^{\Gamma_1^{(u_2)}}, \end{cases} l_{ij}^{(71)} = -g \frac{\partial \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h)}{\partial y}, i \in k^{\Omega_r},$$

$$l_{ij}^{(8)} = \begin{cases} -v \Delta \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_u^1) + \mathbf{u} \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_u^1), & i \in k^{\Omega_r}, \\ \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_u^1), & i \in k^{\Gamma_1^{(u_1)}}, \end{cases} l_{ij}^{(81)} = -g \frac{\partial \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h)}{\partial x}, i \in k^{\Omega_r},$$

$$l_{ij}^{(2)} = \begin{cases} -\nabla \cdot (\mathbf{D}_c \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c)) + \mathbf{u} \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c), & i \in k^\Omega, \\ (-\mathbf{D}_c \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c) + \mathbf{u} \cdot \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c), \mathbf{n}), & i \in k^{\Gamma_2^{(c)}}, \quad m_{ij}^{(21)} = -\varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_N), i \in k^\Omega, \\ \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c), & i \in k^{\Gamma_1^{(c)}}, \end{cases}$$

$$l_{ij}^{(21)} = \begin{cases} \nabla \cdot (\mathbf{D}_T \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T)), & i \in k^\Omega, \\ (-\mathbf{D}_T \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T), \mathbf{n}), & i \in k^{\Gamma_2^{(c)}}, \quad m_{ij}^{(22)} = -(\alpha_\rho + q\alpha_s)\varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T), i \in k^\Omega, \end{cases}$$

$$f_i^{(2)} = C_1(\mathbf{Y}_i, t), i \in k^{\Gamma_1^{(c)}}, \quad q_{ij}^{(1)} = \left(\frac{a_0}{1 + (R-1)\xi} + \frac{\beta(1+e)}{R} \right) \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h), i \in k^{\Omega_g},$$

$$m_{ij}^{(1)} = \beta_1 \left(\frac{a_0 + a_1}{1 + (R-1)\xi} + \frac{\beta(1+e)}{R} \right) \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h) - \frac{1+e}{R\gamma} \nabla \cdot (\mathbf{K}_h(\mathbf{C}, \mathbf{T}, \mathbf{h}) \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h)), i \in k^{\Omega_g},$$

$$l_{ij}^{(12)} = \begin{cases} -\frac{1+e}{R\gamma} \beta_1 \nabla \cdot (\mathbf{K}_c \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c)), & i \in k^{\Omega_g}, \\ (\mathbf{K}_c \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c), \mathbf{n}), & i \in k^{\Gamma_1^{(h)}}, \end{cases}$$

$$l_{ij}^{(13)} = \begin{cases} -\frac{1+e}{R\gamma} \beta_1 \nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T)), & i \in k^{\Omega_g}, \\ (\mathbf{K}_T \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T), \mathbf{n}), & i \in k^{\Gamma_1^{(h)}}, \end{cases}$$

$$m_{ij}^{(12)} = -\frac{1+e}{R\gamma} \nabla \cdot (\mathbf{K}_c \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c)) + \frac{\varepsilon \beta_1 (1+e)n}{R\rho_c \gamma} \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c), i \in k^{\Omega_g},$$

$$m_{ij}^{(13)} = -\frac{1+e}{R\gamma} \nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T)) + \frac{(\alpha_\rho + (2q-1)\alpha_s)e\beta_1}{R\gamma} \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T), i \in k^{\Omega_g},$$

$$m_{ij}^{(14)} = -\frac{\varepsilon e(1+e)\beta_1}{R\rho_c \gamma} \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_N), i \in k^{\Omega_g}, \quad q_{ij}^{(12)} = \frac{\varepsilon n(1+e)}{R\rho_c \gamma} \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c), i \in k^{\Omega_g},$$

$$q_{ij}^{(13)} = \frac{e(\alpha_\rho + (2q-1)\alpha_s)}{R\gamma} \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T), i \in k^{\Omega_g}, \quad q_{ij}^{(14)} = -\frac{\varepsilon e(1+e)}{R\rho_c \gamma} \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c), i \in k^{\Omega_g},$$

$$l_{ij}^{(1)} = \begin{cases} -\frac{1+e}{R\gamma} \beta_1 \nabla \cdot (\mathbf{K}_h \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h)), & i \in k^{\Omega_g}, \\ \Delta \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h), & i \in k^{\Omega_r}, \\ (-\mathbf{K}_h \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h), \mathbf{n}), & i \in k^{\Gamma_2^{(h)}}, \\ \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h), & i \in k^{\Gamma_1^{(h)}} \cup k^{\Gamma_1^{(u)}}, \\ (\nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h), \mathbf{n}), & i \in k^{\Gamma_2^{(u)}}, \end{cases}$$

$$f_i^{(1)} = \begin{cases} \frac{1}{1+(R-1)\xi} \left(\frac{a_0}{R\gamma} \frac{\partial^2(\Theta^* + R\gamma h^*)}{\partial t^2} + \frac{\beta_1(a_0 + a_1)}{R\gamma} \frac{\partial(\Theta^* + R\gamma h^*)}{\partial t} \right) \Big|_{\mathbf{X}=\mathbf{Y}_i}, & i \in k^{\Omega_g}, \\ -\frac{2}{g} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial z} \frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_3}{\partial z} - \frac{\partial u_2}{\partial y} \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) \Big|_{\mathbf{X}=\mathbf{Y}_i}, & i \in k^{\Omega_r}, \\ H_1(\mathbf{Y}_i, t), & i \in k^{\Gamma_1^{(h)}}, \\ H_2(\mathbf{Y}_i, t), & i \in k^{\Gamma_1^{(u)}}, \end{cases}$$

$$f_i^{(0)} = \left(\frac{a_0}{1+(R-1)\xi} \left(\frac{\partial \Theta_0^*}{\partial t} + R \frac{\partial p_0^*}{\partial t} \right) + \frac{a_1 \beta_1}{1+(R-1)\xi} (\Theta_0^* + R p_0^*) \right) \Big|_{\mathbf{X}=\mathbf{Y}_i}, \quad i \in k^{\Omega_g},$$

$$m_{ij}^{(0)} = \left(\gamma \beta (1+e) + \frac{R\gamma a_0}{1+(R-1)\xi} \right) \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h), \quad i \in k^{\Omega_g},$$

$$l_{ij}^{(0)} = -(1+e) \nabla \cdot (\mathbf{K}_h \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h)) + \frac{R\gamma a_1 \beta_1}{1+(R-1)\xi} \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h), \quad i \in k^{\Omega_g},$$

$$l_{ij}^{(01)} = -(1+e) \nabla \cdot (\mathbf{K}_c \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c)), \quad i \in k^{\Omega_g}, \quad l_{ij}^{(02)} = -(1+e) \nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T)), \quad i \in k^{\Omega_g},$$

$$\tilde{m}_{ij}^{(1)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h), \quad i \in k^{\Omega_g}, \quad \tilde{m}_{ij}^{(2)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c), \quad \tilde{m}_{ij}^{(3)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T),$$

$$\tilde{m}_{ij}^{(4)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_N), \quad i \in k^{\Omega_g}, \quad \tilde{m}_{ij}^{(5)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_s), \quad i \in k^{\Omega_r}, \quad \tilde{m}_{ij}^{(6)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_u^3), \quad i \in k^{\Omega_r},$$

$$\tilde{m}_{ij}^{(7)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_u^2), \quad i \in k^{\Omega_r}, \quad \tilde{m}_{ij}^{(8)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_u^1), \quad i \in k^{\Omega_r}, \quad \tilde{f}_i^{(1)} = h_0(\mathbf{Y}_i), \quad i \in k^{\Omega_g},$$

$$\tilde{f}_i^{(2)} = c_0(\mathbf{Y}_i), \quad \tilde{f}_i^{(3)} = T_0(\mathbf{Y}_i), \quad \tilde{f}_i^{(4)} = N_0(\mathbf{Y}_i), \quad i \in k^{\Omega_g}, \quad \tilde{f}_i^{(5)} = S_0(\mathbf{Y}_i), \quad \tilde{f}_i^{(6)} = u_0^3(\mathbf{Y}_i),$$

$$\tilde{f}_i^{(7)} = u_0^2(\mathbf{Y}_i), \quad \tilde{f}_i^{(8)} = u_0^1(\mathbf{Y}_i), \quad i \in k^{\Omega_r}, \quad r_{ji} = \|\mathbf{Y}_i - \mathbf{X}_j\|_2.$$

Особливого визначення вимагають елементи матриць та вектор–стовпців задачі Коші (6.83)–(6.92) для колокаційних точок, які лежать на межі розмиву Γ_{12} . Нехай $\mathbf{Y}_\alpha$ та $\mathbf{Y}_\beta$ дві колокаційні точки, координати яких співпадають і $\alpha \in k_{\Gamma_{12}}^{\Omega_1}$, $\beta \in k_{\Gamma_{12}}^{\Omega_2}$. Тоді:

1. Всі елементи рядків під номерами α та β систем рівнянь (6.88), (6.89) покладаються рівними нулю і їм присвоюються значення згідно наступного правила:

$$I_{\alpha,j}^{(3)} = \begin{cases} \varphi_j(r_{j\alpha}, \varepsilon_T), & j \in \overline{k^{\Omega_1}}, \\ -\varphi_j(r_{j\beta}, \varepsilon_T), & j \in \overline{k^{\Omega_2}}, \end{cases}$$

$$I_{\beta,j}^{(3)} = \begin{cases} (-\lambda \nabla \varphi_j(r_{j\alpha}, \varepsilon_T) + \rho c_\rho \mathbf{u} \cdot \varphi_j(r_{j\alpha}, \varepsilon_T), \mathbf{n}), & j \in \overline{k^{\Omega_1}}, \\ -(-\lambda \nabla \varphi_j(r_{j\beta}, \varepsilon_T) + \rho c_\rho \mathbf{u} \cdot \varphi_j(r_{j\beta}, \varepsilon_T), \mathbf{n}), & j \in \overline{k^{\Omega_2}}, \end{cases}$$

$$I_{\alpha,j}^{(2)} = \begin{cases} \varphi_j(r_{j\alpha}, \varepsilon_c), & j \in \overline{k^{\Omega_1}}, \\ -\varphi_j(r_{j\beta}, \varepsilon_c), & j \in \overline{k^{\Omega_2}}, \end{cases} \quad I_{\beta,j}^{(2)} = \begin{cases} (-\mathbf{D}_c \nabla \varphi_j(r_{j\alpha}, \varepsilon_c) + \mathbf{u} \cdot \varphi_j(r_{j\alpha}, \varepsilon_c), \mathbf{n}), & j \in \overline{k^{\Omega_1}}, \\ -(-\mathbf{D}_c \nabla \varphi_j(r_{j\beta}, \varepsilon_c) + \mathbf{u} \cdot \varphi_j(r_{j\beta}, \varepsilon_c), \mathbf{n}), & j \in \overline{k^{\Omega_2}}, \end{cases}$$

$$I_{\beta,j}^{(21)} = \begin{cases} (-\mathbf{D}_T \nabla \varphi_j(r_{j\alpha}, \varepsilon_T), \mathbf{n}), & j \in \overline{k^{\Omega_1}}, \\ -(-\mathbf{D}_T \nabla \varphi_j(r_{j\beta}, \varepsilon_T), \mathbf{n}), & j \in \overline{k^{\Omega_2}}. \end{cases}$$

2. Всі елементи рядків під номерами α та β системи рівнянь (6.90) покладаються рівними нулю і їм присвоюються значення згідно наступного правила:

$$I_{\alpha,j}^{(1)} = \begin{cases} \varphi_j(r_{j\alpha}, \varepsilon_h), & j \in \overline{k^{\Omega_1}}, \\ -\varphi_j(r_{j\beta}, \varepsilon_h), & j \in \overline{k^{\Omega_2}}, \end{cases} \quad I_{\beta,j}^{(1)} = \begin{cases} (\nabla \varphi_j(r_{j\alpha}, \varepsilon_h), \mathbf{n}), & j \in \overline{k^{\Omega_1}}, \\ -(\nabla \varphi_j(r_{j\beta}, \varepsilon_h), \mathbf{n}), & j \in \overline{k^{\Omega_2}}. \end{cases}$$

3. Всі елементи рядка під номером β систем рівнянь (6.83)–(6.85) покладаються рівними нулю і їм присвоюються значення згідно наступного правила:

$$I_{\beta,j}^{(8)} = \varphi_j(r_{j\beta}, \varepsilon_u^1), \quad j \in \overline{k^{\Omega_2}}, \quad I_{\beta,j}^{(7)} = \varphi_j(r_{j\beta}, \varepsilon_u^2), \quad j \in \overline{k^{\Omega_2}}, \quad I_{\beta,j}^{(6)} = \varphi_j(r_{j\beta}, \varepsilon_u^1), \quad j \in \overline{k^{\Omega_2}},$$

$$\begin{aligned} (f_\beta^{(6)}; f_\beta^{(7)}; f_\beta^{(8)})^T = & - \sum_{j \in \overline{k^{\Omega_1}}} h_j(t) \mathbf{K}_h (\nabla \varphi_j(r_{j\alpha}, \varepsilon_h))^T + \sum_{j \in \overline{k^{\Omega_1}}} c_j(t) \mathbf{K}_c (\nabla \varphi_j(r_{j\alpha}, \varepsilon_c))^T + \\ & + \sum_{j \in \overline{k^{\Omega_1}}} T_j(t) \mathbf{K}_T (\nabla \varphi_j(r_{j\alpha}, \varepsilon_T))^T. \end{aligned}$$

Відмітимо, що значення коефіцієнтів рівнянь крайової задачі (6.1)–(6.26) у колокаційній точці залежать від області, в яку дана точка попадає. Для уникнення громіздкості та зайвої індексації цього не відображено при визначенні елементів відповідних матриць та вектор–стовпців задачі Коші (6.83)–(6.92), однак це потрібно мати на увазі.

Діючи аналогічним чином, застосовуючи метод РБФ до крайової задачі (6.27)–(6.53), отримуємо задачу Коші вигляду (6.83)–(6.92), де:

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}^{(0)} &= (h_i(0))_{i=1}^\omega, \mathbf{C}^{(0)} = (c_i(0))_{i=1}^\omega, \mathbf{T}^{(0)} = (T_i(0))_{i=1}^\omega, \mathbf{N}^{(0)} = (N_i(0))_{i=1}^\omega, \mathbf{S}^{(0)} = (s_i(0))_{i=1}^\omega, \\
\mathbf{U}^{\alpha(0)} &= (u_i^\alpha(0))_{i=1}^\omega, \alpha = \overline{1;3}, \mathbf{M}^{(\alpha)} = (m_{ij}^{(\alpha)})_{i,j=1}^{k,\omega}, \alpha = \overline{0;8}, \mathbf{L}^{(\alpha)} = (l_{ij}^{(\alpha)})_{i,j=1}^{k,\omega}, \\
\mathbf{F}^{(\alpha)} &= (f_i^{(\alpha)})_{i=1}^k, \alpha = \overline{0;3}, \alpha = \overline{5;8}; \mathbf{L}^{(4)} = (l_i^{(4)})_{i=1}^k, \mathbf{L}^{(21)} = (l_{ij}^{(21)})_{i,j=1}^{k,\omega}, \mathbf{M}^{(21)} = (m_{ij}^{(21)})_{i,j=1}^{k,\omega}, \\
\mathbf{Q}^{(1)} &= (q_{ij}^{(1)})_{i,j=1}^{k,\omega}, \mathbf{Q}^{(1\alpha)} = (q_{ij}^{(1\alpha)})_{i,j=1}^{k,\omega}, \mathbf{M}^{(1\alpha)} = (m_{ij}^{(1\alpha)})_{i,j=1}^{k,\omega}, s = \overline{2;4}, \mathbf{L}^{(1\alpha)} = (l_{ij}^{(1\alpha)})_{i,j=1}^{k,\omega}, \\
\alpha &= \overline{2;3}, \mathbf{L}^{(0\alpha)} = (l_{ij}^{(0\alpha)})_{i,j=1}^{k,\omega}, \alpha = \overline{1;2}, \tilde{\mathbf{M}}^{(\alpha)} = (\tilde{m}_{ij}^{(\alpha)})_{i,j=1}^{k,\omega}, \tilde{\mathbf{F}}^{(\alpha)} = (\tilde{f}_i^{(\alpha)})_{i=1}^k, \alpha = \overline{0;8}, \\
\mathbf{L}^{(\alpha 1)} &= (l_{ij}^{(\alpha 1)})_{i,j=1}^{k,\omega}, s = \overline{6;8}, m_{ij}^{(3)} = c_T \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T), i \in k^\Omega, m_{ij}^{(2)} = n \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c), i \in k^\Omega, \\
f_i^{(3)} &= T_1(\mathbf{Y}_i, t), i \in k^{\Gamma_1^{(T)}}, l_{ij}^{(3)} = \begin{cases} -\nabla \cdot (\lambda \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T)) + \rho c_\rho \mathbf{u} \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T), i \in k^\Omega, \\ (-\lambda \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T) + \rho c_\rho \mathbf{u} \cdot \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T), \mathbf{n}), i \in k^{\Gamma_2^{(T)}}, \\ \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T), i \in k^{\Gamma_1^{(T)}}, \end{cases} \\
m_{ij}^{(4)} &= \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_N), i \in k^{\Omega_g}, \\
l_{ij}^{(4)} &= -\gamma_1 \left(\sum_{j=1}^\omega c_j(t) \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c) - C_m \right) \left(\sum_{j=1}^\omega N_j(t) \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_N) \right)^\chi, i \in k^{\Omega_g}, \\
m_{ij}^{(5)} &= \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_s), i \in k^{\Omega_2}, l_{ij}^{(5)} = \begin{cases} -\nabla \cdot (\mathbf{D}_s \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_s)) + (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_s), i \in k^{\Omega_r}, \\ (-\mathbf{D}_s \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_s) + (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_s), \mathbf{n}), i \in k^{\Gamma_2^{(s)}}, \\ \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_s), i \in k^{\Gamma_1^{(s)}}, \end{cases} \\
f_i^{(5)} &= -(1-n) \frac{d\Gamma_{12}}{dt} \Big|_{\mathbf{X}=\mathbf{Y}_i}, i \in k^{\Omega_2}, m_{ij}^{(\alpha)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_u^\alpha), i \in k^{\Omega_2}, f_i^{(\alpha)} = 0, \alpha = \overline{6;8}, \\
l_{ij}^{(6)} &= \begin{cases} -v \Delta \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_u^3) + \mathbf{u} \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_u^3), i \in k^{\Omega_r}, \\ \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_u^3), i \in k^{\Gamma_1^{(u3)}} \end{cases}, l_{ij}^{(61)} = -g \frac{\partial \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h)}{\partial z}, i \in k^{\Omega_r}, \\
l_{ij}^{(7)} &= \begin{cases} -v \Delta \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_u^2) + \mathbf{u} \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_u^2), i \in k^{\Omega_r}, \\ \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_u^2), i \in k^{\Gamma_1^{(u2)}} \end{cases}, l_{ij}^{(71)} = -g \frac{\partial \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h)}{\partial y}, i \in k^{\Omega_r}, \\
l_{ij}^{(8)} &= \begin{cases} -v \Delta \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_u^1) + \mathbf{u} \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_u^1), i \in k^{\Omega_r}, \\ \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_u^1), i \in k^{\Gamma_1^{(u1)}} \end{cases}, l_{ij}^{(81)} = -g \frac{\partial \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h)}{\partial x}, i \in k^{\Omega_r}, \\
l_{ij}^{(2)} &= \begin{cases} -\nabla \cdot (\mathbf{D}_c \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c)) + \mathbf{u} \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c), i \in k^\Omega, \\ (-\mathbf{D}_c \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c) + \mathbf{u} \cdot \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c), \mathbf{n}), i \in k^{\Gamma_2^{(c)}}, m_{ij}^{(21)} = -\varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_N), i \in k^\Omega, \\ \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c), i \in k^{\Gamma_1^{(c)}}, \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_{ij}^{(21)} &= \begin{cases} \nabla \cdot (\mathbf{D}_T \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T)), i \in k^\Omega, \\ (-\mathbf{D}_T \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T), \mathbf{n}), i \in k^{\Gamma_2^{(c)}}, \end{cases} \quad m_{ij}^{(22)} = -(\alpha_\rho + q\alpha_s)\varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T), i \in k^\Omega, \\
f_i^{(2)} &= C_1(\mathbf{Y}_i, t), i \in k^{\Gamma_1^{(c)}}, \quad q_{ij}^{(1)} = \left(\frac{a_0}{1 + (R-1)\xi} + \frac{\beta(1+e)}{R} \right) \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h), i \in k^{\Omega_g}, \\
m_{ij}^{(1)} &= \beta_1 \left(\frac{a_0 + a_1}{1 + (R-1)\xi} + \frac{\beta(1+e)}{R} \right) \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h) - \frac{1+e}{R\gamma} \nabla \cdot (\mathbf{K}_h(\mathbf{C}, \mathbf{T}, \mathbf{h}) \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h)), i \in k^{\Omega_g}, \\
l_{ij}^{(12)} &= \begin{cases} -\frac{1+e}{R\gamma} \beta_1 \nabla \cdot (\mathbf{K}_c \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c)), i \in k^{\Omega_g}, \\ (\mathbf{K}_c \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c), \mathbf{n}), \quad i \in k^{\Gamma_2^{(h)}}, \end{cases} \\
l_{ij}^{(13)} &= \begin{cases} -\frac{1+e}{R\gamma} \beta_1 \nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T)), i \in k^{\Omega_g}, \\ (\mathbf{K}_T \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T), \mathbf{n}), \quad i \in k^{\Gamma_2^{(h)}}, \end{cases} \\
m_{ij}^{(12)} &= -\frac{1+e}{R\gamma} \nabla \cdot (\mathbf{K}_c \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c)) + \frac{\varepsilon \beta_1 (1+e)n}{R\rho_c \gamma} \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c), i \in k^{\Omega_g}, \\
m_{ij}^{(13)} &= -\frac{1+e}{R\gamma} \nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T)) + \frac{(\alpha_\rho + (2q-1)\alpha_s)e\beta_1}{R\gamma} \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T), i \in k^{\Omega_g}, \\
m_{ij}^{(14)} &= -\frac{\varepsilon e(1+e)\beta_1}{R\rho_c \gamma} \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_N), i \in k^{\Omega_g}, \quad q_{ij}^{(12)} = \frac{\varepsilon n(1+e)}{R\rho_c \gamma} \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c), i \in k^{\Omega_g}, \\
q_{ij}^{(13)} &= \frac{e(\alpha_\rho + (2q-1)\alpha_s)}{R\gamma} \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T), i \in k^{\Omega_g}, \quad q_{ij}^{(14)} = -\frac{\varepsilon e(1+e)}{R\rho_c \gamma} \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c), i \in k^{\Omega_g}, \\
f_i^{(0)} &= \left(\frac{a_0}{1 + (R-1)\xi} \left(\frac{\partial \Theta_0^*}{\partial t} + R \frac{\partial p_0^*}{\partial t} \right) + \frac{a_1 \beta_1}{1 + (R-1)\xi} (\Theta_0^* + R p_0^*) \right) \bigg|_{\mathbf{X}=\mathbf{Y}_i}, i \in k^{\Omega_g}, \\
l_{ij}^{(1)} &= \begin{cases} -\frac{1+e}{R\gamma} \beta_1 \nabla \cdot (\mathbf{K}_h \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h)), i \in k^{\Omega_g}, \\ \Delta \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h), \quad i \in k^{\Omega_r}, \\ (-\mathbf{K}_h \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h), \mathbf{n}), \quad i \in k^{\Gamma_2^{(h)}}, \\ \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h), \quad i \in k^{\Gamma_1^{(h)}} \cup k^\Gamma, \end{cases} \\
m_{ij}^{(0)} &= \left(\gamma \beta (1+e) + \frac{R\gamma a_0}{1 + (R-1)\xi} \right) \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h), i \in k^{\Omega_g},
\end{aligned}$$

$$f_i^{(1)} = \begin{cases} \frac{1}{1+(R-1)\xi} \left(\frac{a_0}{R\gamma} \frac{\partial^2 (\Theta^* + R\gamma h^*)}{\partial t^2} + \frac{\beta_1(a_0 + a_1)}{R\gamma} \frac{\partial (\Theta^* + R\gamma h^*)}{\partial t} \right) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{Y}_i}, & i \in k^{\Omega_g}, \\ -\frac{2}{g} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial z} \frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_3}{\partial z} - \frac{\partial u_2}{\partial y} \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{Y}_i}, & i \in k^{\Omega_r}, \\ H_1(\mathbf{Y}_i, t), & i \in k^{\Gamma_1^{(h)}}, \\ H_2(\mathbf{Y}_i, t), & i \in k^{\Gamma_1^{(u)}}, \\ -z_i^Y, & i \in k^\Gamma, \end{cases}$$

$$l_{ij}^{(0)} = -(1+e)\nabla \cdot (\mathbf{K}_h \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h)) + \frac{R\gamma a_1 \beta_1}{1+(R-1)\xi} \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h), i \in k^{\Omega_g},$$

$$l_{ij}^{(01)} = -(1+e)\nabla \cdot (\mathbf{K}_c \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c)), i \in k^{\Omega_g}, \quad l_{ij}^{(02)} = -(1+e)\nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T)), i \in k^{\Omega_g},$$

$$\tilde{m}_{ij}^{(1)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h), i \in k^{\Omega_g}, \quad \tilde{m}_{ij}^{(2)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c), \quad \tilde{m}_{ij}^{(3)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T),$$

$$\tilde{m}_{ij}^{(4)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_N), i \in k^{\Omega_g}, \quad \tilde{m}_{ij}^{(5)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_s), \quad \tilde{m}_{ij}^{(6)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_u^3), \quad \tilde{m}_{ij}^{(7)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_u^2),$$

$$\tilde{m}_{ij}^{(8)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_u^1), i \in k^{\Omega_r}, \quad \tilde{f}_i^{(1)} = h_0(\mathbf{Y}_i), i \in k^{\Omega_g}, \quad \tilde{f}_i^{(2)} = c_0(\mathbf{Y}_i), \quad \tilde{f}_i^{(3)} = T_0(\mathbf{Y}_i),$$

$$\tilde{f}_i^{(4)} = N_0(\mathbf{Y}_i), i \in k^{\Omega_g}, \quad \tilde{f}_i^{(5)} = S_0(\mathbf{Y}_i), \quad \tilde{f}_i^{(6)} = u_0^3(\mathbf{Y}_i), \quad \tilde{f}_i^{(7)} = u_0^2(\mathbf{Y}_i),$$

$$\tilde{f}_i^{(8)} = u_0^1(\mathbf{Y}_i), i \in k^{\Omega_r}, \quad r_{ji} = \|\mathbf{Y}_i - \mathbf{X}_j\|_2.$$

Особливого визначення вимагають елементи матриць та вектор–стовпців задачі Коші (6.83)–(6.92) для колокаційних точок, які лежать на межі розмиву Γ_{12} та межах спряження Γ_{13} , Γ_{23} . Це здійснюється аналогічно попередній задачі.

Відмітимо, що значення коефіцієнтів рівнянь крайової задачі (6.27)–(6.53) у колокаційній точці залежать від області, в яку дана точка попадає. Для уникнення громіздкості та зайвої індексації цього не відображено при визначенні елементів відповідних матриць та вектор–стовпців задачі Коші (6.83)–(6.92), однак це потрібно мати на увазі.

Діючи аналогічним чином, застосовуючи метод РБФ до розв'язування крайової задачі (6.54)–(6.81), отримуємо задачу Коші вигляду (6.83)–(6.92), де:

$$\mathbf{h}^{(0)} = (h_i(0))_{i=1}^\omega, \quad \mathbf{C}^{(0)} = (c_i(0))_{i=1}^\omega, \quad \mathbf{T}^{(0)} = (T_i(0))_{i=1}^\omega, \quad \mathbf{N}^{(0)} = (N_i(0))_{i=1}^\omega, \quad \mathbf{S}^{(0)} = (s_i(0))_{i=1}^\omega,$$

$$\mathbf{U}^{\alpha(0)} = (u_i^\alpha(0))_{i=1}^\omega, \quad \alpha = \overline{1;3}, \quad \mathbf{M}^{(\alpha)} = (m_{ij}^{(\alpha)})_{i,j=1}^{k,\omega}, \quad \alpha = \overline{0;8}, \quad \mathbf{L}^{(\alpha)} = (l_{ij}^{(\alpha)})_{i,j=1}^{k,\omega}, \quad \mathbf{F}^{(\alpha)} = (f_i^{(\alpha)})_{i=1}^k,$$

$$\alpha = \overline{0;3}, \alpha = \overline{5;8}, \mathbf{L}^{(4)} = (l_i^{(4)})_{i=1}^k, \mathbf{L}^{(21)} = (l_{ij}^{(21)})_{i,j=1}^{k,\omega}, \mathbf{M}^{(21)} = (m_{ij}^{(21)})_{i,j=1}^{k,\omega}, \mathbf{Q}^{(1)} = (q_{ij}^{(1)})_{i,j=1}^{k,\omega},$$

$$\mathbf{Q}^{(1\alpha)} = (q_{ij}^{(1\alpha)})_{i,j=1}^{k,\omega}, \mathbf{M}^{(1\alpha)} = (m_{ij}^{(1\alpha)})_{i,j=1}^{k,\omega}, s = \overline{2;4}, \mathbf{L}^{(1\alpha)} = (l_{ij}^{(1\alpha)})_{i,j=1}^{k,\omega}, \alpha = 2;3;$$

$$\mathbf{L}^{(0\alpha)} = (l_{ij}^{(0\alpha)})_{i,j=1}^{k,\omega}, \alpha = 1;2, \tilde{\mathbf{M}}^{(\alpha)} = (\tilde{m}_{ij}^{(\alpha)})_{i,j=1}^{k,\omega}, \tilde{\mathbf{F}}^{(\alpha)} = (\tilde{f}_i^{(\alpha)})_{i=1}^k, \alpha = \overline{0;8},$$

$$\mathbf{L}^{(\alpha 1)} = (l_{ij}^{(\alpha 1)})_{i,j=1}^{k,\omega}, s = \overline{6;8}, m_{ij}^{(3)} = c_T \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T), i \in k^\Omega, m_{ij}^{(2)} = n \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c), i \in k^\Omega,$$

$$f_i^{(3)} = T_1(\mathbf{Y}_i, t), i \in k^{\Gamma_1^{(T)}}, l_{ij}^{(3)} = \begin{cases} -\nabla \cdot (\lambda \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T)) + \rho c_\rho \mathbf{u} \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T), i \in k^\Omega, \\ (-\lambda \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T) + \rho c_\rho \mathbf{u} \cdot \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T), \mathbf{n}), i \in k^{\Gamma_2^{(T)}}, \\ \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T), i \in k^{\Gamma_1^{(T)}}, \end{cases}$$

$$m_{ij}^{(4)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_N), i \in k^{\Omega_g}, l_{ij}^{(4)} = -\gamma_1 \left(\sum_{j=1}^{\omega} c_j(t) \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c) - C_m \right) \left(\sum_{j=1}^{\omega} N_j(t) \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_N) \right)^\lambda, i \in k^{\Omega_g},$$

$$m_{ij}^{(5)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_s), i \in k^{\Omega_r}, l_{ij}^{(5)} = \begin{cases} -\nabla \cdot (\mathbf{D}_s \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_s)) + (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_s), i \in k^{\Omega_r}, \\ (-\mathbf{D}_s \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_s) + (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_s), \mathbf{n}), i \in k^{\Gamma_2^{(s)}}, \\ \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_s), i \in k^{\Gamma_1^{(s)}}, \end{cases}$$

$$f_i^{(5)} = -(1-n) \frac{d\Gamma}{dt} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{Y}_i}, i \in k_{\Gamma}^{\Omega_r}, \Gamma \in \{\Gamma_{13}, \Gamma_{23}, \Gamma_{34}, \Gamma_{57}\}, m_{ij}^{(\alpha)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_u^\alpha), i \in k^{\Omega_r},$$

$$f_i^{(\alpha)} = 0, \alpha = \overline{6;8}, l_{ij}^{(6)} = \begin{cases} -v \Delta \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_u^3) + \mathbf{u} \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_u^3), i \in k^{\Omega_r}, \\ \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_u^3), i \in k^{\Gamma_1^{(u_3)}}, \end{cases}$$

$$l_{ij}^{(61)} = -g \frac{\partial \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h)}{\partial z}, i \in k^{\Omega_r}, l_{ij}^{(7)} = \begin{cases} -v \Delta \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_u^2) + \mathbf{u} \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_u^2), i \in k^{\Omega_r}, \\ \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_u^2), i \in k^{\Gamma_1^{(u_2)}}, \end{cases}$$

$$l_{ij}^{(71)} = -g \frac{\partial \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h)}{\partial y}, i \in k^{\Omega_r}, l_{ij}^{(8)} = \begin{cases} -v \Delta \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_u^1) + \mathbf{u} \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_u^1), i \in k^{\Omega_r}, \\ \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_u^1), i \in k^{\Gamma_1^{(u_1)}}, \end{cases}$$

$$l_{ij}^{(81)} = -g \frac{\partial \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h)}{\partial x}, i \in k^{\Omega_r}, l_{ij}^{(2)} = \begin{cases} -\nabla \cdot (\mathbf{D}_c \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c)) + \mathbf{u} \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c), i \in k^\Omega, \\ (-\mathbf{D}_c \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c) + \mathbf{u} \cdot \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c), \mathbf{n}), i \in k^{\Gamma_2^{(c)}}, \\ \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c), i \in k^{\Gamma_1^{(c)}}, \end{cases}$$

$$m_{ij}^{(21)} = -\varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_N), i \in k^{\Omega_g}, l_{ij}^{(21)} = \begin{cases} \nabla \cdot (\mathbf{D}_T \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T)), i \in k^\Omega, \\ (-\mathbf{D}_T \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T), \mathbf{n}), i \in k^{\Gamma_2^{(c)}}, \end{cases}$$

$$m_{ij}^{(22)} = -(\alpha_\rho + q \alpha_s) \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T), i \in k^\Omega, f_i^{(2)} = C_1(\mathbf{Y}_i, t), i \in k^{\Gamma_1^{(c)}},$$

$$\begin{aligned}
q_{ij}^{(1)} &= \left(\frac{a_0}{1+(R-1)\xi} + \frac{\beta(1+e)}{R} \right) \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h), i \in k^{\Omega_g}, \\
m_{ij}^{(1)} &= \beta_1 \left(\frac{a_0 + a_1}{1+(R-1)\xi} + \frac{\beta(1+e)}{R} \right) \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h) - \frac{1+e}{R\gamma} \nabla \cdot (\mathbf{K}_h(\mathbf{C}, \mathbf{T}, \mathbf{h}) \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h)), i \in k^{\Omega_g}, \\
l_{ij}^{(12)} &= \begin{cases} -\frac{1+e}{R\gamma} \beta_1 \nabla \cdot (\mathbf{K}_c \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c)), i \in k^{\Omega_g}, \\ (\mathbf{K}_c \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c), \mathbf{n}), i \in k^{\Gamma_2^{(h)}}, \end{cases} \\
l_{ij}^{(13)} &= \begin{cases} -\frac{1+e}{R\gamma} \beta_1 \nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T)), i \in k^{\Omega_g}, \\ (\mathbf{K}_T \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T), \mathbf{n}), i \in k^{\Gamma_2^{(h)}}, \end{cases} \\
m_{ij}^{(12)} &= -\frac{1+e}{R\gamma} \nabla \cdot (\mathbf{K}_c \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c)) + \frac{\varepsilon \beta_1 (1+e) n}{R \rho_c \gamma} \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c), i \in k^{\Omega_g}, \\
m_{ij}^{(13)} &= -\frac{1+e}{R\gamma} \nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T)) + \frac{(\alpha_p + (2q-1)\alpha_s) e \beta_1}{R\gamma} \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T), i \in k^{\Omega_g}, \\
m_{ij}^{(14)} &= -\frac{\varepsilon e (1+e) \beta_1}{R \rho_c \gamma} \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_N), i \in k^{\Omega_g}, \quad q_{ij}^{(12)} = \frac{\varepsilon n (1+e)}{R \rho_c \gamma} \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c), i \in k^{\Omega_g}, \\
q_{ij}^{(13)} &= \frac{e(\alpha_p + (2q-1)\alpha_s)}{R\gamma} \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T), i \in k^{\Omega_g}, \quad q_{ij}^{(14)} = -\frac{\varepsilon e (1+e)}{R \rho_c \gamma} \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c), i \in k^{\Omega_g}, \\
f_i^{(0)} &= \left(\frac{a_0}{1+(R-1)\xi} \left(\frac{\partial \Theta_0^*}{\partial t} + R \frac{\partial p_0^*}{\partial t} \right) + \frac{a_1 \beta_1}{1+(R-1)\xi} (\Theta_0^* + R p_0^*) \right) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{Y}_i}, i \in k^{\Omega_g}, \\
m_{ij}^{(0)} &= \left(\gamma \beta (1+e) + \frac{R \gamma a_0}{1+(R-1)\xi} \right) \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h), i \in k^{\Omega_g}, \\
l_{ij}^{(1)} &= \begin{cases} -\frac{1+e}{R\gamma} \beta_1 \nabla \cdot (\mathbf{K}_h \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h)), i \in k^{\Omega_g}, \\ \Delta \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h), i \in k^{\Omega_r}, \\ (-\mathbf{K}_h \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h), \mathbf{n}), i \in k^{\Gamma_2^{(h)}}, \\ \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h), i \in k^{\Gamma_1^{(h)}} \cup k^\Gamma, \end{cases} \\
l_{ij}^{(0)} &= -(1+e) \nabla \cdot (\mathbf{K}_h \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h)) + \frac{R \gamma a_1 \beta_1}{1+(R-1)\xi} \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h), i \in k^{\Omega_g},
\end{aligned}$$

$$f_i^{(1)} = \begin{cases} \frac{1}{1+(R-1)\xi} \left(\frac{a_0}{R\gamma} \frac{\partial^2(\Theta^* + R\gamma h^*)}{\partial t^2} + \frac{\beta_1(a_0 + a_1)}{R\gamma} \frac{\partial(\Theta^* + R\gamma h^*)}{\partial t} \right) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{Y}_i}, & i \in k^{\Omega_g}, \\ -\frac{2}{g} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial z} \frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial u_3}{\partial z} - \frac{\partial u_2}{\partial y} \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{Y}_i}, & i \in k^{\Omega_r}, \\ H_1(\mathbf{Y}_i, t), & i \in k^{\Gamma_1^{(h)}}, \\ H_2(\mathbf{Y}_i, t), & i \in k^{\Gamma_1^{(u)}}, \\ \mathbf{z}_i^Y, & i \in k^{\Gamma}, \end{cases}$$

$$l_{ij}^{(01)} = -(1+e)\nabla \cdot (\mathbf{K}_c \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c)), i \in k^{\Omega_g}, \quad l_{ij}^{(02)} = -(1+e)\nabla \cdot (\mathbf{K}_T \nabla \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T)), i \in k^{\Omega_g},$$

$$\tilde{m}_{ij}^{(1)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_h), i \in k^{\Omega_g}, \quad \tilde{m}_{ij}^{(2)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_c), \quad \tilde{m}_{ij}^{(3)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_T),$$

$$\tilde{m}_{ij}^{(4)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_N), i \in k^{\Omega_g}, \quad \tilde{m}_{ij}^{(5)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_s), \quad \tilde{m}_{ij}^{(6)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_u^3), \quad \tilde{m}_{ij}^{(7)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_u^2),$$

$$\tilde{m}_{ij}^{(8)} = \varphi_j(r_{ji}, \varepsilon_u^1), i \in k^{\Omega_r}, \quad \tilde{f}_i^{(1)} = h_0(\mathbf{Y}_i), i \in k^{\Omega_g}, \quad \tilde{f}_i^{(2)} = c_0(\mathbf{Y}_i), \quad \tilde{f}_i^{(3)} = T_0(\mathbf{Y}_i),$$

$$\tilde{f}_i^{(4)} = N_0(\mathbf{Y}_i), i \in k^{\Omega_g}, \quad \tilde{f}_i^{(5)} = S_0(\mathbf{Y}_i), \quad \tilde{f}_i^{(6)} = u_0^3(\mathbf{Y}_i), \quad \tilde{f}_i^{(7)} = u_0^2(\mathbf{Y}_i),$$

$$\tilde{f}_i^{(8)} = u_0^1(\mathbf{Y}_i), i \in k^{\Omega_r}, \quad r_{ji} = \|\mathbf{Y}_i - \mathbf{X}_j\|_2.$$

Особливого визначення вимагають елементи матриць та вектор–стовпців задачі Коші (6.83)–(6.92) для колокаційних точок, які лежать на межах спряження Γ_{ij} , $i < j$, $i = \overline{1,7}$, $j = \overline{1,7}$. Для прикладу розглянемо систему рівнянь (6.88), яка відповідає рівнянню теплопровідності (6.60). Також розглянемо лише межу Γ_{12} . Для інших систем рівнянь із задачі Коші (6.83)–(6.92) та інших меж спряження нижчеописана процедура здійснюється по аналогії. Нехай $\mathbf{Y}_\alpha$ та $\mathbf{Y}_\beta$ дві колокаційні точки, координати яких співпадають і $\alpha \in k_{\Gamma_{12}}^{\Omega_1}$, $\beta \in k_{\Gamma_{12}}^{\Omega_2}$. Тоді, всі елементи рядків під номерами α та β системи рівнянь (6.88) обнуляються і для них присвоюються значення згідно наступного правила:

$$l_{\alpha,j}^{(3)} = \begin{cases} \varphi_j(r_{j\alpha}, \varepsilon_T), & j \in k^{\overline{\Omega_1}}, \\ -\varphi_j(r_{j\beta}, \varepsilon_T), & j \in k^{\overline{\Omega_2}}, \end{cases} \quad l_{\beta,j}^{(3)} = \begin{cases} (-\lambda \nabla \varphi_j(r_{j\alpha}, \varepsilon_T) + \\ + \rho c_p \mathbf{u} \cdot \varphi_j(r_{j\alpha}, \varepsilon_T), \mathbf{n}), & j \in k^{\overline{\Omega_1}}, \\ -(-\lambda \nabla \varphi_j(r_{j\beta}, \varepsilon_T) + \\ + \rho c_p \mathbf{u} \cdot \varphi_j(r_{j\beta}, \varepsilon_T), \mathbf{n}), & j \in k^{\overline{\Omega_2}}. \end{cases}$$

Зауважимо, що якщо при деякому наборі індексів коефіцієнт однієї із матриць або вектор–стовпця задачі Коші (6.83)–(6.92) згідно вищенаведених формул не визначений, то він приймається рівним нулю.

Питання схем дискретизації в часі задачі Коші вигляду (6.83)–(6.92) детально розглянуті в розділі 3.

6.3. Апроксимація межі контактного розмиву та депресійної кривої тіла ґрунтової греблі за методом радіальних базисних функцій

Кінематичні граничні умови (6.22), (6.49) та (6.72) використовуються для апроксимації положення меж розмиву. Для прикладу розглянемо межу $\Gamma_{12}(\mathbf{X}, t)$. Апроксимація інших меж розмиву здійснюється аналогічно. Якщо на часовому шарі під номером (S) крайові задачі (6.1)–(6.26), (6.27)–(6.53) або (6.54)–(6.81) розв’язані, то положення $\Gamma_{12}^{(S+1)}(\mathbf{X})$ межі $\Gamma_{12}(\mathbf{X}, t)$ на часовому шарі $(S+1)$ визначається з умови

$$-(1-n)\rho_T \frac{\Gamma_{12}^{(S+1)}(\mathbf{X}) - \Gamma_{12}^{(S)}(\mathbf{X})}{\tau} = k_{er}^{(12)S^{(S+1)}}(\mathbf{X}) \left((\mathbf{v}^{(S+1)}, \mathbf{n}) + |(\mathbf{v}^{(S+1)}, \mathbf{d})| \right), S = \overline{0, M-1}.$$

При $t = 0$ в задачах (6.1)–(6.26) та (6.27)–(6.53) межа $\Gamma_{12}(\mathbf{X}, t)$ складається з одного вузла, який розміщений в точці E_2 , а напрямки зовнішніх нормалей визначаються вздовж координатних осей.

Умови (6.48) та (6.71) використовуються для апроксимації положення вільної межі Γ ґрунтової греблі. Тоді для вузла $\mathbf{X}_i \in \Gamma^{(S)}$ з другої із умов (6.48) маємо

$$(\mathbf{u}^{(S+1)}, \mathbf{n})_{\mathbf{X}_i} = -n \frac{\Gamma_i^{(S+1)} - \Gamma_i^{(S)}}{\tau},$$

а для другої з умов (6.71)

$$(\mathbf{u}^{(S+1)}, \mathbf{n})_{\mathbf{X}_i} = n \frac{\Gamma_i^{(S+1)} - \Gamma_i^{(S)}}{\tau},$$

Де $\Gamma_i^{(S)}$ – відоме положення депресійної кривої у вузлі $\mathbf{X}_i$;

$\Gamma_i^{(S+1)}$ – нове положення депресійної кривої у вказаному вузлі, яке визначається зміщенням вузла в напрямку зовнішньої нормалі на величину $\frac{\tau}{n}(\mathbf{u}^{(S+1)}, \mathbf{n})_{\mathbf{x}_i}$.

6.4. Результати чисельних експериментів з дослідження взаємозв'язаних процесів фільтраційної консолідації та фільтраційного руйнування гетерогенних пористих середовищ

Програмна реалізація алгоритмів чисельного розв'язання вищенаведених крайових задач методом РБФ виконана з використанням сучасних технологій об'єктно-орієнтованого та візуально-подійного програмування [65, 70]. Системи лінійних алгебричних рівнянь методу РБФ розв'язувались методом найменших квадратів [139, 206, 281] з подальшим застосуванням методу Крейга [215].

Приклад 6.1.

1. Розмірність задачі: $R=2$. Коефіцієнт бічного тиску $\xi = 0.75$.

2. Область розв'язання задачі: Область фільтраційної консолідації масиву ґрунту під плоским флутбетом зображена на рис. 6.1 при наступних координатах вершин: $A(-10; 0)$, $B(-10; 10)$, $E_1(-5; 0)$, $E_2(5; 0)$, $D(10; 0)$, $F(10; 10)$. Розмірність визначається у метрах. Також межа BF (див. рис. 6.1) є прямою і паралельною до осі ox .

3. Чисельний метод: Чисельні розрахунки проведено методом радіальних базисних функцій при початковій кількості вузлів 861 (рис. 6.4). В ході обчислень в околі межі Γ проводилось згущення вузлової сітки. Множини вузлів–центрів та колокаційних точок співпадали. Для побудови розривних РБФ використовувалась мультиквадратична РБФ $\varphi(r, \varepsilon) = \sqrt{1 + (r\varepsilon)^2}$, де $\varepsilon > 0$ – параметр форми. В області ґрунту значення всіх параметрів форми покладались рівними 1.3, а в області розмиву 10^7 .

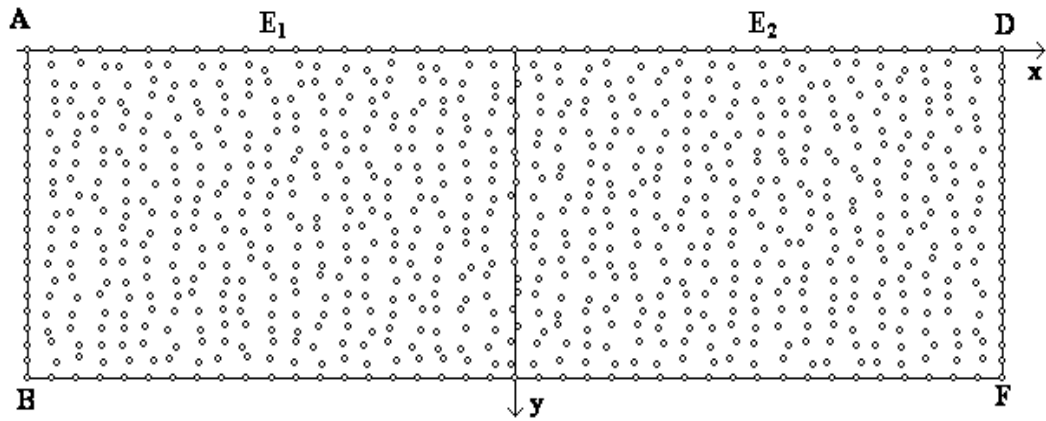


Рис. 6.4. Вузлова сітка методу РБФ чисельного експерименту 6.1

4. **Схема дискретизації в часі:** Для дискретизації в часі використовувалась лінеаризована чисто неявна різницева схема з кроком $\tau = 10$ діб.

5. **Вплив солеперенесення:** Враховувався через явище хімічного осмосу зі сталими коефіцієнтами $k_{11}^{(c)} = k_{22}^{(c)} = 2.8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^5 / \text{кг} \cdot \text{доба}$, $k_{12}^{(c)} = k_{21}^{(c)} = 0 \text{ м}^5 / \text{кг} \cdot \text{доба}$ та через залежність коефіцієнта фільтрації від концентрації порового сольового розчину. Параметри масоперенесення: $D_{11} = D_{22} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2 / \text{доба}$, $D_{12} = D_{21} = 0 \text{ м}^2 / \text{доба}$.

6. **Вплив теплоперенесення:** Враховувався через явище термічного осмосу зі сталими коефіцієнтами $k_{11}^{(T)} = k_{22}^{(T)} = 2.8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 / ^\circ \text{С} \cdot \text{доба}$, $k_{12}^{(T)} = k_{21}^{(T)} = 0 \text{ м}^2 / ^\circ \text{С} \cdot \text{доба}$ та через залежність коефіцієнта фільтрації від температури пористого середовища. Також враховувалось явище термодифузії з коефіцієнтом $D_{11}^{(T)} = D_{22}^{(T)} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ кг} / (\text{м} \cdot \text{доба} \cdot ^\circ \text{С})$, $D_{21}^{(T)} = D_{12}^{(T)} = 0 \text{ кг} / (\text{м} \cdot \text{доба} \cdot ^\circ \text{С})$.

Параметри теплоперенесення: $\lambda_{11} = \lambda_{22} = 108 \text{ кДж} / \text{м} \cdot ^\circ \text{С} \cdot \text{доба}$, $c_\rho = 4,2 \text{ кДж} / \text{кг} \cdot ^\circ \text{С}$, $\lambda_{12} = \lambda_{21} = 0 \text{ кДж} / \text{м} \cdot ^\circ \text{С} \cdot \text{доба}$, $c_T = 2137 \text{ кДж} / \text{м}^3 \cdot ^\circ \text{С}$, $\rho = 1100 \text{ кг} / \text{м}^3$.

7. **Вплив наявності солей в рідкій та твердій фазах на рівняння нерозривності:** Не враховувалось.

8. **Вплив термічного розширення фаз ґрунту:** Не враховувалось.

9. Наявність газу: Ґрунт вважався двофазним при середньому значенні коефіцієнта пористості $e = 0.70$ та пористості $n = 0.40$.

10. Залежність коефіцієнта фільтрації від функції напорів, температури та концентрації солей в рідкій фазі: Коефіцієнт фільтрації покладался незалежним від функції надлишкових напорів. Для випадку постійного коефіцієнта фільтрації

$k_{11}^{(h)} = k_{22}^{(h)} = k_{20} = 0.1 \frac{\text{м}}{\text{доба}}$. Залежність $k_{11}^{(h)} = k_{22}^{(h)} = k(c, T)$ визначалася шляхом

апроксимації функції $k(c, T)$ радіальними базисними функціями [300, 340, 402] аналогічно прикладу 3.1.

11. Повзучість скелету ґрунту: Не враховувалась. Між сумою головних напружень та коефіцієнтом пористості приймалась лінійна залежність (2.9) у вигляді спрямленого відрізка компресійної кривої при $a = 5.12 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{Н}$.

12. Масообмінні процеси: Не враховувались і коефіцієнт швидкості масообміну $\gamma_1 = 0 \text{ с}^{-1}$.

13. Наявність суспензії в області розмиву: Враховувалась. В'язкість суспензії в області розмиву покладалась рівною $\nu = 9 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}^2}{\text{доба}}$. При цьому коефіцієнт дисперсії суспензії покладался рівним $D_{11}^{(s)} = D_{22}^{(s)} = 0.1 \text{ м}^2/\text{доба}$, $D_{12}^{(s)} = D_{21}^{(s)} = 0 \text{ м}^2/\text{доба}$. Швидкість осідання суспензії покладалась рівною нулю.

14. Конкретизація співвідношення $\mathbf{v} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t, \mathbf{u})$, $\mathbf{X} \in \Gamma_{12}$: Для конкретизації вказаного співвідношення, між швидкістю фільтрації та швидкістю руху твердих частинок приймалися дві залежності: 1) $\mathbf{v} = \frac{\alpha^+}{n} \mathbf{u}$; 2)

$$\mathbf{v} = \frac{\alpha^+}{2n} \cdot \mathbf{u} \left(th \left(\frac{|\mathbf{u}|}{u_{kr}} - 5 \right) + th 4 \right). \quad \text{В обох випадках} \quad \alpha^+ = \begin{cases} (1 - s/(1 - n)), & u \geq u_{kr}, \\ 0, & u < u_{kr}. \end{cases}$$

Причому припускалося, що частинка, яка відірвалася від масиву ґрунту миттєво

виноситься фільтраційним потоком. Тут u_{kr} – критичне (або розмиваюче) значення швидкості фільтрації. Критична швидкість фільтрації покладалась рівною $u_{kr} = 1.2 \frac{\text{м}}{\text{доба}}$. Коефіцієнт розмиву покладалась рівним $k_{er} = 0.01$.

15. Граничні умови:

$$\begin{aligned} (\mathbf{q}_c, \mathbf{n})|_{ABFD \cup E_1 E_2} &= 0, \quad c|_{AE_1} = C_m(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in AE_1, \quad c|_{E_2 D} = C_m(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in E_2 D, \\ (\mathbf{q}_T, \mathbf{n})|_{ABFD \cup E_1 E_2} &= 0, \quad T|_{AE_1} = T_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in AE_1, \quad T|_{E_2 D} = T_2(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in E_2 D, \\ (\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{ABFD \cup E_1 G_1} &= 0, \quad h|_{AE_1} = H_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in AE_1, \quad h|_{G_2 D} = H_2(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in G_2 D, \\ \mathbf{u}|_{G_1 E_2} &= 0, \quad \frac{\partial u_3}{\partial z}|_{E_2 G_2} = 0, \quad u_1|_{E_2 G_2} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial z}|_{G_1 E_2} = 0, \quad h|_{E_2 G_2} = H_2(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in E_2 G_2, \\ (\mathbf{q}_s, \mathbf{n})|_{G_1 E_2} &= 0, \quad s|_{E_2 G_2} = 0, \quad (\mathbf{q}_s, \mathbf{n})|_{\Gamma} = -(1-n) \frac{d\Gamma_{12}}{dt}. \end{aligned}$$

де $T_1(\mathbf{X}, t) = T_2(\mathbf{X}, t) = 30^\circ \text{C}$, $H_1(\mathbf{X}, t) = 32 \text{ м}$, $H_2(\mathbf{X}, t) = 2 \text{ м}$, $C_m(\mathbf{X}, t) = 350 \text{ г/л}$, $C_{\min}(\mathbf{X}, t) = 8 \text{ г/л}$.

16. Початкові умови: Початковий розподіл концентрації солей

$$c_0(\mathbf{X}) = \begin{cases} C_m, & \mathbf{X} \in AE_1 \cup E_2 D, \\ C_{\min}, & \mathbf{X} \notin AE_1 \cup E_2 D, \end{cases} \quad \text{та температури} \quad T_0(\mathbf{X}) = \begin{cases} T_{\max}, & \mathbf{X} \in AE_1 \cup E_2 D, \\ T_{\min}, & \mathbf{X} \notin AE_1 \cup E_2 D. \end{cases}$$

Тут $T_{\max} = 30^\circ \text{C}$, $T_{\min} = 4^\circ \text{C}$. Початковий розподіл напорів $h_0(\mathbf{X})$, $\mathbf{X} \in \overline{\Omega_1}$, визначався як розв'язок наступної крайової задачі:

$$\nabla \cdot (\mathbf{K}_h \nabla h_0(\mathbf{X})) = 0, \quad \mathbf{X} \in \Omega_1,$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{AB} = (\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{DF} = (\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{BF} = 0,$$

$$h_0|_{AE_1} = H_1(\mathbf{X}, 0), \quad \mathbf{X} \in AE_1; \quad h_0|_{G_2 D} = H_2(\mathbf{X}, 0), \quad \mathbf{X} \in G_2 D; \quad h_0|_{E_1 G_1} = q, \quad \mathbf{u} = -\mathbf{K}_h \nabla h_0(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \Omega_1,$$

де q – величина напору на межі ґрунту, яка еквівалентна величині прикладеного зовнішнього навантаження.

17. Основні завдання чисельного експерименту:

Вияснення впливу теплосолеперенесення на контактний розмив ґрунту у випадку його фільтраційної консолідації під плоским флютбетом.

На рис. 6.5 зображено форму області розмиву через 180 діб від початку процесу розмиву. Якщо в якості співвідношення (6.14) прийняти залежність

$$\mathbf{v} = \frac{\alpha^+}{n} \mathbf{u}, \text{ де } \alpha^+ = \begin{cases} (1 - s/(1 - n)), & u \geq u_{kr}, \\ 0, & u < u_{kr}, \end{cases} \text{ то у випадку фільтрації чистої води в}$$

ізотермічному режимі маємо: $G_1(4,07; 0)$, $G_2(6,36; 0)$, $S(5,25; 0,77)$. Тобто, ширина області розмиву по верхній межі складає $l = 2,29$ м, а максимальна глибина $d = 0,77$ м. При урахуванні впливу теплосолеперенесення, координати точок наступні: $G_1(3,47; 0)$, $G_2(6,53; 0)$, $S(5,12; 1,05)$ і $l = 3,06$ м, $d = 1,05$ м. Це вказує на те, що утворена зона фільтраційного руйнування є більшою, якщо на проходження процесів фільтраційної консолідації та контактного розмиву враховувати вплив техногенних факторів. Це пояснюється залежністю параметрів фільтрації від теплового та сольового режиму ґрунту.

Якщо в якості співвідношення (6.14) приймалась залежність

$$\mathbf{v} = \alpha^+ / 2n \cdot \mathbf{u} (th(|\mathbf{u}|/u_{kr} - 5) + th4), \text{ де } \alpha^+ = \begin{cases} (1 - s/(1 - n)), & u \geq u_{kr}, \\ 0, & u < u_{kr}, \end{cases} \text{ то маємо:}$$

1. У випадку без урахування впливу теплосолеперенесення $G_1(4,63; 0)$, $G_2(5,74; 0)$, $S(5,02; 0,39)$, $l = 1,11$ м, $d = 0,39$ м;
2. При урахування впливу техногенних факторів $G_1(3,37; 0)$, $G_2(5,28; 0)$, $S(5,12; 0,53)$, $l = 1,91$ м, $d = 0,53$ м.

Тобто, в порівнянні з попереднім випадком, розміри області розмиву зменшуються, але знову суттєвим виявляється урахування впливу теплосолеперенесення. Також виявляється, що при математичному моделюванні вказаних процесів важливим є урахування інтенсивності розмиву.

Відзначимо ще кілька узагальнюючих висновків:

1. Зі збільшенням коефіцієнта дисперсії суспензії величина зони розмиву збільшується. Це пояснюється тим, що в результаті концентрація суспензії в околі межі розмиву зменшується і інтенсивність розмиву зростає.
2. У випадку застосування моделі розмиву на основі однофазної задачі Стефана величина зони фільтраційного руйнування ґрунту збільшується в середньому на

25 % (в порівнянні з двофазною задачею). Це означає, що дану модель можна застосовувати для попередніх прогностичних розрахунків. Адже чисельне розв'язання відповідної крайової задачі в однофазній математичній моделі набагато простіше, аніж у випадку двофазної математичної моделі.

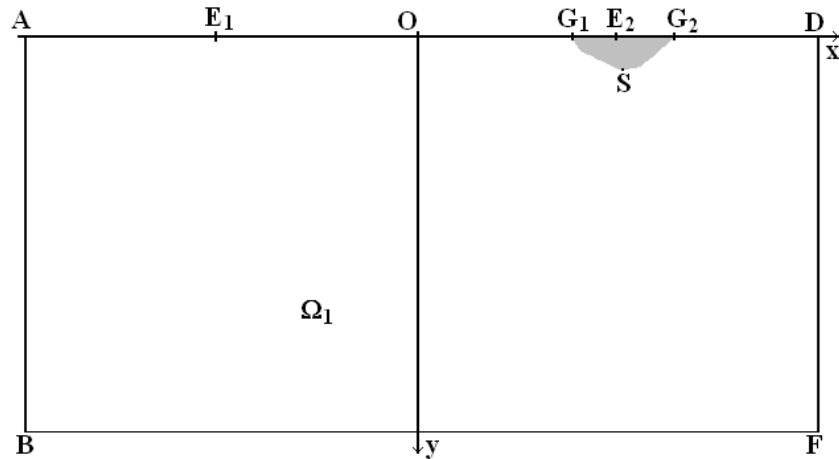


Рис. 6.5. Схематичне зображення зони розмиву в прикладі 6.1

Приклад 6.2.

1. Розмірність задачі: $R=2$. Коефіцієнт бічного тиску $\xi^{(i)} = 0.75$, $i \in \{1;2;4;5;6\}$. Тут індекс зверху означає номер області.

2. Область розв'язання задачі: Область фільтраційної консолідації тіла греблі з глинистим ядром та масиву ґрунту в її основі зображена на рис. 6.3. Зосереджений шлях фільтрації є тріщиною діаметром 20 см, паралельною до осі ox . Нижня межа BF області Ω_5 теж приймалась паралельною до осі координат ox . При цьому координати деяких точок областей в розглядуваній задачі наступні: $A(-10; 0)$, $B(-10; -10)$, $E(68; 0)$, $D(78; 0)$, $F(78; -10)$. Розмірність визначається у метрах. Висота тіла греблі – 20 метрів, а довжина верхньої основи – 8 метрів. Довжина нижньої основи тіла греблі складає 68 метрів. Довжина верхньої основи глинистого ядра складає 2 метри, а нижньої основи – 12 метрів. Гребля є рівнобедреною трапецією, як і її глинисте ядро. Крім того, глинисте ядро розміщене симетричне відносно областей Ω_1 та Ω_6 . Зосереджений шлях фільтрації розміщений на висоті 5 метрів від нижньої основи тіла греблі.

3. Чисельний метод: Чисельні розрахунки проведено методом радіальних базисних функцій при початковій кількості колокаційних та вузлових точок в областях: $n^{(1)} = n^{(6)} = 448$, $n^{(2)} = 90$, $n^{(3)} = 62$, $n^{(4)} = 76$, $n^{(5)} = 1155$. В ході обчислень в околі вільної поверхні Γ та меж розмиву проводилось згущення вузлових сіток. Множини вузлів–центрів та колокаційних точок співпадали лише на початковому часовому шарі. Для побудови розривних РБФ використовувалась мультиквадратична РБФ $\varphi(r, \varepsilon) = \sqrt{1 + (r\varepsilon)^2}$, де $\varepsilon > 0$ – параметр форми. В областях ґрунту значення всіх параметрів форми покладались рівними 1.3, а в областях розмиву 10^7 .

4. Схема дискретизації в часі: Для дискретизації в часі використовувалась лінеаризована повністю неявна різницева схема з кроком $\tau = 5$ діб.

5. Вплив солеперенесення: Враховувався через явище хімічного осмосу зі сталими коефіцієнтами $k_c^{(i)} = 2.8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^5/\text{кг} \cdot \text{доба}$, $i \in \{1; 2; 4; 5; 6\}$ та через залежність коефіцієнта фільтрації від концентрації порового сольового розчину. Параметри масоперенесення: $D_c^{(i)} = 0.001 \text{ м}^2/\text{доба}$, $i = \overline{1, 7}$. Індекс зверху означає номер області.

6. Вплив теплоперенесення: Враховувався через явище термічного осмосу зі сталими коефіцієнтами $k_T^{(i)} = 2.8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/^\circ\text{C} \cdot \text{доба}$, $i \in \{1; 2; 4; 5; 6\}$ та через залежність коефіцієнта фільтрації від температури пористого середовища. Також враховувалось явище термодифузії з коефіцієнтом $D_T^{(i)} = 10^{-4} \text{ м}^2/\text{доба} \cdot ^\circ\text{C}$, $i = \overline{1, 7}$. Параметри теплоперенесення: $\lambda^{(i)} = 108 \text{ кДж}/\text{м} \cdot ^\circ\text{C} \cdot \text{доба}$, $c_p^{(i)} = 4.2 \text{ кДж}/\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}$, $c_T^{(i)} = 2137 \text{ кДж}/\text{м}^3 \cdot ^\circ\text{C}$, $\rho = 1100 \text{ кг}/\text{м}^3$, $i = \overline{1, 7}$.

7. Вплив наявності солей в рідкій та твердій фазах на рівняння нерозривності: Не враховувалось.

8. Вплив термічного розширення фаз ґрунту: Не враховувалось.

9. Наявність газу: Ґрунт вважався двофазним при середньому значенні коефіцієнта пористості $\bar{e}^{(i)} = 0.70$ та пористості $\bar{n}^{(i)} = 0.40$, $i \in \{1;2;4;5;6\}$.

10. Залежність коефіцієнта фільтрації від напорів, температури та концентрації солей в рідкій фазі: Коефіцієнт фільтрації покладался незалежним від функції напорів. Ґрунти основи та тіла греблі вважались ізотропними за своїми характеристиками. Коефіцієнт фільтрації чистої води при температурі $T = 20^\circ\text{C}$ для ґрунтів різних областей покладалися рівними $k^{(1)} = k^{(6)} = 0,1 \text{ м/доба}$, $k^{(2)} = k^{(4)} = 0,01 \text{ м/доба}$, $k^{(5)} = 0,5 \text{ м/доба}$, де верхній індекс означає номер області. Залежність коефіцієнта фільтрації від температури та концентрації розчинених солей визначалась згідно прикладу 3.1.

11. Повзучість скелету ґрунту: Не враховувалась. Між сумою головних напружень та коефіцієнтом пористості приймалась лінійна залежність (2.9) у вигляді спрямленого відрізка компресійної кривої при $a = 5.12 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{Н}$, $i \in \{1;2;4;5;6\}$.

12. Масообмінні процеси: Не враховувались і коефіцієнти швидкості масообміну $\gamma_m^{(i)} = 0 \text{ доба}^{-1}$, $i \in \{1;2;4;5;6\}$.

13. Наявність суспензії в областях розмиву: Враховувалась. В'язкість рідини в областях розмиву $\nu = 0.08 \text{ м}^2/\text{доба}$.

14. Конкретизація співвідношення $\mathbf{v} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t, \mathbf{u})$: Для конкретизації вказаного співвідношення, між швидкістю фільтрації та швидкістю руху твердих частинок приймалась залежність $\mathbf{v} = \alpha^+ / n \cdot \mathbf{u}$, де

$\alpha^+ = \begin{cases} (1 - s/(1 - n)), u \geq u_{kr}; \\ 0, u < u_{kr}. \end{cases}$ Критична швидкість фільтрації покладалась рівною

$u_{kr}^{(3)} = 0.2 \text{ м/доба}$, $u_{kr}^{(7)} = 0.5 \text{ м/доба}$, а коефіцієнти розмиву $k_{er}^{(13)} = 0.1$, $k_{er}^{(57)} = 0.01$.

15. Граничні умови: В області верхнього б'єфу концентрація солей покладалась рівною $C_{\max} = 160 \text{ г/літр}$, в області нижнього б'єфу $c = C_{\min}$, а

температура $T|_{\Gamma \cup \Gamma_v \cup \Gamma_r} = T_{\max}$, де $T_{\max} = 30^\circ \text{C}$; $T|_{\Gamma_l} = yT_{\max} + \frac{H_1 - y}{H_1} T_{\min}$, $y \in \Gamma_l$. Напір у

верхньому б'єфі покладался рівним 20 м, а у нижньому – 1 м.

16. Початкові умови: Початковий розподіл концентрації солей та температури $c_0(\mathbf{X}) = C_{\min}$, $T_0(\mathbf{X}) = T_{\min}$, $\mathbf{X} \in \bar{\Omega}$, де $C_{\min} = 5 \text{ г/літр}$, $T_{\min} = 10^\circ \text{C}$.

Початковий розподіл напорів $h_0(\mathbf{X})$, $\mathbf{X} \in \bar{\Omega}_5$, визначався як розв'язок наступної крайової задачі:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{K}_h \nabla h_0(\mathbf{X})) &= 0, \mathbf{X} \in \Omega_5, \\ (\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{AB} &= (\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{DF} = (\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{BF} = 0, \\ h_0|_{AO} &= H_1, h_0|_{ED} = H_2, h_0|_{OE} = q, \\ \mathbf{u} &= -\mathbf{K}_h \nabla h_0(\mathbf{X}), \mathbf{X} \in \Omega_5, \end{aligned}$$

де q – величина напору на межі ґрунту, яка еквівалентна величині прикладеного зовнішнього навантаження від ваги ґрунту тіла греблі.

Вважалось, що початковий розподіл напорів в тілі греблі зумовлюється власною вагою ґрунту. Тобто, $h_0(\mathbf{X}) = z_\Gamma \cdot \gamma_\Gamma / \gamma + z$, де z_Γ – вертикальна відстань від точки з координатами $\mathbf{X}$ до верхньої межі греблі (висота стовпа ґрунту прикладеного до даної точки); $\gamma_\Gamma = 1.95 \cdot 10^4 \text{ Па/м}^3$ – питома вага ґрунту; $\gamma = 1.1 \cdot 10^4 \text{ Па/м}^3$ – питома вага порового сольового розчину.

17. Основні завдання чисельного експерименту: Вияснення впливу теплосолеперенесення, наявності зосередженого шляху

фільтрації та урахування руху суспензії на контактний розмив ґрунту у випадку його фільтраційної консолідації в основі та тілі ґрунтової греблі.

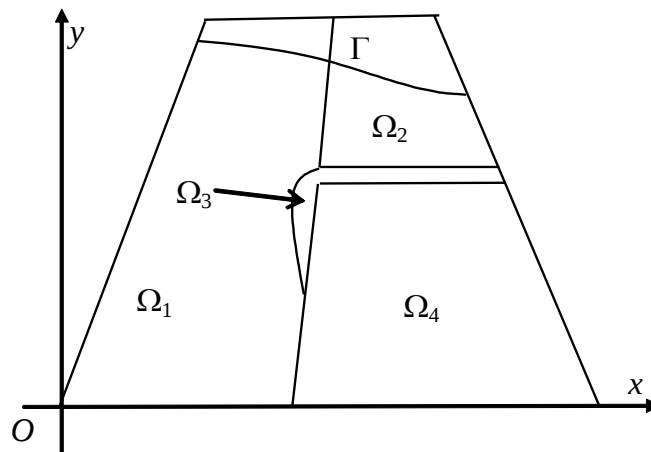


Рис. 6.6. Схематичне зображення зони розмиву при наявності зосередженого шляху фільтрації

Як показують результати чисельних експериментів в початковий момент часу розмив розпочинається на межі контакту тіла та основи ґрунтової греблі (область Ω_7). Це пояснюється наявністю великих надлишкових напорів в тілі та основі ґрунтової греблі і відповідною спрямованістю фільтраційного потоку вздовж межі контакту в напрямку осі координат ox . Так, через $t = 100$ діб після початку процесу консолідації глибина області розмиву Ω_7 складає 102 см, а довжина 626 см. Однак, при розсіюванні надлишкових напорів, темпи зростання величини зони розмиву Ω_7 зменшуються. Так, при $t = 250$ діб після початку процесу консолідації розміри області розмиву Ω_7 залишаються такими ж, як і при $t = 100$ діб, а далі незначно зростають.

Область Ω_3 починає поширюватись в область Ω_1 лише через $t = 200$ діб після початку процесу консолідації. Це пояснюється тим, що напори в глинистому ядрі зменшуються і концентрація солей та температура починають в області Ω_1 збільшуватись. В результаті коефіцієнт фільтрації, а отже і швидкість фільтрації починають теж зростати. Тому в певний момент часу швидкість фільтрації стає більшою за критичну. Спочатку розмив являє собою зосереджений шлях фільтрації вздовж межі контакту ґрунту в областях Ω_1 та

Ω_4 (рис. 6.6). При $t = 250$ діб довжина даного шляху 34 см, а діаметр 7 см. При $t = 500$ діб довжина даного шляху 188 см, а діаметр 11 см. В процесі подальшого розсіювання надлишкових напорів, поширення забруднень та зростання температури, форма розмиву починає набувати форми каверни. При $t = 1000$ діб найбільша довжина даного розмиву вздовж контакту областей Ω_1 та Ω_4 складає 305 см, а діаметр 165 см.

У випадку без урахування впливу тепломасоперенесення, при вказаних параметрах, протягом досліджуваного проміжку часу розмиву через зосереджений шлях фільтрації взагалі не відбувається. Це вказує на те, що величина зони розмиву значно залежить від урахування процесів теплосолеперенесення.

6.5. Висновки до Розділу 6

Отже, в розділі 6 дисертації

1. Наведено постановки проблем дослідження взаємних процесів фільтраційної консолідації та контактного розмиву гетерогенних пористих середовищ (на прикладі ґрунтів) в основах гідротехнічних споруд – бетонних флютбетів та ґрунтових гребель. Також наведено постановку задачі про визначення впливу наявного зосередженого шляху фільтрації в глинистому ядрі ґрунтової греблі на проходження її фільтраційної консолідації, розмиву ґрунту через зосереджений шлях фільтрації та впливу одночасно функціонуючих фізичних процесів переносу тепла та хімічних домішок в поровій рідині.
2. Використовуючи результати розділу 2, сформовано нові математичні моделі вказаних процесів. Знайдено чисельні розв'язки відповідних нелінійних крайових задач в областях з рухомими межами безсітковим методом РБФ. Запропоновано схеми апроксимації положень депресійної поверхні (при дослідженні процесів в тілі ґрунтової греблі) та меж областей розмиву.
3. При дослідженні процесів під плоским флютбетом у випадку лінійної залежності інтенсивності розмиву від критичної швидкості фільтрації при урахуванні впливу теплосолеперенесення довжина області розмиву зростає.

на 34%, а глибина – на 36% в порівнянні з випадком чистої води та ізотермічних умов на момент часу $t=180$ діб. Якщо для інтенсивності розмиву приймалась нелінійна залежність від критичної швидкості фільтрації, то, наприклад, у випадку урахування впливу теплосолеперенесення довжина області розмиву зменшилась на 17 %, а глибина – на 49 % (в порівнянні з лінійною залежністю на момент часу $t=180$ діб). Тобто, при математичному моделюванні вказаних процесів важливим є урахування як інтенсивності розмиву, так і впливу техногенних факторів.

Також при дослідженні взаємних процесів фільтраційної консолідації та контактного розмиву під плоским флютбетом зроблено ще кілька узагальнюючих висновків:

- 3.1. Зі збільшенням коефіцієнта дисперсії суспензії величина зони розмиву збільшується. Це пояснюється тим, що в результаті концентрація суспензії в околі межі розмиву зменшується і інтенсивність розмиву зростає.
- 3.2. У випадку застосування моделі розмиву на основі однофазної задачі Стефана величина зони фільтраційного руйнування ґрунту збільшується в середньому на 25 % (в порівнянні з двофазною задачею). Це означає, що дану модель можна застосовувати для попередніх прогнозних розрахунків. Адже чисельне розв'язання відповідної крайової задачі в однофазній математичній моделі набагато простіше, аніж у випадку двофазної математичної моделі.
4. Як показують результати чисельних експериментів з дослідження взаємних процесів фільтраційної консолідації та контактного розмиву тіла та основи ґрунтової греблі в початковий момент часу розмив розпочинається на межі контакту тіла та основи ґрунтової греблі в області низового укусу. Це пояснюється наявністю великих надлишкових напорів в поровій рідині і відповідною спрямованістю фільтраційного потоку вздовж межі контакту в напрямку осі координат ox . Так, через $t=100$ діб після початку процесу

консолідації глибина області розмиву складає 102 см, а довжина 626 см. Однак, при розсіюванні надлишкових напорів, темпи зростання величини зони розмиву зменшуються. Так, при $t = 250$ діб після початку процесу консолідації розміри області розмиву залишаються такими ж, як і при $t = 100$ діб, а далі незначно зростають.

Область розмиву за рахунок зосередженого шляху фільтрації в ядрі греблі починає поширюватись в область верхнього укусу тіла греблі лише через $t = 200$ діб після початку процесу консолідації. Це пояснюється тим, що напори в глинистому ядрі з часом зменшуються і концентрація солей та температура починають в області верхнього укусу збільшуватись. В результаті коефіцієнт фільтрації, а отже і швидкість фільтрації починають теж зростати. Тому в певний момент часу швидкість фільтрації стає більшою за критичну. Спочатку розмив являє собою зосереджений шлях фільтрації вздовж межі контакту ґрунту верхнього укусу та глинистого ядра греблі. В процесі подальшого розсіювання надлишкових напорів, поширення забруднень та зростання температури, форма розмиву починає набувати форми каверни. Так, наприклад, при $t = 1000$ діб найбільша довжина даного розмиву вздовж вертикальної межі глинистого ядра складає 305 см, а діаметр 165 см.

У випадку без урахування впливу взаємопов'язаних одночасно діючих фізичних процесів переносу тепла та хімічних речовин, при вказаних параметрах, протягом досліджуваного проміжку часу, розмиву через зосереджений шлях фільтрації взагалі не відбувається. Це вказує на те, що величина зони розмиву значно залежить від урахування впливу техногенних факторів

Результати розділу 6 опубліковані в роботах [62, 63, 67, 70, 74, 75, 77, 80, 183, 184, 194, 195].

ОСНОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ РОБОТИ ТА ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота є завершеним науковим дослідженням в якому розв'язано важливу наукову проблему математичного моделювання взаємозв'язаних фізико-хімічних та техногенних процесів фільтраційної консолідації, теплосолеперенесення, фільтраційного руйнування, більш детально – контактного розмиву, наявності зосереджених шляхів фільтрації та контактної багатофракційної суфозії, явищ просідань в гетерогенних пористих середовищах, до яких відносяться ґрунтові основи гідротехнічних, енергетичних, промислових та цивільних об'єктів. В дисертації

1. Сформульовано постановки задач фільтраційної консолідації гетерогенних пористих середовищ в умовах впливу техногенних факторів та комплексу взаємозв'язаних фізико-хімічних процесів, а саме: хімічного та термічного осмосів, залежності коефіцієнта фільтрації від фізико-хімічного стану пористого середовища (концентрації розчинених солей, температури, надлишкових напорів, концентрації суфозійних частинок), гетерогенних хімічних реакцій, зокрема розчинення та випадання солей в осад, теплового розширення фаз ґрунту, наявності рухомих меж в області консолідації, виникнення та поширення областей контактного розмиву, зосереджених шляхів фільтрації, а також явищ багатофракційної контактної суфозії.
2. Побудовано нові математичні моделі процесів фільтраційної консолідації та фільтраційного руйнування гетерогенних пористих середовищ з урахуванням дії одночасно функціонуючих фізичних процесів теплосолеперенесення, гетерогенних хімічних масообмінних процесів, фізичних процесів просідання та розмиву ґрунту, багатофракційної контактної суфозії, чим враховано топологічну складність досліджуваних об'єктів.
3. Виведено кінематичні граничні умови: в задачах консолідації на рухомих межах гетерогенного пористого середовища у випадку урахування в

математичних моделях та для прогнозування величини просідань (набухань); на межі розмиву пористого середовища фільтраційним потоком для прогнозування величини зони розмиву та її еволюції в часі при дослідженнях взаємозв'язаних процесів фільтраційної консолідації та контактного розмиву; на рухомих межах у випадку дослідження взаємозв'язаних процесів фільтраційної консолідації та багатofракційної контактної суфозії.

4. Розвинуто та ефективно використано відомі чисельні методи (метод скінченних різниць, метод скінченних елементів, безсітковий метод радіальних базисних функцій), а також розроблено обчислювальні алгоритми та розрахункові схеми наближеного розв'язання нелінійних задач фільтраційної консолідації та фільтраційного руйнування ґрунтів в умовах впливу техногенних факторів. Програмно реалізовано розроблені алгоритми та створено комплекси програмного забезпечення для дослідження вищевказаних процесів в одно-, дво-, та тривимірному випадках для здійснення прогнозних розрахунків (отримане авторське свідоцтво №51618 (автори П. М. Мартинюк, О. Р. Мічута) на комплекс комп'ютерних програм «Фільтраційна консолідація ґрунтів з урахуванням впливу техногенних факторів»).
5. Проведено ряд чисельних експериментів, які засвідчили можливість значного впливу температури, переносу солей та нелінійної залежності коефіцієнта фільтрації від самих надлишкових напорів на проходження процесів фільтраційної консолідації. Загалом, врахування явищ теплосолеперенесення сприяє швидшому розсіюванню поля надлишкових напорів в області біля дренажних меж і уповільненню такого розсіювання в областях біля непроникних меж. Однак, тривала дія техногенних факторів в областях дренажних меж призводить до переходу ґрунту в переущільнений стан (напори стають меншими нуля). Такий стан не можна вважати стабілізованим. Адже припинення дії техногенних факторів призведе до всмоктування порової рідини, а звідси – до набухання ґрунту,

що, в свою чергу, може викликати нерівномірні деформації ґрунтової поверхні. Різниця між розподілом напорів в областях непроникних меж (наприклад, область прикладеного навантаження) в умовах дії техногенних факторів та без урахування їх складає близько 30%. Прогнозні дані просідання поверхні ґрунту уточнені в межах 150% в порівнянні з даними, отриманими для чистої води при нехтуванні впливом температури. Неоднорідність сольового та теплового полів спричиняє нерівномірність осідань ґрунтової поверхні.

6. Знайдено розв'язки задачі фільтраційної консолідації в тривимірному випадку. Порівнюючи розв'язки задач консолідації з однаковими вхідними даними в одно-, дво- та тривимірному випадках можна констатувати, що зі збільшенням розмірності задачі швидкість розсіювання надлишкових напорів зростає. Цей факт не залежить від урахування впливу техногенних факторів. Зростання швидкості розсіювання пропорційне розмірності задачі. Тому, наприклад, прогнози зроблені на основі одновимірної задачі будуть давати завищені показники термінів консолідації.
7. Проведено порівняння наближених розв'язків нелінійних задач фільтраційної консолідації різними чисельними методами (методом скінченних елементів, методом скінченних різниць, методом радіальних базисних функцій) в одно- та двовимірному випадках. Якісна картина наближених розв'язків співпадає. Щодо кількісної – то максимальні похибки досягаються на межі області, де для шуканих функцій задаються граничні умови другого та третього родів, або в околах кутових точок прикладеного навантаження (на прикладі двовимірної задачі). Відмічена необхідність в спеціальних прийомах для покращення точності апроксимації в методі РБФ граничних умов другого та третього родів.
8. Отримані результати впливу напівпроникного включення на фільтраційну консолідацію гетерогенних пористих середовищ при урахуванні техногенних факторів якісно узгоджуються із спостереженням аномальних напорів та їх перепадів в природних неоднорідних геологічних формаціях.

В дисертаційному дослідженні вперше вдалося змодельовати це явище через використання в умовах спряження ступеня ідеальності напівпроникного включення. Отримані дані свідчать про адекватність побудованої математичної моделі природним процесам. Також для підтвердження адекватності математичної моделі та перевірки достовірності отриманих результатів проведені порівняння даних натурних спостережень з результатами чисельних експериментів щодо консолідації греблі хвостосховища Стебницького Державного гірничо-хімічного підприємства «Полімінерал».

9. Числові дані, отримані із комп'ютерного моделювання взаємозв'язаних процесів фільтраційної консолідації та фільтраційного руйнування ґрунтів засвідчили можливість значного впливу техногенних факторів на результати прогностичних розрахунків. Прогнозні дані глибини та довжини області розмиву можуть уточнюватись в сторону збільшення на 34%–72% залежно від умов. А при наявності зосередженого шляху фільтрації в ядрі греблі величина зони розмиву зростає, аж до повного руйнування верхнього укусу. У випадку без урахування впливу теплосолеперенесення, при вказаних параметрах, протягом досліджуваного проміжку часу розмиву через зосереджений шлях фільтрації взагалі не відбувається. Це вказує на те, що величина зони розмиву значно залежить від впливу техногенних факторів.

У випадку застосування моделі розмиву на основі однофазної задачі Стефана величина зони фільтраційного руйнування ґрунту збільшується в середньому на 25 % (в порівнянні з двофазною задачею). Це означає, що дану модель можна застосовувати для попередніх прогностичних розрахунків.

10. Практичне значення дисертаційної роботи полягає в наступному: проведені в дисертаційній роботі дослідження по розрахунку полів надлишкових та п'єзометричних напорів, розподілу концентрації хімічних речовин, температури, форми та розмірів областей розмиву фільтраційним потоком можуть бути використані при зведені будівель, енергетичних та

гідротехнічних об'єктів, а також при розрахунку стійкості ґрунтових споруд і для прогнозування величини та швидкості осідань основ будівель в умовах фільтрації сольових розчинів в неізотермічних умовах та факторів контактного розмиву і контактної суфозії; результати розв'язання задачі фільтраційної консолідації можуть бути використані для прогнозування швидкості зміщень зсувонебезпечних ґрунтових масивів, які попадають в зону впливу техногенних факторів – проведені чисельні експерименти показали можливість покращення прогнозних розрахунків на 150%–400% для швидкостей зміщень у випадку урахування впливу теплосолеперенесення; визначенні можливих просідань верхньої межі ґрунту при проектуванні та будівництві очисних споруд (підтверджено актом впровадження від науково-виробничого підприємства товариства з обмеженою відповідальністю–фірми «АКВА–U», колективним членом Міжнародної академії наук екології а безпеки життєдіяльності (МАНЕБ) асоційованої при ООН); розрахунку процесів консолідації в умовах впливу техногенних факторів при проектуванні каналізаційних насосних станцій (підтверджено актом впровадження на базі відпочинку «Феміда» (с.м.т. Затока) Національного університету «Одеська юридична академія»); в навчальному процесі при виконанні кваліфікаційних, дипломних та магістерських робіт студентами математичних та природничих спеціальностей, а також в робочих програмах спецкурсів (підтверджено актом впровадження в Національному університеті водного господарства та природокористування).

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Абелев М. Ю. Вопросы применения теории фильтрационной консолидации для сильно сжимаемых водонасыщенных глинистых грунтов / М. Ю. Абелев, Н. А. Цытович. // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1964. – №3. – С. 11–14.
2. Акименко В. В. Монотонные схемы высокого порядка точности для уравнения переноса и параболического типа / В. В. Акименко // Журнал выч. математ. и матем. физики. – 1999. – 39, №5. – С. 838–849.
3. Акименко В. В. Моделирование процессов конвекции–диффузии на основе многомерного интегро–дифференциального уравнения с вырождающейся параболичностью / В. В. Акименко, А. Г. Наконечный, О. Ю. Трофимчук // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – №2. – С. 83–96.
4. Акименко В. В. О построении монотонных разностных схем для уравнений эллиптического и параболического типов методами линейной регуляризации / В. В. Акименко, В. А. Ульшин // Матем. моделирование. – 1998. – Т. 10, №2. – С. 79–88.
5. Анахаев К. Н. Об авариях и повреждениях земляных плотин с водоводами: причины и способы совершенствования противофильтрационной защиты / К. Н. Анахаев, К. А. Гегиев, Б. Х. Амшоков // Гидротехническое строительство. – 2004. – №3. – С. 30–36.
6. Аносова Л. А. Исследование зависимости параметров ползучести глин от их состава и физических свойств / Л. А. Аносова, Р. С. Зиангиров, Т. И. Робустова // Инж. геология. – 1983. – №4. – С. 26–35.
7. Архангельский И. В. Изменение геологической среды при строительстве и эксплуатации атомных станций / И. В. Архангельский // Геоэкология. – 1999. – №4. – С. 310–313.
8. Бакенов Б. Б. Основания и фундаменты на засоленных грунтах / Б. Б. Бакенов. – М.: Стройиздат, 1988. – 135 с.

9. Бейко И. В. Экстремальные модели для численного исследования оптимальных процессов в задачах теплопроводности при наличии погрешностей в исходной информации / И. В. Бейко // Аналитические, численные и аналоговые методы в задачах теплопроводности. – К.: Наук. думка, 1977. – С. 220–233.
10. Бейко І. В. Узагальнені крайові задачі і узагальнені розв'язки оптимізаційних задач у функціональних просторах / І. В. Бейко // Математичне та комп'ютерне моделювання. Сер. техн. науки. –2010.– Вип. 4.–С. 32–42.
11. Бейко І. В. Моделювання та оптимізація параметрів емісійних процесів у повітряному басейні міста / І. В. Бейко, В. І. Ночвай // Математичне та комп'ютерне моделювання. Сер. фіз.–матем. науки. –2008.–Вип. 1.–С. 25–32.
12. Бейко І. В. Методи внутрішньої точки в оптимізації нелінійних керованих процесів / І. В. Бейко, О. В. Щирба // Математичне та комп'ютерне моделювання. Сер. фіз.–матем. науки. –2012.– Вип. 7.–С. 18–36.
13. Беляев Н. Н. Компьютерное моделирование динамики движения и загрязнения подземных вод / Н. Н. Беляев, Е. Д. Коренюк, В. К. Хрущ. – Днепропетровск: Наука и образование, 2001. – 208 с.
14. Біляєв М. М. 3D–розрахунок вертикального відстійника на базі CFD–моделі / М. М. Біляєв, О. К. Нагорна // Наукові праці ВНТУ. – 2012. – №3. – С.1–10.
15. Блехман И. И. Механика и прикладная математика: Логика и особенности приложений математики / И. И. Блехман, А. Д. Мышкис, Я. Г. Пановко. – М.: Наука, 1990. – 360 с.
16. Бокштейн Б. С. Термодиффузия / Б. С. Бокштейн // Соросовский образовательный журнал. – 1999. – №4. – С.40–43.
17. Бомба А. Я. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки / А. Я. Бомба, В. М. Булавацький, В. В. Скопецький. – К.: Наук. думка, 2007. – 291 с.
18. Бомба А. Я. Математичне моделювання нелінійних фільтраційних процесів в просторових середовищах з вільними межами / А. Я. Бомба, В. І. Гаврилюк,

- А. В. Теребус // Вісник Тернопільського нац. техн. ун-ту. Серія математичне моделювання, математика, фізика. – 2011. – Т. 16, №4. – С.168–177.
19. Бомба А. Я. Комплексне моделювання нелінійних фільтраційно–суфозійних процесів у ґрунтових греблях / А. Я. Бомба, В. І. Гаврилюк, А. Теребус, М. М. Хлапук // Вісник Нац. ун-ту водного госп-ва та природокорист. Серія тех. науки. – 2011. – Вип. 3(55). – С. 70–77.
20. Бомба А. Я. Числово–асимптотичне наближення розв’язків сингулярно збурених задач процесів очищення рідин від багатокomпонентних забруднень / А. Я. Бомба, А. П. Сафоник // Вісник Харківського нац. ун-ту. – 2012. – №1037. – С. 18–27.
21. Брилинг И. А. Влияние давления и температуры на фильтрационные свойства глин / И. А. Брилинг // Связанная вода в дисперсных системах. Вып. 4. – М.: Изд-во МГУ, 1977. – С.82–89.
22. Булавацький В. М. Біпараболічна математична модель процесу фільтраційної консолідації / В. М. Булавацький // Доп. НАН України. – 1997. – №8. – С.13–17.
23. Булавацький В. М. Некласичні математичні моделі процесів тепло– та масопереносу / В. М. Булавацький, Ю. Г. Кривонос, В. В. Скопецький. – К.: Наук. думка, 2005. – 282 с.
24. Булавацький В. М. Математичне моделювання процесу консолідації основ накопичувачів промислових стоків / В. М. Булавацький, І. В. Рогаль // Доповіді НАН України. – 2004. – №1. – С.42–47.
25. Булавацький В. М. Системный подход к проблеме математического моделирования процесса фильтрационной консолидации / В. М. Булавацький, В. В. Скопецький // Кибернетика и системный анализ. – 2006. – №6.–С. 71–79.
26. Булавацький В. М. Математичне моделювання фільтраційної консолідації з урахуванням солепереносу в рамках системи з подвійною релаксацією / В. М. Булавацький // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – №1. – С. 116–126.

- 27.Булавацький В. М. Математичне моделювання динаміки консолідаційних процесів з урахуванням релаксаційних ефектів / В. М. Булавацький, В. В. Скопецький // Кибернетика и системный анализ. – 2008.–№6.–С. 59–66.
- 28.Вагін П. Розв'язування початково–крайових задач міграції домішок / П. Вагін, А. Ямелинець // Вісник Львівського ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформат. – 2002. – Вип. 5. – С. 61–67.
- 29.Вабищевич П. Н. Монотонные разностные схемы для задач конвекции–диффузии на треугольных сетках / П. Н. Вабищевич, А. А. Самарский // Журнал выч. математ. и матем. физики. – 2002. – 42, №9. – С. 1368–1382.
- 30.Венгерський П. Про вибір стабілізаційного множника у варіаційних задачах руху мілкої води / П. Венгерський, В. Трушевський // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2005.– Вип. 10.– С.71–77.
- 31.Веригин Н. Н. Нагнетание вязущих растворов в горные породы / Н. Н. Веригин // Изв. АН СССР. ОТН. – 1952. – №5. – С.12–15.
- 32.Веригин Н. Н. Кольматаж призабойной зоны скважины / Н. Н. Веригин // Журнал прикладной математики и технической физики. – 1964. – №2. – С. 74–80.
- 33.Веригин Н. Н. Консолидация грунта под гибким фундаментом (плоская задача) / Н. Н. Веригин // Основания, фундаменты, механика грунтов. – 1961. – №5. – С.20–23.
- 34.Власова Е. А. Приближенные методы математической физики / Е. А. Власова, В. С. Зарубин, Г. Н. Кувыркин – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2001. – 700 с.
- 35.Власюк А. П. Теоретичне дослідження процесів розчинення та вимивання солей і карстових порід при фільтрації підземних вод в областях з криволінійними та вільними границями: дис...д-ра техн. наук: 05.13.02 / Анатолій Павлович Власюк. – К., 1996. – 368 с.
- 36.Власюк А. П. Фільтраційна консолідація глинистих ґрунтів при наявності масопереносу солей / А. П. Власюк, О. В. Жеребятсьєв // Вісник Укр. держ. акад. водн. госп.-ва. – 1998. – Вип. 1. Част. 1.– С.40–43.

- 37.Власюк А. П. Експериментальні дослідження деяких параметрів фільтрації сольових розчинів у піщаних ґрунтах / А. П. Власюк, М. Т. Кузло // Меліорація та водне господарство. – 2000. – Вип. 87. – С. 43–46.
- 38.Власюк А. П. Чисельне розв'язання одного класу задач, що зустрічаються в теорії фільтраційної консолідації / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Доп. НАН України. – 2000. – №12. – С.65–72.
- 39.Власюк А. П. Одновимірна задача фільтраційної консолідації з урахуванням переносу солей в неізотермічному режимі / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики: Тези доповідей дев'ятої Всеукраїнської наукової конференції. – Львів: Вид-во ЛНУ. – 2002. – С.18–19.
- 40.Власюк А. П. Фільтраційна консолідація ґрунтового масиву за наявності перенесення солей у неізотермічному режимі / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. інформ. – 2003. – Вип.7. – С. 138–147.
- 41.Власюк А. П. Двовимірна задача фільтраційної консолідації масиву ґрунту з урахуванням переносу солей в неізотермічному режимі / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики: Тези доповідей десятої Всеукраїнської наукової конференції. – Львів: Вид-во ЛНУ. – 2003. – С.36.
- 42.Власюк А. П. Математичне моделювання фільтраційної консолідації шаруватих ґрунтів з урахуванням впливу переносу солей у неізотермічних умовах / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації: Зб. наук. праць (за матеріалами Всеукраїнської науково-методичної конференції) – Київ–Кам'янець–Подільський: Кам'янець–Подільський державний університет, 2004. – С. 246–247.
- 43.Власюк А. П. Про порівняння чисельних розв'язків двовимірної задачі фільтраційної консолідації ґрунтового масиву при наявності переносу солей в неізотермічному режимі / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Матеріали X

- міжнародної наук. конф. ім. М.Кравчука.–К.: Вид–во НТУУ(КПІ). – 2004.– С.63.
- 44.Власюк А. П. Задача фільтраційної консолідації тіла ґрунтової греблі з урахуванням переносу солей в неізотермічному режимі / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики: Тези доповідей одинадцятої Всеукраїнської наукової конференції. – Львів: Вид–во ЛНУ, 2004. – С.32.
 - 45.Власюк А. П. Порівняльний аналіз чисельних розв'язків двовимірної задачі фільтраційної консолідації ґрунтового масиву при наявності переносу солей в неізотермічному режимі / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Вісник Київського ун–ту. Серія фіз.–матем. науки. – 2004. – Вип. 3. – С. 165– 176.
 - 46.Власюк А. П. Математичне моделювання консолідації ґрунтів в процесі фільтрації сольових розчинів / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк. – Рівне: Вид–во УДУВГП, 2004. – 211 с.
 - 47.Власюк А. П. Фільтраційна консолідація неоднорідного масиву ґрунту в неізотермічних умовах з урахуванням впливу переносу солей / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Волинський математичний вісник. Сер. прикл. матем. – 2004. – Вип. 2(11). – С. 39–53.
 - 48.Власюк А. П. Числове розв'язання задачі фільтраційної консолідації зростаючого тіла ґрунтової греблі з урахуванням тепло–масопереносу / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Problems of decision making under uncertainties: Abstracts. – Berdyansk, 2005. – Pp.109–111.
 - 49.Власюк А. П. Числове моделювання стабілізованими схемами МСЕ фільтраційної консолідації тіла ґрунтової греблі з урахуванням тепломасопереносу / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Мат. методи та фіз.–мех. поля. – 2005. – 48, №2. – С. 59–70.
 - 50.Власюк А. П. Застосування комплексного методу граничних елементів до розв'язування крайових задач для лінійних рівнянь параболічного типу / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Вісник Київського ун–ту. Сер. фіз.–матем. науки. – 2005. – Вип. 2. – С. 181 – 187.

- 51.Власюк А. П. Про вплив термічного розширення на надлишкові напори в насичених ґрунтах / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики: Тези доповідей дванадцятої Всеукраїнської наукової конференції. – Львів: Вид-во ЛНУ, 2005. – С. 50.
- 52.Власюк А. П. Про застосування комплексного методу граничних елементів до розв’язання крайових задач для лінійних рівнянь параболічного типу / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Матеріали XI міжнародної наук. конф. ім. М.Кравчука. – К.: ТОВ „Задруга”. – 2006. – С.63.
- 53.Власюк А. П. До питання про утворення зосереджених фільтраційних потоків в неоднорідному масиві ґрунту / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Problems of decision making under uncertainties: Abstracts. – Skhidnytsia, 2006. – Рр.81–83.
- 54.Власюк А. П. Числове розв’язання двовимірної задачі фільтраційної консолідації ґрунтового масиву за наявності перенесення солей у неізотермічному режимі / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. інформ. – 2006. – Вип. 11. – С. 148–159.
- 55.Власюк А. П. Математичне моделювання фільтраційної консолідації зростаючого шару ґрунту за наявності солепереносу в неізотермічних умовах / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – 49, №4. – С. 157–166.
- 56.Власюк А. П. Математичне моделювання фільтраційної консолідації зростаючого тіла ґрунтової греблі з урахуванням тепломасопереносу / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Вісник Київського ун-ту. Сер. фіз.-матем. науки. – 2006. – Вип. 3. – С. 162–171.
- 57.Власюк А. П. Про метод радіальних базисних функцій в просторових задачах фільтраційної консолідації / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики: Тези доповідей чотирнадцятої Всеукраїнської наукової конференції. – Львів: Вид-во ЛНУ, 2007. – С. 40–41.

- 58.Власюк А. П. Математичне моделювання впливу термічного розширення на надлишкові напори в насичених ґрунтах / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. інформ. – 2007. – Вип. 12. – С.68–77.
- 59.Власюк А. П. Про одну задачу фільтраційної консолідації ґрунту з урахуванням контактного розмиву / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Problems of decision making under uncertainties: Abstracts. – Kyiv–Rivne, 2008. – Рр.76–78.
- 60.Власюк А. П. Про одну математичну модель контактного розмиву ґрунтів фільтраційним потоком / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Матеріали XII міжнародної наук. конф. ім. М.Кравчука. – К., 2008. – С.70.
- 61.Власюк А. П. Математична модель фільтраційної консолідації ґрунту з урахуванням контактного розмиву в умовах тепло–солепереносу / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики: Тези доповідей п'ятнадцятої Всеукраїнської наукової конференції. – Львів: Вид-во ЛНУ, 2008. – С. 52.
- 62.Власюк А. П. Математичне моделювання контактного розмиву неоднорідного масиву ґрунту фільтраційним потоком / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Вісник Київського ун-ту. Сер. фіз.–матем. науки. – 2008. – Вип. 1. – С. 86–91.
- 63.Власюк А. П. Математичне моделювання фільтраційної консолідації ґрунту під плоским флютбетом з урахуванням контактного розмиву / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Вісник Київського ун-ту. Сер. фіз.–матем. науки. – 2008. – Вип. 2. – С. 77–82.
- 64.Власюк А. П. Числове розв'язування задачі фільтраційної консолідації ґрунтового масиву за наявності тепломасоперенесення методом радіальних базисних функцій / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. інформ. – 2008. – Вип. 14. – С. 54–63.
- 65.Власюк А. П. Математичне моделювання консолідації ґрунтів при фільтрації сольових розчинів в неізотермічних умовах / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк. – Рівне: Вид-во НУВГП, 2008. – 416 с.

- 66.Власюк А. П. Про метод радіальних базисних функцій в просторовій задачі консолідації трифазного ґрунту з урахуванням повзучості його скелету та впливу тепло–масопереносу / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Problems of decision making under uncertainties: Abstracts. – Skhidnytsia. – 2009. –Рр.77–79.
- 67.Власюк А. П. Математичне моделювання фільтраційної консолідації масиву ґрунту в умовах тепло–масопереносу з урахуванням контактного розмиву / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Вісник Київського ун–ту. Сер. фіз.–матем. науки. – 2009. – Вип. 1. – С. 92–97.
- 68.Власюк А. П. Порівняння чисельних розв'язків задачі фільтраційної консолідації ґрунту сітковими та безсітковими методами / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики: Тези доповідей шістнадцятої Всеукраїнської наукової конференції. – Львів: Вид–во ЛНУ, 2009. – С. 48–49.
- 69.Власюк А. П. Чисельне розв'язування задачі фільтраційної консолідації тіла ґрунтової греблі в умовах тепло–масоперенесення методом радіальних базисних функцій / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Вісник Львів. ун–ту. Сер. прикл. матем. інформ. – 2009. – Вип. 15. – С. 196–207.
- 70.Власюк А. П. Чисельне розв'язування задач консолідації та фільтраційного руйнування ґрунтів в умовах тепло–масопереносу методом радіальних базисних функцій / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк. – Рівне: НУВГП, 2010. – 277 с.
- 71.Власюк А. П. Про математичну модель взаємних процесів фільтраційної консолідації та контактного розмиву тіла ґрунтової греблі / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Матеріали XIII міжнародної наук. конф. ім. М.Кравчука. Том 1. – Київ, 2010. – С.89.
- 72.Власюк А. П. Фильтрационная консолидация трёхфазных грунтов с учётом ползучести скелета и влияния солепереноса в неизотермическом режиме / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Математическое моделирование. – 2010. – Т. 22, №4. – С. 32–56.

- 73.Власюк А. П. Про одну математичну модель фільтраційної консолідації ґрунту з урахуванням контактного розмиву на основі однофазної задачі Стефана / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Problems of decision making under uncertainties: Abstracts. – Lviv. – 2010. – Pp.57–59.
- 74.Власюк А. П. Математичне моделювання процесів фільтраційної консолідації ґрунтів в умовах тепло–масопереносу та руху суспензії в області контактного розмиву / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Вісник Київського ун–ту. Сер. фіз.–матем. науки. – 2010. – Вип. 1. – С. 59–64.
- 75.Власюк А. П. Математичне моделювання взаємних процесів фільтраційної консолідації тіла греблі та розмиву ґрунту в її основі в умовах тепло–масопереносу / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Вісник Київського ун–ту. Сер. фіз.–матем. науки. – 2010. – Вип. 2. – С. 105–110.
- 76.Власюк А. П. Взаємні процеси фільтраційної консолідації та контактного розмиву ґрунтів в умовах впливу техногенних факторів та їх математичне моделювання на основі однофазної задачі Стефана / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Вісник Нац. ун–ту водн. госп–ва та природокористув. Сер. технічні науки. – 2010. – Вип. 4(52). – С. 210–217.
- 77.Власюк А. П. Математичне моделювання фільтраційної консолідації греблі із зосередженим шляхом фільтрації в її ядрі в умовах тепло–солепереносу / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Вісник Київського ун–ту. Сер. фіз.–матем. науки. – 2011. – Вип. 3. – С. 115–122.
- 78.Власюк А. П. Порівняння чисельних розв’язків задачі фільтраційної консолідації з урахуванням повзучості скелета ґрунту за наявності тепломасоперенесення методами радіальних базисних функцій та скінченних елементів / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Вісник Львів. ун–ту. Сер. прикл. матем. інформ. – 2012. – Вип. 18. – С. 141–156.
- 79.Власюк А. П. Математичне моделювання процесів консолідації ґрунтів з урахуванням нелінійного закону фільтрації в умовах тепло–солепереносу / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Вісник Київського ун–ту. Сер. фіз.–матем. науки. – 2012. – Вип. 1. – С. 125–130.

- 80.Власюк А. П. Контактный размыв и фильтрационная консолидация грунтов в условиях тепло–солепереноса / А. П. Власюк, П. Н. Мартынюк // Математическое моделирование. – 2012. – Т. 24, №11. – С. 97–112.
- 81.Власюк А. П. Математичне моделювання фільтраційної консолідації з урахуванням просідань та повзучості скелету ґрунту / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Вісник Київського ун–ту. Сер. фіз.–матем. науки. – 2013. – Вип. 2. – С. 113–117.
- 82.Власюк А. П. Комплексний метод граничних елементів в задачах фільтраційної консолідації ґрунтів / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк, В. Б. Дмитрук // Вісник Нац. ун–ту водн. госп–ва та природокористув. – 2007. – Вип. 4(40). Частина 3. – С. 287–292.
- 83.Власюк А. П. Фільтраційна консолідація ґрунту при наявності переносу солей в умовах змінної області / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк, М. В. Каленик // Вісник Нац. ун–ту водн. госп–ва та природокористув. – 2006. – Вип. 1(33). – С. 227–235.
- 84.Власюк А. П. Фільтраційна консолідація ґрунту в умовах змінної області з урахуванням впливу тепло–масопереносу / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк, М. В. Каленик // Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики: Тези доповідей тринадцятої Всеукраїнської наукової конференції. – Львів: Вид–во ЛНУ, 2006. – С.34.
- 85.Власюк А. П. Числове розв’язування двовимірної задачі фільтраційної консолідації ґрунтового масиву за наявності тепло–масоперенесення в деформівній області / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк, М. В. Каленик // Вісник Львів. ун–ту. Сер. прикл. матем. інформ. – 2007. –Вип. 13.–С.78–89.
- 86.Власюк А. П. Експериментальні залежності характеристик ґрунтів від впливу техногенних факторів та їх обробка за методом найменших квадратів / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк, О. В. Козюк // Вісник Нац. ун–ту водн. госп–ва та природокористув. – 2007. – Вип. 1(37). – С. 268–281.
- 87.Власюк А. П. Фільтраційна консолідація масиву ґрунту з урахуванням повзучості його скелету в умовах тепло–масопереносу сольових розчинів

- / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк, Н. А. Федорчук // Вісник Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористув. – 2006. – Вип. 1(33). – С. 245–253.
88. Власюк А. П. Двовимірна задача фільтраційної консолідації з урахуванням тепломасопереносу та повзучості скелету ґрунту і її числове розв'язання / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк, Н. А. Федорчук // Problems of decision making under uncertainties: Abstracts. – Chernivtsi, 2007. – Рр.70–72.
89. Власюк А. П. Двовимірна задача фільтраційної консолідації ґрунту з урахуванням повзучості його скелету в умовах тепло-солепереносу / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк, Н. А. Федорчук // Вісник Київського ун-ту. Серія: фіз.-матем. науки. – 2007. – Вип. 2. – С. 121–126.
90. Власюк А. П. Математичне моделювання фільтраційної консолідації ґрунтів при наявності масообмінних процесів / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк, О. Р. Фурсович // Вісник Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористув. – 2006. – Вип. 1(33). – С. 236–244.
91. Власюк А. П. Математична модель фільтраційної консолідації ґрунту під плоским флютбетом з урахуванням контактного розмиву згідно однофазної задачі Стефана та її числове розв'язання / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк, Л. О. Шпоняк // Вісник Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористув. Сер. технічні науки. – 2011. – Вип. 2(54). – С. 229–235.
92. Власюк А. П. Математичне моделювання фільтраційної консолідації ґрунтів з урахуванням просідань та повзучості скелету ґрунту в одновимірному випадку / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк, А. С. Яковлев // Вісник Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористув. Сер. технічні науки. – 2011. – Вип. 3(55). – С. 151–158.
93. Власюк А. П. Автоматическое построение конформных и квазиконформных отображений четырехугольных областей с помощью разностных сеток с “плавающими” узлами / А. П. Власюк, В. Г. Михальчук. – Киев: 1989. – 55 с. – (Препринт / АН Украины. Ин-т математики; 89.79).
94. Власюк А. П. Автоматическое построение конформных и квазиконформных отображений двухсвязных и трёхсвязных областей / А. П. Власюк,

- В. Г. Михальчук. – Киев: 1991. – 56 с. – (Препринт / АН Украины. Ин-т математики; 91.57).
95. Власюк А. П. Чисельне розв'язання одного класу задач з вільними межами в криволінійних чотирикутниках для еліптичних систем рівнянь / А. П. Власюк, В. Г. Михальчук. – Київ: 1994. – 23 с. – (Препринт / АН Украины. Ин-т математики; 94.36).
96. Власюк А. П. Монотонна різницева схема для нелінійного одновимірного рівняння параболічного типу, що містить першу похідну / А. П. Власюк, О. П. Остапчук, О. М. Степанченко // Вісник Київського ун-у. Сер. фіз.-матем. науки. – 2005. – Вип. 2. – С. 217–227.
97. Воронкевич С. Д. Исследование фильтрационно–осмотических процессов при создании плотных протифильтрационных экранов / С. Д. Воронкевич, С. Н. Емельянов, В. И. Сергеев // Задачи механики природных процессов. – М.: Изд-во МГУ, 1983. – С. 47–63.
98. Галкин А. Н. Закономерности диффузионно–осмотических процессов в глинистых породах при миграции многокомпонентных растворов электролитов / А. Н. Галкин, В. А. Королев // Геоэкология. – 2002. – № 1. – С. 61–64.
99. Гельфер А. А. Причины и формы разрушения гидротехнических сооружений / А. А. Гельфер. – М.: Госстройиздат, 1936. – 320 с.
100. Герсеванов Н. М. Основы динамики грунтовой массы / Н. М. Герсеванов. – М.: Госстройиздат, 1931. – 242 с.
101. Гидродинамические и физико–химические свойства горных пород / Н. Н. Веригин, С. В. Васильев, В. С. Саркисян, Б. С. Шержуков. – М.: Недра, 1977. – 271 с.
102. Глобус А. М. Физика неизотермического внутрипочвенного влагообмена / А. М. Глобус. – Ленинград: Гидрометеиздат, 1983. – 279 с.
103. Глубинное захоронение жидких радиоактивных отходов / [А. И. Рыбальченко и др.] – М.: ИздАТ, 1994. – 295 с.

104. Глущенко А. А. Приближенное решение некоторых пространственных фильтрационных краевых задач со свободными границами / А. А. Глущенко, А. П. Кузьменко // Вычисл. и прикл. математика. – 1980. – 42. – С.138–146.
105. Гольдберг В. М. Исследования фильтрации в глинах с учётом влияния на этот процесс физико–химических и термодинамических условий / В. М. Гольдберг // Исследование фильтрации через глинистые породы. – М., 1983. – Вып.152. – С. 6–13.
106. Гольдберг В. М. Проницаемость и фильтрация в глинах / В. М. Гольдберг, Н. П. Скворцов. – М.: Недра, 1986. – 160 с.
107. Гольдберг В. М. Исследование влияния физико–химических условий и температуры на начальный градиент и режим фильтрации в глинах / В. М. Гольдберг, Н. П. Скворцов // Водные ресурсы. –1981, №6.–С.110–119.
108. Гольдин А. Л. Анализ консолидации растущего слоя грунта / А. Л. Гольдин // Изв. ВНИИГ им. Веденеева. – 1972. – Т.99. – С.119–126.
109. Гольдин А. Л. Задача консолидации для растущего прямоугольника с учетом реологических свойств грунта / А. Л. Гольдин // Труды первого Всесоюзного симпозиума по реологии грунтов. – Ереван: Изд–во Ерев. ун–та, 1973. – С. 172–177.
110. Гольдин А. Л. Анализ консолидации растущей двухмерной области грунта / А. Л. Гольдин // Изв. ВНИИГ им. Веденеева. – 1974. – Т. 104. – С.184–190.
111. Горелик Л. В. Консолидация растущего слоя трехфазного грунта с учётом изменений его свойств в процессе уплотнения / Л. В. Горелик, Б. М. Нуллер // Изв. ВНИИГ им. Веденеева. –1968. – Т.86. – С.223–227.
112. Горлова А. Р. Изучение усадки глины при повышенной температуре и давлении / А. Р. Горлова // Изменение геологической среды под влиянием деятельности человека. Сб. трудов. – М.: Наука. – 1982. –С. 111–114.
113. Грунтоведение / под ред. Е. М. Сергеева. – М.: Изд–во МГУ, 1983. – 390с.
114. Грунтоведение / под ред. В. Т. Трофимова. – М.: Изд–во МГУ, 2005. – 1024 с.

115. Дейнека В. С. Модели и методы решения задач в неоднородных средах / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко. – К.: Наук. думка, 2001. – 606 с.
116. Дейнека В. С. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий. – К.: Наук. думка, 1998. – 614 с.
117. Дерягин Б. В. Основные закономерности движения воды в почве при различном увлажнении / Б. В. Дерягин, Ф. Е. Колясев, М. К. Мельникова // Сборник трудов по агрономической физике. – 1953. – Вып. 6. – С.170–181.
118. Джордж А. Численное решение больших разреженных систем уравнений / А. Джордж, Д. Лю. – М.: Мир, 1984. – 333с.
119. Джураев Т. Д. О классификации и приведении к каноническому виду уравнений с частными производными третьего порядка / Т. Д. Джураев, Я. Попелек // Дифференциальные уравнения. – 1991. – Т.27, №10. – С.1734–1745.
120. Дзекцер Е. С. Гидродинамическая постановка геохимических задач при движении грунтовых вод со свободной поверхностью / Е. С. Дзекцер, Н. П. Куранов // Докл. АН СССР. – 1983. – 270, №5. – С.1085–1088.
121. Дмитриев А. Ф. Деформационные процессы в несвязных грунтах и придренной зоне и их влияние на работу осушительно–увлажнительных систем / А. Ф. Дмитриев, Н. Н. Хлапук, Д. А. Дмитриев. – Ровно: Изд-во РГТУ, 2002. – 145 с.
122. Дроботенко М. И. Обобщенное решение задачи фильтрационной консолидации / М. И. Дроботенко, А. В. Костерин // Докл. Российской акад. наук. – 1996. – Т.350, №5. – С. 619–621.
123. Жеребятьєв О. В. Порівняльна оцінка результатів математичного моделювання фільтраційної консолидації тіла та основи ґрунтової греблі за наявності масопереносу солей з натурними даними / О. В. Жеребятьєв, А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Світ геотехніки. – 2006. – №3. – С. 4–9.

124. Жеребят'єв О. В. Моніторинг стану греблі хвостосховища / О. В. Жеребят'єв, О. І. Джоші // Вісник Укр. держ. ун-ту водн. госп-ва та природокорист. – 2002. – Вип. 5(18). Част. 3. – С. 28–34.
125. Жиленков В. Н. Водопорные свойства грунтов ядер и экранов высоких плотин / В. Н. Жиленков. – Ленинград: Энергия, 1968. – 114 с.
126. Жиленков В. Н. О фильтрационной прочности глинистых грунтов в условиях контактного выпора / В. Н. Жиленков // Труды координационных совещаний по гидротехнике. – 1972. – Вып. 72. – С. 61–71.
127. Жиленков В. Н. О контактном размыве глинистых грунтов фильтрационным потоком / В. Н. Жиленков // Труды координационных совещаний по гидротехнике. – 1972. – Вып. 72. – С. 48–61.
128. Жиленков В. Н. Водопроницаемость экранирующих покрытий из глинистого грунта / В. Н. Жиленков // Изв. ВНИИГ им. Веденеева. – 1977. – Т. 115. – С. 101–109.
129. Жиленков В. Н. Гидродинамические условия контактного размыва глинистых грунтов фильтрационным потоком / В. Н. Жиленков, Н. И. Шевченко // Изв. ВНИИГ им. Веденеева. – 1980. – Т. 144. – С. 11–19.
130. Зарецкий Ю. К. Теория консолидации грунтов / Ю. К. Зарецкий. – М.: Наука, 1967. – 270с.
131. Затенацкая Н. П. Прогноз изменения физико–механических свойств засоленных глинистых пород при их выщелачивании / Н. П. Затенацкая // Изменение геологической среды под влиянием деятельности человека. – М.: Наука, 1982. – С. 13–22.
132. Затенацкая Н. П. Диффузионное выщелачивание глин / Н. П. Затенацкая, И. А. Сафохина – М.: Наука, 1968. – 88 с.
133. Захоронение жидких радиоактивных отходов – практические результаты и последствия для окружающей среды / [А. И. Рыбальченко и др.] // Геоэкология. – 1999. – №2. – С. 128–132.

134. Защита подземных вод от загрязнения в районах проектируемых и действующих хвостохранилищ: Сб. научн. тр. /под ред. В. И. Сергеева. – М.: Изд-во МГУ, 1992. – 364 с.
135. Зиангиров Р. С. Исследование влияния химико–минерального состава, структуры и текстуры глин на закономерности одномерной консолидации в диапазоне давлений до 100 кгс/см^2 (10 МПа) / Р. С. Зиангиров // Труды ПНИИИС. – 1978. – Вып. 53. Теоретические основы прогноза изменения инженерно–геологических свойств глинистых грунтов. – С. 42–66.
136. Злочевская Р. И. О взаимодействии глин с растворами электролитов в процессе их набухания / Р. И. Злочевская, В. И. Дивисилова // Связанная вода в дисперсных системах. – 1972. – Вып.2. – С.43–65.
137. Иванов П. Л. Грунты и основания гидротехнических сооружений. Механика грунтов / П. Л. Иванов – М.: Высш. школа, 1991. – 447 с.
138. Ильин А. В. Проблемы геоэкологии: о захоронении радиоактивных отходов на дне океана / А. В. Ильин // Инженерная экология. – 2000. – №5. – С.20–28.
139. Исаев В. И. Развитие метода коллокаций и наименьших квадратов / В. И. Исаев, В. П. Шапеев // Труды ин-та математики и механики. – 2008. – Т.14, №1. – С. 41–60.
140. Истомина В. С. Фильтрационная устойчивость грунтов / В. С. Истомина. – М.: Госстройиздат, 1957. – 294 с.
141. Истомина В. С. Исследования фильтрационной устойчивости гравелисто–галечниковых грунтов с глинистым заполнителем и подбор фильтров дренажей / В. С. Истомина. // Труды лаборатории гидротехнических сооружений. – 1960. – Сб. №3. – С. 247–268.
142. Истомина В. С. Фильтрационная прочность глинистых грунтов / В. С. Истомина, В. В. Буренкова, Г. В. Мишурова. – М.: Стройиздат, 1975. – 220 с.
143. Итоги и задачи изучения изменений геологической среды в районах возведения атомных электростанций / Е. А. Яковлев, Б. В. Графский,

- Г. В. Лисиченко, Э. В. Соболевич // Проблемы рационального использования геологической среды. – М.: Наука, 1988. – С. 203–224.
144. Ищенко А. В. Оценка фильтрационной прочности грунтовой плотины с противотрифильтрационными устройствами в теле и основании / А. В. Ищенко, В. В. Вишневский, М. Ю. Косиченко // Известия ВНИИГ им. Б. Е. Веденеева. – 2009. – Т. 256. – С. 23–32.
145. Каленов В. П. Использование лабораторного эксперимента при натурных исследованиях суффозионных процессов / В. П. Каленов // Труды координационных совещаний по гидротехнике. – 1972. – Вып. 72. – С.80–86.
146. Катренко А. В. Системний аналіз об'єктів та процесів комп'ютеризації / А. В. Катренко. – Львів: «Новий світ – 2000», 2003. – 424 с.
147. Каштан С. С. Математичне моделювання фільтраційних деформацій в грунтах з урахуванням взаємовпливу характеристик середовища та процесу: автореф...к. т. н.: 01.05.02 / Сергій Степанович Каштан. – Тернопіль, 2004. – 25 с.
148. Клементьев А. Ф. К расчёту уплотнения грунта с учётом влияния ползучести / А. Ф. Клементьев // Известия вузов. Стр-во и архитектура. – 1980. – №12. – С.12–15.
149. Клементьев А. Ф. Консолидация грунтов при фильтрации, не подчиняющейся закону Дарси / А. Ф. Клементьев // Известия вузов. Стр-во и архитектура. – 1983. – №1. – С.21–24.
150. Коваль М. Генерація адаптивних сіток з чотирикутних елементів у скінченноелементному аналізі / М. Коваль, В. Макар, Я. Савула // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикладна матем. та інформат. – 2002. – Вип. 4. – С.38–43.
151. Ковальчук В. И. Определение начальных дополнительных давлений в поровой воде в условиях пространственной задачи фильтрационной теории уплотнения земляной среды / В. И. Ковальчук // Основания и фундаменты. – 1968. – Вып. 1. – С.101–105.
152. Козаревська Ю. С. Регуляризація чисельних розв'язків варіаційних задач міграції домішок: h-адаптивний метод скінченних елементів. Частина 2.

- / Ю. С. Козаревська // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. інформ. – 2003. – №7. – С.175–185.
153. Козаревська Ю. С. Регуляризація чисельних розв'язків варіаційних задач міграції домішок: локалізовані найменші квадрати / Ю. С. Козаревська, Г. А. Шинкаренко, О. Г. Шинкаренко // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.–мат. – 1999. – Вип. 52. – С.59–71.
 154. Колодяжний В. М. Щодо утворення сімейств атомарних радіальних базисних функцій / В. М. Колодяжний, О. Ю. Лісіна // Доповіді НАН України. – 2011. – №8. – С. 21–27.
 155. Колодяжний В. М. Деякі властивості атомарних функцій багатьох змінних / В. М. Колодяжний, В. О. Рвачов // Доповіді НАН України. – 2005. – №1. – С. 12–20.
 156. Колодяжний В. М. Атомарные радиально базисные функции в численных алгоритмах решения краевых задач для уравнения Лапласа / В. М. Колодяжний, В. А. Рвачёв // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – №4. – С. 165–178.
 157. Королев В. А. Влияние температуры на набухание глинистых грунтов / В. А. Королев, Р. И. Злочевская, В. И. Дивисилова // Изменение геологической среды под влиянием деятельности человека. – М.: Наука. – 1982. – С. 51–55.
 158. Костерин А. В. Численное исследование фильтрационной консолидации / А. В. Костерин, М. Ф. Павлова, Е. В. Шемуранова // Математическое моделирование. – 2001. – Т. 13, №9. – С.63–70.
 159. Котов А. И. Водоупорные свойства глинистых почв и грунтов и природа начальных градиентов фильтрации / А. И. Котов, С. В. Нерпин // Изв. АН СССР. ОТН. – 1958. – №9. – С.75–87.
 160. Кремез В. С. Актуальные вопросы моделирования подтопления территорий и других опасных процессов, связанных с изменением режима грунтовых вод / В. С. Кремез // Екологія довкілля та безпека життєдіяльності. – 2003. – №6. – С.56–64.

161. Кроник Я. А. Учёт теплофизических свойств искусственно засоленных грунтов при строительстве каменно–земляных плотин / Я. А. Кроник, С. Г. Лосева // Энергетическое строительство. – 1978. – №1. – С. 74–77.
162. Крылов В. И. Справочная книга по численному интегрированию / В. И. Крылов, Л. Т. Шульгина. – М.: Наука, 1966. – 372 с.
163. Кузло М. Т. Моделювання руху сольових розчинів у грунтах / М. Т. Кузло, І. А. Філатова // Ресурсоекономні матеріали, конструкції, будівлі та споруди. – 2005. – Вип. 12. – С. 361–366.
164. Кульчицкий Л. И. Влияние минерализации воды на фильтрационные свойства песчано–глинистых пород / Л. И. Кульчицкий, В. М. Гольдберг // Гидрогеологические вопросы подземного захоронения промышленных стоков. – 1969. – Вып. 14. – С.6–22.
165. Лаврик В. І. Математичне моделювання процесу фільтраційної консолідації з урахуванням дифузійної нерівноважності та масообміну / В. І. Лаврик, М. В. Булавацький // Наукові записки. Національний університет «Києво–Могилянська Академія». – 2006. – Т. 51: Фізико–математичні науки. – С.7–10.
166. Лаврик В. И. Исследование конвективного массопереноса при двумерной фильтрации подземных вод в условиях наличия массообмена / В. И. Лаврик, Н. А. Никифорович. – Киев: 1982. – 46 с. – (Препринт / АН УССР; Ин–т математики; 82.20).
167. Лубочков Е. А. Несуффозионные несвязные грунты / Е. А. Лубочков // Изв. ВНИИГ им. Веденеева. – 1962. – Т.71. – С. 61–89.
168. Лукнер Л. Моделирование миграции подземных вод / Л. Лукнер, В. М. Шестаков. – М.: Недра, 1986. – 208 с.
169. Лучко Й. Й. Ґрунтознавство, механіка ґрунтів, основи та фундаменти / Й. Й. Лучко. – Львів: Каменярь, 2013. – 320 с.
170. Ляшко И. И. Численное решение задач тепло– и массопереноса в пористых средах / И. И. Ляшко, Л. И. Демченко, Г. Е. Мистецкий. – К.: Наук. думка, 1991. – 264 с.

171. Ляшко С. И. Оптимизация и математическое моделирование массопереноса подземных вод / С. И. Ляшко. – К.: Наук. думка, 1998. – 256 с.
172. Ляшко С. И. Моделирование и оптимизация подземного массопереноса / С. И. Ляшко, Д. А. Ключин, А. С. Тригуб. – К.: Наук. думка, 1998. – 238 с.
173. Ляшко С. І. Існування і єдність слабкого розв'язку системи рівнянь параболічного типу з сингулярними правими частинами / С. І. Ляшко, Д. А. Ключин, Г. М. Стешенко // Доповіді НАН України. – 2012. – №7. – С. 38–42.
174. Ляшко С. І. Якісне та чисельне дослідження сингулярного керування конвективною дифузією суміші радіоізотопів / С. І. Ляшко, Д. А. Ключин, Г. М. Стешенко // Доповіді НАН України. – 2012. – №8. – С. 42–46.
175. Ляшко С. І. Математичне моделювання конвективного перенесення цитостатиків усередині ракової пухлини / С. І. Ляшко, Н. І. Ляшко, Д. А. Ключин // Доповіді НАН України. – 2008. – №2. – С. 30–35.
176. Лыков А.В., Михайлов Ю.А. Теория тепло- и массопереноса / А. В. Лыков, Ю. А. Михайлов. – М.: Госэнергоиздат, 1963. – 536 с.
177. Малик Л. К. Чрезвычайные ситуации, связанные с гидротехническим строительством (ретроспективный обзор) / Л. К. Малик // Гидротехническое строительство. – 2009. – №12. – С. 2–16.
178. Малышев М. П. Подбор состава и размеров переходных зон высоких каменно-земляных плотин из условия неразрывности трещин в их ядрах и экранах / М. П. Малышев // Труды координационных совещаний по гидротехнике. – 1972. – Вып. 72. – С. 86–94.
179. Мартинюк П. М. Дослідження існування та єдиності розв'язку однієї квазілінійної параболічної системи диференціальних рівнянь другого порядку / П. М. Мартинюк, А. П. Власюк. – Київ: 2001. – 20 с. – (Препр. / НАН України. Ін-т математики; 2001.3).
180. Мартинюк П. М. Математичне моделювання фільтраційної консолідації ґрунтів з урахуванням переносу солей: дис... канд. фіз.-мат. наук : 01.05.02 / Петро Миколайович Мартинюк. – Рівне, 2002. – 219с.

181. Мартинюк П. М. Про урахування наявності в поровій воді розчинених солей при математичному моделюванні консолідації ґрунтів / П. М. Мартинюк // Вісник Київського ун-ту. Сер. фіз.-матем. науки. – 2003. – Вип. 2. – С.168–174.
182. Мартинюк П. М. Чисельне розв'язання задачі фільтраційної консолідації шаруватих ґрунтів з урахуванням впливу переносу солей / П. М. Мартинюк // Вісник Київського ун-ту. Сер. фіз.-матем. науки. – 2003. – Вип. 3. – С.240–246.
183. Мартинюк П. М. Числове розв'язання крайових задач з умовами спряження методом радіальних базисних / П. М. Мартинюк // Вісник Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористув. – 2007. – Вип. 2(38). – С. 372–379.
184. Мартинюк П. М. Метод радіальних базисних функцій в крайових задачах для параболічних рівнянь з умовами спряження / П. М. Мартинюк // Вісник Київського ун-ту. Серія фіз.-матем. науки. – 2007. – Вип.4.– С.178–181.
185. Мартинюк П. М. Структури даних та порівняння наближених розв'язків крайових задач сітковими і безсітковими методами / П. М. Мартинюк // Волинський математичний вісник. Сер. прикладна математика. – 2013. – Вип. 10 (19). – С. 151–165.
186. Мартинюк П. М. Порівняння чисельних розв'язків двовимірних крайових задач сітковими та безсітковими методами / П. М. Мартинюк // Вісник Київського ун-ту. Сер. фіз.-матем. науки. – 2013. – Вип. 3. – С. 274–279.
187. Мартинюк П. Н. Решение краевых задач для систем квазилинейных параболических уравнений сеточными и безсеточными численными методами [Электронный ресурс] / П. Н. Мартинюк // Сибирские электронные математические известия. – 2014. – Том 11. – С. 476–493. – Режим доступа: <http://www.semr.math.nsc.ru/v11/p476-493.pdf>
188. Мартинюк П. М. Порівняльний аналіз наближених розв'язків крайових задач сітковими та безсітковими чисельними методами в одновимірному випадку / П. М. Мартинюк, Н. М. Боднар // Вісник Нац. ун-ту водн. госп-ва та природокористув. – 2009. – Вип. 1(45). – С. 272–283.

189. Мартинюк П. М. Прогнозування зсувних процесів на основі розв'язання задачі фільтраційної консолідації в умовах тепло–масопереносу / П. М. Мартинюк, Т. В. Громадченко // Матеріали III Міжнародної конференції «Обчислювальна та прикладна математика», присвяченої пам'яті академіка НАН України Івана Івановича Ляшка. – Київ, 2009. – С. 53.
190. Мартинюк П. М. Прогнозування зсувів ґрунтів в одновимірному випадку на основі моделі фільтраційної консолідації з урахуванням впливу тепло–масопереносу / П. М. Мартинюк, Т. В. Громадченко // Гідромеліорація та гідротехнічне будівництво. – 2009. – Вип. 34. – С. 139–149.
191. Мартинюк П. М. Математична модель фільтраційної консолідації ґрунтів з урахуванням багатофракційної суфозії // П. М. Мартинюк, О. В. Гошко // Вісник Київського ун–ту. Сер. фіз.–матем. науки. – 2013. – Вип. 4. – С. 136–141.
192. Мартинюк П. М. Чисельне порівняння методу радіальних базисних функцій та методу скінченних елементів на прикладі одновимірної крайової задачі тепло–масопереносу з домінуючим конвективним членом / П. М. Мартинюк, А. М. Дворжак // Вісник Нац. ун–ту водн. госп–ва та природокористув. – 2009. – Вип. 3(47). Частина 3. – С. 84–90.
193. Мартинюк П. М. Комплекс комп'ютерних програм «Фільтраційна консолідація ґрунтів з урахуванням впливу техногенних факторів» / П. М. Мартинюк, О. Р. Мічута // Свідцтво про реєстрацію авторського права на твір №51618 від 08.10.2013 р.
194. Мартинюк П. М. Вузлове і скінченноелементне покриття двовимірних областей: деякі алгоритми та їх програмна реалізація / П. М. Мартинюк, Ю. А. Семенчук // Вісник Нац. ун–ту водн. госп–ва та природокористув. Сер. технічні науки. – 2010. – Вип. 4(52). – С. 202–209.
195. Мартинюк П. М. Генерація вузлових та скінченноелементних сіток в просторі / П. М. Мартинюк, Ю. А. Семенчук // Вісник Нац. ун–ту водн. госп–ва та природокористув. Сер. технічні науки. – 2011. – Вип. 1(53). – С. 193–200.

196. Мартинюк П. М. Алгоритм та програма перенумерації вузлів сітки методу скінченних елементів / П. М. Мартинюк, А. С. Чума // Вісник Укр. держ. акад. водного госп-ва та природокорист. – 2002. – Вип.4. – С. 367–372.
197. Мартинюк П. М. Побудова трикутних сіток для методу скінченних елементів / П. М. Мартинюк, А. С. Чума // Волинський математичний вісник. – 2003. – Вип.10. – С.96–206.
198. Марчук Г. И. Введение в проекционно–сеточные методы. / Г. И. Марчук, В. И. Агошков. – М.: Наука, 1981. – 416 с.
199. Математичне моделювання одновимірної задачі фільтраційної консолідації з урахуванням термоповзучості скелета ґрунту / В. І. Лаврик, А. П. Власюк, П. М. Мартинюк, В. С. Герасимчук // Наукові записки Національного університету “Києво–Могилянська Академія”. – 2007. – Т. 61. – С. 23–26.
200. Международный семинар по фильтрационной прочности плотин и оснований // Гидротехника. – 2009. – №2. – С. 6–7.
201. Месчян С. Р. Фильтрация воды в глинистых грунтах при больших размерах образцов и малых градиентах напора / С. Р. Месчян, Т. Л. Петросян // Основания, фундаменты, механика грунтов. – 1993. – №1. – С. 8–9.
202. Методы прогноза солевого режима грунтов и грунтовых вод / под ред. Н. Н. Веригина. – М.: Колос, 1979. – 336 с.
203. Механика насыщенных пористых сред / В. Н. Николаевский, К. С. Басниев, А. Т. Горбунов, Г. А. Зотов. – М.: Недра, 1970. – 339 с.
204. Мироненко В. А. Проблемы гидрогеоэкологии. В 3 т. Т. 1. Теоретическое изучение и моделирование геомиграционных процессов / В. А. Мироненко, В. Г. Румынин. – М.: Изд-во Московского гос. горного ун-та, 1998. – 611 с.
205. Мичута О. Р. Моделирование влияния химической суффозии на фильтрационную консолидацию засоленных грунтов в неизотермических условиях // О. Р. Мичута, А. П. Власюк, П. Н. Мартинюк // Математическое моделирование. – 2013. – Т. 25, №2. – С. 3–18.

206. Молчанов И. Н. Машинные методы решения прикладных задач. Алгебра, приближение функций / И. Н. Молчанов. – Киев: Наук. думка, 1987. – 288 с.
207. Мустафаев А. А. Деформации засоленных грунтов в основаниях сооружений / А. А. Мустафаев. – М.: Стройиздат, 1985. – 280 с.
208. Нерпин С. В. Физика почвы / С. В. Нерпин, А. Ф. Чудновский. – М.: Наука, 1967. – 584 с.
209. О прогнозировании экологической безопасности захоронения жидких радиоактивных отходов в зонах сочленения платформенных и горноскладчатых областей / О. И. Купалов–Ярополк, Н. В. Лукина, Л. В. Жемерикина, В. М. Швец // Геоэкология. – 1997. – №5. – С.60–74.
210. Обобщение данных статистического анализа аварий и инцидентов в аспекте надежности плотин / М. И. Гогоберидзе, Р. Г. Какауридзе, Ю. Н. Микашвили, Д. Ц. Мирцхулава // Сообщения Акад. наук Груз. ССР. – 1977. – 86, №3.–С.681–684.
211. Олейник А. Я. Теоретические исследования фильтрационных процессов в пористых средах с изменяющимися водно–физическими свойствами / А. Я. Олейник, В. Л. Поляков // Прикладна гідромеханіка. – 2007. – Т.9, № 2–3. – С. 122–138.
212. Орехов В. В. Применение метода конечных элементов к расчёту консолидации грунтовых плотин / В. В. Орехов //Труды Гидропроекта. – 1983. – Вып. 84. – С.38–45.
213. Осипов В. И. Микроструктура глинистых пород / В. И. Осипов, В. Н. Соколов, Н. А. Румянцева. – М.: Недра, 1989. – 211 с.
214. Павилонский В. М. Изменение проницаемости уплотнённых суглинков при фильтрации растворов хлоридов и сульфатов натрия и кальция / В. М. Павилонский, Л. В. Чиндина // Изменение геологической среды под влиянием деятельности человека. – М.: Наука. – 1982. –С. 45–50.
215. Павлов А. С. О решении плохо обусловленных линейных систем итерационными методами / А. С. Павлов, Л. Ф. Юхно // Математическое моделирование. – 2004. – Т. 16, №7. – С. 13–20.

216. Патрашев А. Н. Напорное движение грунтового потока, сопровождающееся выносом мелких частиц гранита / А. Н. Патрашев // Изв. Научн.–иссл. ин–та гидротехн. – 1938. – Т. XXII. – С. 5–50.
217. Петрик М. Р. Математичне моделювання фільтраційної консолідації в неоднорідних багатокомпонентних циліндричних дисперсних мікропористих середовищах / М. Р. Петрик, В. С. Дейнека, Є. І. Воробієв // Компьютерная математика. – 2013. – №1. – С. 37–45.
218. Петрик М. Р. Нелинейная математическая модель двухуровневого переноса типа «фильтрация–консолидация» / М. Р. Петрик, Д. М. Михалик // Проблемы управления и информатики. – 2010. – №2. – С. 74–85.
219. Петрик М. Р. Математичне моделювання фільтраційної консолідації в багатокомпонентних неоднорідних циліндричних середовищах вологовмістких пористих частинок методами інтегральних перетворень / М. Р. Петрик, М. М. Петрик // Математичне та комп'ютерне моделювання. Сер. фіз.–матем. науки. – 2012. – Вип. 7. – С. 222–241.
220. Петрухин В. П. Строительные свойства засоленных и загипсованных грунтов / В. П. Петрухин. – М.: Стройиздат, 1980. – 119 с.
221. Плохотников К. Э. Метод и искусство математического моделирования / К. Э. Плохотников. – М.: ФЛИНТА, 2012. – 520 с.
222. Полубаринова–Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод / П. Я. Полубаринова–Кочина. – М.: Наука, 1977. – 664с.
223. Поляков В. Л. Механическая суффозия в дренируемом грунте / В. Л. Поляков // Прикладна гідромеханіка. – 2002. – Т.4, №4. –С. 60–73.
224. Поляков В. Л. О фильтрационных деформациях грунта с образованием аккумулярующих зон / В. Л. Поляков // Прикладна гідромеханіка. – 2003. – Т.5, №2. –С. 45–56.
225. Поляков В. Л. О механической суффозии грунтов под действием цилиндрического стока переменной интенсивности / В. Л. Поляков // Прикладна гідромеханіка. – 2006. – Т.8, №4. –С. 43–52.

226. Поляков В. Л. Установившийся приток к дренажу в несвязном грунте с локально–упорядоченной структурой / В. Л. Поляков // Доповіді НАН України. – 2013. – №2. – С. 57–64.
227. Поляков В. Л. Внешняя суффозия в несвязных грунтах при радиальной фильтрации / В. Л. Поляков, В. Б. Сидор // Прикладна гідромеханіка. – 2004. – Т.6, №4. – С.68–77.
228. Поляков В. Л. Розрахунок виносу суфозійних частинок до гончарного дренажу / В. Л. Поляков, В. Б. Сидор // Проблеми водопостачання, водовідведення та гідравліки. – 2006. – Вип.6. – С.124–133.
229. Праведный Г. Х. Проектирование и подбор гранулометрического состава фильтров переходных зон высоких плотин / Г. Х. Праведный. – Москва–Ленинград: Энергия, 1966. – 83 с.
230. Праведный Г. Х. Подготовка скальных оснований плотин из грунтовых материалов / Г. Х. Праведный, В. Г. Радченко. – Ленинград: Энергия, 1973. – 80 с.
231. Праведный Г. Х. Практические рекомендации по обеспечению фильтрационной прочности грунта ядра (экрана) в зоне контакта с основанием / Г. Х. Праведный, В. Г. Радченко // Энергетическое строительство. – 1973. – №7. – С. 40–42.
232. Прогноз скорости осадок оснований сооружений / [Н. А. Цытович Н.А. и др.] – М.: Стройиздат, 1967. – 308 с.
233. Прогноз фільтраційної консолідації глинистих ґрунтів при підготовці підвалин гідротехнічних споруд у складних гідрогеологічних умовах / [О. Я. Олійник та ін.] // Меліорація і водне господарство. – 1999. – Вип.86. – С.125–134.
234. Проектирование и строительство больших плотин. Аварии и повреждения больших плотин / [Н.С. Розанов и др.] – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 128 с.

235. Радченко В. Г. Ремонт плотин из грунтовых материалов в случае нарушения фильтрационной прочности / В. Г. Радченко, С. В. Радченко // Гидротехническое строительство. – 2011. – №5. – С. 20–26.
236. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917–1967). – М.: Наука, 1969. – 545 с.
237. Рельтов Б. Ф. Дальнейшие экспериментальные исследования осмотических явлений в связных грунтах / Б. Ф. Рельтов, Н. А. Новицкая, Ю. С. Большакова // Изв. ВНИИГ. – 1955. – Т.53. – С.147–164.
238. Роуч П. Дж. Вычислительная гидродинамика / П. Дж. Роуч. – М.: Мир, 1980. – 616 с.
239. Савула Я. Г. Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами / Я. Г. Савула. – Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2004. – 222 с.
240. Савула Я. Г. Розв'язання задачі перенесення забруднень безсітковим методом Петрова–Гальоркіна / Я. Г. Савула, А. О. Стягар // Відбір і обробка інформації. – 2007. – Вип. 27 (103). – С. 79–82.
241. Савула Я. Г. Стабілізація чисельних розв'язків варіаційних задач міграції домішок: протипотокова схема / Я. Г. Савула, О. Г. Шинкаренко // Вісник Львівського ун-ту. Серія мех.–мат. – 1997. – Вип.46. – С.3–9.
242. Самарский А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1989. – 616 с.
243. Самарский А. А. Вычислительная теплопередача / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.
244. Самарский А. А. Численные методы математической физики / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М.: Научный мир, 2003. – 316 с.
245. Самарский А. А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. / А. А. Самарский, А. П. Михайлов. – М.:Физматлит, 2001. – 320 с.
246. Сафоник А. П. Моделювання нелінійних процесів фільтрування з урахуванням зворотних впливів та дифузійно–масообмінних впливів: автореф...к. т. н.: 01.05.02 / Андрій Петрович Сафоник. – Львів, 2010. – 20 с.

247. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. – Киев: Наук. думка, 1991. – 432с.
248. Сидорчук Б. П. Математичне моделювання нелінійних процесів фільтрації з урахуванням суфозійних явищ: автореф...к. т. н.: 01.05.02 / Богдан Петрович Сидорчук. – Тернопіль, 2000. – 22 с.
249. Скопецкий В. В. Математичне моделювання деяких процесів фільтраційної консолідації масивів, насичених сольовими розчинами / В. В. Скопецкий, В. М. Булавацький // Доп. НАН України. – 2005. – №8. – С.55–61.
250. Советов Б. Я. Моделирование систем / Б. Я. Советов, С. А. Яковлев. – М.: Высш. школа, 2001. – 343 с.
251. Соколов В. Н. Глинистые породы и их свойства / В. Н. Соколов // Соросовский образовательный журнал. – 2000. – №9. – С. 59–65.
252. Тартаковский Д. М. О неравномерных деформациях земляных плотин в областях примыкания грунтов к жестким неровным поверхностям / Д. М. Тартаковский, И. М. Васильев // Труды Ленинградского политехнического ин-та. – 1968. – №292. – С. 81–88.
253. Тер–Мартirosян З. Г. Ползучесть наклонного пласта при действии переменного порового давления / З. Г. Тер–Мартirosян // Основания, фундаменты, механика грунтов. – 1971. – №4. – С8–10.
254. Тер–Мартirosян З. Г. Консолидация и ползучесть слоя грунта ограниченной ширины под действием местной нагрузки / З. Г. Тер–Мартirosян, Пак Чун Сун // Основания, фундаменты, механика грунтов. – 1998. – №2. – С.2–6.
255. Техногенные геохимические процессы в песчаных пластах–коллекторах при захоронении жидких радиоактивных отходов / [Зубков А. А. и др.] // Геоэкология. – 2002. – №2. – С. 133–144.
256. Тригуб Р. М. Положительно определённые финитные радиальные функции полиномиального вида и максимальной гладкости / Р. М. Тригуб

- // Математическая физика, анализ, геометрия. – 2002. – Т. 9, №3. – С. 394–400.
257. Уманский С. Э. Алгоритм и программа триангуляции двумерной области произвольной формы / С. Э. Уманский // Проблемы прочности. – 1978. – №6. – С.83–87.
258. Ухов С. Б. Влияние искусственного засоления и рассоления связных грунтов на их физико–механические свойства / С. Б. Ухов // Основания, фундаменты, механика грунтов. – 1961. – №3. – С.16–18.
259. Фиалко А. И. Исследование влияния степени минерализации водных растворов на фильтрационные свойства горных пород / А. И. Фиалко, Ф. А. Руденко // Материалы по геологии, гидрогеологии и геохимии Украины, РСФСР и Молдавии. – 1978. – Вып. 14. – С. 63–68.
260. Фізико–математичне моделювання складних систем / [Я.Бурак та ін.] ; під. ред. Я. Бурака та Є. Чаплі. – Львів: СПОЛОМ, 2004. – 264 с.
261. Физические величины: справочник / под ред. И. С. Григорьева, Е. З. Мейлихова. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 1232 с.
262. Флорин В. А. Теория уплотнения земляных масс / В. А. Флорин. – М.: Госстройиздат, 1948. – 284 с.
263. Флорин В. А. Основы механики грунтов. В 2 т. Т.2. / В. А. Флорин. – М.: Госстройиздат, 1961. – 544 с.
264. Хлапук М. М. Математичне моделювання процесу фільтрації в середовищах, де відбувається механічна суфозія / М. М. Хлапук // Гідромеліорація та гідротехнічне будівництво. – 1998. – Вип. 23. – С. 92–98.
265. Ходаков Г. С. Реология суспензий. Теория фазового течения и ее экспериментальное обоснование / Г. С. Ходаков // Рос. хим. ж. – 2003. – Т. XLVII, №2. – С. 33–44.
266. Хоменко В. П. К вопросу о механизме суффозионного процесса в несвязных грунтах / В. П. Хоменко // Комплексная оценка свойств грунтов и инженерно–геологические процессы. – М.: Стройиздат, 1982. – С. 136–153.

267. Христианович С. А. Движение грунтовых вод, не следующее закону Дарси / С. А. Христианович // Прикл. матем. и мех. – 1940. – Т.4, №1. – С. 33–52.
268. Цитович Н. А. Влияние порового давления на деформацию сдвига многофазного грунта / Н. А. Цитович, З. Г. Тер–Мартirosян, А. Б. Лейкам // Основания, фундаменты, механика грунтов. – 1977. – №5. – С37–39.
269. Чапля Є. Я. Фізико–математичне моделювання гетеродифузного масопереносу / Є. Я. Чапля, О. Ю. Чернуха. – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 128 с.
270. Чапля Є. Я. Математичне моделювання дифузійних процесів у випадкових і регулярних структурах / Є. Я. Чапля, О. Ю. Чернуха. – Київ: Наук. думка, 2009. – 302 с.
271. Численное моделирование распространения загрязнения в окружающей среде / М. З. Згуровский, В. В. Скопецкий, В. К. Хрущ, Н. Н. Беляев. – К.: Наук. думка, 1997. – 368 с.
272. Чугаев Р. Р. Земляные гидротехнические сооружения / Р. Р. Чугаев. – Ленинград: Энергия, 1967. – 460 с.
273. Чугаев Р. Р. Гидротехнические сооружения. В 2 ч. Ч.1. Глухие плотины / Р. Р. Чугаев. – М.: Агропромиздат, 1985. – 318 с.
274. Чугаев Р. Р. Гидротехнические сооружения. В 2 ч. Ч.2. Водосливные плотины / Р. Р. Чугаев. – М.: Агропромиздат, 1985. – 302 с.
275. Чудновский А. Ф. Влияние переменного характера теплофизических характеристик почв по их профилю на температуру почвы / А. Ф. Чудновский // Инженерно–физический журнал. – 1960. – Т.3, №7. – С.51–59.
276. Чудновский А. Ф. Теплофизические характеристики дисперсионных материалов / А. Ф. Чудновский. – М.: Физматгиз, 1962. – 456с.
277. Чураев П. В. Термоосмос растворов электролитов в пористых телах / П. В. Чураев, Б. В. Дерягин, П. П. Золотарев // Доклады АН СССР. – 1968. – 183, №5. – С. 1139–1142.

278. Шаманский В. Е. Численное решение задач фильтрации грунтовых вод на ЭЦВМ / В. Е. Шаманский. – Киев: Наук. думка, 1969. – 375с.
279. Шаманский В. Е. Численное решение задач неустановившейся фильтрации со свободными поверхностями жидкости / В. Е. Шаманский // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1970. – Т. 10(2). – С. 505–514.
280. Шапошник В. А. Анализ температурной зависимости вязкости воды / В. А. Шапошник // Вестник Воронежского гос. ун-та. Серия: Химия. Биология. Фармация. – 2004. – №1. – С. 107–109.
281. Шахно С. М. Чисельні методи лінійної алгебри / С. М. Шахно. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2007. – 245 с.
282. Шестаков В. М. Динамика подземных вод / В. М. Шестаков. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1979. – 368 с.
283. Шинкаренко Г. А., Козаревська Ю. С. Регуляризація чисельних розв'язків варіаційних задач міграції домішок: h-адаптивний метод скінченних елементів. Частина 1 / Г. А. Шинкаренко, Ю. С. Козаревська // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. інформ. – 2001. – №5. – С.153–164.
284. Школа А. В. Деформирование территорий портов и оснований портовых гидротехнических сооружений в сложных инженерно-геологических условиях / А. В. Школа. – М.: Мортехинформреклама, 1983. – 24 с.
285. Школа А. В. Численное решение уравнения нелинейной консолидации фильтрационно-анизотропного массива грунта при его плоском деформировании / А. В. Школа, Т. В. Рабочая. // Світ геотехніки. – 2008. – №1. – С. 22–23.
286. Шостак А.В. Вплив підвищених температур і тиску на консолідацію глинистих ґрунтів: автореф...к. т. н.: 05.23.02 / Андрій Володимирович Шостак. – Київ, 1998. – 16 с.
287. Шостак А. В. Вплив температури на стискуваність і консолідацію глинистих ґрунтів / А. В. Шостак, О. Й. Фіалко // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. геологія. – 1997. – Вип. 15. – С. 47 – 49.

288. Asensio M. I. Coupling stabilized finite element methods with finite difference time integration for advection–diffusion–reaction problems / M. I. Asensio, B. Ayuso, G. Sangalli // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* – 2007. – 196. – Pp. 3475–3491.
289. $b = \int g$ / F. Brezzi, L. Franca, T. J. R. Hughes, A. Russo // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* – 1997. – 142. – Pp. 353–360.
290. Baiocchi C. Virtual bubbles and the Galerkin–least–squares method / C. Baiocchi, F. Brezzi, L. Franca // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* – 1993. – 105. – Pp. 125–141.
291. Baldi G. Thermal volume changes of the mineral–water system in low–porosity clay soils / G. Baldi, T. Hueckel, R. Pellegrini // *Canadian Geotech. J.* – 1988. – 25. – Pp. 807–825.
292. Banin A. Simultaneous transport of water and salt through clays: 2. Steady–state distribution of pressure and applicability of irreversible thermodynamics / A. Banin, P. F. Low // *Soil Sci.* – 1971. – 112. – Pp. 69–88.
293. Barbour S. L. Mechanisms of osmotic flow and volume change in clay soils / S. L. Barbour, D. G. Fredlund // *Can. Geotech. J.* – 1989. – 26. – Pp. 551–562.
294. Baumann C. E. A discontinuous hp finite element method for convection–diffusion problems / C. E. Baumann, J. T. Oden // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* – 1999. – 175. – Pp. 311–341.
295. Benahmed N. Internal erosion of cohesive soils: laboratory parametric study / N. Benahmed, S. Bonelli // *Sixth International Conference on Scour and Erosion, Paris.* – 2012. – Pp. 1041–1048
296. Biot M. A. General theory of three–dimensional consolidation / M. A. Biot // *J. Appl. Phys.* – 1941. – Vol. 12, №2. – Pp. 155–165.
297. Bonelli S. The scaling law of piping erosion / S. Bonelli, O. Brivois, D. Lachouette // *18^{eme} Congres Francais de Mecanique, Grenoble.* – 2007. – Pp. 1–6.
298. Brooks A. N. Streamline upwind/Petrov–Galerkin formulations for convective dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier–Stokes

- equation / A. N. Brooks, T. J. R. Hughes // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* – 1982. – 32. – Pp. 199–259.
299. Buhmann M. D. A new class of radial basis functions with compact support / M. D. Buhmann // *Mathematics of Computation.* – 2000. – Vol. 70, №233. – Pp. 307–318.
300. Buhmann M.D. *Radial Basis Functions: Theory and Implementations* / M. D. Buhmann. – Cambridge: Cambridge University Press, 2004. – 260 p.
301. Burman E. Edge stabilization for Galerkin approximations of convection–diffusion problems / E. Burman, P. Hansbo. – Goteborg, 2002. – 18 p. –(Preprint/ Chalmers University of Technology. Chalmers Finite Element Center; 2002.17).
302. Cakmak A. Analysis of nonlinear Darcy–Forchheimer flows in porous media: a dissertation in mathematics for the degree of Doctor of Philosophy / Cakmak Adem. – Texas Tech University, 2009. – 67 p.
303. Campanella R. G. Influence of temperature variations on soil behavior / R. G. Campanella, J. K. Mitchell // *J. of Soil Mechanics and Foundations division.* – 1968. – Vol. 94. – Pp. 709–734.
304. Cekerevac C. Experimental study of thermal effects on the mechanical behavior of a clay / C. Cekerevac, L. Laloui // *Int. J. Anal. Meth. Geomech.* – 2004. – Vol. 28. – Pp. 209–228.
305. Chen W. Recent advance in radial basis function collocation method / W. Chen, Z.–J. Fu, C. S. Chen. – Springer Science & Business Media, 2013. – 100 p.
306. Cui Y. J. A thermomechanical model for saturated clays / Y. J. Cui, N. Sultan, P. Delage // *Can. Geotech. J.* – 2000. – 37.– Pp. 607–620.
307. Delage P. On the thermal consolidation of Boom clay / P. Delage, N. Sultan, Y. J. Cui // *Can. Geotech. J.* – 2000. – 37. – Pp. 343–354.
308. Dinh H. Reconstructing surfaces by volumetric regularization using radial basis functions / H. Dinh, G. Turk, G. Slabaugh // *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence.* – 2002. – P. 1358–1371.

309. Dirksen C. Thermo–osmosis through compacted saturated clay membranes / C. Dirksen // Soil Sci.Soc.Am.Proc. – 1969. – 33. – Pp.821–826.
310. Donea J. Finite element methods for flow problems / J. Donea, A. Huerta. – Wiley, 2003. – 350 p.
311. Erosion in Geomechanics: Applied to Dams and Levees / Edited by S. Bonelli. – Jonh Wiley&Sons, 2013. – 410 p.
312. Fasshauer G. F. Meshfree approximation methods with MATLAB / G. F. Fasshauer. – World Scientific Publishing Company, 2007. – 520 p.
313. Fedoseyev A. I. Improved multiquadric method for elliptic partial differential equations via PDE collocation on the boundary / A. I. Fedoseyev, M. J. Friedman, E. J. Kansa // Comput. Math. Appl. – 2002. – 43(3). – Pp. 439–455.
314. Fornberg B. Stable computation of multiquadric interpolants for all values of the shape parameter / B. Fornberg, G. Wright // Comput. Math. Appl. – 2003. – 43. – Pp. 853–867.
315. Foster M. Use of event trees to estimate the probability of failure of embankment dams by internal erosion and piping / M. Foster, R. Fell // 20th Congress on Large Dams, Beijing. – 2000. – Pp. 237–259.
316. Franca L. P. Bubble functions prompt unusual stabilized finite element methods / L. P. Franca, C. Farhat // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. – 1995. – 123. – Pp. 299–308.
317. Franca L. P. Stabilized finite element methods: I. Application to the advective–diffusive model / L. P. Franca, S. L. Frey, T. J. R. Hughes // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. – 1992. – 95. – Pp. 253–276.
318. Franca L. P. Revisiting stabilized finite element methods for the advective–diffusive equation / L. P. Franca, G. Hauke, A. Masud // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. – 2006. – 195. – Pp. 1560–1572.
319. Franke C. Convergence order estimates of meshless method using radial basis functions / C. Franke, R. Schaback // Adv. Comput. Math.–1998.–8.–Pp. 381–399.

320. Franke C. Solving partial differential equations by collocation using radial basis functions / C. Franke, R. Schaback // *Appl. Math. Comp.* – 1998. – 93.– Pp. 73–82.
321. Frey P. J. Mesh generation / P. J. Frey, P.–L. George. – Wiley–ISTE, 2010. – 814 p.
322. Fritz S. J. Ideality of clay membranes in osmotic processes: a review / S. J. Fritz // *Clays Clay Miner.* – 1986. – Vol. 34. – Pp.214–223.
323. Fritz S. J. Experimental support for a predictive osmotic model of clay membranes / S. J. Fritz, I. W. Marine // *Geochimica et Cosmochimica Acta.* – 1983. – 47. – Pp. 1515–1522.
324. Function representation of solids reconstructed from scattered surface points and contours / V. V. Savchenko, A. A. Pasko, O. G. Okunev, T. L. Kunii // *Computer Graphics Forum.* – 1995. – Vol. 14. – P. 181–188.
325. Further considerations on residual-free bubbles for advective–diffusive equations / F. Brezzi, L. Franca, T. J. R. Hughes, A. Russo // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* – 1998. – 166. – Pp. 25–33.
326. Gautschi A. Hydrogeology of a fractured shale (Opalinus Clay): Implication for deep geological disposal of radioactive wastes / A. Gautschi // *Hydrogeology Journal.* – 2001. – 9. – Pp.97–107.
327. Geisser S. The predictive sample reuse method with applications / S. Geisser // *J. American Statistical Association.* – 1975. – V. 70. – Pp. 320–328.
328. George P.–L. Delaunay triangulation and meshing. Application to Finite elements / P.–L. George, H. Borouchaki.– Hermes, 1998. – 498 p.
329. Ghassemi A. Porothermoelasticity for swelling shales / A. Ghassemi, A. Diek // *Journal of Petroleum Science and Engineering.* – 2002. – 34. – Pp. 123–125.
330. Giesl P. Meshless collocation: error estimates with application to dynamical systems / P. Giesl, H. Wendland. – Goettingen, 2006. – 29 p. – (Preprint/Instituts für Numerische und Angewandte Mathematik; 2006–12).

331. Griebel M. A particle–partition of unity method for the solution of elliptic, parabolic, and hyperbolic PDEs / M. Griebel, M. A. Schweitzer // J. Scientific Computing. – 2000. – Vol. 22. – P. 853–890.
332. Groenevelt P. H. On thermo–osmosis and thermofiltration in porous media / P. H. Groenevelt // Труды X Международного конгресса почвоведов. Т. 1. – М.: Наука, 1974. – С.47–55.
333. Guo B. The h–p–version of the finite element method / B. Guo, I. Babushka // Comput. Mech. – 1986. – 1. – P.21–41.
334. Hafskjold B. On the molecular mechanism of thermal–diffusion in liquids / B. Hafskjold, T. Ikeshoji, S. K. Ratkje // Mol. Phys. – 1993. – Vol. 80. – Pp.1389–1392.
335. Hardy R. L. Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces / R. L. Hardy // Geophy. Res. – 1971. – 76. – Pp. 1905–1915.
336. Hardy R. L. Theory and applications of the multiquadric–biharmonic method: 20 years of discovery / R. L. Hardy // Comput. Math. Appl. — 1990. – 19. — Pp. 163–208.
337. Hassanizadeh S. M. A non–linear theory of high–concentration gradient dispersion in porous media / S. M. Hassanizadeh, A. Leijnse // Adv. Water Resour. – 1995. – 18. – Pp. 203–215.
338. Huang C.–S. Error estimate, optimal shape factor, and high precision computation of multiquadric collocation method / C.–S. Huang, C.–F. Lee, A. H.–D. Cheng // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 2007. – V. 31, №7. – Pp. 614–623.
339. Interfacial erosion: a three–dimensional model / F. Golay, D. Lachouette, S. Bonelli, P. Seppacher // C. R. Mecanique. – 2010. – V.338, №6. – P. 333–337.
340. Iske A. Radial basis functions: basics, advanced topics and meshfree methods for transport problems / A. Iske // Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino. –2003. – Vol. 61, 3.– Pp.247–284.

341. Jackson R. D. Circulation of water in soil under a temperature gradient / R. D. Jackson, D. A. Rose, H. L. Penman // *Nature*. – 1965. – 205, №16. – Pp. 314–316.
342. Jianhua Y. FE modelling of seepage in embankment soils with piping zone / Y. Jianhua // *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*. – 1998. – №6. – Pp. 679–686.
343. Kansa E. J. Multiquadrics – a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid–dynamics. I. Surface approximations and partial derivative estimates / E. J. Kansa // *Comput. Math. Appl.* – 1990. – 19. – Pp. 127–145.
344. Kansa E. J. Multiquadrics – a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid–dynamics. II. Solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations / E. J. Kansa // *Comput. Math. Appl.* – 1990. – 19. – Pp. 147–161.
345. Kansa E. J. The role of multiquadric shape parameters in the numerical solution of PDEs /E. J. Kansa // *ECCOMAS Thematic Conferense on Meshless Methods*. – Lisbon, 2005. – A41.1.
346. Kansa E. J. Circumventing the ill–conditioning problem with multiquadric radial basis functions: applications to elliptic partial equations / E. J. Kansa, Y. C. Hon // *Computers and Mathematics with Applications*. – 2000. – V. 39, №7–8. – Pp. 123–137.
347. Kee B. B. T. A least–square radial point collocation method for adaptive analysis in linear elasticity / B. B. T. Kee, G. R. Liu, C. Lu // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. – 2008. – Vol. 32. – Pp.440–460.
348. Keijzer Th. J. S. Chemical osmosis in natural clayey materials / Th. J. S. Keijzer // *Geologica Ultraiectina*. – 2000. – №196. – 152 p.
349. Keijzer Th. J. S. Chemical osmosis in compacted clayey material and the prediction of water transport / Th. J. S. Keijzer, P. J. Kleingeld, J. P. G. Loch // *Engin. Geology*. – 1999. – Vol. 53. – Pp. 151–159.

350. Keijzer Th. J. S. Chemical osmosis in compacted dredging sludge / Th. J. S. Keijzer, J. P. G. Loch // Soil. Sci. Soc. Am. J. – 2001. – Vol. 65. – Pp. 1045–1055.
351. Kemper W. D. Osmotic efficiency coefficients across compacted clays / W. D. Kemper, J. B. Rollins // Soil Sci. Soc. Am. Proc. –1966.–30.–Pp.529–534.
352. Khalil T. Internal erosion of chemically reinforced granular materials: a mathematical modeling approach / T. Khalil, N. Saiyouri, B. Muresan, P.–Y. Hicher // Int. J. Numer. Analyt. Meth. Geomechanics. – 2013. – Vol. 35 (5). – Pp. 491–502.
353. Kormann K. A Galerkin radial basis function method for the Schrodinger equation / K. Kormann, E. Larsson // J. Scientific Computing. – 2013. – Vol. 35. – Pp. 2832–2855.
354. Kowalczyk P. Mesh-free approach to Helmholtz equation based on radial basis functions / P. Kowalczyk, M. Mrozowski // J. Telecommunications and Information Technology. – 2005. – 2. – Pp. 71–74.
355. Lachouette D. One-dimensional modelling of piping flow erosion / D. Lachouette, F. Golay, S. Bonelli // C. R. Mecanique. – 2008. – V.336, №9. – P. 731–736.
356. Laloui L. Thermo-mechanical behavior of soils / L. Laloui // Revue Francaise de genie civil. –2001. – Vol. 5. – Pp. 809–843.
357. Lancellotta R. A general nonlinear mathematical model for soil consolidation problems / R. Lancellotta, L. Preziosi // J. Engin. Sciences. – 1997. – Vol. 35. – Pp. 1045–1063.
358. Larsson E. A numerical study of some radial basis function based solution methods for elliptic PDEs / E. Larsson, B. Fornberg // Comput. Math. Appl. – 2003. – 46. – Pp. 891–902.
359. Least-squares collocation meshless method / X. Zhang, X.–H. Liu, K.–Z. Song, M.–W. Lu // Int. J. Numer. Methods Engin. – 2001. – Vol.51. – Pp. 1089–1100.

360. Li S. Meshfree and particle methods and their applications / S. Li S., W. K. Liu // *Appl. mech. rev.* – 2002. – Vol. 55, №1. – P. 1–34.
361. Liu G. R. Mesh Free Methods: Moving beyond the Finite Element Method / G. R. Liu. – Boca Raton: CRC Press, 2009. – 872 p.
362. Liu X. Radial point collocation method for solving convection–diffusion problems / X. Liu // *J. Zhejiang Univ. SCIENCE A.* – 2006. – Vol. 7(6). – Pp.1862–1775.
363. Mai–Duy N. A compact 9 point stencil based on integrated RBFs for the convection–diffusion equation / N. Mai–Duy, N. Thai–Quang, T.–T. Hoang–Trieu, T. Tran–Cong // *Applied Mathematical Modelling.* – 2014. – Vol. 38 (4). – Pp. 1495–1510.
364. Malusis M. A. A laboratory apparatus to measure chemico–osmotic efficiency coefficients for clay soils / M. A. Malusis, C. D. Shackelford, H. W. Olsen // *Geotechnical Testing Journal.* – 2001. – 24, №3. – Pp.229–242.
365. Mattsson H. On internal erosion in embankment dams / H. Mattsson, J. G. I. Hellstrom, T. S. Lundstrom // *Research report Lulea University of Technology.* – 2008. – №14. – 47 p.
366. Measuring streambank erosion due to ground water seepage: correlation to bank pore water pressure, precipitation, and stream stage / G. A. Fox, G. V. Wilson, A. Simon, E. Langendoen, O. Akay, J. W. Fuchs // *Earth Surface Processes and Landforms.* – 2007. – 32(10). – Pp. 1558–1573.
367. Micchelli C. A. Interpolation of scattered data: distance matrices and conditionally positive definite functions / C. A. Micchelli // *Constr. Approx.* – 1986. – 2. – Pp. 11–22.
368. Model test on the piping resistance of short fibre reinforced soil and its application to river levee / K. Furumoto, H. Miki, N. Tsuneoka, T. Obata // *Geosynthetics: 7th ICG–Delmas.* – 2002. – P.1241–1244.
369. Modified Cam–Clay modeling of temperature effects in clays / J. Graham, N. Tanaka, T. Crilly, M. Alfaro // *Can. Geotech. J.* – 2001. – 38. – Pp. 608–621.

370. Mokady R. S. Simultaneous transport of water and salt through clays:1 / R. S. Mokady, P. F. Low // Soil Sci. – 1968. – 105. – Pp. 112–131.
371. Neuzil C. E. Osmotic generation of ‘anomalous’ fluid pressures in geological environments / C. E. Neuzil // Nature. – 2000. – Vol. 403. – Pp. 182–184.
372. Ojha C. S. P. Influence of porosity on piping models of levee failure / C. S. P. Ojha, V. P. Singh, D. D. Adrian // J. Geotechnical and Geoenvironmental Engineering. – 2001. – Vol. 127, №12. – P. 1071–1074.
373. Ojha C. S. P. Determination of critical head in soil piping / C. S. P. Ojha, V. P. Singh, D. D. Adrian // J. Hydraulic Eng. – 2003. – №7. – P. 511–518.
374. On the validity of Darcy's law for stable high-concentration displacements in granular porous media / S. J. Watson, D. A. Barry, R. J. Schotting, S. M. Hassanizadeh // Transport in Porous Media. – 2002. – 47. – Pp. 149–167.
375. Plum R. L. Some temperature effects on soil compressibility and pore water pressure / R. L. Plum, M. J. Esrig // Highway Research Board. –1969. – Sp Rpt 103. – Pp. 213–242.
376. Polemio P. Failure of infrastructure embankments induced by flooding and seepage: a neglected source of hazard / M. Polemio, P. Lollino // Nat. Hazards Earth Syst. Sci. – 2011. – 11. – Pp. 3383–3396.
377. Qayyum M. A. Salt-concentration gradients in soils and their effects on moisture movement and evaporation / M. A. Qayyum, W. D. Kemper // Soil Sci. – 1962. – 93. – Pp.333–342.
378. Rao S. S. The finite element method in engineering / S. S. Rao. – Butterworth–Heinemann, 2010. – 704 p.
379. Reddy J. N. An introduction to the mathematical theory of finite elements / J. N. Reddy, J. T. Oden. – Dover Pubns, 2009. – 448 p.
380. Sandra M. C. M. Numerical analysis of a stabilized finite element method for tracer injection simulations / M. C. M. Sandra, F. D. L. Abimael, L. M. G. Eduardo // Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. – 2000. – Vol.187. – Pp. 119–136.

381. Sarra S. A. Adaptive radial basis function methods for time dependent partial differential equations / S. A. Sarra // *Appl. Numer. Math.* – 2005. – Vol. 54, №1. – Pp. 79–94.
382. Schotting R. J. High-concentration gradient dispersion in porous media: experiments, analysis and approximations / R. J. Schotting, H. Moser, S. M. Hassanizadeh // *Adv. Water Resour.* – 1999. – 22. – Pp. 655–680.
383. Sellmeijer J. B. On the mechanism of piping under impervious structures (Thesis) / J. B. Sellmeijer // *LGM-Mededelingen.* – 1988.– №96.–112 p.
384. Sellmeijer J. B. A mathematical model for erosion under a dam / J. B. Sellmeijer, M. Koenders // *Appl. Math. Model.* – 1991. – 15. – Pp.646–651.
385. Sellmeijer J. B. Numerical computation of seepage erosion below dams (piping) / J. B. Sellmeijer // *Proc. 3rd Int. Conf. Scour and Erosion, Amsterdam.* – 2006. – 6 p.
386. Soler J. M. Coupled transport phenomena in the Opalinus Clay: implications for radionuclide transport / J. M. Soler // *Paul Scherrer Institute Report 99–07.* – 1999. – 62 p.
387. Soler J. M. The effect of coupled transport phenomena in the Opalinus Clay and implications for radionuclide transport / J. M. Soler // *J. Contaminant Hydrology.* – 2001. – 53. – Pp. 63–84.
388. Some comments on the use of radial basis functions in the dual reciprocity method / M. A. Golberg, C. S. Chen, H. Bowman, H. Power // *Comput. Mech.* – 1998. – 21. – Pp. 141–148.
389. Srivastava R. C. Non-equilibrium thermodynamics of thermo-osmosis of water through kaolinite / R. C. Srivastava, P. K. Avasthi // *J. Hydrol.* – 1975. – 24. – Pp. 111–120.
390. Sulem J. Thermo-poro-mechanical properties of clayey gouge and application to rapid fault shearing / J. Sulem, P. Lazar, I. Vardoulakis // *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.* – 2007. – 31. – Pp. 523–540.

391. Sultan N. Temperature effects on the volume change behavior of Boom clay / N. Sultan, P. Delage, Y. J. Cui // *Engineering Geology*. – 2002. – 64. – Pp. 135–145.
 392. Surana K. S. Investigation of diffusion in p-version 'LSFE' and 'STLSFE' formulations / K. S. Surana, J. S. Sandhu // *Commun. Mech.* – 1995. – 16. – Pp.151–169.
 393. Terzaghi K. Die Berechnung der Durchlässigkeitsziffer des Tones aus dem Verlauf der hydrodynamischem Spannungserscheinungen / K. Terzaghi // *Sitz. Akad. Wissen. Wien Math–naturw Kl. Abt. Ila.* – 1923. – 132. – Pp. 125–138.
 394. Tezduyar T. Finite element stabilization parameters computed from element matrices and vectors / T. Tezduyar, Y. Osawa // *Comput. Methhods Appl. Mech. Engrg.* – 2000. – 190. – Pp. 411–430.
 395. Tezduyar T. Stabilization parameters in SUPG and PSPG formulations / T. Tezduyar, S. Sathe // *J. Comput. and Applied Mechanics*. – 2003. – 4(1). – Pp. 71–88.
 396. Thin–plate spline radial basis function scheme for advection–diffusion problems / I. Boztosun, A. Charafi, M. Zerroukat, K. Djidjeli // *Electronic Journal of Boundary Elements*. – 2002. – 2. – Pp. 267–282.
 397. Van Rijn L. C. Three–dimensional modeling of sand and mud transport in current and waves / L. C. Van Rijn, K. Meijer // *Int. Symp. "The transport of suspended sediments and its mathematical modeling"*, Florence, Italy. – 1991. – Pp. 683–708.
 398. Vlasyuk A. P. Numerical solution of a one–dimensional problem of filtration consolidation of saline soils in a nonisothermal regime / A. P. Vlasyuk, P. M. Martynyuk, O. R. Fursovych // *Journal of Mathematical Sciences*. – 2009. – Vol. 160, №4. – P. 525–535.
- Власюк А. П. Числове розв'язання одновимірної задачі фільтраційної консолідації засолених ґрунтів в неізотермічному режимі / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк, О. Р. Фурсович // *Матем. методи та фіз.–мех. поля*. – 2008. – 51, №1. – С. 197–204.

399. Vlasyuk A. P. Numerical solution of three-dimensional problems of filtration consolidation with regard for the influence of technogenic factors by the method of radial basis functions / A. P. Vlasyuk, P. M. Martynyuk // Journal of Mathematical Sciences. – 2010. – Vol. 171, №5. – P. 632–648.
Власюк А. П. Чисельне розв'язування просторових задач фільтраційної консолідації з урахуванням впливу техногенних факторів методом радіальних базисних функцій / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Матем. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – 52, №3. – С. 170–181.
400. Wahl T. L. Erosion indices of soil used in ARS piping breach tests. Hydraulic Laboratory Report HL-2008-04 / T. L. Wahl, Z. Erdogan. – Denver, 2008. – 148 p.
401. Wendland H. Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree / H. Wendland // Adv. Comput. Math. – 1995. – Vol. 4. – P. 389–396.
402. Wendland H. Scattered Data Approximation / H. Wendland. – Cambridge: University Press, 2005. – 336 p.
403. Zhang F. Estimating temperature effects on water flow in variably saturated soils using activation energy / F. Zhang, R. Zhang, S. Kang // Soil Sci. Soc. Am. J. – 2003. – 67. – Pp. 1327–1333.
404. Zienkiewicz O. C. The finite element method: Its basis and fundamentals / O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, J. S. Zhu. – Butterworth-Heinemann, 2005. – 752 p.

ДОДАТОК А

"ЗАТВЕРДЖУЮ"

генеральний директор
НВП ТОВ-фірми "АКВА-У",
академік Міжнародної Академії Наук
Екології та Безпеки життєдіяльності
(МАНЕБ)
Курилюк Микола Степанович

М.П.

(підпис)

"16" жовтня 2012 р.

АКТ

впровадження методики розрахунку фільтраційної консолідації ґрунтів,
розробленої у докторській дисертації Мартинюка П. М.

м. Рівне

"16" жовтня 2012 р.

Комісією представників науково-виробничого підприємства товариства з обмеженою відповідальністю – фірми "АКВА-У", колективного члена Міжнародної Академії Наук Екології та Безпеки життєдіяльності (МАНЕБ) асоційованої при ООН, у складі:

генеральний директор Курилюк Микола Степанович,
головний інженер Ліхоніна Алла Анатоліївна,
інженер-будівельник Стригун Володимир Степанович,
складено даний акт про те, що:

При проектуванні та будівництві каналізаційних очисних споруд м. Ківерці Волинської області, а саме блоку доочищення стічних вод біоплато-фільтра в водонасичених ґрунтах, була використана методика розрахунку фільтраційної консолідації ґрунтів в умовах впливу тепло-солепереносу для визначення можливого просідання верхньої межі ґрунту. Дана методика розроблена в докторській дисертації доцента Національного університету водного господарства та природокористування Мартинюка П.М.

Застосована методика дозволила більш точно спрогнозувати зміщення точок поверхні ґрунту з урахуванням неізотермічних умов та наявності солей в поровій рідині ґрунту.

Розрахунок дозволяє уникнути критичних ситуацій при будівництві та подальшій експлуатації збудованого об'єкта у водонасичених ґрунтах.

Погоджено:

(підпис)
(підпис)
(підпис)

Курилюк М.С.

Ліхоніна А.А.

Стригун В.С.

ДОДАТОК В

ТзОВ "Фірма "СААН"
вул. С. Васильченка, 3, м. Рівне,
Україна. 33023



SAAN Limited
3, Vasylichenko Str., Rivne,
Ukraine. 33023

tel./fax +38 0362 63-79-05, tel. +38 0362 23-51-50, +38 067 362-87-46; e-mail: saan21@rivne.com; www.saan.com.ua

«Затверджую»

Директор ТОВ «Фірма СААН», м. Рівне

 С. М. Мудрик

« 14 » травня 2013 р.

АКТ

впровадження рекомендацій щодо застосування методики розрахунку
просідань верхньої межі ґрунту, розробленої у докторській дисертації

Мартинюка П.М.

Комісія у складі головного інженера проекту Філяєва Д.В., головного технолога Филипчука В.Л., інженера-проектувальника Мельник О.В. склала даний акт про те, що під час проектування каналізаційної насосної станції з вбудованим блоком біологічного очищення стічних вод бази відпочинку «Феміда» (с.м.т. Затока) Національного університету «Одеська юридична академія» була використана методика розрахунків просідань верхньої межі ґрунту з урахуванням неізотермічних умов та наявності солей в поровій рідині. Методика ґрунтується на рекомендаціях з дослідження фільтраційної консолідації ґрунтів, які викладені в докторській дисертації П. М. Мартинюка. Це дозволяє забезпечити більшу надійність під час експлуатації об'єкта в повністю насичених ґрунтах в умовах впливу техногенних факторів та комплексу фізико-хімічних процесів. Без урахування вказаних факторів було б не можливо спрогнозувати збільшення просідань верхньої межі ґрунту та виникнення критичних ситуацій стосовно розглядуваного об'єкта.

Підписи:



 Філяєв Д.В.

 Филипчук В.Л.

 Мельник О.В.

ДОДАТОК С

«ЗАТВЕРДЖУЮ»

374

Перший проректор Національного
університету водного господарства та
природокористування



проф. С. О. Левицька

« 17 »

2013 р.

АКТ

про впровадження результатів дисертаційної роботи

Мартинюка Петра Миколайовича

**«Математичне моделювання консолідації ґрунтів з урахуванням
техногенного впливу та комплексу фізико-хімічних процесів»**

Акт складено комісією у складі:

- А. П. Власюк, д. т. н., проф. кафедри прикладної математики;
- Л. В. Гладун, к. ф.-м. н., доц. кафедри прикладної математики;
- М. Т. Кузло, к. т. н., доц. кафедри автомобільних доріг, основ та фундаментів;
- О. В. Жеребятєв, к. т. н., доц. кафедри автомобільних доріг, основ та фундаментів.

Даний акт складений у тім, що матеріали докторської дисертації Петра Миколайовича Мартинюка використано співробітниками Національного університету водного господарства та природокористування у науковій і навчальній роботі, а саме:

- 1) В навчальному процесі при виконанні кваліфікаційних робіт студентами за напрямом підготовки 6.040301 «Прикладна математика», дипломних та магістерських робіт студентами спеціальностей 7.04030101, 8.04030101 «Прикладна математика» (спеціаліст, магістр), підготовці та читанні ряду

тем спецкурсів «Математичне і комп'ютерне моделювання природних та техногенних систем», «Чисельні методи прикладної математики», «Теорія систем та математичне моделювання» для студентів вказаних спеціальностей; підготовці та читанні ряду тем дисципліни «Механіка ґрунтів, основи та фундаменти» для студентів спеціальностей 6.060103 «Гідротехніка»; 6.060101 «Будівництво»; 7.06010101, 8.06010101 «Промислове і цивільне будівництво»; 7.06010102, 8.06010102 «Гідротехнічне будівництво».

- 2) При проведенні експериментальних досліджень з консолідації насичених ґрунтів в геотехнічній лабораторії кафедри автомобільних доріг, основ та фундаментів університету.

Довідка видана для надання Вченій раді за місцем захисту дисертації і Міністерству освіти і науки, молоді та спорту України для підтвердження використання наукових досліджень Національним університетом водного господарства та природокористування.

ДОДАТОК Д

Д. т. н., проф.

А. П. Власюк

К. ф.-м. н., доц.

Л. В. Гладун

К. т. н., доц.

М. Т. Кузло

К. т. н., доц.

О. В. Жеребят'єв

ДОДАТОК D

УКРАЇНА



ДЕРЖАВНА СЛУЖБА ІНТЕЛЕКТУАЛЬНОЇ ВЛАСНОСТІ УКРАЇНИ

СВІДОЦТВО
про реєстрацію авторського права на твір

№ 51618

Комп'ютерна програма "Комплекс комп'ютерних програм "Фільтраційна консолідація ґрунтів з урахуванням впливу техногенних факторів"
(вид, назва твору)

Автор(и) Мартинюк Петро Миколайович, Мічута Ольга Романівна
(повне ім'я, псевдонім (за наявності))

Дата реєстрації 08.10.2013



Голова Державної служби інтелектуальної власності України
М.В. Ковіня

(Handwritten signature)