

УДК 539.3

О. Багно, докт. фіз.-мат. наук

Інститут механіки імені С.П. Тимошенка НАН України

ПОШИРЕННЯ ХВИЛЬ У ПРУЖНОМУ ШАРІ, ЩО КОНТАКТУЄ З ШАРОМ В'ЯЗКОЇ СТИСЛИВОЇ РІДИНИ

Резюме. У рамках тривимірних лінеаризованих рівнянь Нав'є-Стокса для рідкого середовища та тривимірних лінійних рівнянь класичної теорії пружності для твердого тіла наведено постановку задачі про поширення гармонічних хвиль у пружному шарі, який контактує з шаром в'язкої стисливої рідини. Проведено чисельне дослідження, побудовано дисперсійні криві та встановлено залежності фазових швидкостей і коефіцієнтів згасання мод від в'язкості рідини, товщини шару рідкого середовища та товщини твердого шару для широкого спектра частот.

Ключові слова: пружний шар, шар в'язкої стисливої рідини, гармонічні хвилі.

O. Bahno

PROPAGATION OF WAVES IN ELASTIC LAYER WHICH CONTACTS WITH A LAYER OF VISCOUS COMPRESSIBLE FLUID

Summary. The problem about the propagation of acoustic waves in elastic layer which interacts with a layer of viscous compressible fluid is considered. The study is carried out basing on the three-dimensional linearized Navier-Stokes equations for viscous fluid and linear equations of the classical theory of elasticity for the solid layer. Statement of the problem and approach that are based on the use of general solutions of linearized Navier-Stokes equations for viscous fluid and linear equations for elastic body is applied. The dispersion equation is obtained, which describes the propagation of harmonic waves in the hydroelastic system within the wide range of frequencies. Numerically the characteristic equation is solved and dispersion curves are constructed for the wide spectrum of frequencies in the case of a thick elastic layer. Dependencies of phase velocities of normal modes of Lamb from the thickness of elastic layer in the case of absence of interaction with fluid are given. For the hydroelastic waveguide dependencies of phase velocities and attenuation coefficients of modes from the thickness of layer of viscous compressible fluid are presented. Dependencies of relative changes of phase velocities of normal modes from the thickness of fluid layer are also given. An influence of the viscosity of liquid medium, thickness of layers of elastic body and fluid on the phase velocities and attenuation coefficients is analyzed. For hydroelastic system with increasing of the thickness layer of viscous fluid the velocity of zero antisymmetric mode tends to the Stoneley wave velocity and velocity of zero symmetric mode tends to the Rayleigh wave velocity was shown. With increasing of thickness of liquid layer the velocity of the first antisymmetric mode goes to the wave velocity, the value of which is less than the propagation velocity of sound in liquid. Phase velocities of all other higher modes tends to the propagation velocity of sound in liquid. It was showed that in the case of thick elastic layer for all modes there are layers of fluid of certain thickness and there are certain frequencies for which the influence of viscosity of the fluid on the phase velocities and attenuation coefficients is minimal. It was also found that for certain of modes, exist as certain frequencies and certain ranges of frequencies wherein the influence of fluid viscosity on the phase velocities and attenuation coefficients of these modes is significant. The developed approach and the results obtained allow for wave processes to establish the limits applicability of the model of an ideal fluid.

Key words: elastic layer, layer of viscous compressible fluid, harmonic waves.

Постановка проблеми. Розвиток науки і техніки висуває нові підвищені вимоги до досліджень у галузі аерогідропружності й, зокрема, до вивчення розповсюдження хвиль у пружних тілах, що контактують з рідиною. Сутність їх полягає в необхідності повнішого врахування властивостей реальних твердих і рідких середовищ і на цій основі адекватного опису різноманітних явищ і механічних ефектів, характерних для динамічних процесів у гідропружних хвилеводах.

Аналіз відомих результатів досліджень. Хвилі, що поширюються вздовж границі контакту пружного шару та шару рідини, належать до числа узагальнень

грунтовно досліджених основних типів акустичних хвиль: Релея, Стоунлі, Лява та Лемба. Огляд робіт і аналіз результатів, отриманих у рамках класичної теорії пружності та моделі ідеальної стисливої рідини, наведено в [1]. Разом з тим, значне практичне використання поверхневих хвиль вимагає врахування властивостей, які притаманні реальним середовищам. До таких факторів належить в'язкість рідини. Задачі, які розглянуто, та результати, отримані з урахуванням цієї властивості рідини, наведено в [2–4].

Мета роботи. Дослідити дисперсійний спектр хвильового процесу у гідропружній системі: пружний шар – шар в'язкої стисливої рідини на основі тривимірних лінеаризованих рівнянь Нав'є-Стокса для рідкого середовища та тривимірних лінійних рівнянь класичної теорії пружності для твердого тіла.

Постановка задачі. У даній роботі для дослідження поширення хвиль у шарі рідини, що взаємодіє з пружним шаром, залучено модель в'язкої стисливої ньютонівської рідини. При цьому використано тривимірні лінеаризовані рівняння Нав'є-Стокса для рідини, що знаходиться у стані спокою без урахування теплових ефектів. В якості підходу обрано постановки задач і метод, що базуються на застосуванні представлень загальних розв'язків рівнянь руху в'язкої стисливої рідини та пружного тіла, запропонованими у роботах [5–10].

Розглянемо задачу про поширення акустичних хвиль у гідропружній системі, що складається з пружного шару та шару в'язкої стисливої рідини. Розв'язок отримаємо із залученням тривимірних рівнянь класичної теорії пружності для твердого тіла та лінеаризованих рівнянь Нав'є-Стокса для рідини, що знаходиться у стані спокою. У рамках прийнятих моделей основні співвідношення для системи пружне тверде тіло – в'язка стислива рідина будуть мати вигляд

$$\mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu) \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) - \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = 0, \quad \sigma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial u_j} + \frac{\partial u_j}{\partial u_i} \right) + \lambda \delta_{ij} \vec{\nabla} \vec{u}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \nu^* \Delta \vec{v} + \frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p - \frac{1}{3} \nu^* \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \rho^*} = a_0^2; a_0 = const; \quad (2)$$

$$P_{ij} = -p \delta_{ij} + \lambda^* \delta_{ij} \vec{\nabla} \vec{v} + \mu^* \left(\frac{\partial v_i}{\partial z_j} + \frac{\partial v_j}{\partial z_i} \right), \quad \lambda^* = -\frac{2}{3} \mu^*. \quad (3)$$

Тут введено такі позначення: u_i – компоненти вектора переміщень твердого тіла; ρ – щільність матеріалу пружного шару; λ та μ – константи Ляме матеріалу твердого тіла; v_i – складові вектора збурень швидкості рідини; ρ^* та p – збурення щільності та тиску в рідині; ν^* та μ^* – кінематичний та динамічний коефіцієнти в'язкості рідини; ρ_0 та a_0 – щільність та швидкість звуку в рідині у стані спокою.

Рівності (1) описують поведінку твердого тіла. Малі коливання в'язкої стисливої рідини, що знаходиться в стані спокою та без врахування теплових ефектів, описують співвідношення (2)–(3).

Далі припустимо, що пружний шар заповнює об'єм $-\infty < z^1 < \infty, -h^2 \leq z^2 \leq 0, -\infty < z^3 < \infty$ та контактує з шаром в'язкої стисливої рідини, що займає об'єм $-\infty < z^1 < \infty, 0 \leq z^2 \leq h^1, -\infty < z^3 < \infty$. Будемо вважати, що зовнішні сили, які діють на зазначені середовища, розподілені рівномірно вздовж осі oz^3 . Оскільки у цьому випадку хвиля, яка біжить у напрямку осі oz^1 , і збурення, що її викликають, не залежать від змінної z^3 , то задача буде плоскою і можна обмежитися вивченням процесу поширення хвиль у площині $oz^1 z^2$.

Отже, зазначена задача зводиться до розв'язання системи рівнянь (1)–(3) при таких граничних умовах:

$$P_{21}|_{z_2=0} = \sigma_{21}|_{z_2=0}, \quad P_{22}|_{z_2=0} = \sigma_{22}|_{z_2=0}, \quad v_1|_{z_2=0} = \frac{\partial u_1}{\partial t}|_{z_2=0}, \quad v_2|_{z_2=0} = \frac{\partial u_2}{\partial t}|_{z_2=0}; \quad (4)$$

$$\sigma_{21}|_{z_2=-h} = 0, \quad \sigma_{22}|_{z_2=-h} = 0, \quad P_{21}|_{z_2=h} = 0, \quad P_{22}|_{z_2=h} = 0. \quad (5)$$

У подальшому для спрощення розв'язання задачі гідропружності скористаємося представленнями загальних розв'язків для твердих пружних тіл і в'язкої стисливої рідини, запропонованими в [5–10],

$$u_1 = -\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial z_1 \partial z_2}; \quad u_2 = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\mu}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda + \mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \chi_1; \quad (6)$$

$$v_1 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_1 \partial t} + \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial z_2 \partial t}; \quad v_2 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_2 \partial t} - \frac{\partial^2 \chi_3}{\partial z_1 \partial t}, \quad (7)$$

де введені потенціали χ_i є розв'язками таких рівнянь:

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - \frac{(\lambda + \mu)^2}{\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} \right] \chi_1 = 0;$$

$$\left[\left(1 + \frac{4\nu^*}{3a_0^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \chi_2 = 0, \quad \left[\frac{\partial}{\partial t} - \nu^* \left(\frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} \right) \right] \chi_3 = 0. \quad (8)$$

Для аналізу поширення збурень, які гармонічно змінюються з часом, розв'язки системи рівнянь розшуковуються у класі біжучих хвиль

$$\chi_i = X_i(z_2) \exp[i(kz_1 - \omega t)], \quad i = \overline{1,3}, \quad (9)$$

де k ($k = \beta + i\gamma$) – хвильове число; γ – коефіцієнт згасання хвиль; ω – кругова частота.

Зауважимо, що обраний у даній роботі клас гармонічних хвиль, який є найбільш простим і зручним у теоретичних дослідженнях, не обмежує загальності отриманих результатів, оскільки лінійна хвиля довільної форми, як відомо, може бути представлена набором гармонічних складових. Далі розв'язуються дві задачі Штурма-Ліувілля на власні значення для рівнянь руху пружного тіла та рідини, а також знаходяться відповідні власні функції. Після підстановки розв'язків у граничні умови (4)–(5) отримуємо систему лінійних однорідних алгебраїчних рівнянь відносно сталих інтегрування. Виходячи з умови існування нетривіального розв'язку та прирівнюючи визначник системи до нуля, отримуємо дисперсійне рівняння

$$\det \| e_{mn}(c, \gamma, \lambda, \mu, \rho, \rho_0, a_0, \mu^*, \omega h_1 / c_s, \omega h_2 / c_s) \| = 0, \quad m, n = \overline{1,8}, \quad (10)$$

де c – фазова швидкість мод у гідропружній системі; h_2 – товщина пружного шару; h_1 – товщина шару рідини, c_s ($c_s^2 = \mu / \rho$) – швидкість хвилі зсуву в твердому тілі.

Зауважимо, що особливість розповсюдження збурень у гідропружному хвилеводі зазначеної структури зумовлена наявністю в пружному тілі та рідині

граничних поверхонь. Це значно ускладнює картину хвильового поля у ньому. Причиною цього є те, що у формуванні поля в гідропружній системі суттєву роль відіграють не тільки наявність рідини, а також взаємодія хвиль з поверхнею пружного тіла, контактуючого з рідким середовищем, але й наявність вільних границь та їх взаємовплив. Складна взаємодія хвиль, породжених граничними поверхнями, призводить до виникнення так званих квазіповерхневих мод.

Відзначимо, що отримане дисперсійне рівняння (10) є найбільш загальним і з нього можна отримати співвідношення для ряду частинних випадків, які розглянуті в роботах [1–4, 6–12]. Зокрема, якщо a_0 спрямувати до нескінченості, то (10) переходить у рівняння для визначення параметрів мод у випадку взаємодії з в'язкою нестисливою рідиною. Якщо $\bar{\mu}^*$ покласти рівним нулю, то з (10) отримаємо результати для гідропружної системи з ідеальною рідиною [1,11,12]. При $\rho_0=0$ рівність (10) перейде в рівняння для визначення швидкостей хвиль Лемба [1]. Якщо додатково спрямувати h_2 до нескінченості, отримаємо співвідношення для визначення швидкостей поверхневих хвиль Релея [1]. При $\rho_0 \neq 0$ та $h_1 \rightarrow \infty$ рівність перейде у рівняння Стоунлі [1].

Аналіз числових результатів. У подальшому дисперсійне рівняння (10) розв'язувалося швидкозбіжним ітераційним методом. При цьому розрахунки проводилися для системи оргскло-вода, яка характеризувалася такими параметрами: пружний шар – $\rho=1160$ кг/м³, $\lambda=3,96 \cdot 10^9$ Па, $\mu=1,86 \cdot 10^9$ Па; шар рідини – $\rho_0=1000$ кг/м³, $a_0=1459,5$ м/с, $\bar{\mu}^*=0,001$. Результати обчислень наведено на рис.1–8.

На рис.1 для пружного шару, який не взаємодіє з рідиною, приведено залежності безрозмірних фазових швидкостей нормальних мод Лемба \bar{c} ($\bar{c} = c/c_s$) від безрозмірної товщини пружного шару \bar{h}_2 ($\bar{h}_2 = \frac{\omega h_2}{c_s}$). Номерами на позначено антисиметричні моди, а ns – відповідно симетричні моди.

На рис.2 представлені дисперсійні криві для гідропружного хвилеводу, які показують залежності безрозмірних фазових швидкостей мод від безрозмірної товщини шару в'язкої стисливої рідини \bar{h}_1 ($\bar{h}_1 = \frac{\omega h_1}{c_s}$) для пружного шару з товщиною що дорівнює $\bar{h}_2=10$.

Характер впливу в'язкості рідини на швидкості мод у гідропружній системі ілюструють графіки на рис.3–5, де представлені залежності відносних змін величин фазових швидкостей c^* ($c^* = \frac{c_i - c_v}{c_i}$), c_i – фазова швидкість нормальних мод у гідропружній системі з ідеальною рідиною; c_v – фазова швидкість мод у системі з в'язкою рідиною) від товщини шару рідини \bar{h}_1 для перших 11 мод. На цих рисунках наведено графіки для гідропружного хвилеводу, товщина пружного шару якого дорівнює $\bar{h}_2=10$.

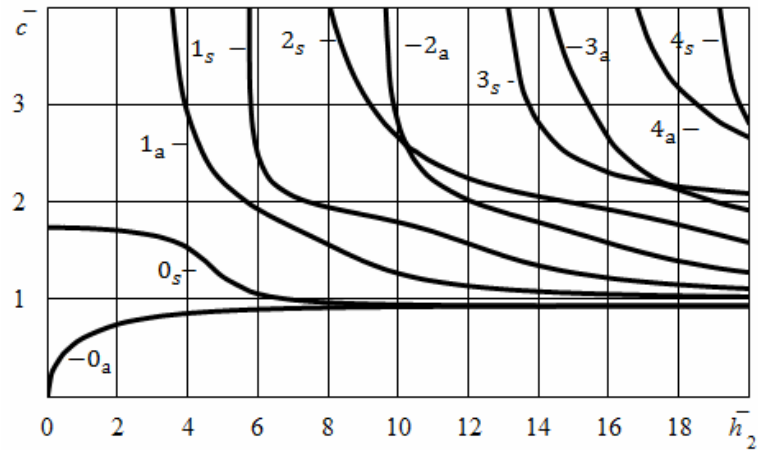


Рисунок 1. Залежності безрозмірних фазових швидкостей нормальних мод Лемба від безрозмірної товщини пружного шару

Figure 1. Dependencies of dimensionless phase velocities of normal modes of Lamb on dimensionless thickness of the elastic layer

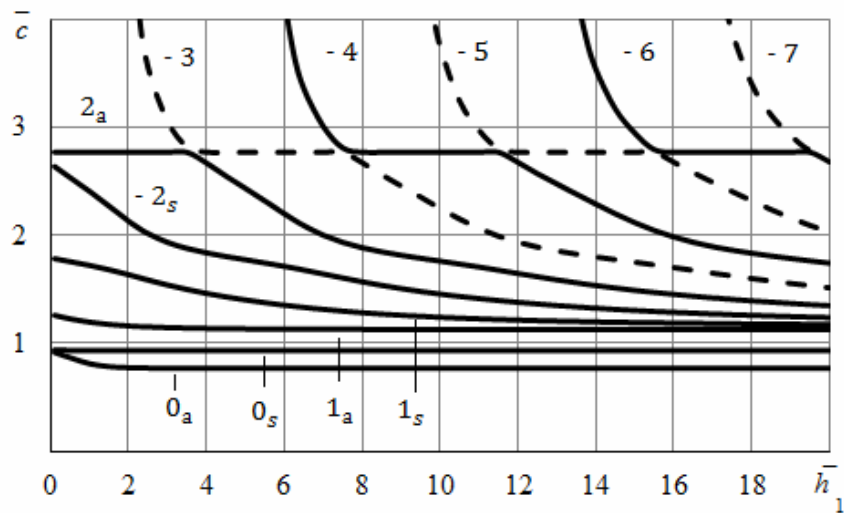


Рисунок 2. Залежності безрозмірних фазових швидкостей мод від безрозмірної товщини шару в'язкої стисливої рідини

Figure 2. Dependencies of dimensionless phase velocities of modes on dimensionless thickness of the layer of viscous compressible fluid

На рис.6–8 наведено залежності безрозмірних коефіцієнтів згасання мод $\bar{\gamma}$ ($\bar{\gamma} = \gamma/k_s$; k_s – хвильове число хвилі зсуву в матеріалі пружного шару) від товщини шару в'язкої рідини \bar{h}_1 .

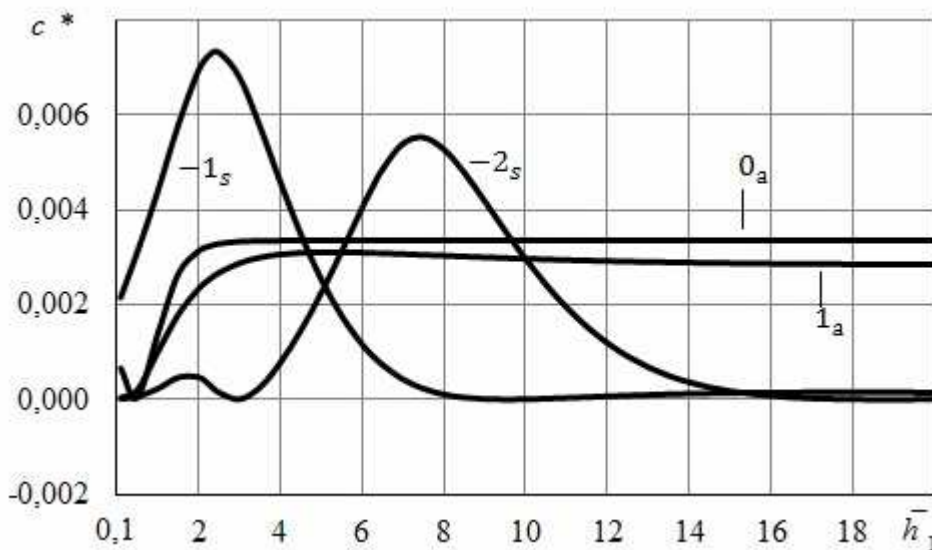


Рисунок 3. Залежності відносних змін величин фазових швидкостей нормальних мод 0_a , 1_a , 1_s та 2_s від товщини шару рідини

Figure 3. Dependencies of relative changes of phase velocities of normal modes 0_a , 1_a , 1_s and 2_s on the thickness of fluid layer

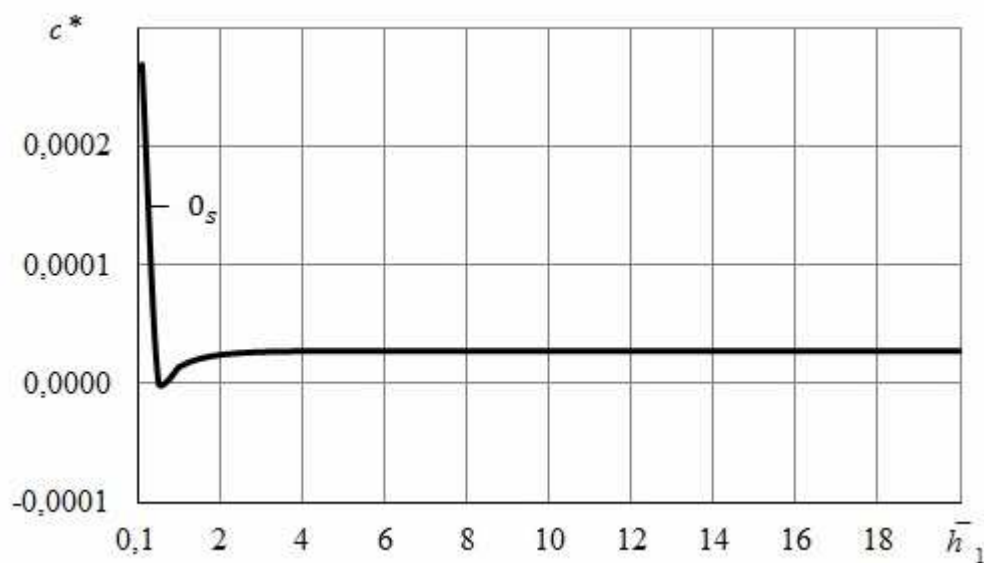


Рисунок 4. Залежність відносної зміни величини фазової швидкості нормальної моди 0_s від товщини шару рідини

Figure 4. Dependence of relative changes of phase velocity of normal mode 0_s on the thickness of fluid layer

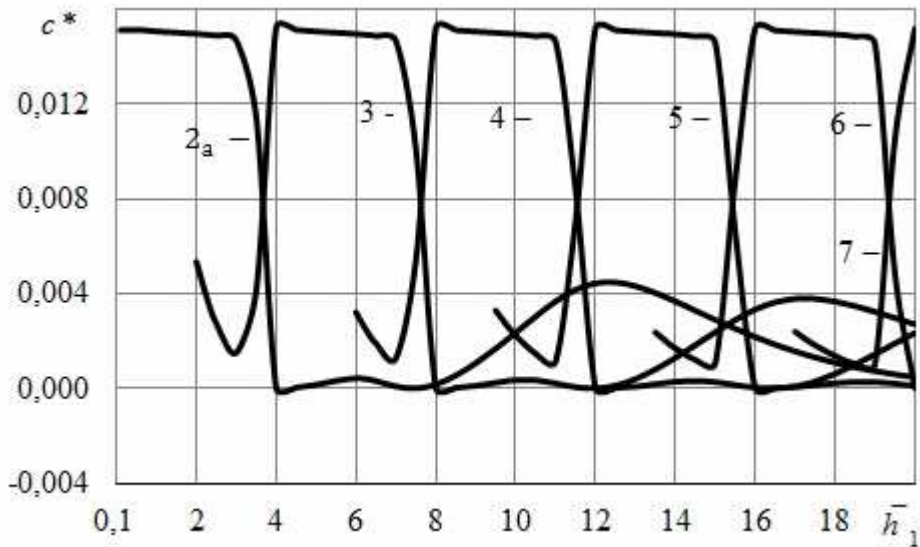


Рисунок 5. Залежності відносних змін величин фазових швидкостей нормальних мод 2а, 3, 4, 5, 6 та 7 від товщини шару рідини

Figure 5. Dependencies of relative changes of phase velocities of normal modes 2a, 3, 4, 5, 6 and 7 on the thickness of fluid layer

Результати дослідження. З графіків, наведених на рис.1, випливає, що швидкість нульової антисиметричної моди Лемба при зростанні товщини пружного шару прямує до швидкості хвилі Релея знизу, а швидкість нульової симетричної моди прямує до швидкості хвилі Релея згори. Швидкості усіх вищих мод Лемба при збільшенні товщини пружного шару прямують до швидкості хвилі зсуву в матеріалі пружного тіла.

Графіки для гідропружної системи, які наведені на рис.2, для випадку товстого пружного шару з $\bar{h}_2=10$, що розглядається тут, показують, що при зростанні товщини рідкого шару швидкість нульової антисиметричної моди прямує до швидкості хвилі Стоунлі, а швидкість нульової симетричної моди – до швидкості хвилі Релея. При збільшенні товщини рідкого шару швидкість першої антисиметричної моди прямує до швидкості хвилі, величина якої менше швидкості поширення звуку в рідині. Фазові швидкості усіх інших вищих мод прямують до швидкості поширення звуку в рідині.

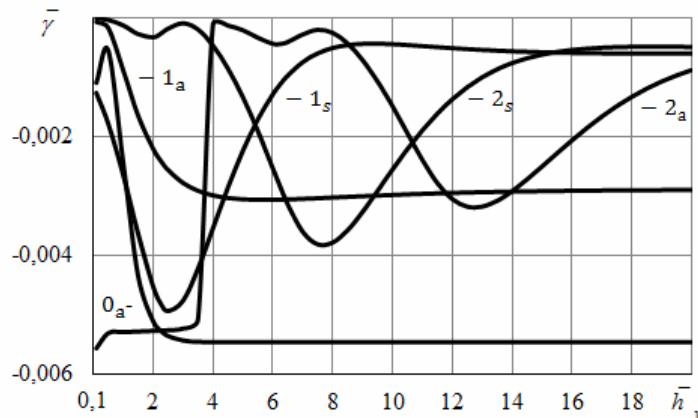


Рисунок 6. Залежності безрозмірних коефіцієнтів згасання мод 0а, 1а, 1s, 2а, та 2s від товщини шару в'язкої рідини

Figure 6. Dependencies of dimensionless attenuation coefficients of modes 0a, 1a, 1s, 2a, and 2s

on the thickness of layer of viscous fluid

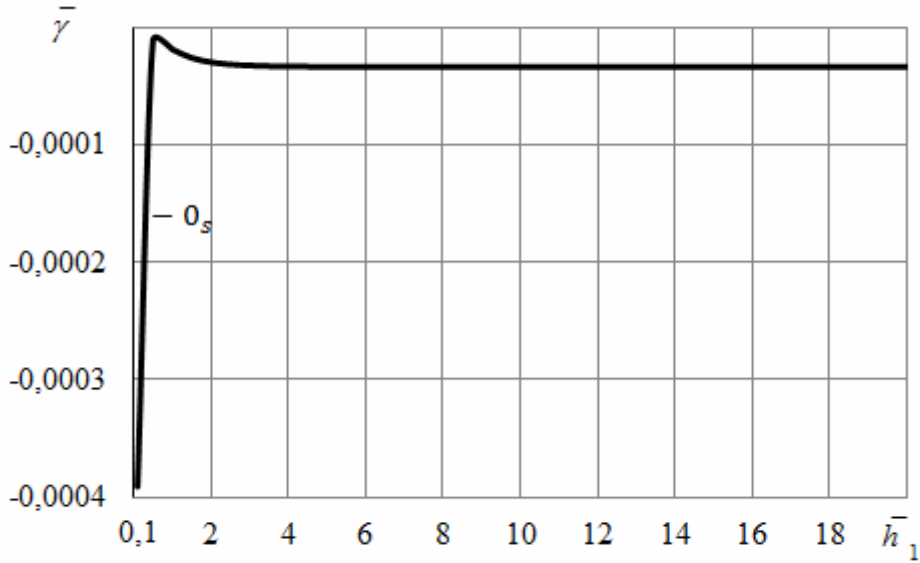


Рисунок 7. Залежність безрозмірного коефіцієнта згасання моди 0_s від товщини шару в'язкої рідини

Figure 7. Dependence of dimensionless attenuation coefficient of mode 0_s on the thickness of layer of viscous fluid

З графічного матеріалу, наведеного на рисунках, випливає, що для всіх мод існують рідкі шари певної товщини та певні частоти, для яких вплив в'язкості рідини на фазові швидкості та коефіцієнти згасання мод є мінімальним. Разом з тим для ряду мод існують як певні частоти, так й інтервали частот, при яких вплив в'язкості рідини на фазові швидкості та коефіцієнти згасання цих мод значний.

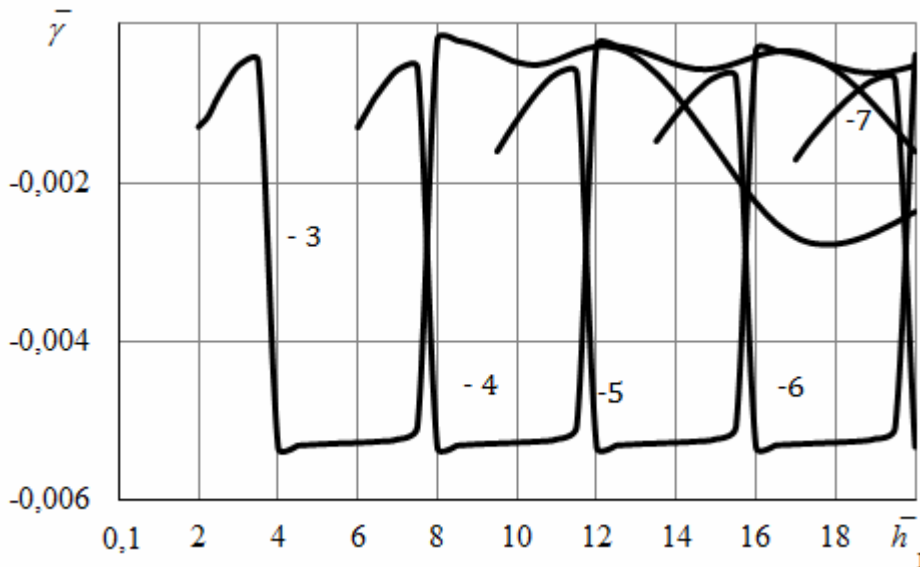


Рисунок 8. Залежності безрозмірних коефіцієнтів згасання мод 3, 4, 5, 6 та 7 від товщини шару в'язкої рідини

Figure 8. Dependencies of dimensionless attenuation coefficients of modes 3, 4, 5, 6 and 7 on the thickness of layer of viscous fluid

Висновки. На основі тривимірних лінеаризованих рівнянь Нав'є-Стокса для в'язкої рідини та лінійних рівнянь класичної теорії пружності для твердого шару побудовано дисперсійні криві та досліджено поширення акустичних хвиль у широкому діапазоні частот. Проаналізовано вплив в'язкості рідини, товщини пружного та рідкого шарів на фазові швидкості та коефіцієнти згасання мод. Показано, що у випадку товстого пружного шару для всіх мод існують рідкі шари певної товщини та певні частоти, для яких вплив в'язкості рідини на фазові швидкості та коефіцієнти згасання мод є мінімальним. Виявлено також, що для ряду мод існують як певні частоти, так й інтервали частот, при яких вплив в'язкості рідини на фазові швидкості та коефіцієнти згасання цих мод значний. Розвинений підхід та отримані результати дозволяють для хвильових процесів встановити межі застосування моделі ідеальної стисливої рідини. Вони можуть бути використані у таких областях, як сейсмологія, сейсморозвідка та інших.

Conclusions. On the base of three-dimensional linearized Navier-Stokes equations for viscous fluid and linear equations of the classical theory of elasticity for the solid layer the dispersion curves were constructed and propagation the of acoustic waves in a wide range of frequencies were explored. The influence of the viscosity of the fluid, the thickness of the elastic and fluid layers on the phase velocities and attenuation coefficients of modes were analyzed. It was showed that in the case of thick elastic layer for all modes there are layers of fluid of certain thickness and there are certain frequencies for which the influence of viscosity of the fluid on the phase velocities and attenuation coefficients is minimal. It was also found that for certain of modes, exist as certain frequencies and certain ranges of frequencies wherein the influence of fluid viscosity on the phase velocities and attenuation coefficients of these modes is significant. The developed approach and the results obtained allow for wave processes to establish the limits applicability of the model of an ideal fluid. They can be used in the fields such as seismology, seismic and etc.

Список використаної літератури

1. Викторов, И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах [Текст] / И.М. Викторов. – М.: Наука, 1981. – 288 с.
2. Багно, А.М. Упругие волны в предварительно напряжённых телах, взаимодействующих с жидкостью (обзор) [Текст] / А.М. Багно, А.Н. Гузь // Прикладная механика. – 1997. – № 6(33). – С.3–39.
3. Ottenio, M. Acoustic waves at the interface of a pre-stressed incompressible elastic solid and a viscous fluid [Text] / M. Ottenio, M. Destrade, R.W. Ogden // Int. Journal of Non-Linear Mech. – 2007. – № 2(42). – P.310–320.
4. Волькенштейн, М.М. Структура волны Стоунли на границе вязкой жидкости и твердого тела [Текст] / М.М. Волькенштейн, В.М. Левин // Акустический журнал. – 1988. – № 4(34). – С.608–615.
5. Гузь, А.Н. О задачах аэрогидроупругости для тел с начальными напряжениями [Текст] / А.Н. Гузь // Прикладная механика. – 1980. – № 3(16). – С.3–21.
6. Гузь, А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями: в 2 т. [Текст] / А.Н. Гузь. – К.: Наук. думка, 1986. – Т.1: Общие вопросы. – 376 с. Т.2: Закономерности распространения. – 536 с.
7. Гузь, А.Н. Динамика сжимаемой вязкой жидкости [Текст] / А.Н. Гузь. – К.: А.С.К., 1998. – 350 с.
8. Гузь, А.Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями [Текст] / А.Н. Гузь. – К.: А.С.К., 2004. – 672 с.
9. Guz, A.N. Compressible, viscous fluid dynamics (review). Part 1 [Text] / A.N. Guz // Int. Appl. Mech. – 2000. – № 1(36). – P.14–39.
10. Guz, A.N. The dynamics of a compressible viscous liquid (review). II [Text] / A.N. Guz // Int. Appl. Mech. – 2000. – № 3(36). – P.281–302.
11. Селезов, И.Т. Распространение поверхностных волн в слое жидкости над упругим полупространством [Текст] / И.Т. Селезов, С.А. Савченко, З.В. Хатунцева // Динамические системы. – 2006. – №20. – С.50–58.

12. Гринченко, В.Т. Поверхностные волны в системе упругий слой на жидком полупространстве [Текст] / В.Т. Гринченко, Г.Л. Комиссарова // Акустичний вісник. – 2005. – Т.8, № 4. – С.38–45.

Отримано 20.06.2014