

УДК 517.9; 678.06

Ю. Ловейкін¹, канд. фіз.-мат. наук; Ю. Човнюк², канд. техн. наук

¹Київський національний університет імені Тараса Шевченка

²Національний університет біоресурсів і природокористування України

ЗАСТОСУВАННЯ ПРЯМИХ ВАРІАЦІЙНИХ МЕТОДІВ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИНАМІЧНИХ ЗАДАЧ ВІБРОУЦІЛЬНЕННЯ В'ЯЗКОПРУЖНИХ ТІЛ

Резюме. У даній роботі розглянуто застосування прямих варіаційних методів у задачах віброуцільнення сумішей та матеріалів. Встановлено основні параметри віброуцільнення сумішей та матеріалів. Здійснено порівняльний аналіз розв'язків динамічних стаціонарних задач віброуцільнення.

Ключові слова: прями варіаційні методи, віброуцільнення, в'язкопружне тіло.

Yu. Loveikin, Yu. Chovnyuk

DIRECT VARIATIONAL METHODS APPLICATION TO SOLVE OF VISCOUS-ELASTIC BODIES VIBROCOMPACTION DYNAMICAL PROBLEMS

The summary. Direct variational methods application to solve of vibrocompaction of mixtures and materials. Vibrocompaction basic parameters are discovered. Comparative analysis of vibrocompaction dynamical stationary problem solutions is executed.

Key words: direct variational methods, vibrocompaction, viscous-elastic body.

Вступ. У численній літературі [1-5] з теорії коливань проблемі коливань в'язкопружних тіл (у тому числі в'язкопружних нестискуваних матеріалів) приділено недостатньо уваги. Між тим, ці задачі мають неабияке значення для багатьох важливих застосувань, зокрема, при віброуцільненні різноманітних сумішей та матеріалів. Слід зазначити, що розглядаючи матеріали подібного виду, суттєво дослідити стаціонарні режими. З області нестационарних режимів важливим є випадок удару абсолютно жорсткого тіла по в'язкопружному (модель ударного та віброударного ущільнення матеріалів).

При вивченні стаціонарних коливань в'язкопружних тіл найбільш розповсюджений метод – розклад шуканого розв'язку за власними функціями відповідної пружної задачі [1,3,6]. Такий метод застосовують, якщо відомі фундаментальні функції та власні числа задачі теорії пружності (головні форми та власні частоти). Слід зазначити, що цей підхід ефективний лише для тіл канонічної форми, у більшості ж практичних задач визначення фундаментальних функцій та власних чисел – доволі складна задача, розв'язок якої, як правило, можна знайти лише за допомогою чисельних методів, що, у свою чергу, ускладнює застосування отриманих результатів для розв'язання в'язкопружної задачі. Крім того, експериментальних даних, необхідних для описання фізичних властивостей в'язкопружного нестискуваного матеріалу, недостатньо при розгляді високочастотних коливань (задач звукової ізоляції, пов'язаних з акустикою).

У прикладних розрахунках, описуючи дисипативні властивості матеріалів, зручно користуватись поняттям величини петлі гістерезису [7]. Такий підхід дозволяє застосовувати досить простий математичний опис, гарну фізичну інтерпретацію і не

викликає особливих перешкод при її експериментальному визначенні для частотного діапазону, що нас цікавить. Крім того, такий підхід суттєво скорочує об'єм обчислень.

Найбільш ефективними при розв'язанні прикладних задач (як статичних, так і динамічних) є прямі варіаційні методи. Чисельна реалізація цих методів дає можливість врахувати попереднє навантаження виробу та інші особливості тіл довільної конфігурації. Однак для застосування цих методів необхідно сформулювати відповідний функціонал з екстремальними властивостями для дисипативної системи.

У лінійному випадку принцип Гамільтона можна розповсюдити на неконсервативні системи [8,9]. Цього досягають за допомогою додавання даної системи і спряженої до неї. У результаті одержують консервативну систему, до якої застосовують принцип Гамільтона.

Мета роботи – встановити основні параметри динамічних стаціонарних задач віброущільнення матеріалів та сумішей, використовуючи прямі варіаційні методи.

1. Прямі варіаційні методи для задач динаміки систем із зосередженими параметрами. Будемо розглядати диференціальне рівняння руху системи

$$M\ddot{w} + R\dot{w} + \Xi w = P(t), \quad (1)$$

де M, R, Ξ – матриці відповідно мас, дисипації та жорсткості системи, w – вектор узагальнених координат, $P(t)$ – функція збурюючих сил. Тоді спряжена система до системи (1) має вигляд

$$M^T \dot{w} - R^T w + \Xi^T w = P(t). \quad (2)$$

Назвемо рівняння (1) рівнянням руху з дисипацією, а рівняння (2) – рівнянням руху з накопиченням.

Відповідний функціонал, для якого рівняння (1) та (2) є рівняннями Ейлера, має вигляд

$$\Phi = \int_t \left(\dot{w}^T M \dot{w} + \frac{1}{2} \dot{w}^T R w - \frac{1}{2} q^T M \dot{w} - q^T \Xi w + P[w + q] \right) dt. \quad (3)$$

Відповідний функціонал для нестискуваного середовища з дисипацією запишемо, як

$$\begin{aligned} \Phi = \iint_V \left\{ \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i - \frac{G}{4} (u_{ij} + u_{ji})(q_{ij} + q_{ji}) - \frac{G}{2} (s^u q_{jj} + s^q u_{jj}) - \right. \\ \left. - \int_t \left[\frac{1}{4} (\dot{u}_{ij} + \dot{u}_{ji}) G_-^* (q_{ij} + q_{ji}) + \frac{1}{2} \dot{u}_{jj} G_-^* (s^q) \right] d\tau + \right. \\ \left. + \int_t \left[\frac{1}{4} (\dot{q}_{ij} + \dot{q}_{ji}) G_+^* (u_{ij} + u_{ji}) + \frac{1}{2} \dot{q}_{jj} G_+^* (s^u) \right] d\tau \right\} dV dt + \frac{1}{2} \iint_V p_i (u_i + q_i) d\Omega dt. \end{aligned} \quad (4)$$

Тут u_i та s^u – відповідно переміщення та функція гідростатичного тиску реальної системи, q_i та s^q – відповідно переміщення та функція гідростатичного тиску спряженої системи. Оператор зсуву G^* визначаємо, як

$$G^*[f(t)] = \int_{-\infty}^t \Lambda(t - \tau) f(\tau) d\tau. \quad (5)$$

Оператори G_-^* та G_+^* є операторами зсуву відповідно для реальної та спряженої систем. У випадку гармонічного впливу маємо

$$\begin{aligned}
 G_-^*[\sin \omega t] &= G[\sin \omega t] - G_1[\sin(\omega t - \varphi_0)], \\
 G_+^*[\sin \omega t] &= G[\sin \omega t] - G_1[\sin(\omega t + \varphi_0)], \\
 L_1 &= \int_0^\infty \Lambda(z) \cos \omega z \, dz, \quad L_2 = \int_0^\infty \Lambda(z) \sin \omega z \, dz, \\
 G_1 &= G[(1 - L_1)^2 + L_2^2]^{1/2}, \quad \operatorname{tg} \varphi_0 = -L_2(1 - L_1)^{-1}.
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Тут і у подальшому, описуючи величину енергії дисипації, зручно користуватися поняттям величини петлі гістерезису, а саме:

$$Q = \int_t^{t+2\pi/\omega} \int_V \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} dV dt.
 \tag{7}$$

Використовуючи закон стану та геометричний зв'язок між деформаціями та переміщеннями, (7) можна привести до вигляду

$$\begin{aligned}
 Q &= \int_t^{t+2\pi/\omega} \int_V G^*(2\varepsilon_{ij} + \delta_{ij}s) \dot{\varepsilon}_{ij} dV dt = \\
 &= \int_t^{t+2\pi/\omega} \int_V \left[\frac{1}{2} (\dot{u}_{ij} + \dot{u}_{ji}) G^*(u_{ij} + u_{ji}) + \dot{u}_{ij} G^*(s) \right] dV dt.
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

Порівнюючи (8) з внутрішніми інтегралами у (4), бачимо, що останні, з точністю до множника, є величинами розсіяної та накопиченої енергії відповідно у реальній та спряженій системі у випадку, коли за інтервал часу у (4) брати період коливань $2\pi/\omega$ вимушеної сили.

2. Аналітичні розв'язки стаціонарних задач динаміки. Розглянемо два варіанти розв'язку задачі, використовуючи функціонал, наведений у п. 1. Як приклад аналітичного розв'язку задачі розглянемо усталені вимушені коливання стрижня під дією гармонічної сили (рис. 1).

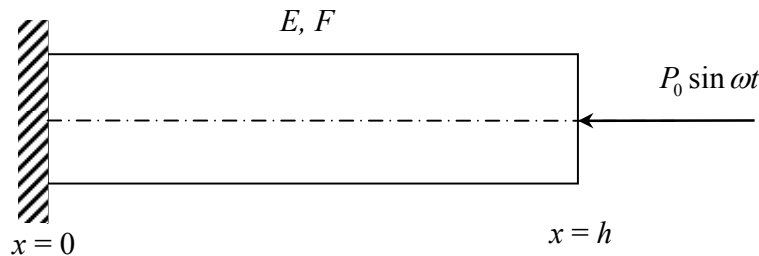


Рис. 1. Геометрія задачі: E – модуль Юнга матеріалу стрижня, F – площа його поперечного перерізу, P_0 – амплітуда вимушеної сили

Розв'язок цієї задачі можна шукати у вигляді розкладу його за власними формами коливань пружного стрижня [3], а саме:

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{p_k}{c} x\right) (A_k^s \sin \omega t + A_k^c \cos \omega t), \\
 q(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{p_k}{c} x\right) (B_k^s \sin \omega t + B_k^c \cos \omega t),
 \end{aligned}
 \tag{9}$$

де $u(x, t)$ – поздовжнє переміщення у реальній системі, $q(x, t)$ – поздовжнє переміщення у спряженій системі, $c = \sqrt{E/\rho}$, $p_k = \frac{(2k-1)\pi c}{2h}$, ρ – густина матеріалу стрижня.

Середнє за період значення кінетичної енергії для k -ої форми коливань знаходимо за формулою

$$\frac{\rho F}{2} \int_0^{2\pi/\omega} \int_0^h u^2 dx dt = \frac{\pi \rho F \omega h}{2} (A_k^s B_k^s + A_k^c B_k^c). \quad (10)$$

Оскільки $\sigma_{ij} = E \varepsilon_{ij}$, а у лінійній задачі $\sigma_x = E u_x$, то потенціальну енергію опишемо рівнянням

$$\frac{EF}{2} \int_0^{2\pi/\omega} \int_0^h u_x q_x dx dt = \frac{\pi}{2\omega} \rho F p_k^2 h (A_k^s B_k^s + A_k^c B_k^c). \quad (11)$$

Розглядаючи як розсіювану енергію величину петлі гістерезису, для енергії дисипації матимемо

$$\begin{aligned} \frac{F}{2} \int_0^{2\pi/\omega} \int_0^h (G^* u_x) q_x dx dt = \frac{\pi}{2\omega} F \omega h \left(\frac{p_k}{c} \right)^2 & \left[(A_k^s B_k^s + A_k^c B_k^c) E_1 \sin \varphi_0 + \right. \\ & \left. + (A_k^c B_k^s - A_k^s B_k^c) (E - E_1 \cos \varphi_0) \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Відповідно накопичена енергія буде

$$\begin{aligned} \frac{F}{2} \int_0^{2\pi/\omega} \int_0^h (E^* q_x) u_x dx dt = -\frac{\pi}{2\omega} F \omega h \left(\frac{p_k}{c} \right)^2 & \left[(A_k^s B_k^s + A_k^c B_k^c) E_1 \sin \varphi_0 + \right. \\ & \left. + (A_k^c B_k^s - A_k^s B_k^c) (E - E_1 \cos \varphi_0) \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Як і слід було чекати, розсіяна і накопичена енергії за величиною однакові й відрізняються лише знаком. Лінеаризований функціонал для k -ої форми коливань отримаємо згідно із (2) і маємо

$$\begin{aligned} \Phi^k = \frac{\pi}{2\omega} \left\{ \rho F h (\omega^2 - p_k^2) (A_k^s B_k^s + A_k^c B_k^c) + 2P_0 (A_k^s + B_k^s) \sin \left(\frac{p_k h}{c} \right) + 2\pi F h \left(\frac{p_k}{c} \right)^2 \times \right. \\ \left. \times \left[(A_k^s B_k^s + A_k^c B_k^c) E_1 \sin \varphi_0 + (A_k^c B_k^s - A_k^s B_k^c) (E - E_1 \cos \varphi_0) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (14)$$

де E_1 , φ_0 одержуємо згідно із (6), невідомі константи A_k^s , A_k^c знаходимо методом Рітца з умов

$$\frac{\partial \Phi^k}{\partial B_k^s} = 0, \quad \frac{\partial \Phi^k}{\partial B_k^c} = 0.$$

Після нескладних перетворень одержуємо

$$u(x, t) = \frac{-2P_0}{\rho F h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \sin \left(\frac{p_k x}{c} \right) \sin(\omega t + \varphi_k)}{\sqrt{\left(\omega^2 - p_k^2 \left(1 - 2\pi \frac{E_1 \sin \varphi_0}{E} \right) \right)^2 + \left(2\pi p_k^2 \frac{(E - E_1 \cos \varphi_0)}{E} \right)^2}}, \quad (15)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_k = \frac{2\pi p_k^2 \frac{E - E_1 \cos \varphi_0}{E}}{\omega^2 - p_k^2 \left(1 - 2\pi \frac{E_1 \sin \varphi_0}{E}\right)}. \quad (16)$$

Для порівняння наведемо розв'язок для стрижня з внутрішнім опором [3] за тих же режимів навантаження і умов закріплення

$$u(x, t) = \frac{-2P_0}{\rho F h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \sin\left(\frac{p_k x}{c}\right) \sin(\omega t + \varphi_k)}{\sqrt{(\omega^2 - p_k^2)^2 + H^2 \omega^2}}, \quad (17)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_k = \frac{H \omega}{\omega^2 - p_k^2}. \quad (18)$$

З рівнянь (15)–(18) бачимо, що обидва розв'язки співпадають з точністю до позначень.

Однак розв'язки (15) та (16) не зручні для практичного застосування, оскільки для чисельних розрахунків у розкладі (15) необхідно утримувати велику кількість членів ряду.

Описаний у п. 1 підхід, який дозволяє знайти розв'язок, мінімізувавши функціонал (4), відкриває можливості для отримання розв'язку зі значно меншою кількістю операцій. Застосуємо метод Канторовича [10], що дозволяє не використовувати власних функцій. Розглянемо застосування методу на прикладі тієї ж задачі про усталені коливання за силового збудження стрижня (див. рис. 1).

Використовуючи метод спряжених систем, подамо шукані розв'язки у вигляді: для реальної (прямої) системи –

$$u(x, t) = f_1(x) \sin \omega t + w_1(x) \cos \omega t, \quad (19)$$

для спряженої системи –

$$q(x, t) = f_2(x) \sin \omega t + w_2(x) \cos \omega t. \quad (20)$$

Відповідний функціонал, що потрібно мінімізувати, одержимо, підставивши (19), (20) у (4), а саме:

$$\Phi = \frac{\pi}{2} \int_0^h \left(\rho F \omega (f_1 f_2 + w_1 w_2) - \frac{EF}{\omega} (f_{1,x} f_{2,x} + w_{1,x} w_{2,x}) + 2H (w_1 f_2 - w_2 f_1) \right) dx. \quad (21)$$

Рівняння Ейлера даного функціонала для шуканих функцій реальної (прямої) системи буде

$$\begin{cases} f_{1,xx} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{2H\omega}{EF} \right) f_1 = 0, \\ w_{1,xx} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} + \frac{2H\omega}{EF} \right) w_1 = 0. \end{cases} \quad (22)$$

Якщо ввести позначення

$$p_1^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{2H\omega}{EF}, \quad p_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{2H\omega}{EF}, \quad c^2 = \frac{E}{\rho}, \quad (23)$$

то отримаємо

$$\begin{cases} f_1(x) = A_1 \sin p_1 x + A_2 \cos p_1 x, \\ w_1(x) = B_1 \sin p_2 x + B_2 \cos p_2 x. \end{cases} \quad (24)$$

Граничні умови розглядуваної задачі

$$u(x,t)|_{x=0} = 0, \quad N = (EFu_x + H\omega^2 u)|_{x=h} = P_0 \sin \omega t$$

дають розв'язок

$$u(x,t) = \frac{P_0 \sin p_1 x}{EFp_1 \cos p_1 h + \frac{\omega^2 H^2}{EFp_2} \operatorname{tg}(p_2 h) \sin p_1 h} \sin \omega t - \frac{P_0 \omega H \sin p_2 x \cos \omega t}{E^2 F^2 p_1 p_2 \operatorname{ctg} p_1 h \cos p_2 h + \omega^2 H^2 \sin p_2 h}.$$

З (25) бачимо: якщо немає опору ($H = 0$), як частинний випадок маємо розв'язок для пружного стрижня і відповідно рівняння для визначення частот. Зокрема, при $H \rightarrow 0$ "резонанси" амплітуд коливань виникають за умови

$$\cos p_1 h \rightarrow 0 \quad \text{або} \quad p_1 h = \frac{\pi}{2}(2k-1), \quad k = 0, 1, 2, \dots, K \quad (26)$$

і, враховуючи (23), маємо з (26)

$$\frac{\omega}{c} h = \frac{\pi}{2}(2k+1), \quad k = 0, 1, 2, \dots, K. \quad (27)$$

Отже, так звані "геометричні резонанси" амплітуд коливань стрижня виникають при частотах

$$\omega_{\text{рез}} = \frac{\pi c}{2h}(2k+1). \quad (28)$$

При $H \neq 0$ "геометричні резонанси" амплітуд коливань стрижня виникають при частотах, які можна знайти з рівняння

$$EF \left(\frac{\omega_{\text{рез}}^2}{c^2} - \frac{2H\omega_{\text{рез}}}{EF} \right)^{1/2} \cos \left(\left(\frac{\omega_{\text{рез}}^2}{c^2} - \frac{2H\omega_{\text{рез}}}{EF} \right)^{1/2} h \right) + \frac{\omega_{\text{рез}}^2 H^2}{EF \left(\frac{\omega_{\text{рез}}^2}{c^2} + \frac{2H\omega_{\text{рез}}}{EF} \right)^{1/2}} \operatorname{tg} \left(\left(\frac{\omega_{\text{рез}}^2}{c^2} + \frac{2H\omega_{\text{рез}}}{EF} \right)^{1/2} h \right) \sin \left(\left(\frac{\omega_{\text{рез}}^2}{c^2} - \frac{2H\omega_{\text{рез}}}{EF} \right)^{1/2} h \right) = 0. \quad (29)$$

Рівняння (29) має нескінченну кількість розв'язків.

Провівши чисельні розрахунки, щоб знайти $f_{\text{рез}}$ в залежності від c при $h=1$, що відповідає першому "геометричному резонансу" суміші, одержали значення, зображені на рис. 2.

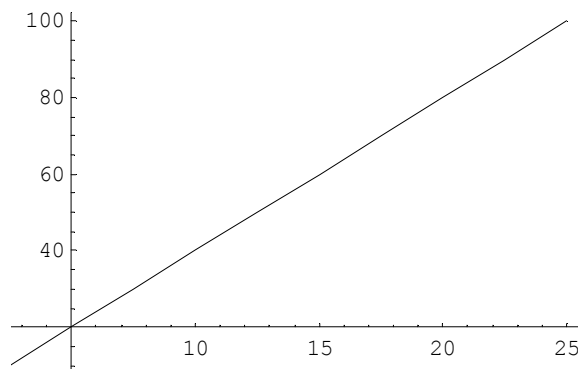


Рис. 2. Залежність $f_{\text{рез}}$ від c

Висновки. У даній роботі розглянуто застосування прямих варіаційних методів у задачах віброущільнення сумішей та матеріалів. У результаті проведеного дослідження встановлено основні параметри (амплітуда та частота) віброущільнення матеріалів та

сумішей за допомогою прямих варіаційних методів. Проведено порівняльний аналіз отриманих залежностей та розв'язків динамічних стаціонарних задач віброущільнення матеріалів та сумішей.

Література

1. Бабаков И.М. Теория колебаний / Бабаков И.М. – М.: Наука, 1968. – 559 с.
2. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара / Пановко Я.Г. – Л.: Машиностроение, 1976. – 320 с.
3. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле / Тимошенко С.П. – М.: Наука, 1967. – 444 с.
4. Качанов Л.М. Основы теории пластичности / Качанов Л.М. – М.: Наука, 1963. – 420 с.
5. Ишлинский А.Ю. Математическая теория пластичности / Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. – М.: Физматлит, 2003. – 704 с.
6. Прикладные методы расчета изделий из высокоэластичных материалов / [Дымников С.И., Лавендел Э.Э., Павловскис А.-М.А., Сниегс М.И.]. – Рига: Зинатне, 1980. – 238 с.
7. Красносельский М. А. Системы с гистерезисом / Красносельский М.А., Покровский А.В.. – М.: Наука, 1983. – 272 с.
8. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике/ Зенкевич О. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
9. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике / Михлин С.Г. – М.: Наука, 1970. – 512 с.
10. Лавендел Э.Э. Расчет жесткости сжатия тонкослойных резинометаллических элементов / Лавендел Э.Э., Лейканд М.А., Хричикова В.А. // Вопросы динамики и прочности. – Рига: РПИ, 1981. - Вып. 38. – С. 57-63.

Одержано 16.11.2009 р