Єрьоменко В. Періодичні розв'язки сингулярно збурених лінійних звичайних диференціальних рівнянь третього порядку / В. Єрьоменко, А. Алілуйко // Вісник ТДТУ. — 2009. — Том 14. — № 4. — С. 181-187. — (математичне моделювання.математика. фізика).

УДК 517.919

В. Єрьоменко, канд. фіз.-мат. наук; А. Алілуйко, канд. фіз.-мат. наук

Тернопільський національний економічний університет

ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ЛІНІЙНИХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ

Резюме. *Встановлено достатні умови існування періодичного розв'язку сингулярно збуреного лінійного звичайного диференціального рівняння третього порядку для довільної періодичної неоднорідності. Наведені умови існування розв'язків отримано на підставі дослідження вироджених систем рівнянь типу Ріккаті. Розглянута методика дозволяє вказати підхід для отримання достатніх умов існування гладких періодичних розв'язків вироджених лінійних диференціальних рівнянь вищих порядків.*

Ключові слова: *періодичні розв'язки сингулярно збурених лінійних звичайних диференціальних рівнянь.*

V. Yer'omenko, A. Aliluyko

PERIODIC SOLUTION TO SINGULAR PERTURBATIONS LINEAR ORDINARY THIRD-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

The summary. *Sufficient conditions for the existence of periodic solution to singular linear ordinary third-order differential equations for arbitrary periodic inhomogeneity have been established. The offered conditions for the existence of solutions are received on the basis of research singular systems Riccati equations. The considered technique allows to specify the approach for deriving of sufficient conditions for the existence of smooth periodic solutions to singular linear higher-order differential equations.*

Key words: *periodic solution to singular perturbations linear ordinary differential equations.*

Вступ. У різних галузях сучасної науки і техніки [1] трапляються процеси, які описують математичними моделями у вигляді систем звичайних диференціальних рівнянь із різними виродженнями: наявністю при старших похідних виродженої матриці, малих параметрів або такої матриці, яка вироджується при певних значеннях незалежної змінної чи параметрів. Лінійні системи такого виду мають вигляд

$$A(t)\frac{dx}{dt} = B(t)x + f(t), \tag{1}$$

$$\varepsilon^k A(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt} = B(t,\varepsilon)x + f(t,\varepsilon), \tag{2}$$

де $x \in R^n$, $A(t)$, $B(t)$, $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)$ – квадратні матриці порядку n, причому $A(t)$ та $A(t,\varepsilon)$ – вироджені матриці, $k \geq 0$, $0 < \varepsilon << 1$, $A(t,\varepsilon)$ вироджується при всіх значеннях ε або при $\varepsilon = 0$. До систем виду (2) зводяться також системи диференціальних рівнянь із малим параметром при частині похідних і системи, у яких множниками при похідних є різні степені малого параметра.

Найбільш повне дослідження систем (1) та (2) викладене в [1], там же наведена і обширна бібліографія. Значний інтерес для вивчення мають вироджені скалярні та матричні рівняння другого та більш високого порядків. Зокрема, в роботах [1], [2] наведені результати щодо існування періодичних розв'язків при деяких додаткових умовах для матричних та скалярних рівнянь другого порядку. У даній роботі вивчення вироджених систем типу Ріккаті дозволяє вказати підхід для отримання достатніх умов існування гладких періодичних розв’язків вироджених лінійних диференціальних рівнянь третього порядку

$$\varepsilon a(t)x^{(3)} + x^{(2)} + b_1(t)x^{(1)} + b_2(t)x = f(t) \tag{3}$$

із періодичними коефіцієнтами, де функція $a(t)$ перетворюється у нуль на множині довільної структури, ε – додатний параметр.

Відзначимо, що рівняння (3) рівносильне системі диференціальних рівнянь виду (2), однак методи, розроблені в [1] та інших відомих авторам роботах, не можна використати для дослідження отриманої системи. З іншого боку система, рівносильна рівнянню (3), при фіксованому ε має вид системи (1) із вироджуваною матрицею $A(t)$. При цьому наявність параметра при старшій похідній може бути зумовлена таким фактом [3]: скалярне рівняння

$$(\sin t)x^{(1)} = bx - (\sin t)^b,$$

де b – ціле додатне число, має періодичний розв’язок, гладкість якого r визначається нерівністю $b - r\cos t > 0$.

Об’єкт дослідження – диференціальне рівняння (3). Вивчаємо питання: при яких умовах рівняння (3) має гладкий періодичний розв’язок для довільної періодичної неоднорідності; який зв’язок між періодичними розв’язками рівняння (3) та “укороченого” рівняння

$$x^{(2)} + b_1(t)x^{(1)} + b_2(t)x = f(t) \tag{4}$$

при умові, що воно володіє періодичним розв’язком для довільної періодичної неоднорідності.

Позначимо: $C^r(\mathrm{T}_1)$ – простір векторних або матричних функцій, що набувають дійсних значень, періодичних з періодом 2π і таких, що є неперервними разом із усіма похідними до порядку r включно; $H^r(\mathrm{T}_1)$ – простір функцій, інтегрованих із квадратом на $\mathrm{T}_1 = [0; 2\pi]$ разом із усіма узагальненими похідними до порядку r включно; $(. , .)_r$ – скалярний добуток у $H^r(\mathrm{T}_1)$, $\|.\|_r^2 = ((1-\Delta)^r . , .)_0$, $\Delta = \dfrac{d^2}{dt^2}$, $(. , .)_0 = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\|.\|^2 dt$, $\langle . , . \rangle$ – скалярний добуток у R^n, $|\Phi(t)|_r = \max\limits_{t\in\tau_1, 0\le\rho\le r}\left\|\Phi^{(\rho)}(t)\right\|$, $\|.\|$ – евклідова векторна або узгоджена матрична норма.

Основний результат містить наступне твердження.

Теорема. *Нехай відносно рівняння (1) виконуються такі умови:*

1) $a(t)$, $b_1^{(1)}$, $b_2^{(1)}$ $f(t) \in C^r(\mathrm{T}_1)$, $r \ge 3$;

2) для усіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon^0]$, $t \in \mathrm{T}_1$,

$$\min\begin{Bmatrix} 1 - \varepsilon[\beta(t) + a^{(1)}(t)/2] \\ 1 + \varepsilon[(r - 1/2)a^{(1)}(t) - \beta(t)] \end{Bmatrix} \ge \gamma = const > 0, \tag{5}$$

де

$$\beta = (3ab_1 + |a| \cdot \sqrt{b_1^2 + (1 - b_2)^2})/2; \tag{6}$$

$$\min\begin{Bmatrix} 1 - \varepsilon[|a(t)| + b_1(t) + a^{(1)}(t)/2] \\ 1 + \varepsilon[(r - 3/2)a^{(1)}(t) - |a(t)| - b_1(t)] \end{Bmatrix} \ge \gamma_1 = const > 0; \tag{7}$$

3) рівняння (4) має періодичний розв'язок $\bar{x}_0(t) \in C^{r+2}(\mathrm{T}_1)$ *для довільної неоднорідності.*

Тоді можна вказати достатньо мале $\bar{\varepsilon}^{0} > 0$ *таке, що для усіх* $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}^{0}]$ *рівняння (3) має періодичний розв'язок* $x_0(t,\varepsilon) \in C^r(T_1)$ *такий, що* $x_0(t,\varepsilon) \to \bar{x}_0(t)$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Доведення. Рівняння (3) рівносильне системі рівнянь

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon a(t) \end{pmatrix} X^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -b_2(t) & -b_1(t) & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}, \tag{8}$$

де $X = col(x, x^{(1)}, x^{(2)})$.

Позначимо

$$V(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon a(t) z_1(t,\varepsilon) & 0 & 0 \\ 0 & 1+\varepsilon a(t) z_2(t,\varepsilon) & 0 \\ -\varepsilon a(t) z_1(t,\varepsilon) & -\varepsilon a(t) z_2(t,\varepsilon) & 1 \end{pmatrix}, \quad W(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ z_1(t,\varepsilon) & z_2(t,\varepsilon) & 1 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

де $z_1(t,\varepsilon)$, $z_2(t,\varepsilon)$ задовольняють нелінійну систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \varepsilon a(t) z_1^{(1)} + [1+\varepsilon a(t) z_2] z_1 + b_2(t) = 0, \\ \varepsilon a(t) z_2^{(1)} + \varepsilon a(t) z_1 + [1+\varepsilon a(t) z_2] z_2 + b_1(t) = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Здійснивши у системі рівнянь (10) заміну

$$z_1 = u_1 - b_2(t), \qquad z_2 = u_2 - b_1(t), \tag{11}$$

отримаємо рівняння

$$\varepsilon a(t) u^{(1)} + [P(t,\varepsilon) + \varepsilon a(t) u_2 I] u = \varepsilon g(t), \tag{12}$$

де $u = col(u_1, u_2)$,

$$P(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1-\varepsilon a(t) b_1(t) & -\varepsilon a(t) b_2(t) \\ \varepsilon a(t) & 1-2\varepsilon a(t) b_1(t) \end{pmatrix}, \tag{13}$$

$$g = a\, col(b_2^{(1)} - b_1 b_2; b_1^{(1)} + b_2 - b_1^2\}, \tag{14}$$

I – одинична матриця другого порядку.

Система

$$A(t) y^{(1)} + P(t) y = f(t), \quad y \in R^n,$$

є частинним випадком додатної симетричної системи диференціальних рівнянь [3], якщо $A(t) \equiv A'(t)$, а матриця $P(t) + P'(t) - A^{(1)}(t)$ додатно визначена для усіх $t \in T_1$, де штрих означає операцію транспонування матриці.

Із урахуванням (13)

$$\min_{\|\xi\|=1} \langle P(t,\varepsilon)\xi, \xi \rangle = 1 - \varepsilon \beta(t),$$

де функція $\beta(t)$ визначена (6). А тому, якщо для усіх $t \in T_1$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ виконується умова

$$1 - \varepsilon[\beta(t) + a^{(1)}(t)/2] \geq \gamma, \tag{15}$$

де γ як завгодно мале додатне число, тоді система (12) є нелінійним узагальненням додатної симетричної системи диференціальних рівнянь. При цьому її коефіцієнти з урахуванням (14) та умови (1) теореми належать простору $C^r(T_1)$.

Розглянемо квазілінійний оператор

$$L(u_2) u = \varepsilon a(t) \frac{du}{dt} + [P(t,\varepsilon) + \varepsilon u_2 I] u$$

на множині функцій $u \in C^r(T_1)$, яку визначаємо нерівностями

$$|u|_0 \le d, \qquad |u|_r \le K.$$

Тоді гладкий періодичний розв'язок рівняння (12) є розв'язком із простору $C^1(\mathrm{T}_1)$ рівняння

$$L(u_2)u = \varepsilon g(t). \tag{16}$$

Метод Гальоркіна визначає N-е наближення до розв'язку $u(t,\varepsilon) \in C^r(\mathrm{T}_1)$ рівняння (16) виразом

$$W_N(t) = \sum_{|k|\le N} W_k^{(N)} e^{ikt}, \quad t \in \mathrm{T}_1,$$

коефіцієнти якого $W_k^{(N)}$ визначаємо із системи рівнянь, яка еквівалентна нелінійному алгебраїчному рівнянню

$$S_N L(W_{N,2}(t))W_N(t) = \varepsilon S_N g(t),$$

де $W_N(t) = col(W_{N,1}, W_{N,2})$, $S_N f(t)$ – відрізок ряду Фур'є функції $f(t) \cong \sum_k f_k e^{ikt}$ виду

$$S_N f(t) = \sum_{|k|\le N} f_k e^{ikt}.$$

Слідуючи [4], використаємо лінійну модифікацію методу Гальоркіна. Для цього покладемо для початкового наближення $u_{0,2}(t,\varepsilon) = 0$ і виберемо набір цілих чисел N_j $(j = 0,1,\ldots)$, для якого $N_j \ge N_{j-1}$, $j = 1,2,\ldots$, з тим, що N_j-е лінійне наближення Гальоркіна до розв'язку $u(t,\varepsilon) \in C^1(\mathrm{T}_1)$ рівняння (16) задамо виразом

$$u_j(t) = \sum_{|k|\le N_j} u_k e^{ikt},$$

коефіцієнти якого $u_k = u_k^{(j)}$ були розв'язком лінійного алгебраїчного рівняння

$$S_{N_j} L(u_{j-1,2}(t,\varepsilon))u_j(t,\varepsilon) = \varepsilon S_{N_j} g(t).$$

Тоді N_j-е лінійне наближення Гальоркіна до розв'язку $u(t,\varepsilon) \in C^1(\mathrm{T}_1)$ рівняння (16) є N_j-м наближенням Гальоркіна до розв'язку в $C^1(\mathrm{T}_1)$ рівняння

$$L(u_{j-1,2}(t,\varepsilon))u(t,\varepsilon) = \varepsilon g(t), \tag{17}$$

де $u_{j-1} = col(u_{j-1,1}, u_{j-1,2})$, $u = col(u_1, u_2)$.

Через малий параметр праву частину рівняння (17) можна вважати малою за нормою простору $C^r(\mathrm{T}_1)$. Тоді умови існування і збіжності наближень Гальоркіна $W_N(t,\varepsilon)$ і $u_j(t,\varepsilon)$ визначаємо головною частиною оператора $L(u)$, що рівна оператору

$$L(0) = \varepsilon a(t)\frac{d}{dt} + P(t,\varepsilon).$$

Встановимо властивості цього оператора. Якщо виконується нерівність (15), тоді для довільної функції $u \in H^1(\mathrm{T}_1)$

$$(L(0)u,u)_0 \ge \gamma \|u\|_0^2. \tag{18}$$

Якщо ж виконується умова (5), тоді згідно із лемою 3 [5] для кожного s $(1 \le s \le r)$ і довільного $u \in H^{s+1}(\mathrm{T}_1)$ виконується нерівність

$$(L(0)u,u)_s \ge \gamma_2 \|u\|_s^2 - \delta \|u\|_0^2, \tag{19}$$

де γ_2 і δ – додатні сталі, які не залежать від u.

Оскільки для нульового наближення $u_2 = 0$ (як друга компонента вектора u), то $L(0)u = \varepsilon g(t)$ і з нерівностей (18), (19) та нерівності Шварца отримаємо оцінки

$$\|u\|_0 \le \varepsilon\gamma^{-1}\|g\|_0, \qquad \gamma_2\|u\|_r^2 - \delta\|u\|_0^2 \le \varepsilon\|g\|_r\|u\|_r,$$

звідки

$$\gamma_2\|u\|_r^2 - \varepsilon\delta\gamma_2^{-2}\|g\|_r^2 \le \varepsilon\|g\|_r\|u\|_r, \tag{20}$$

оскільки $\gamma_2 \le \gamma$, $\|g\|_0 \le \|g\|_r$.

Розв'язуючи нерівність (20), отримаємо оцінку

$$\|u\|_r \le \varepsilon\gamma_3^{-1}\|g\|_r, \tag{21}$$

де $\gamma_3 = 2\gamma_2/(1+\sqrt{1+4\delta/\gamma_2})$.

Нехай $r > 2$. Тоді згідно із теоремою Соболєва про вкладення просторів [4, с.15] $H^r(\mathrm{T}_1) \in C^1(\mathrm{T}_1)$ і

$$|u|_1 \le c\|u\|_r, \tag{22}$$

де c – додатна стала, що не залежить від u. Із нерівностей (21), (22) отримаємо оцінку

$$|u|_1 \le \varepsilon c_1\|g\|_r, \tag{23}$$

де додатна стала c_1 не залежить від u.

Згідно із лемою Ю. Мозера [3, с.199], якщо виконується нерівність (5), то для довільного $u \in C^{r+1}(\mathrm{T}_1)$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$, $\varepsilon_1 \le \varepsilon_0$ мають місце нерівності

$$(L(0)u, u)_s \ge \gamma_4\|u\|_s^2 - \delta_1(1 + \varepsilon\|a(t)\|_s + \|P(t,\varepsilon)\|_s)^2, \tag{24}$$

де γ_4 і δ_1 – додатні сталі, які залежать тільки від

$$C_0 \ge |a(t)|_2 + |P(t,\varepsilon)|_1 + |u|_1, \quad r \ge 2, \quad 1 \le s \le r.$$

Але із урахуванням нерівності (23) можна вважати, що у апріорних оцінках (24) сталі γ_4 і δ_1 уже не залежать від u.

Нехай $w(t)$ – скалярна функція із $C^r(\mathrm{T}_1)$, для якої $|w|_1 \le 1$. Розглянемо лінійний оператор

$$L(w) = \varepsilon a(t)\frac{d}{dt} + [P(t,\varepsilon) + \varepsilon w(t)I]$$

як оператор у $C^{\infty}(\mathrm{T}_1)$. Оскільки нерівність (5) має грубий характер, то із неї випливає аналогічна нерівність для коефіцієнтів оператора $L(w)$ для усіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2]$ та деякого $\varepsilon_2 \le \varepsilon_1$. А тому із урахуванням леми Ю. Мозера для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2]$ отримаємо оцінки

$$(L(w)u, u)_0 \ge \gamma_5\|u\|_0^2, \; (L(w)u, u)_s \ge \gamma_5\|u\|_s^2 - \delta_2(1 + \varepsilon\|w\|_s)^2, \quad s = \overline{1, r}, \tag{25}$$

де γ_5, δ_2 – додатні сталі, які не залежать від w, u і ε.

Розглянемо перше лінійне наближення Гальоркіна $u_1(t,\varepsilon)$. Його коефіцієнти $u_k^{(1)}$ визначаємо із системи рівнянь, яка рівносильна рівнянню

$$S_{N_1}L(0)u_1(t,\varepsilon) = \varepsilon S_{N_1}g(t).$$

Нерівності (25) для оператора $L(0)$ забезпечують існування розв'язку цього рівняння і оцінку для цього розв'язку виду

$$\|u_1\|_s \le \varepsilon c_2\|g\|_s, \quad s = \overline{0, r},$$

де c_2 – додатна стала, що не залежить від u_1 і ε. А тому при достатньо малому $0<\varepsilon_3\le\varepsilon_2$ згідно із теоремою Соболєва виконується нерівність $|u_1|_2\le 1$ для усіх $\varepsilon\in(0,\varepsilon_3]$. Тоді оператор $L(u_{1,2})$, де $u_{1,2}(t,\varepsilon)$ – друга компонента вектора $u_1(t,\varepsilon)$, визначений для усіх $\varepsilon\in(0,\varepsilon_3]$ і задовольняє нерівність (25) при $w=u_{1,2}$. Це забезпечує існування наближення

$$u_2(t,\varepsilon)=\sum_{|k|\le N_2}u_k^{(2)}e^{ikt},$$

для якого виконується нерівність $|u_2(t,\varepsilon)|_2\le 1$ для усіх $\varepsilon\in(0,\varepsilon_4]$, де $0<\varepsilon_4\le\varepsilon_3$.

Використання схеми доведення теореми 1 [4, с.291] дозволяє стверджувати, що існує додатне число ε^* таке, що для усіх $\varepsilon\in(0,\varepsilon^*]$ лінійні наближення Гальоркіна $u_j(t,\varepsilon)$ існують для кожного $j=1,2,\ldots$ і збігаються у $H^s(\mathrm{T}_1)\cap C^l(\mathrm{T}_1)$ при $s<r$, $r>1/2+l$, до функції $u^0(t,\varepsilon)$, яка є розв’язком рівняння (12). При цьому гранична функція задовольняє нерівності

$$\left\|u^0(t,\varepsilon)\right\|_0\le\varepsilon\left\|g(t)\right\|/\gamma_6,\qquad \left\|u^0(t,\varepsilon)\right\|_s\le\delta_0(\varepsilon),\quad |u^0(t,\varepsilon)|_2\le 1, \tag{26}$$

де γ_6 – додатне число, $\delta_0(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$.

Отже, із урахуванням (11) система рівнянь (10) має розв'язок

$$z_1(t,\varepsilon)=u_1^0(t,\varepsilon)-b_2(t),\qquad z_2(t,\varepsilon)=u_2^0(t,\varepsilon)-b_1(t), \tag{27}$$

де $u^0(t,\varepsilon)=col(u_1^0(t,\varepsilon),u_2^0(t,\varepsilon))$. При цьому третя нерівність (26) дозволяє стверджувати, що існує достатньо мале додатне число $\varepsilon_1^*\le\varepsilon^*$ таке, що для усіх $t\in\mathrm{T}_1$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1^*]$ для діагональних елементів матриці $V(t,\varepsilon)$ виконується нерівність

$$\min\begin{Bmatrix}1+\varepsilon a(t)[u_1^0(t,\varepsilon)-b_2(t)]\\ 1+\varepsilon a(t)[u_2^0(t,\varepsilon)-b_1(t)]\end{Bmatrix}\ge\alpha=const>0, \tag{28}$$

яка свідчить про невиродженість матриці $V(t,\varepsilon)$. Крім того, $V(t,\varepsilon)$ та $W(t,\varepsilon)$ належать простору $C^{r-1}(\mathrm{T}_1)$.

Помноживши зліва рівняння (8) на матрицю $V(t,\varepsilon)$ і здійснивши заміну $X=W(t,\varepsilon)Y$, отримаємо рівносильне рівняння

$$\begin{pmatrix}1+\varepsilon az_1 & 0 & 0\\ 0 & 1+\varepsilon az_2 & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon a\end{pmatrix}Y^{(1)}=$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 1+\varepsilon az_1 & 0\\ (1+\varepsilon az_2)z_1 & (1+\varepsilon az_2)z_2 & 1+\varepsilon az_2\\ -\varepsilon az_1^{(1)}-(b+\varepsilon az_2)z_1-b_2 & -\varepsilon az_2^{(1)}-(1+\varepsilon az_2)z_2-\varepsilon az_1-b_1 & -1-\varepsilon az_2\end{pmatrix}Y+\begin{pmatrix}0\\0\\f\end{pmatrix},$$

яке із урахуванням (10), (27) та (28) набуває такого виду

$$\begin{cases}y_1^{(1)}=y_2,\\ y_2^{(1)}=[u_1^0(t,\varepsilon)-b_2(t)]y_1+[u_2^0(t,\varepsilon)-b_1(t)]y_2+y_3,\\ \varepsilon a(t)y_3^{(1)}=-\{1+\varepsilon a(t)[u_2^0(t,\varepsilon)-b_1(t)]\}y_3+f(t),\end{cases} \tag{29}$$

де $Y=col(y_1,y_2,y_3)$.

Оскільки $|u_2^0(t,\varepsilon)|\le 1$ згідно із третьою нерівністю (26), то при виконанні умови (7) третє рівняння системи (29) за теоремою 1 [4, с. 202] для довільної неоднорідності $f(t)\in C^r(\mathrm{T}_1)$, для усіх $\varepsilon\in(0,\varepsilon_2^*]$, $\varepsilon_2^*\le\varepsilon_1^*$, має періодичний розв'язок $y_3^0(t,\varepsilon)\in C^{r-2}(\mathrm{T}_1)$, для якого виконуються нерівності

$$\left\|y_3^0(t,\varepsilon)\right\|_0 \le \left\|f(t)\right\|/\gamma_1, \qquad \left\|y_3^0(t,\varepsilon)\right\|_s \le \left\|f(t)\right\|_s/\bar{\gamma}, \qquad s\le r-2,$$

де $\bar{\gamma}=const>0$. Ці нерівності згідно із теоремою Соболєва про вкладення просторів гарантують обмеженість $y_3^0(t,\varepsilon)$ у просторі $C^{r-2}(\mathrm{T}_1)$ для усіх $\varepsilon\in(0,\varepsilon_2^*]$.

У результаті система (29) набере такого виду:

$$\begin{cases} y_1^{(1)}=y_2, \\ y_2^{(1)}=-[b_2(t)-u_1^0(t,\varepsilon)]y_1-[b_1(t)-u_2^0(t,\varepsilon)]y_2+y_3^0(t,\varepsilon). \end{cases} \tag{30}$$

Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases} y_1^{(1)}=y_2, \\ y_2^{(1)}=-b_2(t)y_1-b_1(t)y_2+y_3^0(t,\varepsilon), \end{cases} \tag{31}$$

яка рівносильна диференціальному рівнянню (4), у якому $x=y_1$, $x^{(1)}=y_2$, $f(t)=y_3^0(t,\varepsilon)$. Але за припущенням теореми це рівняння для довільної неоднорідності має періодичний розв'язок $\bar{x}(t,\varepsilon)\in C^r(\mathrm{T}_1)$, оскільки $y_3^0(t,\varepsilon)\in C^{r-2}(\mathrm{T}_1)$ залежить від ε регулярно. Згідно із лемою 2 [4, с. 218] і другою нерівністю (26) можна вказати таке достатньо мале додатне число $\bar{\varepsilon}_0$, $\bar{\varepsilon}_0\le\varepsilon_2^*$, що система рівнянь (30), "породжена" системою (31), матиме розв'язок $(y_1^0(t,\varepsilon),y_2^0(t,\varepsilon))\in C^{r-2}(\mathrm{T}_1)$ для усіх $\varepsilon\in(0,\bar{\varepsilon}^0]$.

Отже, система рівнянь (29) для усіх $\varepsilon\in(0,\bar{\varepsilon}^0]$ має періодичний розв'язок $Y_0(t,\varepsilon)=col(y_1^0,y_2^0,y_3^0)\in C^{r-2}(\mathrm{T}_1)$. Тоді із урахуванням (9) $X_0(t,\varepsilon)=W(t,\varepsilon)Y_0(t,\varepsilon)\in C^{r-2}(\mathrm{T}_1)$ – періодичний розв'язок рівняння (8). Але оскільки $X_0(t,\varepsilon)=col(x_0(t,\varepsilon),x_0^{(1)}(t,\varepsilon),x_0^{(2)}(t,\varepsilon))$, то робимо висновок, що $x_0(t,\varepsilon)\in C^r(\mathrm{T}_1)$ – шуканий розв'язок вихідного рівняння (3).

Граничний перехід $x_0(t,\varepsilon)\to\bar{x}(t)$ при $\varepsilon\to 0$ очевидним чином випливає із (26) та (29).

Висновок. У статті встановлено, що сингулярне "параметрично-функціональне" збурення диференціального рівняння другого порядку при достатньо малих значеннях параметра не руйнує гладкий періодичний розв'язок незбуреного рівняння для довільної періодичної неоднорідності, тобто не виникає ефекту граничного шару, притаманного багатьом сингулярно збуреним системам.

Отриманий результат може слугувати базою для узагальнення на випадок сингулярно збурених диференціальних рівнянь n-го порядку, а також побудови наближених періодичних (квазіперіодичних) розв'язків таких рівнянь у вигляді збіжних або асимптотичних розвинень за степенями малого параметра.

Література

1. Самойленко А.М. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями / Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П. – К.: Вища шк., 2000. – 294 с.
2. Периодические решения линейных вырожденных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка: матеріали Міжнар. наук. конфер. ["Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх

застосування"], (Мелітополь, 16-21 черв. 2008 р.). – К.: НАН України, Ін-т математики, 2008. – С. 48–49.
3. Мозер Ю. Быстро сходящийся метод итераций и нелинейные дифференциальные уравнения / Ю. Мозер // УМН. – 1968. – Т.23, №4. – С. 179 – 238.
4. Самойленко А.М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы / Самойленко А.М. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
5. Самойленко А.М. Гладкість квазіперіодичних розв’язків лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь із вироджуваною симетричною матрицею при похідних / А.М. Самойленко, В.О. Єрьоменко, А.А. Давиденко // Доп. НАН України. – 2001. – №1. – С. 39 – 61.

Одержано 20.09.2009 р