УДК 539.3

Михайло Михайлишин

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕРМОПРУЖНОПЛАСТИЧНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ТОНКОСТІННИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ

На основі теорії малих термопружнопластичних деформацій, узагальненої на випадок врахування розвантаження та повторного пластичного деформування, отримано систему розрахункових рівнянь для дослідження процесів термопружнопластичного деформування тонких круглих пластин та знаходження полів залишкових напружень і деформацій, що формуються при цьому. Розроблено ітераційний алгоритм для отримання числових результатів.

Ключові слова: *термопружнопластична деформація, метод додаткових деформацій, залишкові напруження, залишкові деформації, неізотермічний процес, параметр пластичності.*

Багато сучасних відповідальних конструкцій працюють у дуже складних умовах інтенсивного силового та температурного навантаження. Це приводить до виникнення областей пластичного деформування, внаслідок чого змінюються конструктивні параметри конструкції, формуються поля залишкових напружень. Такі явища часто негативно впливають на експлуатаційні властивості конструкцій і можуть приводити до аварій. Поля залишкових напружень і деформацій виникають також в багатьох технологічних процесах, таких як відновлювання робочих поверхонь деталей шляхом наплавлення, зварювання, різні види термічної обробки, формоутворення шляхом пластичного деформування і т.п. Дуже важливо вміти визначати характер цих полів, оскільки вони суттєво впливають на роботу конструкцій.

Для моделювання термопружнопластичного деформування тонкостінних елементів конструкцій використаємо фізичні співвідношення деформаційного типу, які в загальному випадку мають вигляд [1]

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G}\left(\sigma_{ij} - \frac{3\nu}{1+\nu}\delta_{ij}\sigma_0\right) + \delta_{ij}\varepsilon^T + \varepsilon_{ij}^p, \qquad \mathbf{(1)}$$

$$\varepsilon_{ij}^p = \varepsilon_{ij}^{p*} + \frac{\psi_* - 1}{\psi_*}(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{p*} - \delta_{ij}\varepsilon_0), \qquad (2)$$

$$\psi_* = 3G\frac{\varepsilon_i^*}{\sigma_i}, \qquad \varepsilon_i^* = \sqrt{\tfrac{2}{3}(e_{ij} - \varepsilon_{ij}^{p*})(e_{ij} - \varepsilon_{ij}^{p*})}, \qquad (3)$$

$$\sigma_i = \begin{cases} \sigma_S(T)\dfrac{\varepsilon_i^*}{\varepsilon_S(T)}, & \varepsilon_i^* \le \varepsilon_s^* = 2\varepsilon_S(T) - \dfrac{\sigma_i^*}{3G(T)} \\ 2\sigma_S(T)\left(\dfrac{\varepsilon_i^* + 2\varepsilon_S - \varepsilon_s^*}{2\varepsilon_S}\right)^{\gamma(T)} - \sigma_i^*, & \varepsilon_i^* > \varepsilon_s^* \end{cases}. \qquad (4)$$

Тут ε_{ij}^{p*} і σ_i^* — компоненти пластичних деформацій та інтенсивності напружень, які були зафіксовані в даній точці конструкції в момент останнього розвантаження, $G(T)$, $\sigma_S(T)$ — залежні від температури модуль зсуву матеріалу та границя плинності, ψ_* — параметр пластичності.

Надалі розглянемо тонкі круглі пластинки, для яких має місце плоский напружений стан і фізичні залежності (1), (2) запишемо у вигляді

$$\varepsilon_r^{(k)} = \frac{1}{E}\left(\sigma_r^{(k)} - \nu\sigma_\varphi^{(k)}\right) + \varepsilon_T + \varepsilon_r^{p^{(k-1)}},$$

$$\varepsilon_\varphi^{(k)} = \frac{1}{E}\left(\sigma_\varphi^{(k)} - \nu\sigma_r^{(k)}\right) + \varepsilon_T + \varepsilon_\varphi^{p^{(k-1)}}, \qquad (5)$$

$$\varepsilon_z^{(k)} = -\frac{\nu}{E}\left(\sigma_r^{(k)} + \sigma_\varphi^{(k)}\right) + \varepsilon_T - \left(\varepsilon_r^{p^{(k-1)}} + \varepsilon_\varphi^{p^{(k-1)}}\right),$$

або

$$\sigma_r^{(k)} = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\varepsilon_r^{(k)} + \nu\varepsilon_\varphi^{(k)} - (1+\nu)\varepsilon_T - \left(\varepsilon_r^{p^{(k-1)}} + \nu\varepsilon_\varphi^{p^{(k-1)}}\right)\right],$$

$$\sigma_\varphi^{(k)} = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\varepsilon_\varphi^{(k)} + \nu\varepsilon_r^{(k)} - (1+\nu)\varepsilon_T - \left(\varepsilon_\varphi^{p^{(k-1)}} + \nu\varepsilon_r^{p^{(k-1)}}\right)\right], \qquad (6)$$

$$\varepsilon_z^{(k)} = -\frac{1}{1+\nu}\left[\nu\left(\varepsilon_r^{(k)} + \varepsilon_\varphi^{(k)}\right) - (1+\nu)\varepsilon_T + (1-2\nu)\left(\varepsilon_r^{p^{(k-1)}} + \varepsilon_\varphi^{p^{(k-1)}}\right)\right],$$

$$\varepsilon_r^{p^{(k)}} = \varepsilon_r^{p*} + \frac{\psi^{*(k)} - 1}{\psi^{*(k)}}\left(\varepsilon_r^{(k)} - \varepsilon_r^{p*} - \varepsilon_0^{(k)}\right),$$

$$\varepsilon_\varphi^{p^{(k)}} = \varepsilon_\varphi^{p*} + \frac{\psi^{*(k)} - 1}{\psi^{*(k)}}\left(\varepsilon_\varphi^{(k)} - \varepsilon_\varphi^{p*} - \varepsilon_0^{(k)}\right). \qquad (7)$$

Зауважимо, що тут фізичні співвідношення записані для $k-$ ї ітерації методу додаткових деформацій, який використовується в подальшому для лінеаризації фізичної нелінійності.

Рівняння рівноваги і геометричні співвідношення для круглих пластин, які знаходяться тільки під дією температурного поля, мають вигляд

$$\frac{dN_r}{dr} = \frac{N_\varphi - N_r}{r},$$

$$\frac{d}{dr}(rQ_r) = 0, \qquad (8)$$

$$\frac{dM_r}{dr} = \frac{M_\varphi - M_r}{r} + Q_r,$$

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r^0 + z\chi_r, \quad \varepsilon_\varphi = \varepsilon_\varphi^0 + z\chi_\varphi, \quad -h/2 \le z \le h/2,$$

$$\varepsilon_r^0 = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\varphi^0 = \frac{u}{r}; \qquad (9)$$

$$\chi_r = \frac{d\theta}{dr}, \ \chi_2 = \frac{\theta}{r}, \ \frac{dw}{dr} = -\theta .$$

Приймаючи лінійний розподіл температури за товщиною, запишемо фізичні співвідношення (6) в узагальнених напруженнях та деформаціях

$$N_r^{(k)} = \frac{1}{1-\nu^2}\Big[E_0\varepsilon_{r_0}^{(k)} + E_1\chi_r^{(k)} + \nu E_0\varepsilon_{\varphi_0}^{(k)} + \nu E_1\chi_\varphi^{(k)} -$$

$$-(1+\nu)\left(a_0T_1^* + \frac{2a_1}{h}T_2\right) - \left(E_r^{p^{(k-1)}} + \nu E_\varphi^{p^{(k-1)}}\right)\Big],$$

$$M_r^{(k)} = \frac{1}{1-\nu^2}\Big[E_1\varepsilon_{r_0}^{(k)} + E_2\chi_r^{(k)} + \nu E_1\varepsilon_{\varphi_0}^{(k)} + \nu E_2\chi_\varphi^{(k)} -$$

$$-(1+\nu)\left(a_1T_1^* + \frac{2a_2}{h}T_2\right) - \left(K_r^{p^{(k-1)}} + \nu K_\varphi^{p^{(k-1)}}\right)\Big],$$

$$N_\varphi^{(k)} = \frac{1}{1-\nu^2}\Big[E_0\left(\varepsilon_{\varphi_0}^{(k)} + \nu\varepsilon_{r_0}^{(k)}\right) + E_1\left(\chi_\varphi^{(k)} + \nu\chi_r^{(k)}\right) - \qquad (10)$$

$$-(1+\nu)\left(a_0T_1^* + \frac{2a_1}{h}T_2\right) - \left(E_\varphi^{p^{(k-1)}} + \nu E_r^{p^{(k-1)}}\right)\Big],$$

$$M_\varphi^{(k)} = \frac{1}{1-\nu^2}\Big[E_1\left(\varepsilon_{\varphi_0}^{(k)} + \nu\varepsilon_{r_0}^{(k)}\right) + E_2\left(\chi_\varphi^{(k)} + \nu\chi_r^{(k)}\right) -$$

$$-(1+\nu)\left(a_1T_1^* + \frac{2a_2}{h}T_2\right) - \left(K_\varphi^{p^{(k-1)}} + \nu K_r^{p^{(k-1)}}\right)\Big],$$

де позначено

$$t = T_1 + \frac{2z}{h}T_2,\ T_1 = \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2} t\,dz,\ T_2 = \frac{6}{h^2}\int_{-h/2}^{h/2} tz\,dz;\ T_1^* = T_1 - T_0, \qquad (11)$$

$$a_j = \int_{-h/2}^{h/2} E\alpha_T z^j dz,\quad \int_{-h/2}^{h/2} Ez^j dz = E_j,\quad j = 0,1,2.$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} E\varepsilon_{r\varphi}^{p^{(k-1)}} dz = E_{r\varphi}^{p^{(k-1)}},\quad \int_{-h/2}^{h/2} E\varepsilon_{r\varphi}^{p^{(k-1)}} z\,dz = K_{r\varphi}^{p^{(k-1)}}. \qquad (12)$$

Отримаємо розрахункову систему рівнянь задачі, вибравши в якості розрахункових функцій $N_r^{(k)}$, $M_r^{(k)}$, $u^{(k)}$, $\theta^{(k)}$. Для цього виключимо з перших двох рівнянь $\varepsilon_{r_0}^{(k)}$ і $\chi_r^{(k)}$. Знайдемо

$$\varepsilon_{r_0}^{(k)} = -\nu\varepsilon_{\varphi_0}^{(k)} + \frac{E_2\tilde{N}_r^{(k)} - E_1\tilde{M}_r^{(k)}}{E_0E_2 - E_1^2},$$

$$\chi_r^{(k)} = -\nu\chi_{\varphi}^{(k)} + \frac{E_0\tilde{M}_r^{(k)} - E_1\tilde{N}_r^{(k)}}{E_0E_2 - E_1^2}, \tag{13}$$

де позначено

$$\tilde{N}_r^{(k)} = \left(1-\nu^2\right)N_r^{(k)} + \left(1+\nu\right)\left(a_0T_1^* + \frac{2a_1}{h}T_2\right) + E_r^{p^{(k-1)}} + \nu E_{\varphi}^{p^{(k-1)}}$$

$$\tilde{M}_r^{(k)} = \left(1-\nu^2\right)M_r^{(k)} + \left(1+\nu\right)\left(a_1T_1^* + \frac{2a_2}{h}T_2\right) + K_r^{p^{(k-1)}} + \nu K_{\varphi}^{p^{(k-1)}}. \tag{14}$$

Підставляючи знайдені $\varepsilon_{r_0}^{(k)}$ і $\chi_r^{(k)}$ в усі інші рівняння, отримаємо таку систему диференціальних рівнянь першого порядку відносно розрахункових функцій:

$$\frac{dN_r^{(k)}}{dr} = \frac{1}{r}\left[\frac{1}{r}\left(E_0u^{(k)} + E_1\theta^{(k)}\right) - (1-\nu)N_r^{(k)} - E_{\varphi}^{p^{(k-1)}} - \left(a_0T_1^* + \frac{2a_1}{h}T_2\right)\right],$$

$$\frac{dM_r^{(k)}}{dr} = \frac{1}{r}\left[\frac{1}{r}\left(E_1u^{(k)} + E_2\theta^{(k)}\right) - (1-\nu)M_r^{(k)} - K_{\varphi}^{p^{(k-1)}} - \left(a_1T_1^* + \frac{2a_2}{h}T_2\right)\right],$$

$$\frac{du^{(k)}}{dr} = -\nu\frac{u^{(k)}}{r} + \frac{1}{E_0E_2 - E_1^2}\left(E_2\tilde{N}_r^{(k)} - E_1\tilde{M}_r^{(k)}\right), \tag{15}$$

$$\frac{dw^{(k)}}{dr} = -\theta^{(k)},$$

$$\frac{d\theta^{(k)}}{dr} = -\nu\frac{\theta^{(k)}}{r} + \frac{1}{E_0E_2 - E_1^2}\left(E_0\tilde{M}_r^{(k)} - E_1\tilde{N}_r^{(k)}\right).$$

Кільцеві зусиля і момент та відповідні деформації визначаються за формулами

$$N_{\varphi}^{(k)} - N_{r}^{(k)} = E_0 \varepsilon_{\varphi_0}^{(k)} + E_1 \chi_{\varphi}^{(k)} + \frac{1}{1+\nu}\left(E_r^{p^{(k-1)}} - E_{\varphi}^{p^{(k-1)}} - \tilde{N}_r^{(k)}\right),$$

$$M_{\varphi}^{(k)} - M_{r}^{(k)} = E_1 \varepsilon_{\varphi_0}^{(k)} + E_2 \chi_{\varphi}^{(k)} + \frac{1}{1+\nu}\left(K_r^{p^{(k-1)}} - K_{\varphi}^{p^{(k-1)}} - \tilde{M}_r^{(k)}\right), \quad (16)$$

$$\varepsilon_{\varphi_0}^{(k)} = \frac{u^{(k)}}{r}, \; \chi_{\varphi}^{(k)} = \frac{\theta^{(k)}}{r}.$$

Повні деформації в довільній точці конструкції шукають за формулами (9), а напруження — за формулами (6). Розроблено алгоритм розв’язування задачі.

Література

1. Михайлишин М. До питання про фізичні співвідношення деформаційної теорії термопластичності / М. Михайлишин, Б. Головатий // Вісник ТНТУ, 2012. — №2 (66). — с. 88–96.

Mykhaylo Mykhaylyshyn

MATHEMATICAL SIMULATION OF THERMOELASTIC PLASTICITY DEFORMATION OF THIN-WALLED STRUCTURAL ELEMENTS

System of equations for investigation of thermoelastic plasticity deformation processes of thin circular plate and search of residual stress and deformation fields, based on small thermoelasticity-plasticity deformations theory, generalized for the case of unloading and repeated plastic deformations, are obtained.

Key words: *thermoelasticity-plasticity deformation, additional deformations method, residual stresses, residual deformation, non-isothermic process, plasticity parameter.*