

УДК 539.3

**Михайло Михайлишин****ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ В РОЛИКАХ МАШИН  
БЕЗПЕРЕРВНОЇ РОЗЛИВКИ СТАЛІ**

*Досліджено температурний стан в довгому ролику, який використовується в машинах безперервної розливки сталі для лиття плоских заготовок. Отримано аналітичний розв'язок задачі, який дозволяє досліджувати температурні поля, що виникають в роликах в процесі їх експлуатації.*

**Ключові слова:** *машини безперервної розливки сталі, температурні поля.*

Розглянемо задачу визначення температурного стану в довгому ролику, який використовується в МБРС для лиття широких плоских заготовок. В якості розрахункової схеми ролика приймемо порожнистий довгий циліндр, який обертається з постійною кутовою швидкістю  $\omega$  навколо своєї осі й знаходиться під дією незмінної вздовж цієї осі неосесиметричної теплової дії. В такому випадку можна вважати поле температур плоским.

Зв'яжемо з поперечним перерізом ролика полярну систему координат  $(r, \theta)$  з центром на осі ролика (рис. 1). Вважаємо, що кут  $\theta$  відраховується в напрямку обертання ролика від променя, який в початковий момент часу проходить через середину зони контакту ролика зі злитком.

Введемо також нерухому систему координат  $(r, \varphi)$  з центром на осі ролика, причому

$$\varphi = \theta + \omega\tau. \quad (1)$$

З представлення (1) бачимо, що якщо  $\theta = -\omega\tau$ , то це відповідає точкам, які лежать завжди на промені, що проходить через середину зони контакту ролика зі злитком. Таким чином, в нерухомій системі координат на цьому промені маємо  $\varphi = 0$ .

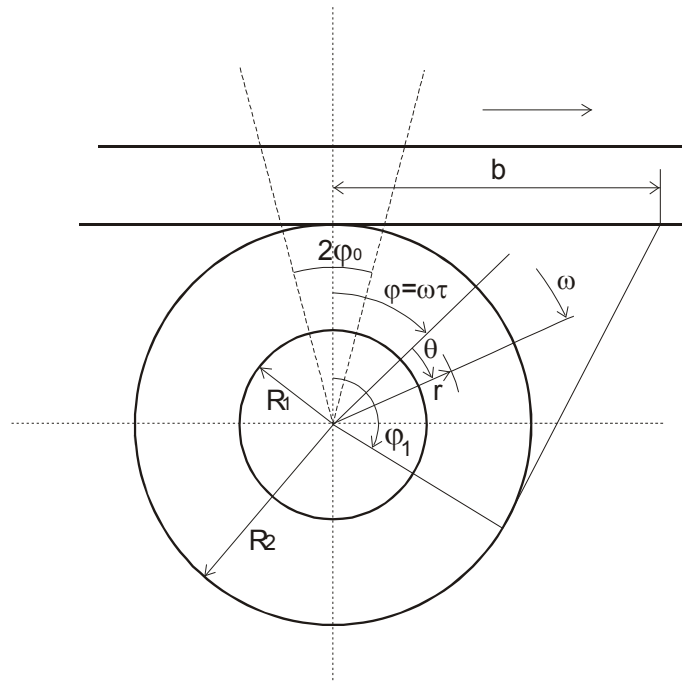


Рисунок 1. Полярна система координат, зв'язана з поперечним перерізом ролика

Розподіл температури в ролику в прийнятих допущеннях описується рівнянням

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right). \quad (2)$$

Якщо ввести заміну (1) і позначити  $T(r, \theta, t) = \theta(r, \varphi, t)$ , то рівняння (2) перепишеться так

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \omega \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = a \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} \right). \quad (3)$$

У випадку, коли ролик обертається достатньо довго при незмінних умовах теплообміну, то відносно нерухомої системи координат температурний стан буде квазістаціонарним. Тоді задача визначення розподілу температури  $\theta(r, \varphi)$  зводиться до розв'язання такого рівняння

$$\omega \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = a \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \varphi^2} \right). \quad (4)$$

На границях ролика теплообмін із зовнішнім середовищем будемо задавати граничними умовами III-го роду. В зоні контакту  $|\varphi| \leq \varphi_0$ ,  $r = R_2$  до ролика підводиться тепловий потік за рахунок контактного теплообміну. Його густина

$$q_k(\varphi) = \alpha_k [T_{zn} - \theta(R_2, \varphi)], \quad (5)$$

де  $\alpha_k$  – термічна провідність контакту,  $T_{zn}$  – температура поверхні злитка в зоні контакту. На решті поверхні ролика  $r = R_2$  здійснюється конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем. Густина теплового потоку, що підводиться при цьому до поверхні ролика, така:

$$q_2(\varphi) = \alpha_2 [T_3 - \theta(R_2, \varphi)], \quad (6)$$

де  $\alpha_2$  – коефіцієнт тепловіддачі на цій поверхні,  $T_3$  – температура зовнішнього середовища. На практиці використовуються різні умови охолодження як зовнішньої так і внутрішньої поверхонь ролика. Найчастіше використовується повітряне або водяне охолодження. Будемо надалі вважати, що ця різниця враховується лише величиною коефіцієнта тепловіддачі, який позначимо  $\alpha_2''$  – для повітряного охолодження і  $\alpha_2^e$  – для водяного.

Крім контактного і конвективного теплообміну між частиною зовнішньої поверхні ролика і злитком здійснюється променевий теплообмін. Будемо вважати, що коефіцієнти випромінювання поверхні ролика і поверхні злитка однакові і густина променевого теплового потоку, що підводиться до зовнішньої поверхні ролика, визначається так

$$q_{np} = \varepsilon \sigma_0 F(\varphi) [T_{zn}^4 - \theta^4(R_2, \varphi)], \quad (7)$$

де  $\sigma_0 = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{Вт}{м^2 \cdot К^4}$  – стала Стефана-Больцмана,  $\varepsilon$  – коефіцієнт випромінювання поверхонь,  $F(\varphi)$  – кутовий коефіцієнт випромінювання, який залежить від взаємного розміщення випромінюваних поверхонь і відстані між ними.

На внутрішній поверхні ролика ( $r = R_1$ ) відбувається також конвективний теплообмін, причому густина теплового потоку, який відводиться від цієї поверхні, дорівнює

$$q_1 = \alpha_1 [\theta(R_1, \varphi) - T_6]. \quad (8)$$

Тут  $\alpha_1$  – коефіцієнт тепловіддачі на внутрішній поверхні, причому його значення дорівнює  $\alpha_1''$  чи  $\alpha_1^e$  в залежності від того, яке охолодження там використовується – повітряне чи водяне;  $T_6$  – температура внутрішнього середовища.

Променевий теплообмін справедливий для деякої області поверхні  $r=R_2$ , яка залежить від довжини ділянки злитка  $b$  (рис. 1), з якою відбувається променевий теплообмін ролика і яка визначається за формулою

$$\varphi_0 \leq |\varphi| \leq \varphi_1, \quad (9)$$

де

$$\varphi_1 = 2 \operatorname{arctg} \frac{b}{R_2}. \quad (10)$$

Внаслідок нелінійності граничної умови (7) надзвичайно важко (а в більшості випадків і неможливо) знайти аналітичний розв'язок задачі. Є два способи спрощення цієї задачі [1]. Перший спосіб використовується тоді, коли  $T_{3l}$  у формулі (7) велика порівняно з температурою поверхні для розглядуваного періоду часу. Тоді можна знехтувати  $\theta^4(R_2, \varphi)$  порівняно з  $T_{3l}^4$ . Так, наприклад, якщо  $\theta(R_2, \varphi) \leq 0,5T_{3l}$ , то

$$T_{3l}^4 - \theta^4(R_2, \varphi) = T_{3l}^4 (1 - (0,5)^4) = T_{3l}^4 (1 - 0,0625) \approx 0,94T_{3l}^4. \quad (11)$$

В нашому випадку для цієї зони, де справедливий променевий теплообмін, це дійсно має місце. При охолодженні зовнішньої поверхні ролика водою максимальне значення температури досягається на поверхні ролика в зоні безпосереднього його контакту зі злитком і при цьому в цій зоні  $\theta(R_2, \varphi) \approx (0,5 - 0,6)T_{3l}$ . Для зони променевого теплообміну температура поверхні ролика ще нижча.

Другий випадок має місце тоді, коли ні одна з температур в формулі (7) не змінюється в дуже широких межах. Тоді множник в квадратних дужках правої частини формули (7) розкладається на множники

$$\varepsilon \sigma_0 F(\varphi) [T_{3l}^4 - \theta^4(R_2, \varphi)] = \varepsilon \sigma_0 F(\varphi) (T_{3l}^3 + T_{3l}^2 \theta + T_{3l} \theta^2 + \theta^3) (T_{3l} - \theta). \quad (12)$$

Якщо температура джерела і поверхні не зазнають значних змін, то коефіцієнт при  $(T_{3l} - \theta)$  можна вважати постійним і рівним

$$\varepsilon \sigma_0 (T_{3l}^3 + T_{3l}^2 \theta + T_{3l} \theta^2 + \theta^3) = h_r. \quad (13)$$

Цей коефіцієнт часто називають коефіцієнтом теплообміну при випромінюванні. Зауважимо також, що у формулі (7) під  $\theta(r_2, \varphi)$  і  $T_{3l}$

розуміються абсолютні температури. Так як абсолютна і відносна температури зв'язані співвідношенням

$$\theta(K) = T(^{\circ}C) + 273,$$

то в умові (10) можна вважати, що в множнику  $(T_{3n} - \theta)$  температури вимірюються в градусах Цельсія. Тоді з врахуванням (11) бачимо, що гранична умова для променевого теплообміну запишеться у вигляді, подібному до конвективного, тобто

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial r} = h_r F(\varphi) [T_{3n} - \theta(r_2, \varphi)], \quad r = R_2. \quad (14)$$

Для запису граничної умови на поверхні  $r = R_2$  використаємо асиметричні одиничні функції

$$S_{\pm}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0,5 \mp 0,5, & x = 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (15)$$

Тоді у випадку першої апроксимації нелінійної умови (7) закон теплообміну запишеться так

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial \theta}{\partial r} = & \alpha_n [S_-(\varphi + \varphi_0) - S_+(\varphi - \varphi_0)] [T_{3n} - \theta(r, \varphi)] + \alpha_2 [T_{306} - \theta(r, \varphi)] + \\ & + \varepsilon \sigma_0 F(\varphi) T_{3n}^4 \cdot [S_-(\varphi + \varphi_1) - S_+(\varphi - \varphi_1)], \quad r = R_2. \end{aligned} \quad (16)$$

В другому випадку маємо

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial \theta}{\partial r} = & \alpha_n [S_-(\varphi + \varphi_0) - S_+(\varphi - \varphi_0)] [T_{3n} - \theta(R_2, \varphi)] + \alpha_2 [T_{306} - \theta(R_2, \varphi)] + \\ & + F(\varphi) h_r [S_-(\varphi + \varphi_1) - S_+(\varphi - \varphi_1)] [T_{3n} - \theta(R_2, \varphi)]. \end{aligned} \quad (17)$$

Зауважимо, що ми припустили, що конвективний і променевий теплообмін мають місце також і в зоні контакту. Це зв'язано з тим, що область контакту дуже мала і в цій області тепловий потік за рахунок контакту значно перевищує теплові потоки променевого і конвективного теплообміну. Виключення цієї області для променевого і конвективного теплообміну привело б до значного ускладнення математичного опису і, в результаті, до втрати точності.

Крім граничних умов, функція розподілу температури повинна також задовольняти умовам періодичності

$$\theta(r, \varphi) = \theta(r, \varphi + 2\pi); \quad \frac{\partial \theta(r, \varphi)}{\partial \varphi} = \frac{\partial \theta(r, \varphi + 2\pi)}{\partial \varphi}. \quad (18)$$

Враховуючи ці умови, представимо розв'язок рівняння (4) у вигляді

$$\theta(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} [\theta_{n1}(r) \cos n\varphi + \theta_{n2}(r) \sin n\varphi]. \quad (19)$$

Підставимо розв'язок (19) в рівняння (4). Порівнюючи коефіцієнти при однакових функціях  $\cos n\varphi$  і  $\sin n\varphi$  знайдемо рівняння для визначення  $\theta_{n1}(r)$ ,  $\theta_{n2}(r)$ :

$$\frac{d^2\theta_{01}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta_{01}}{dr} = 0, \quad (20)$$

$$\frac{d^2\theta_{n1}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta_{n1}}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \theta_{n1} = \frac{\omega n}{a} \theta_{n2}, \quad (21)$$

$$\frac{d^2\theta_{n2}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta_{n2}}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \theta_{n2} = -\frac{\omega n}{a} \theta_{n1}. \quad (22)$$

Загальний розв'язок рівняння (20) такий

$$\theta_{01} = C_{01} + C_{02} \ln r. \quad (23)$$

Якщо підставити значення  $\theta_{n2}$  (21) у (22), знайдемо рівняння для знаходження  $\theta_{n1}$

$$r^4 \frac{d^4\theta_{n1}}{dr^4} + 2r^3 \frac{d^3\theta_{n1}}{dr^3} - (1 + 2n^2) \left( r^2 \frac{d^2\theta_{n1}}{dr^2} - r \frac{d\theta_{n1}}{dr} \right) + n^2 \left[ (n^2 - 4) + r^4 \frac{\omega^2}{a^2} \right] \theta_{n1} = 0. \quad (24)$$

Аналогічне рівняння отримаємо для знаходження  $\theta_{n2}$ , якщо підставимо значення  $\theta_{n1}$  з (22) у формулу (21).

Введемо заміну

$$x = \sqrt{\frac{\omega n}{a}} r = \beta_n r. \quad (25)$$

Тоді рівняння (24) перепишеться так

$$x^4 \theta_{n1}^{IV} + 2x^3 \theta_{n1}^{III} - (1 + 2n^2) (x^2 \theta_{n1}^{II} - x \theta_{n1}^I) + (n^4 - 4n^2 + x^4) \theta_{n1} = 0, \quad (26)$$

де верхніми індексами позначені похідні по змінній  $x$ .

Загальний розв'язок рівняння (26) має вигляд [2]

$$\theta_{n1}(r) = C_{n1} \text{ber}_n(\beta_n r) + C_{n2} \text{bei}_n(\beta_n r) + C_{n3} \text{ker}_n(\beta_n r) + C_{n4} \text{kei}_n(\beta_n r), \quad (27)$$

де  $\text{ber}_n$ ,  $\text{bei}_n$ ,  $\text{ker}_n$ ,  $\text{kei}_n$  – функції Кельвіна,  $n$  – натуральні числа.

Підставивши вираз для  $\theta_{n1}(r)$  в рівняння (21), знайдемо

$$\theta_{n2}(r) = -C_{n1} \text{bei}_n(\beta_n r) + C_{n2} \text{ber}_n(\beta_n r) - C_{n3} \text{kei}_n(\beta_n r) + C_{n4} \text{ker}_n(\beta_n r). \quad (28)$$

Константи  $C_{n1}, C_{n2}, C_{n3}, C_{n4}$  знаходимо з граничних умов (8) і (16) або (17). Задоволимо умову (8). В результаті отримаємо такі рівняння

$$-\frac{\alpha_1}{\lambda} C_{01} + C_{02} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{\alpha_1}{\lambda} \ln R_1 \right) = -\frac{\alpha_1}{\lambda} T_{\epsilon}, \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & C_{n1} \left[ \left( \frac{\alpha_1}{\lambda} + \frac{n}{R_1} \right) ber_n(\beta_n R_1) + \frac{\beta_n}{\sqrt{2}} (bei_{n-1}(\beta_n R_1) + ber_{n-1}(\beta_n R_1)) \right] + \\ & + C_{n2} \left[ \left( \frac{\alpha_1}{\lambda} + \frac{n}{R_1} \right) bei_n(\beta_n R_1) + \frac{\beta_n}{\sqrt{2}} (bei_{n-1}(\beta_n R_1) - ber_{n-1}(\beta_n R_1)) \right] + \\ & + C_{n3} \left[ \left( \frac{\alpha_1}{\lambda} + \frac{n}{R_1} \right) ker_n(\beta_n R_1) + \frac{\beta_n}{\sqrt{2}} (kei_{n-1}(\beta_n R_1) + ker_{n-1}(\beta_n R_1)) \right] + \\ & + C_{n4} \left[ \left( \frac{\alpha_1}{\lambda} + \frac{n}{R_1} \right) kei_n(\beta_n R_1) + \frac{\beta_n}{\sqrt{2}} (kei_{n-1}(\beta_n R_1) - ker_{n-1}(\beta_n R_1)) \right] = 0, \\ & C_{n1} \left[ \left( \frac{\alpha_1}{\lambda} + \frac{n}{R_1} \right) bei_n(\beta_n R_1) + \frac{\beta_n}{\sqrt{2}} (bei_{n-1}(\beta_n R_1) - ber_{n-1}(\beta_n R_1)) \right] - \\ & - C_{n2} \left[ \left( \frac{\alpha_1}{\lambda} + \frac{n}{R_1} \right) ber_n(\beta_n R_1) + \frac{\beta_n}{\sqrt{2}} (bei_{n-1}(\beta_n R_1) + ber_{n-1}(\beta_n R_1)) \right] + \\ & + C_{n3} \left[ \left( \frac{\alpha_1}{\lambda} + \frac{n}{R_1} \right) kei_n(\beta_n R_1) + \frac{\beta_n}{\sqrt{2}} (kei_{n-1}(\beta_n R_1) - ker_{n-1}(\beta_n R_1)) \right] - \\ & - C_{n4} \left[ \left( \frac{\alpha_1}{\lambda} + \frac{n}{R_1} \right) ker_n(\beta_n R_1) + \frac{\beta_n}{\sqrt{2}} (kei_{n-1}(\beta_n R_1) + ker_{n-1}(\beta_n R_1)) \right] = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Для того, щоб задовольнити граничну умову (16), представимо її у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\alpha_2}{\lambda} \theta &= \frac{\alpha_k}{\lambda} [S_-(\varphi + \varphi_0) - S_+(\varphi - \varphi_0)] (T_{3z} - \theta) + \frac{\alpha_2}{\lambda} T_{30\epsilon} + \\ & + \frac{\epsilon \sigma_0}{\lambda} F(\varphi) T_{3z}^4 [S_-(\varphi + \varphi_1) - S_+(\varphi - \varphi_1)], \quad r = R_2. \end{aligned} \quad (31)$$

Розкладемо всі функції від  $\varphi$  в правій частині в ряди Фур'є:

$$\frac{\alpha_k}{\lambda} [S_-(\varphi + \varphi_0) - S_+(\varphi - \varphi_0)] T_{3z} = \frac{\alpha_k}{\lambda} T_{3z} \left[ \frac{\varphi_0}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi_0}{n} \cos n\varphi \right], \quad (32)$$

$$\frac{\epsilon \sigma_0 T_{3z}^4}{\lambda} F(\varphi) [S_-(\varphi + \varphi_1) - S_+(\varphi - \varphi_1)] T_{3z} = \frac{\epsilon \sigma_0 T_{3z}^4}{\lambda} \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \right], \quad (33)$$

де позначено

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\varphi_1}^{\varphi_1} F(\varphi) d\varphi; \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\varphi_1}^{\varphi_1} F(\varphi) \cos n\varphi d\varphi; \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\varphi_1}^{\varphi_1} F(\varphi) \sin n\varphi d\varphi. \quad (34)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\alpha_k}{\lambda} [S_-(\varphi + \varphi_0) - S_+(\varphi - \varphi_0)] \theta(R_2, \varphi) = \\
& = -\frac{\alpha_k}{\lambda} [S_-(\varphi + \varphi_0) - S_+(\varphi - \varphi_0)] \left\{ C_{01} + C_{02} \ln R_2 + \sum_{k=1}^{\infty} [\theta_{k1}(R_2) \cos k\varphi + \theta_{k2}(R_2) \sin k\varphi] \right\} = \\
& = -\frac{\alpha_k}{\lambda} (C_{01} + C_{02} \ln R_2) \left[ \frac{\varphi_0}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi_0}{n} \cos n\varphi \right] - \frac{\alpha_k}{\lambda\pi} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\varphi_0}{k} \theta_{k1}(R_2) + \right. \\
& \quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \theta_{k1}(R_2) \left[ \frac{\sin(k+n)\varphi_0}{k+n} + \frac{\sin(k-n)\varphi_0}{k-n} \right] \cos n\varphi + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \theta_{k2}(R_2) \left[ \frac{\sin(k-n)\varphi_0}{k-n} - \frac{\sin(k+n)\varphi_0}{k+n} \right] \sin n\varphi \right\}. \tag{35}
\end{aligned}$$

Підставляючи знайдені розклади в (31) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових функціях  $\varphi$  зліва і справа, знайдемо

$$\begin{aligned}
& C_{01} \frac{1}{\lambda} \left( \alpha_2 - \frac{\alpha_k \varphi_0}{\pi} \right) + C_{02} \left[ \frac{1}{R_2} + \frac{\ln R_2}{\lambda} \left( \alpha_2 - \frac{\alpha_k \varphi_0}{\pi} \right) \right] = \\
& = \frac{1}{\lambda} \left\{ \alpha_2 \Gamma_{306} + \Gamma_{37} \frac{\alpha_k \varphi_0}{\pi} + \frac{a_0}{2} \varepsilon \sigma_0 \Gamma_{37}^4 - \frac{\alpha_k}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k\varphi_0}{k} \theta_{k1}(R_2) \right\}, \tag{36} \\
& C_{n1} \left[ \left( \frac{\alpha_2}{\lambda} - \frac{n}{R_2} \right) ber_n(\beta_n R_2) - \frac{\beta_n}{\sqrt{2}} (bei_{n-1}(\beta_n R_2) + ber_{n-1}(\beta_n R_2)) \right] + \\
& + C_{n2} \left[ \left( \frac{\alpha_2}{\lambda} - \frac{n}{R_2} \right) bei_n(\beta_n R_2) - \frac{\beta_n}{\sqrt{2}} (bei_{n-1}(\beta_n R_2) - ber_{n-1}(\beta_n R_2)) \right] + \\
& + C_{n3} \left[ \left( \frac{\alpha_2}{\lambda} - \frac{n}{R_2} \right) ker_n(\beta_n R_2) - \frac{\beta_n}{\sqrt{2}} (kei_{n-1}(\beta_n R_2) + ker_{n-1}(\beta_n R_2)) \right] + \\
& + C_{n4} \left[ \left( \frac{\alpha_2}{\lambda} - \frac{n}{R_2} \right) kei_n(\beta_n R_2) - \frac{\beta_n}{\sqrt{2}} (kei_{n-1}(\beta_n R_2) - ker_{n-1}(\beta_n R_2)) \right] = \\
& = -\frac{2\alpha_k}{\lambda\pi} (C_{01} + C_{02} \ln R_2) \frac{\sin n\varphi}{n} + \frac{2\alpha_k}{\lambda\pi} \Gamma_{37} \frac{\sin n\varphi_0}{n} + \frac{\varepsilon\sigma_0}{\lambda} \Gamma_{37}^4 a_n - \\
& - \frac{\alpha_k}{\lambda\pi} \sum_{k=1}^{\infty} [C_{k1} ber_k(\beta_k R_2) + C_{k2} bei_k(\beta_k R_2) + C_{k3} ker_k(\beta_k R_2) + \\
& \quad + C_{k4} kei_k(\beta_k R_2)] \left[ \frac{\sin(k+n)\varphi_0}{k+n} + \frac{\sin(k-n)\varphi_0}{k-n} \right] - \\
& - C_{n1} \left[ \left( \frac{\alpha_2}{\lambda} - \frac{n}{R_2} \right) bei_n(\beta_n R_2) - \frac{\beta_n}{\sqrt{2}} (bei_{n-1}(\beta_n R_2) - ber_{n-1}(\beta_n R_2)) \right] + \tag{37} \\
& + C_{n2} \left[ \left( \frac{\alpha_2}{\lambda} - \frac{n}{R_2} \right) ber_n(\beta_n R_2) - \frac{\beta_n}{\sqrt{2}} (bei_{n-1}(\beta_n R_2) + ber_{n-1}(\beta_n R_2)) \right] -
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & -C_{n3} \left[ \left( \frac{\alpha_2}{\lambda} - \frac{n}{R_2} \right) kei_n(\beta_n R_2) - \frac{\beta_n}{\sqrt{2}} (kei_{n-1}(\beta_n R_2) - ker_{n-1}(\beta_n R_2)) \right] + \\
 & + C_{n4} \left[ \left( \frac{\alpha_2}{\lambda} - \frac{n}{R_2} \right) ker_n(\beta_n R_2) - \frac{\beta_n}{\sqrt{2}} (kei_{n-1}(\beta_n R_2) + ker_{n-1}(\beta_n R_2)) \right] = \\
 & = \frac{\varepsilon \sigma_0}{\lambda} T_{3l}^4 b_n - \frac{\alpha_k}{\lambda \pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ -C_{k1} bei_k(\beta_k R_2) + C_{k2} ber_k(\beta_k R_2) - \right. \\
 & \left. - C_{k3} kei_k(\beta_k R_2) + C_{k4} ker_k(\beta_k R_2) \right] \left[ \frac{\sin(k-n)\varphi_0}{k-n} - \frac{\sin(k+n)\varphi_0}{k+n} \right].
 \end{aligned}$$

Система рівнянь (29), (30), (36), (37) складає повну систему рівнянь для знаходження всіх невідомих коефіцієнтів  $C_{01}, C_{02}, C_{n1}, C_{n2}, C_{n3}, C_{n4}$  при  $n=1, 2, \dots$ . Зауважимо, що в праві частини рівнянь (36) і (37) входять всі невідомі для  $n=1, 2, \dots$ . Якщо обмежитись в розкладі (19) деякою обмеженою кількістю членів, наприклад  $n=0, 1, \dots, N$ , то для знаходження  $4N$  невідомих  $C_{n1}, C_{n2}, C_{n3}, C_{n4}$  при  $n=1, 2, \dots, N$  можна отримати систему  $4N$  рівнянь. Для цього розв'яжемо систему рівнянь (29), (36) відносно  $C_{01}$  і  $C_{02}$ . Знайдемо

$$\begin{aligned}
 C_{02} = \frac{1}{\nu} \left\{ \alpha_2 (T_{306} - T_\sigma) + \frac{\alpha_k \varphi_0}{\pi} (T_{3l} + T_\sigma) + \frac{a_0}{2} \varepsilon \sigma_0 T_{3l}^4 - \right. \\
 \left. - \frac{\alpha_k}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k \varphi_0}{k} [C_{k1} ber_k(\beta_k R_2) + C_{k2} bei_k(\beta_k R_2) + C_{k3} ker_k(\beta_k R_2) + C_{k4} kei_k(\beta_k R_2)] \right\}, \quad (38)
 \end{aligned}$$

$$C_{01} = T_\sigma + C_{02} \left( \frac{\lambda}{\alpha_1 R_1} - \ln R_1 \right), \quad (39)$$

де введені позначення

$$\nu = \frac{\lambda}{R_2} + \mu \left( \alpha_2 - \frac{\alpha_k \varphi_0}{\pi} \right); \quad \mu = \frac{\lambda}{\alpha_1 R_1} + \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (40)$$

Якщо підставити вирази для  $C_{01}$  і  $C_{02}$  в праву частину першого рівняння (37), то вона переписеться так

$$\begin{aligned}
 & - \frac{2\alpha_k}{\lambda \pi} \frac{\sin n \varphi_0}{n} \left\{ T_\sigma - T_{3l} + \frac{\mu}{\nu} \left[ \alpha_2 (T_{306} - T_\sigma) + \frac{\alpha_k \varphi_0}{\pi} (T_\sigma + T_{3l}) + \frac{a_0}{2} \varepsilon \sigma_0 T_{3l}^4 \right] \right\} + \frac{\varepsilon \sigma_0}{\lambda} T_{3l}^4 a_n - \\
 & - \frac{\alpha_k}{\lambda \pi} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{nk} [C_{k1} ber_k(\beta_k R_2) + C_{k2} bei_k(\beta_k R_2) + C_{k3} ker_k(\beta_k R_2) + C_{k4} kei_k(\beta_k R_2)] \right\}, \quad (41)
 \end{aligned}$$

де позначено

$$\gamma_{nk} = -\frac{2\mu\alpha_k \sin n\varphi_0 \sin k\varphi_0}{\nu\pi nk} + \frac{\sin(k+n)\varphi_0}{k+n} + \frac{\sin(k-n)\varphi_0}{k-n},$$

$$\gamma_{kk} = -\frac{2\mu\alpha_k \sin^2 k\varphi_0}{\nu\pi k^2} + \frac{\sin 2k\varphi_0}{2k} + \varphi_0.$$

Переносячи всі члени з невідомими коефіцієнтами в ліву частину рівняння при всіх значеннях  $n$  (аналогічно і в другому рівнянні (37) при всіх  $n$ ), отримуємо систему рівнянь в звичайній формі для знаходження всіх  $4N$  невідомих.

Введемо позначення

$$C_j = \begin{pmatrix} C_{j1} \\ C_{j2} \\ C_{j3} \\ C_{j4} \end{pmatrix}; \quad A_j = \begin{pmatrix} a_1^{(j)} \\ a_2^{(j)} \\ a_3^{(j)} \\ a_4^{(j)} \end{pmatrix}; \quad B_j = \begin{pmatrix} b_1^{(j)} \\ b_2^{(j)} \\ b_3^{(j)} \\ b_4^{(j)} \end{pmatrix}, \quad (43)$$

де

$$\begin{aligned} a_1^{(j)} &= \left( \frac{\alpha_1}{\lambda} + \frac{j}{R_1} \right) ber_j(\beta_j R_1) + \frac{\beta_j}{\sqrt{2}} [bei_{j-1}(\beta_j R_1) + ber_{j-1}(\beta_j R_1)], \\ a_2^{(j)} &= \left( \frac{\alpha_1}{\lambda} + \frac{j}{R_1} \right) bei_j(\beta_j R_1) + \frac{\beta_j}{\sqrt{2}} [bei_{j-1}(\beta_j R_1) - ber_{j-1}(\beta_j R_1)], \\ a_3^{(j)} &= \left( \frac{\alpha_1}{\lambda} + \frac{j}{R_1} \right) ker_j(\beta_j R_1) + \frac{\beta_j}{\sqrt{2}} [kei_{j-1}(\beta_j R_1) + ker_{j-1}(\beta_j R_1)], \\ a_4^{(j)} &= \left( \frac{\alpha_1}{\lambda} + \frac{j}{R_1} \right) kei_j(\beta_j R_1) + \frac{\beta_j}{\sqrt{2}} [kei_{j-1}(\beta_j R_1) - ker_{j-1}(\beta_j R_1)], \\ b_1^{(j)} &= \left( \frac{\alpha_1}{\lambda} + \frac{j}{R_1} \right) bei_j(\beta_j R_1) + \frac{\beta_j}{\sqrt{2}} [bei_{j-1}(\beta_j R_1) - ber_{j-1}(\beta_j R_1)], \\ b_2^{(j)} &= -\left( \frac{\alpha_1}{\lambda} + \frac{j}{R_1} \right) ber_j(\beta_j R_1) - \frac{\beta_j}{\sqrt{2}} [bei_{j-1}(\beta_j R_1) + ber_{j-1}(\beta_j R_1)], \\ b_3^{(j)} &= \left( \frac{\alpha_1}{\lambda} + \frac{j}{R_1} \right) kei_j(\beta_j R_1) + \frac{\beta_j}{\sqrt{2}} [kei_{j-1}(\beta_j R_1) - ker_{j-1}(\beta_j R_1)], \\ b_4^{(j)} &= -\left( \frac{\alpha_1}{\lambda} + \frac{j}{R_1} \right) ker_j(\beta_j R_1) - \frac{\beta_j}{\sqrt{2}} [kei_{j-1}(\beta_j R_1) + ker_{j-1}(\beta_j R_1)]. \end{aligned} \quad (44)$$

Тоді система рівнянь (30) запишеться так

$$C_j^T \cdot A_j = 0, \quad C_j^T \cdot B_j = 0, \quad j=1,2,\dots,N. \quad (45)$$

Аналогічно введемо наступні позначення

$$D_{jk} = \begin{pmatrix} d_1^{(jk)} \\ d_2^{(jk)} \\ d_3^{(jk)} \\ d_4^{(jk)} \end{pmatrix}; \quad E_{jk} = \begin{pmatrix} e_1^{(jk)} \\ e_2^{(jk)} \\ e_3^{(jk)} \\ e_4^{(jk)} \end{pmatrix}, \quad (46)$$

$$F_j = -\frac{2\alpha_k \sin j\varphi_0}{\lambda\pi} \frac{1}{j} \left\{ T_\epsilon - T_{3\pi} + \frac{\mu}{\nu} \left[ \alpha_2 (T_{30\epsilon} - T_\epsilon) + \frac{\alpha_k \varphi_0}{\pi} (T_\epsilon + T_{3\pi}) + \frac{a_0}{2} \varepsilon \sigma_0 T_{3\pi}^4 \right] \right\} + \frac{\varepsilon \sigma_0}{\lambda} T_{3\pi} a_j, \quad (47)$$

$$G_j = \frac{\varepsilon \sigma_0}{\lambda} T_{3\pi}^4 b_j, \quad (48)$$

$$d_1^{(jk)} = \begin{cases} \frac{\alpha_k}{\lambda\pi} \gamma_{jk} \text{ber}_k(\beta_k R_2), & k \neq j \\ \left( \frac{\alpha_k}{\lambda\pi} \gamma_{jj} + \frac{\alpha_2}{\lambda} - \frac{j}{R_2} \right) \text{ber}_j(\beta_j R_2) - \frac{\beta_j}{\sqrt{2}} [\text{bei}_{j-1}(\beta_j R_2) + \text{ber}_{j-1}(\beta_j R_2)], & k = j, \end{cases}$$

$$d_2^{(jk)} = \begin{cases} \frac{\alpha_k}{\lambda\pi} \gamma_{jk} \text{bei}_k(\beta_k R_2), & k \neq j \\ \left( \frac{\alpha_k}{\lambda\pi} \gamma_{jj} + \frac{\alpha_2}{\lambda} - \frac{j}{R_2} \right) \text{bei}_j(\beta_j R_2) - \frac{\beta_j}{\sqrt{2}} [\text{bei}_{j-1}(\beta_j R_2) - \text{ber}_{j-1}(\beta_j R_2)], & k = j, \end{cases} \quad (49)$$

$$d_3^{(jk)} = \begin{cases} \frac{\alpha_k}{\lambda\pi} \gamma_{jk} \text{ker}_k(\beta_k R_2), & k \neq j \\ \left( \frac{\alpha_k}{\lambda\pi} \gamma_{jj} + \frac{\alpha_2}{\lambda} - \frac{j}{R_2} \right) \text{ker}_j(\beta_j R_2) - \frac{\beta_j}{\sqrt{2}} [\text{kei}_{j-1}(\beta_j R_2) + \text{ker}_{j-1}(\beta_j R_2)], & k = j, \end{cases}$$

$$d_4^{(jk)} = \begin{cases} \frac{\alpha_k}{\lambda\pi} \gamma_{jk} \text{kei}_k(\beta_k R_2), & k \neq j \\ \left( \frac{\alpha_k}{\lambda\pi} \gamma_{jj} + \frac{\alpha_2}{\lambda} - \frac{j}{R_2} \right) \text{kei}_j(\beta_j R_2) - \frac{\beta_j}{\sqrt{2}} [\text{kei}_{j-1}(\beta_j R_2) - \text{ker}_{j-1}(\beta_j R_2)], & k = j, \end{cases}$$

$$e_1^{(jk)} = \begin{cases} -\frac{\alpha_k}{\lambda\pi} \gamma_{jk}^{(0)} \text{bei}_k(\beta_k R_2), & k \neq j \\ -\left( \frac{\alpha_k}{\lambda\pi} \gamma_{jj}^{(0)} + \frac{\alpha_2}{\lambda} - \frac{j}{R_2} \right) \text{bei}_j(\beta_j R_2) + \frac{\beta_j}{\sqrt{2}} [\text{bei}_{j-1}(\beta_j R_2) - \text{ber}_{j-1}(\beta_j R_2)], & k = j, \end{cases}$$

$$e_2^{(jk)} = \begin{cases} \frac{\alpha_k}{\lambda\pi} \gamma_{jk}^{(0)} \text{ber}_k(\beta_k R_2), & k \neq j \\ \left( \frac{\alpha_k}{\lambda\pi} \gamma_{jj}^{(0)} + \frac{\alpha_2}{\lambda} - \frac{j}{R_2} \right) \text{ber}_j(\beta_j R_2) - \frac{\beta_j}{\sqrt{2}} [\text{bei}_{j-1}(\beta_j R_2) + \text{ber}_{j-1}(\beta_j R_2)], & k = j, \end{cases} \quad (50)$$

$$e_3^{(jk)} = \begin{cases} -\frac{\alpha_k}{\lambda\pi} \gamma_{jk}^{(0)} \text{kei}_k(\beta_k R_2), & k \neq j \\ -\left( \frac{\alpha_k}{\lambda\pi} \gamma_{jj}^{(0)} + \frac{\alpha_2}{\lambda} - \frac{j}{R_2} \right) \text{kei}_j(\beta_j R_2) + \frac{\beta_j}{\sqrt{2}} [\text{kei}_{j-1}(\beta_j R_2) - \text{ker}_{j-1}(\beta_j R_2)], & k = j, \end{cases}$$

$$e_4^{(jk)} = \begin{cases} \frac{\alpha_k}{\lambda\pi} \gamma_{jk}^{(0)} \ker_k(\beta_k R_2), & k \neq j \\ \left( \frac{\alpha_k}{\lambda\pi} \gamma_{jj}^{(0)} + \frac{\alpha_2}{\lambda} - \frac{j}{R_2} \right) \ker_j(\beta_j R_2) - \frac{\beta_j}{\sqrt{2}} \left[ \ker_{j-1}(\beta_j R_2) + \ker_{j+1}(\beta_j R_2) \right], & k = j, \end{cases}$$

причому

$$\gamma_{jk}^{(0)} = \begin{cases} \frac{\sin(k-j)\varphi_0}{k-j} - \frac{\sin(k+j)\varphi_0}{k+j}, & k \neq j \\ \varphi_0 - \frac{\sin 2j\varphi_0}{2j}, & k = j. \end{cases} \quad (51)$$

Тоді система рівнянь (37) запишеться у вигляді

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N C_k^T \cdot D_{jk} &= F_j, \\ \sum_{k=1}^N C_k^T \cdot E_{jk} &= G_j, \quad j=1,2,\dots,N. \end{aligned} \quad (52)$$

Таким чином, ми отримали систему  $4N$  лінійних алгебраїчних рівнянь відносно  $4N$  невідомих  $C_{k1}, C_{k2}, C_{k3}, C_{k4}, k = \overline{1, N}$ . Ця система значно спроститься, якщо в праву частину граничних умов (16) не будуть входити члени типу  $f(\varphi) \cdot \theta(r, \varphi)$ . Можна припустити, що в області контакту температура поверхні  $r = R_2$  приблизно постійна і прийняти там  $T_{3l} - \theta(r, \varphi) \square T_{3l}^{np}$ , де  $T_{3l}^{np}$  – деяка приведена температура злитку. Тоді гранична умова (16) запишеться так

$$\begin{aligned} \lambda \frac{\partial \theta}{\partial r} + \alpha_2 \theta &= \alpha_k \left[ S_-(\varphi + \varphi_0) - S_+(\varphi - \varphi_0) \right] T_{3l}^{np} + \alpha_2 T_{306} + \\ &+ \varepsilon \sigma_0 F(\varphi) T_{3l}^4 \left[ S_-(\varphi + \varphi_1) - S_+(\varphi - \varphi_1) \right], \quad r = R_2. \end{aligned} \quad (53)$$

Проводячи аналогічні перетворення, як і вище, знайдемо  $N$  незалежних систем рівнянь для знаходження невідомих  $C_{k1}, C_{k2}, C_{k3}, C_{k4}$  при кожному значенні  $k = 1, 2, \dots, N$ . Цю систему можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} C_n^T \cdot A_n &= 0, \\ C_n^T \cdot B_n &= 0, \\ C_n^T \cdot A'_n &= F'_n, \\ C_n^T \cdot B'_n &= G'_n, \quad n = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (54)$$

де додатково позначено

$$A'_n = \begin{pmatrix} a_1^{(n)} \\ a_2^{(n)} \\ a_3^{(n)} \\ a_4^{(n)} \end{pmatrix}; \quad B'_n = \begin{pmatrix} b_1^{(n)} \\ b_2^{(n)} \\ b_3^{(n)} \\ b_4^{(n)} \end{pmatrix}. \quad (55)$$

$$a_1^{(n)} = \left( \frac{\alpha_2}{\lambda} - \frac{n}{R_2} \right) ber_n(\beta_n R_2) - \frac{\beta_n}{\sqrt{2}} [bei_{n-1}(\beta_n R_2) + ber_{n-1}(\beta_n R_2)],$$

$$a_2^{(n)} = \left( \frac{\alpha_2}{\lambda} - \frac{n}{R_2} \right) bei_n(\beta_n R_2) - \frac{\beta_n}{\sqrt{2}} [bei_{n-1}(\beta_n R_2) - ber_{n-1}(\beta_n R_2)],$$

$$a_3^{(n)} = \left( \frac{\alpha_2}{\lambda} - \frac{n}{R_2} \right) ker_n(\beta_n R_2) - \frac{\beta_n}{\sqrt{2}} [kei_{n-1}(\beta_n R_2) + ker_{n-1}(\beta_n R_2)],$$

$$a_4^{(n)} = \left( \frac{\alpha_2}{\lambda} - \frac{n}{R_2} \right) kei_n(\beta_n R_2) - \frac{\beta_n}{\sqrt{2}} [kei_{n-1}(\beta_n R_2) - ker_{n-1}(\beta_n R_2)],$$

$$b_1^{(n)} = -a_2^{(n)}, \quad b_2^{(n)} = a_1^{(n)}, \quad b_3^{(n)} = -a_4^{(n)}, \quad b_4^{(n)} = a_3^{(n)}.$$

Таким чином, отримано аналітичний розв'язок задачі, який дозволяє досліджувати температурні поля, що виникають в роликах МБРС в процесі їх експлуатації в залежності від різних теплофізичних параметрів та умов експлуатації.

### Література.

1. Б. Боли и Дж. Уэйнер. Теория температурных напряжений. – М.: МИР, 1964, – 517с.
2. Справ очник по специальным функциям. Под редакцией М. Абрамовича и И. Стиган. – М.: Наука, 1979, – 830с.

**Mykhaylo Mykhaylyshyn**

**INVESTIGATION OF TEMPERATURE FIELDS IN ROLLERS  
OF CONTINUOUS STEEL TEEMING MACHINE**

*The temperature state of a long roller of continuous steel teeming machine for planar workpiece teeming is investigated. Analytical solution which allows studying temperature fields in rollers during their service is obtained.*

**Keywords:** *continuous steel teeming machines, temperature fields.*