

**Національний університет водного господарства та  
природокористування**

**На правах рукопису**

**МІЧУТА Ольга Романівна**

УДК 517.958:536.72

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЛЬТРАЦІЙНОЇ  
КОНСОЛІДАЦІЇ ҐРУНТІВ З УРАХУВАННЯМ ВПЛИВУ  
ХІМІЧНОЇ СУФОЗІЇ**

**01.05.02 - математичне моделювання та обчислювальні методи**

**Дисертація на здобуття наукового ступеня  
кандидата технічних наук**

**Науковий керівник  
Мартинюк Петро Миколайович  
к.ф.-м.н., доцент**

**Рівне – 2014**

## ЗМІСТ

<b>УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ</b>	5
<b>ВСТУП</b>	8
<b>Розділ 1. Математичне моделювання фільтраційної консолідації та хімічної суфозії в ґрунтах (огляд літератури та постановка задач досліджень)</b>	15
1.1. Засолені ґрунти: причини їх виникнення та класифікація. Загіпсовані ґрунти	15
1.2. Явища хімічної суфозії та математичне моделювання процесів масопереносу багатокomпонентних хімічних розчинів	21
1.3. Математичне моделювання фільтраційної консолідації ґрунтів з урахуванням впливу техногенних факторів	27
1.4. Обґрунтування вибору числового методу в крайових задачах з вільними рухомими межами	30
1.5. Висновки та постановка задач досліджень	34
<b>Розділ 2. Математичні моделі фільтраційної консолідації ґрунтів з урахуванням переносу багатокomпонентних хімічних розчинів</b>	36
2.1. Удосконалене рівняння фільтраційної консолідації двофазного ґрунту з урахуванням багатокomпонентності хімічного складу порового розчину	36
2.2. Рівняння масопереносу та кінетики масообмінних процесів з урахуванням багатокomпонентності порового розчину	42
2.3. Рівняння теплопереносу	44
2.4. Відомі початкові та граничні умови для напору, концентрації хімічних речовин та температури	44
2.5. Нова кінематична гранична умова на рухомій верхній межі ґрунту з урахуванням кристалізації та розчинення солей	47
2.6. Залежність параметрів фільтрації від фізико-механічних властивостей ґрунту та хімічного складу порової рідини, які можуть впливати на	53

динаміку процесів хімічної суфозії	
2.6.1. Залежність коефіцієнта швидкості розчинення солей від фізико-механічних властивостей ґрунту	53
2.6.2. Залежність коефіцієнта фільтрації від концентрації солей в рідкій і твердій фазі та від температури	53
2.6.3. Концентрація граничного насичення гіпсу в різних хімічних розчинах.	57
2.6.4. Залежність концентрації насичення розчинів солей від температури.	58
<b>Розділ 3. Задача фільтраційної консолідації засоленого ґрунту з урахуванням хімічної суфозії та її числове розв'язання</b>	61
3.1. Числове розв'язання одновимірної задачі фільтраційної консолідації засоленого ґрунту з урахуванням хімічної суфозії	61
3.1.1. Постановка задачі та її вдосконалена математична модель	61
3.1.2. Схема відшукування наближеного розв'язку одновимірної крайової задачі методом радіальних базисних функцій	63
3.1.3. Результати числових експериментів в одновимірному випадку та їх аналіз	69
3.2. Двовимірна задача фільтраційної консолідації засоленого ґрунту з урахуванням хімічної суфозії та її числове розв'язання	73
3.2.1. Постановка двовимірної задачі та її вдосконалена математична модель задачі	73
3.2.2. Схема відшукування наближеного розв'язку двовимірної крайової задачі методом радіальних базисних функцій	75
3.2.3. Числові експерименти та їх аналіз для двовимірної задачі	79
3.3. Просторова задача фільтраційної консолідації засоленого ґрунту з урахуванням хімічної суфозії	84
3.3.1. Постановка просторової задачі та її математична модель	74
3.3.2. Метод радіальних базисних функцій в просторовій фільтраційної консолідації засоленого ґрунту з урахуванням хімічної	86

суфозії

3.3.3. Результати числових експериментів для просторової задачі та їх аналіз 89

**Розділ 4. Задача фільтраційної консолідації ґрунтів з урахуванням впливу багатокомпонентних хімічних розчинів та її числове розв'язання 97**

4.1. Одновимірна задача фільтраційної консолідації ґрунту з урахуванням впливу багатокомпонентних хімічних розчинів та її числове розв'язання 97

4.1.1. Постановка задачі та її математична модель 97

4.1.2. Схема відшукування наближеного розв'язку одновимірної крайової задачі методом радіальних базисних функцій 100

4.1.3. Результати числових експериментів в одновимірному випадку та їх аналіз 103

4.2. Числове розв'язання двовимірної задачі фільтраційної консолідації ґрунту з урахуванням впливу багатокомпонентних хімічних розчинів 110

4.2.1. Постановки задач та їх математичні моделі 110

4.2.2. Схема відшукування наближеного розв'язку двовимірних крайових задач методом радіальних базисних функцій 115

4.2.3. Результати числових експериментів в двовимірному випадку та їх аналіз 118

4.3. Числове розв'язання тривимірної задачі фільтраційної консолідації ґрунту з урахуванням впливу багатокомпонентних хімічних розчинів 130

4.3.1. Постановка просторової задачі та математична модель 130

4.3.2. Схема відшукування наближеного розв'язку просторової крайової задачі методом радіальних базисних функцій 132

4.3.3. Результати числових експериментів та їх аналіз 135

**ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ**

**СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ**

**ДОДАТКИ**

## УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

$R$	розмірність задачі;
$n_0$	кількість хімічних речовин наявних в ґрунті
$n_z$	кількість хімічних речовин, що починають надходити в ґрунт;
$n$	загальна кількість хімічних речовин;
$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$	вектор швидкості фільтрації;
$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$	вектор швидкості руху твердих частинок ґрунту;
$\sigma$	об'єм порової рідини в одиниці об'єму ґрунту (для двофазного ґрунту – пористість);
$\sigma_m$	об'єм твердих частинок в одиниці об'єму ґрунту;
$e$	коефіцієнт пористості;
$h(\mathbf{X}, t)$	надлишкові напори в поровій рідині;
$\mathbf{c}(\mathbf{X}, t) = \{c_i(\mathbf{X}, t)\}_{i=1}^n$	вектори концентрації солей в рідкій;
$\mathbf{N}(\mathbf{X}, t) = \{N_i(\mathbf{X}, t)\}_{i=1}^n$	вектори концентрації солей в твердій фазі;
$T(\mathbf{X}, t)$	температура;
$\mathbf{K}_h(\mathbf{c}, \mathbf{N}, T)$	коефіцієнт (тензор) фільтрації, що залежить від векторів концентрації солей $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ , $\mathbf{N} = (N_1, N_2, \dots, N_n)$ та температури $T$ ;
$\rho_i, i = \overline{1, n}$	густини хімічних речовин в твердій фазі;
$\rho_T$	густина твердих частинок ґрунту;
$\rho_p$	густина порової рідини;
$\Theta^*$	сума головних напружень в скелеті ґрунту;
$h^*$	Надлишковий напір в умовах повної стабілізації;
$a$	коефіцієнт стисливості ґрунту;
$\xi$	коефіцієнт бічного тиску ґрунту;
$\mathbf{n}$	вектор напрямних косинусів зовнішньої нормалі до

	межі $\Gamma$ ;
$\delta$	товщина дифузійного примежового шару в околі фронту розчинення;
$Q_T(\mathbf{X}, t)$	величина теплового потоку;
$t$	час;
$L(\mathbf{X}^*)$	нижня нерухома межа ґрунту;
$l(\mathbf{X}^*, t)$	верхня рухома межа ґрунту;
$\mathbf{X} = (x, y, z)$	точка;
$\varepsilon_v$	відносна об'ємна деформація ґрунту;
$V^{(s)}$	об'єм, твердих частинок ґрунту у виділеному фрагменті;
$V^{(i)}, i = \overline{1, n}$	об'єм твердих сольових частинок хімічної речовини з номером $s$ у виділеному фрагменті;
$V^{(n)}$	об'єм всіх твердих частинок;
$V^{(\sigma)}$	об'єм пор у виділеному фрагменті;
$m^{(i)}, i = \overline{1, n}$	маса твердих сольових частинок хімічної речовини з номером $s$ у виділеному фрагменті, об'ємом $V$ ;
$v_z$	швидкість руху твердих частинок у вертикальному напрямку;
$l_h, l_c, l_T, i = \overline{1, n}$	оператори, що задають граничні умови на межі $\Gamma$ для напору, концентрації солей у рідкій фазі та температури відповідно;
$\Omega$	області консолідації;
$\overline{\Omega}$	замикання області;
$\Gamma$	межа області $\Omega$ ;
$\Gamma_0$	депресійна крива;
$\varepsilon_h, \varepsilon_c, \varepsilon_T, \varepsilon_N$	параметри форми;
$M$	кількість колокаційних точок;
$m$	кількість вузлових точок;

$\varphi_j(r_j, \varepsilon), j = \overline{1, m}$	радіальні базисні функції;
$\mathbf{q}_c$	вектор потоку розчинених солей;
$\mathbf{q}_T$	вектор теплового потоку;
$h_p$	значення напору в точці $\mathbf{X}$ до прикладання навантаження;
$q(\mathbf{X})$	Інтенсивність зовнішнього навантаження;
$\Theta(\mathbf{X})$	сума головних напружень у точці $\mathbf{X}$ ;
$l$	товщина досліджуваного масиву ґрунту;
$\gamma$	питома вага сольового розчину;
$\mathbf{v}_{c_i} = \{v_{c_i}^{(kj)}\}_{k=1, j=1}^{3, 3}, i = \overline{1, n}$	коефіцієнти (тензори) хімічного осмосу;
$\mathbf{v}_T = \{v_T^{(kj)}\}_{k=1, j=1}^{3, 3}$	коефіцієнти (тензори) термічного осмосу;
$\mathbf{D}_i = \{D_i^{(kj)}\}_{k=1, j=1}^{3, 3}, i = \overline{1, n}$	коефіцієнти (тензори) хімічної дифузії;
$\gamma_i, i = \overline{1, n}$	коефіцієнти швидкості масообміну;
$\alpha_i, i = \overline{1, n}$	показники степенів, які визначаються експериментальним шляхом і залежать від характеру засоленості породи;
$\mathbf{D}_{T_i} = \{D_{T_i}^{(kj)}\}_{k=1, j=1}^{3, 3}, i = \overline{1, n}$	коефіцієнти (тензори) термічної дифузії;
$C_i^{(\max)}, i = \overline{1, n}$	концентрації граничного насичення, які залежать від температури та концентрації інших солей в рідкій фазі;
$\lambda = \{\lambda_{kj}\}_{k=1, j=1}^{3, 3}$	коефіцієнт (тензор) теплопровідності вологого ґрунту;
$c_p$	питома теплоємність порового сольового розчину;
$c_T$	об'ємна теплоємність ґрунту.

## ВСТУП

**Актуальність теми.** Розвиток промислового виробництва зумовлює зростаючий техногенний вплив на навколишнє середовище. Біля великих підприємств створюються сховища хімічних відходів, які містять висококонцентровані розчини солей в рідкому вигляді, або сховища твердих відходів. При потраплянні в ґрунт ці відходи можуть взаємодіяти з солями, що знаходяться в ньому. Взаємодія може проявлятися в двох аспектах. По-перше, це хімічні реакції, які приводять до утворення інших, раніше відсутніх в ґрунті, хімічних сполук. По-друге, надходження в порову рідину ґрунту сторонніх хімічних речовин призводить до зміни концентрацій граничного насичення вже присутніх елементів солей. В результаті вони можуть додатково розчинятися або випадати в осад. Наслідком таких процесів можуть стати додаткові просідання (або набухання) ґрунту, і, як результат, спричинюють аварійні стани, аж до повного руйнування будівель. Тому при проектуванні промислових підприємств потрібно враховувати всі властивості ґрунту даної місцевості, особливо якщо він засолений.

Фільтраційна консолідація ґрунту пов'язана з двома взаємопов'язаними процесами. Перший – ущільнення ґрунту під впливом зовнішніх навантажень або власної ваги. Ущільнення, в силу різних причин, можуть бути нерівномірними. А тому із консолідацією ґрунту нерозривно пов'язана задача стійкості зведених споруд та безпеки експлуатації ґрунтових гребель. Другий процес – фільтрація порової рідини. Якщо ґрунт насичений деякою поровою рідиною, то прикладені навантаження спричиняють появу надлишкових напорів в цій рідині. При цьому описати динаміку просідання ґрунтового масиву можна через динаміку зміни надлишкових напорів в порах ґрунту. Таким чином математична модель процесу фільтраційної консолідації своєю основною складовою містить рівняння в частинних похідних (як правило, параболічного типу), в якому невідомою є функція надлишкових напорів.



В математичних моделях фільтраційної консолідації, як правило, в якості порової рідини розглядається однокомпонентний хімічний розчин. Проте в природних умовах поровий розчин є багатоконпонентним. Прикладом може бути загіпсований ґрунт, в пори якого починає надходити інший сольовий розчин в результаті аварії на хімічному підприємстві або як результат неконтрольованого витоку. В останні роки дослідження загіпсованих та засолених ґрунтів набувають особливого значення для оцінки екологічної безпеки людської діяльності і розробки ефективних методів захисту, які б зменшили кількість аварій, виникаючих внаслідок деформацій будівель. Такі деформації на загіпсованих та засолених ґрунтах зумовлені в основному просіданням від зміни властивостей засоленого ґрунту в результаті зволоження та розчинення гіпсу, а також в результаті техногенного впливу. Загіпсовані та засолені ґрунти є структурно нестійкими. Моделювання поведінки таких ґрунтів має свої особливості. Основна – це необхідність урахування розчинення гіпсу (хімічної суфозії) в процесі будівництва та експлуатації споруд на такого типу ґрунтах. Дослідження поведінки даних ґрунтів проводилося на рівні натурних експериментів, що є досить затратно по часу і коштах. Один із способів зменшення затрат – комп'ютерне моделювання. Однак зв'язаних процесів фільтраційної консолідації та хімічної суфозії до цього часу не розглядалося.

Тому побудова нових математичних моделей процесів фільтраційної консолідації пористих середовищ (на прикладі ґрунтів) з урахуванням впливу хімічної суфозії, розвиток та ефективне використання числових схем розв'язування відповідних крайових задач відноситься до важливих і актуальних задач математичного моделювання.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Робота виконана в рамках планів наукових досліджень Національного університету водного господарства та природокористування (НУВГП). Результати дисертаційної роботи отримані в рамках науково-дослідних тем, в яких здобувач була виконавцем: «Математичне та комп'ютерне моделювання

фізико-хімічних процесів підземної гідромеханіки під впливом природних, техногенних і соціальних факторів» (№ ДР 0110U000816); «Математичне та комп'ютерне моделювання нелінійних фізико-хімічних процесів гідромеханіки в багатокомпонентних середовищах пористої та нанопористої структури» (№ ДР 0113U004052). У рамках виконання цих науково-дослідних робіт автором проведено математичне моделювання процесів фільтраційної консолідації ґрунтів з урахуванням впливу хімічної суфозії та багатокомпонентності порового розчину.

**Мета і задачі дослідження.** Метою роботи є математичне моделювання процесів фільтраційної консолідації пористих середовищ (на прикладі ґрунтів) з врахуванням впливу багатокомпонентних хімічних розчинів, знаходження числових розв'язків відповідних нелінійних крайових задач в областях з рухомими межами та встановлення закономірностей впливу хімічної суфозії на фільтраційну консолідацію загіпсованих ґрунтів. Для досягнення поставленої мети визначені наступні завдання дослідження:

- на основі аналізу літературних джерел встановити залежність концентрації граничного насичення одних хімічних речовин від температури порової рідини та присутності в поровій рідині ґрунту інших хімічних речовин;
- розробити нову математичну модель процесів фільтраційної консолідації ґрунтів з урахуванням впливу розчинів хімічної суфозії та багатокомпонентності порового розчину;
- отримати кінематичну граничну умову для прогнозування динаміки просідань верхньої рухомої межі ґрунту з урахуванням впливу хімічної суфозії;
- адаптувати для ефективного використання безсітковий метод радіальних базисних функцій для знаходження наближених розв'язків відповідних нелінійних крайових задач Стефанівського типу;
- розробити алгоритми числового розв'язання крайових задач, сформульованих на основі побудованої математичної моделі, створити

відповідну програмну реалізацію розроблених алгоритмів та провести серію числових експериментів;

- встановити закономірності протікання процесів консолідації ґрунтів з урахуванням впливу хімічної суфозії та багатокомпонентних хімічних розчинів на основі аналізу проведених числових експериментів.

*Об'єкт дослідження* - процеси фільтраційної консолідації пористих середовищ (ґрунтів) з урахуванням впливу багатокомпонентних хімічних розчинів та гетерогенних масообмінних процесів.

*Предмет дослідження* – математичні моделі фільтраційної консолідації ґрунтів з урахуванням впливу багатокомпонентних сольових розчинів та хімічної суфозії, яка є наслідком надходження в порову рідину агресивних хімічних речовин, що сприяють інтенсивному розчиненню присутніх у ґрунті солей.

**Методи дослідження.** Для побудови математичних моделей використано підходи механіки пористого середовища, теорії фільтрації та теорії тепло-масопереносу. Для відшукування наближених розв'язків крайових задач використано метод радіальних базисних функцій, який ґрунтується на методі колокації в точці. Для розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь використано методи Гауса та найменших квадратів. Застосовано метод Ньютона, як один із способів лінеаризації нелінійних рівнянь.

**Наукова новизна одержаних результатів** полягає в наступному:

- вперше сформовано нелінійну математичну модель хімічної суфозії в ґрунтах шляхом урахування агресивної дії зовнішніх впливів (температура, надходження в ґрунт хімічних розчинів), що призводить до прискорення розчинення хімічних компонентів в самому ґрунті.
- вперше побудовано нелінійну математичну модель взаємозв'язаних процесів фільтраційної консолідації та хімічної суфозії в пористих середовищах з урахуванням залежності концентрації граничного насичення одних хімічних речовин від присутності в поровій рідині інших хімічних речовин та

температури, а також залежності коефіцієнта фільтрації від концентрації солей в твердій фазі.

- вдосконалено кінематичну граничну умову на верхній рухомій межі ґрунту шляхом урахування величини просідань за рахунок хімічної суфозії.
- вперше досліджено можливість застосування безсіткового методу радіальних базисних функцій для знаходження розв'язків нелінійних крайових задач фільтраційної консолідації ґрунтів з урахуванням впливу хімічної суфозії та багатокomпонентності хімічного складу порового розчину.

**Практичне значення одержаних результатів.** Проведені в дисертаційній роботі дослідження можуть бути використані при проектуванні будівель, енергетичних та гідротехнічних об'єктів, а також при розрахунку стійкості ґрунтових споруд і прогнозуванні осідань основ будівель при проектуванні промислових підприємств (відповідно до ДБН А.2.1-1-2008, п. 3.2.6.6.4), сховищ відходів хімічних виробництв в районах розповсюдження загіпсованих ґрунтів.

Результати дисертації впроваджено в процесі досліджень можливості виникнення загрози руйнування ґрунтової греблі, що оточує Басівкутське водосховище (м. Рівне), внаслідок хімічної суфозії. Дане дослідження проводилося спільно з Рівненським обласним управлінням водних ресурсів.

Одержані в дисертаційній роботі результати впроваджені в навчальному процесі при підготовці спецкурсів «Математичне і комп'ютерне моделювання природних та техногенних процесів», «Чисельні методи прикладної математики» для студентів Національного університету водного господарства та природокористування МОН України за спеціальністю «Прикладна математика».

**Особистий внесок здобувача.** Всі теоретичні та прикладні результати, що складають зміст дисертаційної роботи, отримані автором самостійно. У роботах, опублікованих у співавторстві, здобувачеві належать: теоретичне дослідження експериментальних даних щодо залежності концентрації

граничного насичення від температури [39, 40, 84, 92], побудова нелінійної математичної моделі фільтраційної консолідації ґрунту з урахуванням процесів хімічної суфозії [86, 90, 95], побудова нелінійної математичної моделі фільтраційної консолідації ґрунту з урахуванням багатокомпонентності хімічного складу порового розчину [38, 83, 85], дослідження можливості застосування безсіткового методу радіальних базисних функцій для знаходження розв'язків відповідних нелінійних крайових задач в областях з рухомими межами та розробка обчислювального алгоритму [44, 85, 96], розробка програмного забезпечення для числового розв'язання відповідних крайових задач [82, 91, 94], проведення числових експериментів та аналіз отриманих результатів, [3, 88, 97], розробка модулів програм для дослідження фільтраційної консолідації ґрунтів з урахуванням впливу хімічної суфозії, які увійшли у програмний комплекс «Фільтраційна консолідація ґрунтів з урахуванням впливу техногенних факторів» [3].

**Апробація результатів дисертації.** Основні результати дисертації доповідались й обговорювались на міжнародних та вітчизняних конференціях: 17-й, 18-й міжнародних конференціях «Прийняття рішень в умовах невизначеності» (м. Східниця, травень 2011; м. Ялта, вересень 2011р.); 15-18-й всеукраїнських наукових конференціях «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики» (м. Львів, 2008-2012); Всеукраїнській науковій конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів» (м. Рівне, 2013); науково-практичних конференціях Національного університету водного господарства та природокористування, м. Рівне, 2008-2012р.р.

В повному обсязі робота доповідалася на семінарі кафедри прикладної математики Львівського національного університету імені Івана Франка, на розширеному науковому семінарі кафедри інформатики та прикладної математики Рівненського державного гуманітарного університету, на розширеному науковому семінарі кафедри прикладної математики Національного університету водного господарства та природокористування, на науковому семінарі « Математичне моделювання та обчислювальні методи» в

Тернопільському національному технічному університеті імені Івана Пулюя.

**Публікації.** За темою дисертації опубліковано 22 наукові праці, у тому числі: 13 статей, з них 2 у зарубіжних наукових виданнях, які входять до наукометричних баз, 9 статей у наукових фахових виданнях з технічних наук, 2 статті у наукових фахових виданнях з фізико-математичних наук, 1 свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір, 8 публікацій в матеріалах міжнародних та національних конференцій, 3 праці опубліковано без співавторів.

**Структура та обсяг роботи.** Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел із 188 найменувань на 20 сторінках, додатків на 11 сторінках. Обсяг роботи становить 175 сторінок, в тому числі основного тексту 143 сторінки.

Користуючись нагодою хочу висловити щире подяку своєму науковому керівнику кандидату фізико-математичних наук, доценту кафедри прикладної математики Національного університету водного господарства та природокористування Петру Миколайовичу Мартинюку за постановку задач, цінні поради і постійну увагу до роботи.

# РОЗДІЛ 1

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЛЬТРАЦІЙНОЇ КОНСОЛІДАЦІЇ ТА ХІМІЧНОЇ СУФОЗІЇ В ГРУНТАХ

### (огляд літератури та постановка задач досліджень)

В даному розділі викладено огляд та проведено аналіз літератури за темою дисертації, визначено місце досліджень, наведених у роботі, у розв'язанні науково-технічного завдання розробки нових математичних моделей фільтраційної консолідації ґрунтів з урахуванням багатокомпонентності порового розчину.

#### **1.1. Засолені ґрунти: причини їх виникнення та класифікація. Загіпсовані ґрунти**

При проектуванні будівель на водопроникних засолених ґрунтах, а також при проектуванні будівництва гребель з використанням такого типу ґрунтів вимагається оцінка загальної величини розчинення і вимивання солей протягом терміну експлуатації цих будівель [105]. Кількісна характеристика вказаного процесу необхідна для прогнозування деформації будівлі на період експлуатації і відіграє велику роль при оцінці надійності і тривалості її (будівлі) терміну служби. Ця проблема є досить актуальною. При дослідженні цього питання слід використовувати основні положення фізико-хімічної гідродинаміки, теорії фільтрації, дифузії і хімічної кінетики, які створюють передумови побудови математичних моделей для кількісної оцінки прогнозування перебігу досліджуваних процесів.

Поява солей в ґрунтах пов'язана з процесами розчинення і хімічного вивітрювання гірських порід. Крім того, солі можуть надходити в ґрунт при виверженні вулканів, при викидах в атмосферу та підземні води відходів промислових підприємств, а також при дії інших техногенних факторів.

Основними причинами засолення під впливом антропогенних факторів є:

- невідосконалені системи зрошення;
- техногенна дія на гідросферу забудованих територій;
- фільтрація через ґрунти розчинів хімічних речовин, промислових відходів тощо.

Дослідження засолених ґрунтів розпочалися з середини ХХ-го століття. На теперішній час накопичено значний об'єм експериментального і теоретичного матеріалів, які дають змогу встановити основні закономірності деформування засолених ґрунтів в процесі фільтраційного вилуговування солей. Вивчені закономірності зміни властивостей стійкості засолених ґрунтів при їх розсоленні, а також вирішені інші наукові і практичні задачі, які пов'язані із проектуванням фундаментів на цих ґрунтах. Однак, як правило, методики досліджень є інженерними і пов'язані зі значними спрощуючими припущеннями без належного урахування всіх важливих факторів

Дослідженням засолених ґрунтів займалися багато вчених, серед них: В. М. Безрук, М. М. Верігін, І. М. Горькова, А. А. Глазь, А. І. Грот, Н. П. Затенацька, А. А. Кирилов, Л. Н. Ломізе, А. Л. Рубінштейн, Н. Н. Фролов, В. П. Шульгіна, В. П. Петрухін, А. А. Мустафаєв, А. Skempton, L. Berrum, I. Rosenquist, T. Lamb, D. Mitchell та інші. Завдяки їхнім роботам вивчені теоретичні і практичні питання, пов'язані з вирішенням проблеми формування міцності засолених глинистих ґрунтів і їх поведінки при дії різних механічних і фізико-хімічних факторів.

За класифікацією В. П. Петрухіна [111] до засолених ґрунтів відносяться ті, в яких мінімальний вміст водорозчинних солей від маси абсолютно сухого ґрунту складає:

- піщані 0,5 %;
- супіски і суглинки 5% і більше;
- глини 10% і більше.

При зволоженні засоленого ґрунту:



- відбувається зміна фізико-хімічних і структурно-механічних властивостей;
- збільшується деформівність, пористість;
- спостерігається поява суфозійного просідання при тривалій фільтрації;
- відбувається набухання і просідання ґрунту;
- підвищується агресивність підземних вод.

Загалом в засолених ґрунтах виділяють три види солей: легкорозчинні (хлориди, сульфати, карбонати натрія, калія), середньо розчинні (сульфат кальція - гіпс) і важкорозчинні (карбонат кальція) [112].

Легко- та середньо розчинні солі відносяться до водорозчинних солей. Вміст в ґрунті водорозчинних солей визначає ступінь засоленості ґрунту. По ступеню засоленості ґрунти поділяються на різновиди відповідно до ГОСТ 25 100-95.

Відповідно до даних праці [151] засолені середньорозчинними солями ґрунти ( надалі загіпсовані ґрунти) розповсюджені в усьому світі. Вони є в Росії, Ірані, Саудівській Аравії, Омані, Китаї, Алжирі та Єгипті. В цих країнах загіпсовані ґрунти покривають від 10% до 36% загальної площі. Згідно з останніми даними [152] загіпсовані ґрунти займають близько 724000 км<sup>2</sup> площі світової суші. Такі обрахунки зроблені згідно мап ЮНЕСКО (рис.1.1).

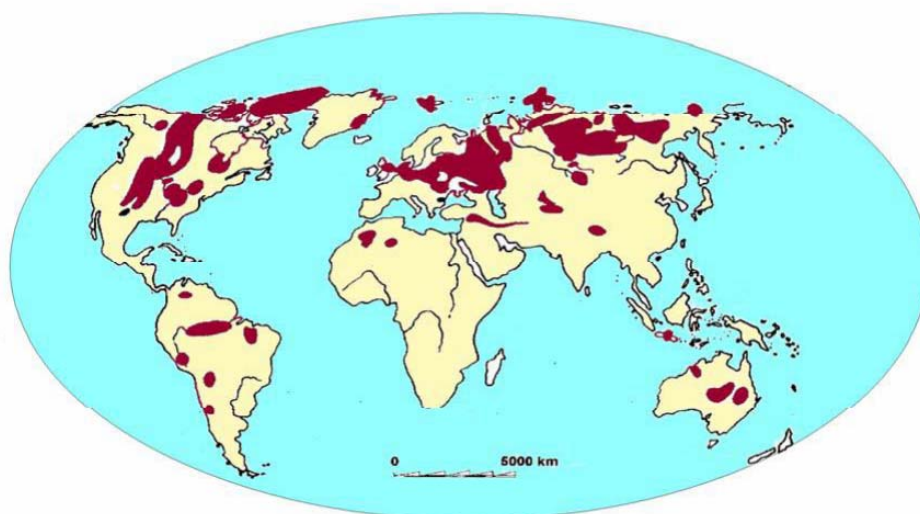


Рис.1.1. Розміщення загіпсованих ґрунтів в світі (зони, відмічені червоним кольором)

В Україні загіпсовані ґрунти поширені на півдні та в Криму: гіпс входить до складу темно-каштанових ґрунтів.

З точки зору хімії, загіпсованими вважаються ґрунти, що містять гіпс. Гіпс – це мінеральна сіль, яка представлена гідратом сульфату кальцію ( $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ ) і складається з суміші 20.9% води  $\text{H}_2\text{O}$ , 46.6% триоксиду сульфору ( $\text{SO}_3$ ) і 32.5% оксиду кальцію ( $\text{CaO}$ ) (рис.1.2).



Рис. 1.2. Мінерал гіпсу

Гіпс має низьку питому вагу 2.32, що сильно впливає на фізичні та механічні властивості ґрунту, який містить значну частку таких матеріалів [177].

З точки зору будівництва, загіпсовані ґрунти – це ґрунти, які мають такий номінальний вміст гіпсу, щоб змінювати чи впливати на його (ґрунту) будівельні (інженерні) властивості (рис 1.3).



Рис.1.3. Характерний вигляд загіпсованого ґрунту

Загіпсовані ґрунти зазвичай жорсткі у своєму сухому стані завдяки цементацийним властивостям гіпсу. Їх часто використовують як основу під

будівництво доріг, будівель, споруд. Проте при розчиненні гіпсу у зв'язку з повною або частковою насиченістю ґрунту водою (це може бути зумовлене опадами, підняттям рівня ґрунтових вод) такі ґрунти втрачають міцнісні характеристики у зв'язку із збільшенням їх стисливості. Ця проблема стає досить серйозною, коли фільтраційні потоки води через такі ґрунти спричиняють втрату маси у зв'язку з вилуговування гіпсу. Вилуговування – це процес виносу солей та розчинних мінералів із ґрунту проточною водою. Загіпсовані ґрунти під впливом вилуговування, частково розчиняються і, як наслідок, змінюють свої інженерні властивості в сторону зменшення міцнісних характеристик, збільшення стискуваності і просідань. Ці зміни створюють серйозні проблеми спорудам, які побудовані на цих ґрунтах (рис. 1.4).

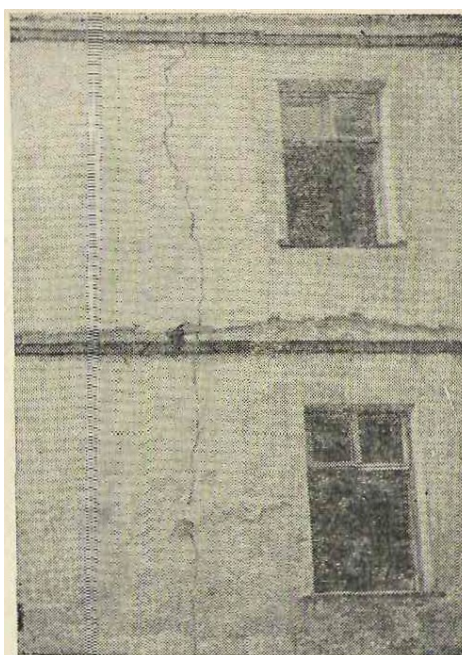


Рис. 1.4. Деформація будинку на загіпсованому ґрунті

Багато науковців досліджували вплив вмісту гіпсу і його вилуговування на властивості загіпсованих ґрунтів, проводячи серію лабораторних тестів з використанням ручного чи модифікованого обладнання. Наприклад, Al-Busoda [153] вивчив вплив вилуговування на геотехнічні властивості гіпсових ґрунтів, взятих з Тікріта у провінції Саладдін в Іраку. Були використані два види тестів. Проникність виявилася обернено пропорційна прикладеному навантаженню. Деформації за рахунок вилуговування лінійно зростали із збільшенням

відсоткового вмісту розчиненого гіпсу, а співвідношення пор залишалось практично незмінним протягом вилуговування під великими напруженнями.

В роботі [151] проведено аналіз стану питання щодо лабораторних та числових методів дослідження впливу вмісту гіпсу і вилуговування на властивості загіпсованих ґрунтів.

Al-Qaissy [154] провів широку програму лабораторних випробувань на Аль-Тартарських ґрунтах (з 79% вмістом гіпсу). Серія тестів на проникність-вилуговування проводилася при різних значеннях коефіцієнта консолідації, рівнях напруження і періодах змочування. Зроблено висновок, що коефіцієнт пористості залишається майже сталим для нормально ущільнених зразків, в той час як він збільшується з плином часу пропорційно до коефіцієнта консолідації та періоду змочування для переущільнених зразків. Час необхідний для досягнення певного ступеня вилуговування був обернено пропорційним до коефіцієнта консолідації та періоду змочування. Більш високі значення проникності ґрунту були зафіксовані у переущільнених зразках в порівнянні із просто ущільненими.

Також загіпсованими ґрунтами займалися такі вчені як В. П. Петрухін, А. Є. Орадовська, М. К. Терлецька, П. Ф. Мельников, Н. Н. Маслов, В. Г. Науменко, М. О. Каркуш, А. Г. Баламірзоев, В. М. Павілонський, А. Г. Дорджиев. Зокрема А. Є. Орадовська досліджувала швидкість вилуговування солей гіпсу з різних порід ґрунту [104]. Ряд проведених дослідів по вилуговуванню водорозчинних солей з монолітів глинистих засолених гірських породи показали, що характер і швидкість вилуговування залежать від хіміко-мінералізованого складу породи і складу водорозчинних солей в ній, кількості і розподілу солей в породі, фільтраційної властивості породи, умов фільтрації (градієнта напору, довжини шляху фільтрації, складу і температури фільтруючої рідини) та ряду інших факторів. Ці факти свідчать, що при математичному моделюванні процесів в засолених ґрунтах, зокрема загіпсованих, потрібно враховувати багатоконпонентність їх хімічного складу.

М. Н. Терлецька [133] досліджувала вплив механічної суфозії на засолені

гіпсом ґрунти. Як результат проведених досліджень зроблено наступні висновки: основним фактором порушення стійкості загіпсованих ґрунтів є вилуговування гіпсу; масштаби зміни зв'язності, а також можливі деформації ґрунту в процесі вилуговування з нього гіпсу залежать від ступеня його засоленості. Ґрунти із загіпсованістю більше 10% належать до суфозійно нестійких.

## **1.2. Явища хімічної суфозії та математичне моделювання процесів масопереносу багатокомпонентних хімічних розчинів**

В процесі фільтрації вода здійснює руйнівну роботу. Із порід вимиваються складові їх частинки. Це супроводжується осіданням поверхні землі, утворенням провалів, воронок, западин і т.д. Цей процес виносу частинок, а не його наслідки, називається суфозією. В загальному випадку під суфозією розуміють винесення фільтраційним потоком речовин, що є в складі ґрунтової маси [128].

Суфозія представляє собою широко розповсюджений і небезпечний для будівництва екзогенний геологічний процес. Екзогенні процеси – процеси, які відбуваються на поверхні Землі та в її приповерхневих шарах (вивітрювання, ерозія, діяльність льодовиків, підземних вод та ін.). Хімічна суфозія – процес вимивання і винесення твердих часточок та вилуговування розчинних речовин гірських порід і ґрунту водою, що рухається в них. Під час хімічної суфозії вода розчиняє частинки породи (гіпс, солі, карбонати) і виносить продукти руйнування. Тривалий розвиток процесів хімічної суфозії може призвести до значного збільшення водопроникності ґрунту, формуванню зосереджених шляхів фільтрації, утворенню карстових порожнин, а також до втрати стійкості ґрунту й осідання поверхні землі, що може послужити причиною аварій і руйнувань житлових будинків і різних інженерних споруд з важкими екологічними наслідками [5].

Взаємодія суфозійних процесів з об'єктами промислового і цивільного будівництва нерідко призводить до серйозних катастроф, внаслідок яких відбувається руйнування будівель і загибель людей [143, 163, 172].

В середині минулого століття в лабораторії гідрогеологічних проблем (ЛГГП) ім. Ф. П. Саваренського вивченням і прогнозуванням хімічної суфозії активно займався доцент В. Н. Славянов. Велику увагу інженерно-геологічному вивченню хімічної суфозії приділяв професор Ф. В. Котловий.

До кінця 80-х років минулого століття було сформульовано цілісне представлення про суфозію, як про єдиний і дуже шкідливий геологічний процес. З цього часу дослідження суфозійних процесів набуло планомірного і цілеспрямованого характеру.

Сприятливими умовами для розвитку хімічної суфозії є: неоднорідність гранулометричного та хіміко-мінерального складу порід, наявність у них тріщин і порожнин, вміст водорозчинних речовин (насамперед хлористих, хлористо-сульфатних, карбонатних солей), значні швидкості руху води тощо. Хімічна суфозія може тривати протягом тривалого часу і вилуговувати не тільки карбонати та інші порівняно легко розчинні речовини, але й кремнезем. При значному розчиненні порід хімічна суфозія переходить у карстовий процес.

В процесі хімічної суфозії руйнуються кристалічні зв'язки, внаслідок чого частинки ґрунту звільняються і мають можливість переміщатися. В першу чергу розчиняються солі, які знаходяться на стінках пор, потім – легко розчинні карбонатні частинки. В результаті чого пори в ґрунті збільшуються, що в свою чергу полегшує виніс дрібних нерозчинних частинок.

Оскільки явище хімічної суфозії пов'язане з розчиненням водорозчинних порід та винесенням продуктів розчинення фільтраційним потоком, то основними рівняннями, які входять в математичну модель вказаного небезпечного процесу, мають бути:

- 1) рівняння масопереносу;
- 2) рівняння кінетики масообміну;

### 3) рівняння руху порової рідини.

Однак хімічний склад порової рідини не є однокомпонентним. Так само, надходження в ґрунт деяких хімічних речовин можуть порушити стан хімічної рівноваги в поровій рідині і прискорити процеси розчинення, що на пряму пов'язане з активізацією процесів хімічної суфозії. Тому в математичній моделі хімічної суфозії має бути врахована багатоконпонентність порового розчину і врахована залежність параметрів масообміну одних хімічних речовин від наявності та концентрації інших речовин.

Розвиток та розробка математичних моделей масопереносу багатоконпонентних хімічних розчинів в природних пористих середовищах, як можна припустити, розпочалась із задачі про прогнозування хімічного складу підземних вод.

Роботи по математичному моделюванню хімічного складу підземних вод почалися приблизно з середини минулого століття і мають величезну бібліографію. Серед учених необхідно відмітити класичні роботи М. М. Веригіна [27] і В. С. Голубєва [49]. Стан справ у зарубіжній науці можна уявити по відомих піонерських монографіях Д. Дрівера, Я. Бера і Р. Грінкорна [56, 156, 169].

М. Г. Храмченков в монографії [144] проаналізував стан питання моделювання хімічного складу підземних вод та навів основні моменти моделювання проходження хімічних реакцій взагалі. М. Г. Храмченков відмічає, що одним з найважливіших моментів моделювання проходження хімічних реакцій взагалі і в підземних водах зокрема є принцип локальної рівноваги, що був вперше чітко сформульований Д. Оландером [178]. Полягає він у наступному. Вважається, що всі хімічні реакції протікають досить швидко в порівнянні з часом перемішування для представленого елемента об'єму пористого середовища (або хімічного реактора). Це означає, що точний вид джерел (стоків) компонентів розчину невідомий, проте відомі стехіометричні співвідношення між джерелами (стоками) компонентів у кожній реакції, а також умови хімічної рівноваги для кожної реакції. Таким чином, ми можемо

прийти до системи рівнянь переносу без джерел (загальні балансові співвідношення), доповненої в якості замикаючих співвідношень рівняннями хімічної рівноваги. Фізично це означає, що в кожній точці середовища в кожен момент часу встановлюється рівновага по компонентах - учасниках хімічних реакцій. При цьому очевидно, що концентрації компонентів у різних точках або в одній точці в різні моменти часу відрізняються. Цей підхід добре працює у випадку гомогенних швидких реакцій, оскільки зручно стежити за загальними балансними рівняннями (реакції йдуть тільки в рідкій фазі). При поширенні цього підходу на гетерогенні (міжфазні) реакції доводиться окремо стежити за балансами компонентів у твердій фазі, що призводить до різкого ускладнення розрахунків (наприклад, до необхідності відстежувати рух межі твердої фази розчинення або кристалізації). Також проблемним моментом є істотна відмінність в швидкостях гомогенних і гетерогенних реакцій - останні зазвичай протікають набагато повільніше перших. Одним з виходів з такої ситуації, відомим з літератури, є відомий принцип стаціонарних концентрацій [124]. Вважається, що в кожен момент часу розчин врівноважений по гомогенним реакціям. Тому можна розв'язувати тільки рівняння кінетики гетерогенної реакції, доповнивши його локальними рівняннями рівноваги для гомогенних реакцій і рівняннями балансу електричного заряду і маси.

Також М. Г. Храмченков розглядав задачі пов'язані з формуванням хімічного складу підземних вод, а також 1) розробив теоретичні основи фізико-хімічної механіки глин та глинистих гірських порід; 2) отримав розв'язки та провів аналіз для процесу розчинення кальцію; 3) дослідив процеси деформації, дифузії та фільтрації в водонасичених глинах, а також процеси, що пов'язані зі зворотною трансформацією глинистих мінералів. Однак, в своїх дослідженнях, автор основну увагу приділяє саме побудові фізично коректних моделей масообміну та макрокінетики хімічних реакцій в природних пористих середовищах, а також обґрунтуванню даних математичних моделей з точки зору механіки насичених пористих середовищ та теорії поверхневих сил. В дані дисертаційній роботі крім масообмінних процесів розглядаються процеси



масопереносу та фільтраційної консолідації. Також приділена увага розв'язку побудованих математичних моделей та подальшому аналізу отриманих результатів.

Моделюванням процесів масопереносу в яких враховується вплив багатокомпонентних хімічних розчинів при наявності як гомогенних так і гетерогенних реакцій, займалися В. О. Богаєнко, М. Г. Храмченков, Д. А. Воронков, Е. Н. Коржов, Van Beinum, Azimi G., Daichao Sheng, David W. Smith та ін. Зокрема В. О. Богаєнко [10] розглянув математичну модель дифузійних та хімічних процесів у ґрунті, яка враховує вплив концентрації солей у фільтраті на міграцію речовин. Автор наводить результати обчислювальних експериментів, які показують суттєвий вплив врахування цих факторів на моделювання процесів міграції забруднень. Також пропонується розвинення паралельного алгоритму розв'язання задач щодо цієї моделі.

Запропонована В. О. Богаєнко математична модель дифузійних та хімічних процесів у пористих середовищах побудована за таких припущень:

1. Швидкість хімічних реакцій, які протікають в ґрунті, пропорційна концентраціям реагентів у рідкому (наприклад, кислоти чи лугу) та у твердому стані (наприклад, солі чи оксиду).
2. Одночасно з хімічною реакцією відбувається адсорбція розчинних речовин твердою фазою;
3. Реакції, що відбуваються у ґрунті під дією кислого розчину, є багаточисельними і модель повинна описувати їх довільну кількість.
4. При реакції кислого розчину з компонентами ґрунту можуть утворюватись як розчинні так і нерозчинні речовини.

В праці [11] автор розв'язав задачу моделювання процесу фільтраційної консолідації ґрунтів під дією двокомпонентного розчину використовуючи при цьому ряд паралельних алгоритмів - багатопоточний алгоритм та алгоритми для кластерних систем та графічних процесорів (GPU).

K. V. Nedunuri, R. S. Govindaraju, L. E. Erickson та A. P. Schwab у своїй праці [178] досліджували математичну модель, що відображає поведінку типових важких металів (свинцю) в ненасиченому ґрунті.

H. Class, R. Helmig, P. Bastian [165] займалися моделюванням неізотермічної багатофазної багатокомпонентної фільтрації та масопереносу в підземних водах. В умовах даної задачі розглянуто перенесення маси і енергії між фазами, а також враховано процеси адвекції та дифузії. Опис фізичних і термодинамічних явищ призводить до системи з чотирьох пов'язаних між собою диференціальних рівнянь.

Для числового розв'язання відповідної крайової задачі автори розробили алгоритм, який дозволяє адаптивне перемикання первинних змінних по кожній фазі. Для лінеаризації рівнянь використаний метод Ньютона.

Daichao Sheng та David W. Smith у своїй роботі [183] застосували метод скінченних елементів для розв'язання двовимірних адвекційно-дисперсійних рівнянь переносу багатокомпонентними забруднень.

Д. А. Воронков та Е. Н. Коржов [46] досліджували процес масопереносу через іонноселективні мембрани. В роботі наведено результати обчислювального експерименту з дослідження математичної моделі електромасопереносу п'ятикомпонентної суміші взаємодіючих в об'ємі та міжфазній межі компонент. Побудована авторами математична модель включає в себе диференціальні рівняння, що описують зміни концентрацій компонентів суміші та електричного потенціалу.

Отже, проаналізувавши вищенаведені роботи, математична модель масопереносу багатокомпонентних сольових розчинів з урахуванням гетерогенних хімічних процесів містить рівняння масопереносу, які повинні бути доповнені початковими та граничними умовами, та рівняння, що задають кінетику масообмінних процесів. Кількість даних рівнянь повинна відповідати кількості хімічних речовин, що входять до складу порового розчину.

Класифікацію масообмінних процесів, від яких залежить вигляд вищезгаданих рівнянь, досить повно описав М. М. Веригін [27]. Відповідно до неї існують наступні основні види масообмінних процесів:

- 1) розчинення та випадання розчинених речовин в осад (в т.ч. кристалізація);
- 2) нерівноважна оборотна адсорбція та десорбція розчинених та емульгованих речовин;
- 3) рівноважна сорбція;
- 4) нелінійна кінетика іонообмінної сорбції;
- 5) нелінійна кінетика фізичної абсорбції, прилипання (кольматажу) та суфозії.

### **1.3. Математичне моделювання фільтраційної консолідації ґрунтів з урахуванням впливу техногенних факторів**

В процесі хімічної суфозії тверді частинки водорозчинних порід в ґрунті переходять в рідку фазу. Як результат – пористість ґрунту змінюється і під впливом зовнішніх навантажень (у вигляді цивільних та промислових споруд) або власної ваги ґрунт просідає. Результати негативної дії хімічної суфозії можна спостерігати по поверхні ґрунту – утворюються каверни та нерівномірні просідання. Явища просідання ґрунтів добре описуються з використанням математичних моделей консолідації ґрунтів. Якщо ґрунт насичений деякою поровою рідиною, то його ущільнення в часі можна описати в рамках так званої теорії фільтраційної консолідації ґрунтів, де основним фактором, який сприяє зближенню частинок ґрунту, є розсіювання надлишкових напорів в поровій рідині. Ці напори є наслідком прикладання на насичений ґрунт зовнішніх навантажень (включаючи і власну вагу ґрунтових масивів, які розміщені вище). Урахування хімічної суфозії привносить ще один фактор просідання ґрунту. І навіть якщо надлишкові напори в поровій рідині вже розсіялись, то дія фактора хімічної суфозії все ще буде впливати на подальші просідання ґрунту. Більш того, можливо, що дія хімічних факторів призведе до виникнення зон

аномальних надлишкових напорів. Тому в дисертаційній роботі явища консолідації та хімічної суфозії розглянуті сумісно.

Як зазначено в роботі А. П. Власюка, П. М. Мартинюка [35], в теоретичних дослідженнях механіки ґрунтів умовно можна виділити кілька підходів до математичного моделювання процесів консолідації ґрунтів. Один з них ґрунтується на використанні співвідношень теорії пружності для пористих середовищ. В. А. Флорин [140] висунув загальну теорію консолідації ґрунту, яка отримала назву «теорія об'ємних сил». Вона полягає в тому, що взаємодія фаз ґрунту представлена дією порової рідини на скелет ґрунту у вигляді об'ємних сил. Пізніше схожу модель запропонував М. Biot [160]. Відповідну теорію консолідації ґрунтів називають теорією Флорина-Біо. Відповідно до неї ґрунт вважається єдиною системою, для описання деформації якої застосовуються основні принципи теорії пружності для пористих водонасичених матеріалів. В подальшому дана теорія отримала свій розвиток в роботах Ю. К. Зарецького, М. І. Дроботенко, А. В. Костеріна та ін.[60-64].

Інший шлях, який і використаний в дисертаційній роботі, – звести задачу консолідації до визначення динаміки зміни надлишкових напорів в поровій рідині. Такий підхід отримав назву «теорія фільтраційної консолідації ґрунтів». Застосування вказаної теорії ґрунтується на ряді наступних припущень.

1) принцип гідроємності М.М. Герсеванова.

М. М Герсеванов [48] ввів в закон Дарсі взаємні швидкості руху порової рідини та скелету ґрунту, детально описав одновимірну задачу ущільнення двохфазного ґрунтового середовища та навів розв'язок задачі про розподіл надлишкових напорів у поровій воді в початковий момент часу після прикладення рівномірно розподіленого смугового навантаження. Він також сформулював основні рівняння двовимірної та навів неповну систему рівнянь просторової задачі консолідації водо насиченої однорідної ізотропної ґрунтової маси. Сам принцип гідроємності полягає в тому, що зміна коефіцієнта пористості ґрунту визначається тільки зміною суми головних напружень.

2) основна розрахункова модель В.А. Флоріна.

Основна розрахункова модель ґрунту В. А. Флорина базується на серйозному припущенні, що напружений стан ґрунтового середовища в цілому в будь-який момент часу співпадає з напруженим станом ґрунтового середовища в припущенні його миттєвої консолідації. В. А. Флорин [141, 142] систематизував фільтраційну теорію консолідації ґрунтів та сформулював ряд задач з урахуванням окремих факторів, що характеризують природні ґрунти, таких, як повзучість скелету ґрунту, структурна міцність ґрунтів та початковий градієнт напору, стискуваність порової води та затиснутого скелетом повітря.

Отримана в результаті застосування двох вищенаведених принципів математична модель набагато простіша, аніж згідно першого підходу.

Класична фільтраційна теорія консолідації ґрунтів досить повно описана в роботах З. Г. Тер-Мартиросяна, М. М. Веригіна, Л. В. Горелика, Н. А. Цитовича, І. А. Лучко, О. Я. Олійника, А. Л. Гольдіна, А. Ф. Клементєва, М. Ю. Абелєва, В. І. Лаврика і ін. [1, 2, 29-31, 48, 50, 52, 64, 65, 73, 74, 80, 101, 112, 113, 134, 138, 140-142, 145, 149, 159]. Крім того, в роботах А. П. Власюка, О. В. Жеребятєва, П. М. Мартинюка, В. М. Булавацького, В. В. Скопецького, О. М. Степанченко, О. П. Остапчук [19, 34-37, 41, 43] класичні математичні моделі фільтраційної консолідації доповнені та вдосконалені шляхом урахування впливу теплового поля та змінного поля концентрації солей у поровому розчині. Зокрема в роботах В. М. Булавацького [17-25] сформульовано основні аспекти моделювання процесу фільтраційної консолідації ґрунтів на основі біпараболічної моделі фільтрації. Для врахування ефекту просідання поверхні ґрунту в процесі консолідації П. М. Мартинюком вперше виведено кінематичну граничну умову [36].

А. П. Власюк та П. М. Мартинюк в роботі [35] дослідили процеси фільтраційної консолідації ґрунтів з урахуванням того, що в якості порової рідини виступає сольовий розчин, а не чиста вода, як припускалося раніше.

Однак в цих роботах в якості порової рідини розглядався однокомпонентний сольовий розчин. Насправді ж, в природних умовах, поровий розчин є багатоконпонентним. Прикладом може бути загіпсований

грунт, в пори якого починає надходити інший сольовий розчин в результаті аварії на хімічному підприємстві, або як результат неконтрольованого витоку.

Дослідження процесів фільтраційної консолідації ґрунтів з урахуванням впливу багатокомпонентних хімічних розчинів є метою даної дисертаційної роботи.

#### **1.4. Обґрунтування вибору числового методу в крайових задачах з вільними рухомими межами**

Не претендуючи на повноту розгляду та огляду числових методів математичної фізики, відмітимо, що найбільш популярними серед них (методів) є метод скінченних різниць (МСР), метод скінченних елементів (МСЕ), метод граничних елементів (МГЕ) та безсіткові методи, які активно розвиваються останні двадцять років. Кожен із названих методів насправді представляє об'єднану ідею і являє собою цілу групу методів. Причому всі методи в межах виділених груп володіють спільними рисами, але і характеризуються своїми особливостями.

В колишньому СРСР, та і на теренах науки пострадянських держав, напевно домінуючим був і поки що залишається МСР. Це, в першу, чергу пов'язане з ім'ям та ідеями О. А. Самарського та його наукової школи [116-122]. Даний метод розвивається в працях А. А. Сухінова, Г. І. Шишкіна, А. П. Власюка, О. П. Остапчук, О. М. Степанченко [37, 129, 131, 150]. Однак МСЕ, напевно, гнучкіший стосовно застосування до крайових задач з вільними межами, аніж МСР. Дана гнучкість проявляється не лише в апроксимації вільної межі, але і в апроксимації граничних умов. МСЕ в Україні розвивався і розвивається завдяки Львівській школі прикладної математики [115, 184], науковій школі Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова [53-55, 97, 125, 126], а також (в часи колишнього СРСР) завдяки роботам Г. І. Марчука та його науковій школі [77].

МСР та МСЕ відносяться до класу так званих сіткових методів. Характерною особливістю сіткових методів є необхідність покриття області, в якій шукається розв'язок задачі, геометричною сіткою. Під геометричною сіткою розуміють множину вузлів між якими встановлено взаємозв'язки наперед визначеним способом, який характерний для конкретного сіткового числового методу. При додаванні нового вузла в геометричну сітку треба переформатовувати взаємозв'язки. Це один із основних «мінусів» сіткових методів в наближеному розв'язуванні крайових задач з рухомими вільними межами.

Від вказаного недоліку можна позбутися, якщо в сітці вимагається лише наявність вузлів, а взаємозв'язки між ними (вузлами) відсутні. Тоді з геометричної сітки отримуємо просто вузлову сітку. Числові методи, які ґрунтуються на застосуванні вузлових сіток називаються безсітковими. Додавання нових вузлів в таку сітку є простою операцією. На даний час безсіткових методів є досить багато [174] і вони активно розвиваються.

Напевно одним із перших безсіткових методів став метод частинок (smooth particle hydrodynamics). Також в останні два десятиліття набули популярності безсіткові методи, які ґрунтуються на застосуванні радіальних базисних функцій [161, 185]. Піонерською роботою в даному напрямку є Е. J. Kansa [170]. В роботі А. П. Власюка, П. М. Мартинюка [43] (див. також вказану там бібліографію) застосовано метод РБФ до розв'язування крайових задач з вільними межами, якими описуються математичні моделі сумісних процесів фільтраційної консолідації та фільтраційного руйнування ґрунтів. Цей метод довів свою практичну ефективність в розв'язуванні нелінійних крайових задач в областях, що еволюціонують в часі. Тому в дисертаційній роботі використано саме метод РБФ. З робіт українських авторів, в яких теж використано радіальні базисні функції, потрібно виокремити роботи В.М. Колодяжного, О.Ю. Лісіної, В.О. Рвачова [67-70].

Загалом, щодо методів апроксимації вільних поверхонь, відмітимо огляд-статтю Н. Г. Бураго [26]. Зокрема виділено дві великі групи методів виділення рухомих меж:

- 1) «алгоритми відслідковування» дозволяють явно виділити рухому межу, як сукупність поверхневих вузлів;
- 2) «алгоритми вловлювання» дозволяють неявно виділити рухому межу з використанням неперервних маркерних функцій, що набувають на рухомі межі певних значень.

Від себе відмітимо, що алгоритми з обох груп напевне краще реалізуються з використанням безсіткових методів. Адже краще у випадку рухомої межі працювати з окремим вузлом, аніж з вузлами пов'язаними певними взаємозв'язками і, звичайно, на переміщення яких накладаються більші обмеження.

Крайові задачі, якими описуються побудовані в дисертаційній роботі математичні моделі фізико-хімічних процесів, мають свої особливості. По-перше, це крайові задачі для систем диференціальних рівнянь в частинних похідних (ДРЧП). По-друге, вказані ДРЧП є квазілінійними і нелінійними. І, по-третє, крайові задачі розглядаються в областях з вільними рухомими межами. Тобто область, в якій шукається розв'язок початково-крайової задачі, змінюється в часі. Якщо способи вирішення перших двох проблем в сіткових і безсіткових методів приблизно рівнозначні за рівнем складності і рівнем затрат роботи, то до вирішення третьої проблеми в цих групах методів різні підходи. Зміна області в часі вимагає переформатування геометричної та вузлової сіток. Переформатування геометричної сітки набагато складніший процес за переформатування вузлової сітки. Розглянемо, наприклад, МСЕ. Додавання нових вузлів в скінченноелементну сітку вимагає:

- 1) переформатування положення та форм скінченних елементів в околі нового вузла;



- 2) перерахунку номерів вузлів всієї сітки. Адже величина різниці між номерами суміжних вузлів впливає на півширину стрічки матриці СЛАР, до розв'язування якої приводить застосування МСЕ;
- 3) згладжування координат вузлів нової скінченноелементної сітки. Адже на величину похибки апроксимації впливає форма скінченних елементів – по можливості всі скінченні елементи повинні бути близькими до рівносторонніх трикутників.

Звичайно змінювати скінченноелементну сітку можна без додавання нових вузлів. Це здійснюється «прив'язуванням» вузлів на вільній межі до неї і автоматичною зміною координат вузлів відповідно до зміни положення вільної межі. Однак, це може призвести до появи скінченних елементів з надто гострими кутами. А така форма скінченних елементів різко негативно впливає на точність скінченноелементних розрахунків [115].

Набагато простіше з додаванням нового вузла у вузлову сітку у безсіткових методах. Це вимагає визначення лише його координат і присвоєння наступного номера в списку вузлів. Це одна із причин і пояснень чому в дисертаційній роботі із числових методів розв'язування крайових задач використано саме метод РБФ.

Для можливості застосування МСР та МСЕ область, в якій шукається розв'язок задачі, потрібно покрити геометричною сіткою. Це є окремим етапом всього процесу отримання числового розв'язку крайової задачі на який, наприклад, в МСЕ витрачається близько 70% всього машинного часу, який потрібний загалом для всього процесу [174]. Покриття області геометричною сіткою ще більше ускладнюється, якщо досліджуються крайові задачі в тривимірних областях. Алгоритми (та їх програмна реалізація) покриття областей вузловими сітками набагато простіше, аніж геометричними. Це ще одна із причин використання в дисертаційній роботі безсіткового методу РБФ. Особливо це стосується просторових задач.

## 1.5. Висновки та постановка задач досліджень

Аналіз проведений вище показав, що існує багато вчених, завдяки роботам яких були вивчені теоретичні і практичні питання, пов'язані з вирішенням проблеми формування міцності засолених глинистих ґрунтів і їх поведінки при дії різних механічних і фізико-хімічних факторів. Але незважаючи на це, ще багато чого в поведінці засолених ґрунтів є не дослідженим. Про це свідчить той факт, що на долю засолених ґрунтів припадає велика кількість деформацій основ будівель, а також багато руйнівних геологічних та інженерно-геологічних процесів, які приносять великі збитки. Тому подальше дослідження властивостей цих ґрунтів є однією із важливих теоретичних і практичних задач. Необхідність таких досліджень ще в більшій мірі зростає в умовах науково-технічної революції, розширення масштабів будівництва.

Що ж стосується зокрема загіпсованих ґрунтів, то загалом аналіз наукових літературних джерел дозволяє ряд наступних узагальнюючих висновків:

- Щодо загіпсованих ґрунтів накопичено значний експериментальний матеріал і методики їх натурних досліджень.
- Висновки про властивості того чи іншого загіпсованого ґрунту робляться на основі проведення натурних експериментів.
- Прогнозування поведінки загіпсованих ґрунтів в часі як правило проводиться інженерними методами, які ґрунтуються на серйозних спрощеннях, пов'язані зі значними часу та коштів на проведення натурних експериментів і які дають наближені значення.
- Математичне моделювання поведінки загіпсованих ґрунтів пов'язане зі значними складностями, оскільки вимагає урахування багатьох факторів. Один з них – багатокомпонентність хімічного складу порового розчину. Урахування лише цього одного фактору значно ускладнює процес математичного моделювання зміни концентрації гіпсу в рідкій та твердій фазах ґрунту. По-перше, математична модель буде описуватися крайовою

задачею для системи диференціальних рівнянь в частинних похідних. По-друге, між хімічними компонентами порового розчину потрібно враховувати взаємодію.

Отже, необхідно вдосконалити існуючі математичні моделі задач фільтраційної консолідації ґрунтів шляхом врахування впливу багатокомпонентних хімічних розчинів, знайти числові розв'язки відповідних крайових задач та встановити закономірності впливу хімічної суфозії на фільтраційну консолідацію загіпсованих ґрунтів.

Для досягнення поставленої мети необхідно розв'язати наступні завдання дослідження:

- на основі аналізу літературних джерел вдосконалити існуючі математичні моделі задач фільтраційної консолідації ґрунтів щодо врахування впливу багатокомпонентних хімічних розчинів;
- врахувати залежність концентрації граничного насичення одних хімічних речовин від присутності в поровій рідині інших хімічних речовин та температури;
- вивести кінематичну граничну умову на верхній рухомій межі ґрунту з урахуванням хімічної суфозії;
- адаптувати безсітковий метод радіальних базисних функцій для знаходження наближеного розв'язку відповідних крайових задач;
- розробити алгоритми, створити відповідні програмні реалізації розроблених алгоритмів та провести серії числових експериментів;
- виявити закономірності протікання процесів консолідації ґрунтів з урахуванням впливу багатокомпонентних хімічних розчинів на основі аналізу проведених числових експериментів.

## РОЗДІЛ 2

### МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ФІЛЬТРАЦІЙНОЇ КОНСОЛІДАЦІЇ ГРУНТІВ З УРАХУВАННЯМ ПЕРЕНОСУ БАГАТОКОМПОНЕНТНИХ ХІМІЧНИХ РОЗЧИНІВ

В даному розділі наведено математичні моделі фільтраційної консолідації ґрунтів при фільтрації в них багатоконпонентних хімічних розчинів. Ґрунт вважається двофазним, в якому багатоконпонентний хімічний розчин може знаходитись в рідкому (у вигляді розчину) та твердому (у вигляді кристаликів солей) станах. Диференціальні рівняння, що описують процеси консолідації ґрунту, виводяться на основі основної розрахункової моделі В. А. Флоріна та узагальненого закону Дарсі-Герсеванова, загіпсованого на випадок фільтрації багатоконпонентних хімічних розчинів. Також виведена кінематична гранична умова на верхній рухомій межі ґрунту з урахуванням розчинення та кристалізації солей.

#### **2.1. Удосконалене рівняння фільтраційної консолідації двофазного ґрунту з урахуванням багатоконпонентності хімічного складу порового розчину**

Дослідимо процес фільтраційної консолідації ґрунту під впливом зовнішніх навантажень або його власної ваги в області  $\Omega$  з межею  $\Gamma$ . Ґрунт вважається двофазним, в якому поровий розчин може знаходитись в рідкому (у вигляді розчину) та твердому (у вигляді кристаликів солей) станах.

Припустимо, що ґрунт містить в своєму складі різні хімічні речовини. Тобто: 1) поровою рідиною ґрунту є  $n_0$ - компонентний хімічний розчин з концентрацією речовин  $c_i(\mathbf{X}, t), i = \overline{1, n_0}$ ; 2) вказані  $n_0$  хімічні компоненти в ґрунті наявні і в твердій фазі. В ґрунт починає надходити  $n_z$ - компонентний хімічний розчин, з концентраціями  $c_i(\mathbf{X}, t), i = \overline{1, n_z}$  ( $\mathbf{X} = (x, y, z)$ ).

Необхідно визначити:

- 1) Розподіл надлишкових напорів в ґрунті  $h(\mathbf{X}, t)$ .
- 2) Концентрацію солей в рідкій фазі  $c_i(\mathbf{X}, t), i = \overline{1, n}$ .
- 3) Концентрацію солей в твердій фазі  $N_i(\mathbf{X}, t), i = \overline{1, n}$ .
- 4) Розподіл температури  $T(\mathbf{X}, t)$ .
- 5) Величину просідань верхньої рухомої межі ґрунту.

Таким чином можуть бути змодельовані кілька ситуацій:

- 1) прикладене навантаження на ґрунт – це цех хімічного виробництва, під фундамент якого і потрапляють хімічні речовини;
- 2) атмосферні опади після викиду в повітря шкідливих речовин;
- 3) техногенна аварія, яка призводить до потрапляння в ґрунт хімічних речовин в рідкій фазі;
- 4) хвостосховище рідких відходів хімічного виробництва, які контактують з ґрунтовою греблею, що перебуває у стані фільтраційної консолідації.

В результаті реакцій кількість хімічних речовин в ґрунті стає  $n$ , причому  $n_0 + n_z \neq n$ . Крім того, фундамент споруди, хімічні реакції, атмосферні температурні коливання призводять до зміни температурного поля ґрунту.

Основне рівняння фільтраційної консолідації двохфазного ґрунту без врахування початкового градієнта напору при вищевказаних умовах виводяться ґрунтуючись на наступних залежностях [27-33, 35, 36, 65]:

- рівняння нерозривності рідкої фази ґрунту із врахуванням зміни концентрації солей в поровій рідині [83]

$$\operatorname{div}(\rho_p \mathbf{u}) + \frac{\partial \left( \sigma \rho_p \left( 1 - \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \frac{c_i}{\rho_i} \right) \right)}{\partial t} = 0; \quad (2.1)$$

- рівняння нерозривності твердої фази ґрунту із врахуванням зміни концентрації солей в твердій фазі

$$\operatorname{div}(\rho_r \mathbf{v}) + \frac{\partial \left( \sigma_m \rho_r - \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \frac{\rho_r N_i}{\rho_i} \right)}{\partial t} = 0; \quad (2.2)$$

• узагальнений закон Дарсі-Герсеванова на випадок руху хімічних розчинів для двохфазного ґрунту в неізотермічних умовах [83]

$$\mathbf{u} - e\mathbf{v} = -\mathbf{K}_h(\mathbf{c}, \mathbf{N}, T)\nabla h + \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_{c_i} \nabla c_i + \mathbf{v}_T \nabla T, \quad (2.3)$$

де

$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  – вектор швидкості фільтрації;

$\sigma$  – об'єм порової рідини в одиниці об'єму ґрунту (для двохфазного ґрунту – пористість);

$\sigma_m$  – об'єм твердих частинок в одиниці об'єму ґрунту;

$e$  – коефіцієнт пористості;

$c_i, N_i, i = \overline{1, n}$  – концентрації хімічних речовин в рідких та твердих фазах;

$h$  – надлишковий напір;

$\rho_i, i = \overline{1, n}$  – густини хімічних речовин в твердій фазі;

$\rho_T$  – густина твердих частинок ґрунту;

$\rho_p$  – густина порової рідини;

$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  – вектор швидкості руху твердих частинок ґрунту;

$\mathbf{K}_h(\mathbf{c}, \mathbf{N}, T)$  – коефіцієнт (тензор) фільтрації, що залежить від векторів концентрації солей  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ ,  $\mathbf{N} = (N_1, N_2, \dots, N_n)$  та температури;

$\mathbf{v}_{c_i}, \mathbf{v}_T, i = \overline{1, n}$  – коефіцієнти (тензори) хімічного та термічного осмосів;

$\varepsilon_i, i = \overline{1, n}$  – параметри, що набувають значення 0, якщо наявність солей не враховується і 1, якщо наявність солей враховується (введені для зручності).

Узагальнений закон Дарсі – Герсеванова для однокомпонентного сольового розчину вперше був запропонований А. П. Власюком та О. В. Жеребятсьєвим [41]. Пізніше в роботах А. П. Власюка, П. М. Мартинюка [36, 43] даний закон був узагальнений шляхом розгляду явищ термічного осмосу, залежності коефіцієнта фільтрації від концентрації порового сольового розчину та температури. Узагальнюючи закон до вигляду (2.3) ми припускаємо

незалежну дію кожного хімічного компонента щодо хімічного осмосу. Рівняння нерозривності у вигляді (2.1), (2.2) вперше були використані для дослідження задач консолідації в роботах А. П. Власюка, П. М. Мартинюка.

Схема виведення рівняння фільтраційної консолідації з урахуванням закону (2.3) та рівнянь нерозривності (2.1), (2.2) повністю повторює класичну теорію [65]. Для збереження цілісності викладок згадаємо основні етапи цього виведення. Продиференціювавши кожне з рівнянь (2.3) відповідно по змінних  $x, y, z$  маємо

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} - e \frac{\partial v_1}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( K_h^{(11)}(\mathbf{c}, \mathbf{N}, T) \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \sum_{i=1}^n v_{c_i}^{(11)} \frac{\partial c_i}{\partial x} + v_T^{(11)} \frac{\partial T}{\partial x} \right), \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial y} - e \frac{\partial v_2}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \left( K_h^{(22)}(\mathbf{c}, \mathbf{N}, T) \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \sum_{i=1}^n v_{c_i}^{(22)} \frac{\partial c_i}{\partial y} + v_T^{(22)} \frac{\partial T}{\partial y} \right), \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial z} - e \frac{\partial v_3}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} \left( K_h^{(33)}(\mathbf{c}, \mathbf{N}, T) \frac{\partial h}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \sum_{i=1}^n v_{c_i}^{(33)} \frac{\partial c_i}{\partial z} + v_T^{(33)} \frac{\partial T}{\partial z} \right). \quad (2.6)$$

Додавши (2.4), (2.5) та (2.6), отримаємо

$$\operatorname{div} \mathbf{u} - e \operatorname{div} \mathbf{v} = -\operatorname{div}(\mathbf{K}_h(\mathbf{c}, \mathbf{N}, T) \nabla h) + \sum_{i=1}^n \operatorname{div}(\mathbf{v}_{c_i} \nabla c_i) + \operatorname{div}(\mathbf{v}_T \nabla T). \quad (2.7)$$

З рівнянь (2.1) і (2.2) припустивши, що  $\rho_p = \text{const}$ ,  $\rho_T = \text{const}$ , отримаємо

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = -\frac{\partial \left( \sigma \left( 1 - \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \frac{c_i}{\rho_i} \right) \right)}{\partial t}, \quad (2.8)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = -\frac{\partial \left( \sigma_m - \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \frac{N_i}{\rho_i} \right)}{\partial t}. \quad (2.9)$$

Підставивши (2.8) і (2.9) в (2.7), маємо

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \left( \sigma \left( 1 - \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \frac{c_i}{\rho_i} \right) \right)}{\partial t} - e \frac{\partial \left( \sigma_m - \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \frac{N_i}{\rho_i} \right)}{\partial t} = \\ & = \operatorname{div}(\mathbf{K}_h(\mathbf{c}, \mathbf{N}, T) \nabla h) - \sum_{i=1}^n \operatorname{div}(\mathbf{v}_{c_i} \nabla c_i) - \operatorname{div}(\mathbf{v}_T \nabla T). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Враховуючи, що  $\sigma_m = \frac{1}{1+e}$ , отримаємо

$$\frac{\partial \sigma_m}{\partial t} = -\frac{1}{(1+e)^2} \frac{\partial e}{\partial t}. \quad (2.11)$$

Підставивши (2.11) в (2.10) і домноживши отриманий вираз на  $(1+e)$ , маємо

$$\begin{aligned} (1+e) \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \sum_{i=1}^n (1+e) \varepsilon_i \frac{\partial \left( \frac{c_i \sigma}{\rho_i} \right)}{\partial t} + \frac{e}{1+e} \frac{\partial e}{\partial t} + \sum_{i=1}^n e (1+e) \varepsilon_i \frac{\partial \left( \frac{N_i}{\rho_i} \right)}{\partial t} - \\ - (1+e) \left( \operatorname{div}(\mathbf{K}_h(\mathbf{c}, \mathbf{N}, T) \nabla h) + \sum_{i=1}^n \operatorname{div}(\mathbf{v}_{c_i} \nabla c_i) + \operatorname{div}(\mathbf{v}_T \nabla T) \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Із залежності  $\sigma = \frac{e}{1+e}$ , отримуємо

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{1}{(1+e)^2} \frac{\partial e}{\partial t}. \quad (2.13)$$

Підставивши (2.13) в (2.12), маємо

$$\begin{aligned} (1+e) \left( \operatorname{div}(\mathbf{K}_h(\mathbf{c}, \mathbf{N}, T) \nabla h) - \sum_{i=1}^n \operatorname{div}(\mathbf{v}_{c_i} \nabla c_i) - \operatorname{div}(\mathbf{v}_T \nabla T) \right) + \\ + \sum_{i=1}^n (1+e) \frac{\varepsilon_i}{\rho_i} \left( \frac{\partial(c_i n)}{\partial t} - e \frac{\partial N_i}{\partial t} \right) - (1+e) \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \sigma \frac{\partial e}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Для двох останніх доданків

$$\begin{aligned} -(1+e) \frac{\partial \sigma}{\partial t} - \sigma \frac{\partial e}{\partial t} &= -(1+e) \frac{1}{(1+e)^2} \frac{\partial e}{\partial t} - \sigma \frac{\partial e}{\partial t} = \\ &= \frac{\partial e}{\partial t} \left( -\frac{1}{1+e} - \sigma \right) = -\frac{\partial e}{\partial t} (\sigma_m + \sigma) = -\frac{\partial e}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Тоді рівняння консолідації набуває вигляду

$$\begin{aligned} (1+e) \left( \operatorname{div}(\mathbf{K}_h(\mathbf{c}, \mathbf{N}, T) \nabla h) - \sum_{i=1}^n \operatorname{div}(\mathbf{v}_{c_i} \nabla c_i) - \operatorname{div}(\mathbf{v}_T \nabla T) \right) + \\ + \sum_{i=1}^n (1+e) \frac{\varepsilon_i}{\rho_i} \left( \frac{\partial(c_i \sigma)}{\partial t} - e \frac{\partial N_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial e}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.16)$$



Згідно з принципом гідроємності Герсеванова [48] зміна коефіцієнта пористості ґрунту визначається тільки зміною суми головних напружень. Тобто,  $e = f(\Theta)$ . Тоді, враховуючи залежність

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{de}{d\Theta} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial t}$$

можна записати основне рівняння консолідації у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{(1+e)}{de} \left[ \operatorname{div}(\mathbf{K}_h(\mathbf{c}, \mathbf{N}, T) \nabla h) - \sum_{i=1}^n \operatorname{div}(\mathbf{v}_{c_i} \nabla c_i) - \operatorname{div}(\mathbf{v}_T \nabla T) \right] + \\ + \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i (1+e)}{\rho_i} \frac{de}{d\Theta} \left( \frac{\partial(c_i \sigma)}{\partial t} - e \frac{\partial N_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial \Theta}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Згідно основної розрахункової моделі Флоріна [142] в  $R$ -вимірному випадку маємо

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{\partial \Theta^*}{\partial t} + R\gamma \frac{\partial h^*}{\partial t} - R\gamma \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (2.18)$$

де

$\Theta^*, h^*$  - сума головних напружень в скелеті ґрунту та надлишковий напір в умовах повної стабілізації відповідно;

$R$  - розмірність задачі.

Підставляючи (2.18) в (2.17), отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{(1+e)}{-R\gamma \frac{de}{d\Theta}} \left[ \operatorname{div}(\mathbf{K}_h(\mathbf{c}, \mathbf{N}, T) \nabla h) - \sum_{i=1}^n \operatorname{div}(\mathbf{v}_{c_i} \nabla c_i) - \operatorname{div}(\mathbf{v}_T \nabla T) \right] - \\ + \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i (1+e)}{-R\gamma \rho_i} \frac{de}{d\Theta} \left( \frac{\partial(c_i \sigma)}{\partial t} - e \frac{\partial N_i}{\partial t} \right) + \frac{1}{R\gamma} \frac{\partial \Theta^*}{\partial t} - \frac{\partial h^*}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Якщо навантаження вважати миттєво прикладеним та незмінним у часі, то

$$\frac{\partial \Theta^*}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial h^*}{\partial t} = 0.$$

У випадку найпростішої компресійної залежності  $e = e(\Theta)$  у вигляді спрямленого відрізка компресійної кривої

$$e = -a \frac{\Theta}{1 + (R-1)\xi} + b, \quad \frac{de}{d\Theta} = \frac{-a}{1 + (R-1)\xi},$$

де  $a$  - коефіцієнт стисливості ґрунту;  $b = const$ ;  $\xi$  - коефіцієнт бічного тиску ґрунту. Тоді рівняння консолідації ґрунтів з урахуванням наявності  $n$ -компонентних хімічних розчинів в рідкій та твердій фазах у випадку  $R$ -вимірного простору набуває вигляду

$$\begin{aligned} & \frac{(1+e)(1+(R-1)\xi)}{R\gamma a} \left( \operatorname{div}(\mathbf{K}_h(\mathbf{c}, \mathbf{N}, T)\nabla h) - \sum_{i=1}^n \operatorname{div}(\mathbf{v}_{c_i} \nabla c_i) - \operatorname{div}(\mathbf{v}_T \nabla T) \right) + \\ & + \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i (1+e)(1+(R-1)\xi)}{R\gamma \rho_i a} \left( \sigma \frac{\partial c_i}{\partial t} - e \frac{\partial N_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial h}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

## 2.2. Рівняння масопереносу та кінетики масообмінних процесів з урахуванням багатокомпонентності порового розчину

Рівняння консолідації (2.20) містить невідомі функції  $c_i(\mathbf{X}, t), i = \overline{1, n}$  - концентрації солей у поровому розчині в порах ґрунту, який консолідується. Тому виведене рівняння консолідації (2.20) повинне доповнитися рівняннями, що описують сольовий режим рідкої фази ґрунту.

Значний внесок у розвиток досліджень процесів переносу солей зробили І.І. Ляшко, О.Я. Олійник, В.І. Лаврик, І.В. Сергієнко, В.В. Скопечкий, В.С. Дейнека, М.М. Веригін, А.П. Власюк, Б.С. Шержуков, А.В. Шибанов, Д.С. Гужев, М.С. Іванов, А.Я. Бомба, В.М. Булавацький, С.І. Ляшко, О.Ю. Чернуха, О.П. Остапчук, О.М. Степанченко та ін. [12-25, 34-45, 47, 53-55, 102, 135, 146, 147].

Рівняння масопереносу для концентрації солей  $c_i(\mathbf{X}, t), i = \overline{1, n}$  в пористому середовищі мають вигляд

$$\operatorname{div}(\mathbf{D}_i \nabla c_i) + \operatorname{div}(\mathbf{D}_T^{(i)} \nabla T) - (\mathbf{u}, \nabla c_i) = \sigma \frac{\partial c_i}{\partial t} + \frac{\partial N_i(\mathbf{c}, \mathbf{N}, T)}{\partial t}, \quad i = \overline{1, n} \quad (2.21)$$

де

$\mathbf{D}_i, i = \overline{1, n}$  – коефіцієнти (тензори) конвективної дифузії;

$\mathbf{D}_T^{(i)}, i = \overline{1, n}$  – коефіцієнти (тензори) термічної дифузії;

$\mathbf{u}$  – швидкість фільтрації, яка визначається згідно узагальненого закону Дарсі – Герсеванова (2.3).

Основне рівняння консолідації (2.20) та рівняння масопереносу (2.21) містять невідомі функції  $N_i(\mathbf{X}, t), i = \overline{1, n}$ , які є концентраціями хімічних речовин у твердій фазі ґрунту, що консолідується. Враховуючи процеси масообміну між рідкою і твердою фазами, розчинення та випадання розчинених речовин в осад (та з урахуванням кристалізації), для визначення невідомих функцій  $N_i(\mathbf{X}, t), i = \overline{1, n}$ , будемо використовувати рівняння [33]

$$\frac{\partial N_i(\mathbf{c}, \mathbf{N}, T)}{\partial t} = -\gamma_i (C_i^{(\max)}(\mathbf{c}, T) - c_i) N_i^{\alpha_i}, i = \overline{1, n}, \quad (2.22)$$

де

$\gamma_i, i = \overline{1, n}$  – коефіцієнт швидкості масообміну;

$C_i^{(\max)}, i = \overline{1, n}$  – концентрація граничного насичення солей в рідкій фазі, яка в загальному випадку залежить від температури та концентрацій інших хімічних елементів;

$\alpha_i, i = \overline{1, n}$  - показники степенів, які визначаються експериментальним шляхом і залежать від характеру засоленості породи. Для об'ємного засолення ґрунту, при якому солі у вигляді кристаликів дискретно розсіяні в об'ємі ґрунту,  $\alpha_i = \frac{1}{2}, i = \overline{1, n}$ . При  $\alpha_i = 0, i = \overline{1, n}$  маємо плівкове, поверхнєве засолення [33].

На даний час не відомо досліджень процесів масопереносу в пористих середовищах, в яких би в рівняннях кінетики масообміну (2.22) враховувалась залежність концентрації граничного насичення одних хімічних речовин від присутності в поровій рідині інших хімічних компонент та температури. Хоча експериментальний матеріал таких залежностей є [72, 166]. Тому логічним

наступним етапом є урахування таких залежностей в математичних моделях процесів в пористих середовищах. Це і зроблено в представленій дисертаційній роботі для задачі фільтраційної консолідації ґрунтів з урахуванням хімічної суфозії.

### 2.3. Рівняння теплопереносу

Рівняння консолідації (2.20), рівняння масопереносу (2.21) та кінетики масообміну (2.22) містять невідому функцію  $T(\mathbf{X}, t)$ , яка є температурою насиченого ґрунту, що консолідується. Тому вказані рівняння повинні доповнюватися рівняннями, які описують температурний режим ґрунтового середовища. Вплив змінного теплового режиму на процеси фільтраційної консолідації ґрунтів вперше враховано в дослідженнях А. П. Власюка та П. М. Мартинюка [36, 43].

Зважаючи на те, що питомий тепловий потік в ґрунті визначається як  $\mathbf{q}_T = \rho C_\rho T \mathbf{u} - \lambda \nabla T$ , рівняння теплопереносу в пористому середовищі має вигляд

$$\operatorname{div}(\lambda \nabla T) - \rho C_\rho (\mathbf{u}, \nabla T) = C_T \frac{\partial T}{\partial t},$$

де

$\lambda$  - коефіцієнт (тензор) теплопровідності вологого ґрунту;

$\rho$  - густина порового сольового розчину;

$C_\rho$  - питома теплоємність порового сольового розчину;

$C_T$  - об'ємна теплоємність ґрунту.

### 2.4. Відомі початкові та граничні умови для напору, концентрації хімічних речовин та температури

Для забезпечення коректності постановки задачі фільтраційної консолідації ґрунту в умовах руху багатокomпонентних хімічних розчинів та

температури в області  $\Omega$  з границею  $\Gamma$  потрібно задавати ще початкові та граничні умови для невідомих функцій. В даному параграфі наведені умови, які є відомими з наукових робіт та досліджень [22, 27-33, 37]

Для надлишкових напорів, концентрації хімічних речовин у рідкій та твердій фазах, температури початкові умови мають вигляд

$$\begin{aligned} h(\mathbf{X}, 0) &= H_0(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \overline{\Omega}, \\ c_i(\mathbf{X}, 0) &= C_i^{(0)}(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \overline{\Omega}, \quad i = \overline{1, n}, \\ N_i(\mathbf{X}, 0) &= N_i^{(0)}(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \overline{\Omega}, \quad i = \overline{1, n}, \\ T(\mathbf{X}, 0) &= T_0(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \overline{\Omega}, \end{aligned}$$

де  $H_0(\mathbf{X}), C_i^{(0)}(\mathbf{X}), N_i^{(0)}(\mathbf{X}), T_0(\mathbf{X}), i = \overline{1, n}$  – задані функції, які будуть конкретизуватися залежно від цілей проведення того чи іншого числового експерименту. Зрозуміло, що при дослідженні конкретних об'єктів вказані функції мають визначатись із натурних експериментів.

Граничні умови для напору, концентрацій хімічних речовин та температури залежать від нижченаведених чинників [36].

### **Межа (частинка межі) області $\Omega$ дренована**

В даному випадку для напору задається гранична умова першого роду

$$h(\mathbf{X}, t)|_{\mathbf{X} \in \Gamma} = H_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma,$$

де  $H_1(\mathbf{X}, t)$  - задана функція.

Для концентрації можуть задаватися граничні умови одного із трьох родів:

$$c_i(\mathbf{X}, t)|_{\mathbf{X} \in \Gamma} = C_i^{(1)}(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma, \quad i = \overline{1, n},$$

де  $C_i^{(1)}(\mathbf{X}, t), i = \overline{1, n}$  - задані функції;

умова швидкого виносу розчинених солей

$$\left( \mathbf{D}_i \nabla c_i + \mathbf{D}_T^{(i)} \nabla T, \mathbf{n} \right)_{\mathbf{X} \in \Gamma} = 0, \quad \mathbf{X} \in \Gamma, \quad i = \overline{1, n};$$

умова Данкверста

$$\left[ (\mathbf{D}_i \nabla c_i + \mathbf{D}_T^{(i)} \nabla T, \mathbf{n}) - (\mathbf{u}, \mathbf{n}) (c_i(\mathbf{X}, t) - \tilde{C}_i^{(i)}) \right]_{\mathbf{X} \in \Gamma} = 0, \quad \mathbf{X} \in \Gamma, \quad i = \overline{1, n},$$

де  $\tilde{C}_i^{(i)}, i = \overline{1, n}$  - задані функції,  $\mathbf{n}$  - вектор напрямних косинусів зовнішньої нормалі до межі  $\Gamma$ .

### Межа (частинка межі) області $\Omega$ непроникна

В даному випадку для швидкості фільтрації задається гранична умова непроникності

$$(\mathbf{u}, \mathbf{n})_{\mathbf{X} \in \Gamma} = 0, \quad \mathbf{X} \in \Gamma.$$

Якщо непроникність зумовлюється заляганням кам'яного непроникного пласта або ґрунту, який за своїми фізико-хімічними властивостями є непроникним для хімічних речовин, то для концентрації  $c_i(\mathbf{X}, t), i = \overline{1, n}$  задаються граничні умови непроникності

$$(\mathbf{D}_i \nabla c_i + \mathbf{D}_T^{(i)} \nabla T, \mathbf{n})_{\mathbf{X} \in \Gamma} = 0, \quad \mathbf{X} \in \Gamma, \quad i = \overline{1, n}.$$

Якщо непроникність зумовлюється заляганням пласту солі, то для концентрації задається гранична умова першого роду

$$c_i(\mathbf{X}, t)_{\mathbf{X} \in \Gamma} = C_i^{(\max)}, \quad \mathbf{X} \in \Gamma, \quad i = \overline{1, n}$$

або балансова гранична умова в неізотермічних умовах [41, 129]

$$\mathbf{D}_i (\nabla c_i, \mathbf{n}) + \mathbf{D}_T^{(i)} (\nabla T, \mathbf{n}) + \frac{\mathbf{D}_i}{\delta} c_i \Big|_{\mathbf{X} \in \Gamma} = - \frac{\mathbf{D}_i \cdot C_i^{(\max)}}{\delta}, \quad \mathbf{X} \in \Gamma, \quad i = \overline{1, n},$$

де  $\delta$  - товщина дифузійного примежового шару в околі фронту розчинення;  $C_i^{(\max)}(\mathbf{c}, T)$  - концентрація граничного насичення.

Граничні умови для температури залежать від нижченаведених чинників.

### На межі (частині межі) області $\Omega$ відома температура

В даному випадку для температури задається гранична умова першого роду

$$T(\mathbf{X}, t)_{\mathbf{X} \in \Gamma} = T_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma,$$

де  $T_1(\mathbf{X}, t)$  - задана функція.

### На межі (частині межі) області $\Omega$ відома величина теплового потоку

В даному випадку задається гранична умова третього роду

$$(\mathbf{q}_T, \mathbf{n})|_{\mathbf{X} \in \Gamma} = Q_T(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma,$$

де  $Q_T(\mathbf{X}, t)$  - величина теплового потоку. Якщо дана межа (частина межі) є непроникною для фільтраційного потоку, то отримуємо граничну умову другого роду

$$(\lambda \nabla T, \mathbf{n})|_{\mathbf{X} \in \Gamma} = Q_T(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma.$$

### Межа (частина межі) області $\Omega$ теплоізольована

В даному випадку задається однорідна гранична умова третього роду

$$(\mathbf{q}_T, \mathbf{n})|_{\mathbf{X} \in \Gamma} = 0, \quad \mathbf{X} \in \Gamma.$$

## 2.5. Нова кінематична гранична умова на рухомій верхній межі ґрунту з урахуванням кристалізації та розчинення солей

Припустимо, що ґрунт може просідати лише за рахунок вертикальних зміщень. Нехай в момент часу  $t$  верхня межа ґрунту в точці  $\mathbf{X} = (x, y, z)$  визначається як рівнянням  $z = l(\mathbf{X}^*, t)$ ,  $\mathbf{X}^* = (x, y)$ . За час  $\Delta t$  точка  $\mathbf{X} = (x, y, z)$  переходить в точку  $\mathbf{X} = (x, y, z + \Delta z)$  і в момент часу  $(t + \Delta t)$  верхня межа ґрунту визначається рівнянням  $z + \Delta z = l(\mathbf{X}^*, t + \Delta t)$ . Тоді величина просідань верхньої межі ґрунту протягом часу  $\Delta t$  над фіксованою точкою становить (рис. 2.1) [36]

$$\Delta l = l(\mathbf{X}^*, t + \Delta t) - l(\mathbf{X}^*, t).$$

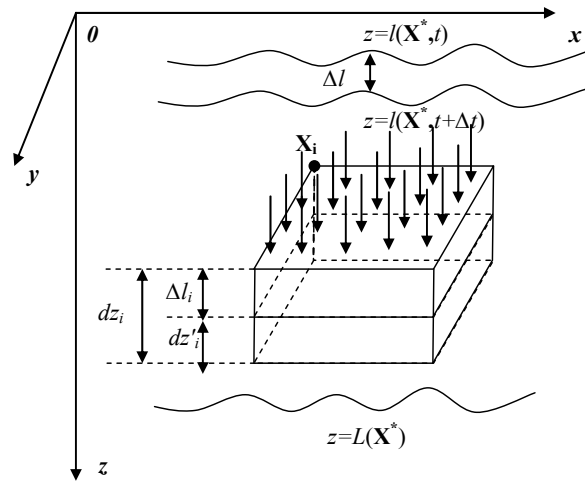


Рис. 2.1. Просідання верхньої межі ґрунту

Ґрунт в фіксованій точці  $\mathbf{X} = (x, y, z)$  по висоті (від верхньої рухомої межі  $z = l(\mathbf{X}^*, t)$  до нижньої нерухомої межі  $z = L(\mathbf{X}^*)$ ) покриємо паралелепіпедами без самоперетинів. Нехай таких паралелепіпедів є  $m$ . Об'єднання вказаних паралелепіпедів утворює вертикальну призму. Просідання ґрунту в паралелепіпеді згідно припущень можливе лише у вертикальному напрямку (бічним розширенням нехтуємо). Також припустимо, що тверді частинки ґрунту нестискуваті, як і порова рідина. Тоді просідання можливе лише за рахунок зміни об'єму пор, тобто коефіцієнта пористості. Припустимо, що за час  $\Delta t$  виділений фрагмент просів до величини  $dz'_i$  (у вертикальному напрямку). Тоді величина просідань

$$\Delta l_i = dz_i - dz'_i.$$

Тоді

$$\Delta l = \sum_{i=1}^m (dz_i - dz'_i).$$

При наших припущеннях відносна об'ємна деформація ґрунту  $\varepsilon_v$  можлива лише за рахунок вертикальних деформацій, тобто  $\varepsilon_v = \varepsilon_z$ . Позначимо цю величину для кожного паралелепіпеда з номером  $i, i = \overline{1, m}$  через  $\varepsilon_i$ . Тоді за означенням [65]

$$\varepsilon_i = \frac{\Delta V_i}{V_i} = \frac{dz_i - dz'_i}{dz_i}.$$



Тобто

$$dz_i - dz'_i = \varepsilon_i dz_i.$$

Тоді

$$\Delta l = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i dz_i.$$

Тверді частинки у виділеному фрагменті ґрунту є двох типів:

1. тверді частинки самого ґрунту;
2. кристалики солей.

Об'єм твердих частинок у виділеному фрагменті ґрунту до і після деформації залишається незмінним, а об'єм кристаликів солей змінюється за рахунок масообмінних процесів. Нехай

$V^{(g)}$  - об'єм, твердих частинок ґрунту у виділеному фрагменті;

$V^{(i)}$ ,  $i = \overline{1, n}$  - об'єм твердих сольових частинок хімічної речовини з номером  $i$  у виділеному фрагменті;

$V^{(tv)}$  - об'єм всіх твердих частинок, тобто

$$V^{(tv)} = V^{(g)} + \sum_{i=1}^n V^{(i)}.$$

Згідно означення

$$N_i = \frac{m^{(i)}}{V} = \frac{\rho_i V^{(i)}}{V}, \quad i = \overline{1, n},$$

або

$$V^{(i)} = \frac{1}{\rho_i} N_i V, \quad i = \overline{1, n},$$

де

$m^{(i)}$ ,  $i = \overline{1, n}$  - маса твердих сольових частинок хімічної речовини з номером  $i$  у виділеному фрагменті, об'ємом  $V$ ;

$\rho^{(i)}$ ,  $i = \overline{1, n}$  - густина відповідних солей у твердій фазі.

Оскільки об'єм твердих частинок ґрунту  $V^{(g)}$  у виділеному фрагменті середовища залишається незмінним, то

$$V_i(t) - V_i(t + \Delta t) = V_i^{(\sigma)}(t) - V_i^{(\sigma)}(t + \Delta t) + \sum_{j=1}^n (V_i^{(j)}(t) - V_i^{(j)}(t + \Delta t)),$$

$$V_i(t) - V_i(t + \Delta t) = \sigma_i(t)V_i(t) - \sigma_i(t + \Delta t)V_i(t + \Delta t) + \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{\rho_j} V_i(t) N_{j_i}(t) - \frac{1}{\rho_j} V_i(t + \Delta t) N_{j_i}(t + \Delta t) \right),$$

де

$\sigma_i(t)$  - пористість у виділеному фрагменті;

$N_{j_i}(t)$ ,  $j = \overline{1, n}$  - концентрація солей у твердій фазі у виділеному фрагменті;

$V_i^{(\sigma)}$  - об'єм пор у виділеному фрагменті ґрунту.

Враховуючи, що  $V_i(t + \Delta t) = V_i(t) - \Delta V_i$ , де  $\Delta V_i = V_i(t) - V_i(t + \Delta t)$ , отримаємо,

$$\Delta V_i = \sigma_i(t)V_i(t) - \sigma_i(t + \Delta t)(V_i(t) - \Delta V_i) + \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{\rho_j} V_i(t) N_{j_i}(t) - \frac{1}{\rho_j} N_{j_i}(t + \Delta t)(V_i(t) - \Delta V_i) \right),$$

$$\frac{\Delta V_i}{V_i(t)} = \sigma_i(t) - \sigma_i(t + \Delta t) + \sigma_i(t + \Delta t) \frac{\Delta V_i}{V_i(t)} + \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{\rho_j} N_{j_i}(t) - \frac{1}{\rho_j} N_{j_i}(t + \Delta t) + \frac{1}{\rho_j} N_{j_i}(t + \Delta t) \frac{\Delta V_i}{V_i(t)} \right).$$

Враховуючи, що  $\frac{\Delta V_i}{V_i(t)} = \varepsilon_i$ , маємо

$$\varepsilon_i = -\frac{\partial \sigma_i(t)}{\partial t} \Delta t + \sigma_i(t + \Delta t) \varepsilon_i - \sum_{j=1}^n \left( \frac{1}{\rho_j} \frac{\partial N_{j_i}(t)}{\partial t} \Delta t - \frac{1}{\rho_j} N_{j_i}(t + \Delta t) \varepsilon_i \right),$$

$$\varepsilon_i \left( 1 - \sigma_i(t + \Delta t) - \sum_{j=1}^n \frac{1}{\rho_j} N_{j_i}(t + \Delta t) \right) = -\frac{\partial \sigma_i(t)}{\partial t} \Delta t - \sum_{j=1}^n \frac{1}{\rho_j} \frac{\partial N_{j_i}(t)}{\partial t} \Delta t.$$

Враховуючи, що  $\sigma_i = \frac{e_i}{1+e_i}$ , де  $e_i$  - коефіцієнт пористості у виділеному фрагменті середовища, маємо

$$\varepsilon_i \left( 1 - \frac{e_i(t+\Delta t)}{1+e_i(t+\Delta t)} - \sum_{j=1}^n \frac{1}{\rho_j} N_{j_i}(t+\Delta t) \right) = - \left( \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{e_i(t)}{1+e_i(t)} \right) + \sum_{j=1}^n \frac{1}{\rho_j} \frac{\partial N_{j_i}(t)}{\partial t} \right) \Delta t,$$

$$\varepsilon_i = - \frac{1+e_i(t+\Delta t)}{1 - \sum_{j=1}^n \frac{N_{j_i}(t+\Delta t)(1+e_i(t+\Delta t))}{\rho_j}} \times \left( \frac{\frac{\partial e_i(t)}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{\rho_j} \frac{\partial N_{j_i}(t)}{\partial t} (1+e_i(t))^2}{(1+e_i(t))^2} \right) \Delta t.$$

Отже,

$$l(\mathbf{X}^*, t+\Delta t) - l(\mathbf{X}^*, t) = - \sum_{i=1}^m \left( \frac{\frac{\partial e_i(t)}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{\rho_j} \frac{\partial N_{j_i}(t)}{\partial t} (1+e_i(t))^2}{\left( 1 - \sum_{j=1}^n \frac{N_{j_i}(t+\Delta t)(1+e_i(t+\Delta t))}{\rho_j} \right) (1+e_i(t+\Delta t))} \right) \Delta t.$$

Перейшовши до границі при  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $m \rightarrow +\infty$  отримаємо кінематичну граничну умову на рухомій межі

$$\frac{dl(\mathbf{X}^*, t)}{dt} = - \int_{l(\mathbf{X}^*, t)}^{L(\mathbf{X}^*)} \left( \frac{\frac{\partial e(t)}{\partial t} + (1+e) \sum_{i=1}^n \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial N_i}{\partial t}}{\left( 1 - \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{\rho_i} (1+e) \right) (1+e)} \right) dz. \quad (2.23)$$

Тут  $\frac{d}{dt}$  - в загальному випадку повна похідна по часу. Зважаючи на наше припущення про можливість лише вертикальних зміщень, маємо

$$\frac{dl(\mathbf{X}', t)}{dt} = \frac{\partial l(\mathbf{X}', t)}{\partial t} + \frac{\partial l(\mathbf{X}', t)}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial l(\mathbf{X}', t)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{\partial l(\mathbf{X}', t)}{\partial t}, \text{ бо } \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0.$$

Згідно основної розрахункової моделі Флоріна [141]

$$\Theta^* + Rp^* = \Theta + Rp,$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \frac{\partial \Theta^*}{\partial t} + R\gamma \frac{\partial h^*}{\partial t} - R\gamma \frac{\partial h}{\partial t}.$$

Тоді з (2.23) маємо

$$\frac{dl(\mathbf{X}^*, t)}{dt} = - \int_{l(\mathbf{X}^*, t)}^{L(\mathbf{X}^*)} \left( \frac{\frac{de}{d\theta} \frac{\partial \Theta}{\partial t} + (1+e) \sum_{i=1}^n \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial N_i}{\partial t}}{\left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{\rho_i} (1+e)\right) (1+e)} \right) dz$$

Враховуючи рівняння кінетики масообміну (2.23) та (2.24), отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{dl(\mathbf{X}^*, t)}{dt} = & - \int_{l(\mathbf{X}^*, t)}^{L(\mathbf{X}^*)} \frac{1}{\left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{\rho_i} (1+e)\right) (1+e)} \left( \frac{de}{d\Theta} \left( \frac{\partial \Theta^*}{\partial t} + R\gamma \frac{\partial h^*}{\partial t} - R\gamma \frac{\partial h}{\partial t} \right) - \right. \\ & \left. - (1+e) \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{\rho_i} \gamma_i (C_i^{(max)}(\mathbf{c}, T) - c_i) N_i^{\alpha_i} \right) \right) dz. \end{aligned}$$

Оскільки при навантаженні, яке є миттєво прикладеним і незмінним у часі

$$\frac{\partial \Theta^*}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial h^*}{\partial t} = 0,$$

то

$$\frac{dl(\mathbf{X}^*, t)}{dt} = - \int_{l(\mathbf{X}^*, t)}^{L(\mathbf{X}^*)} \frac{-R\gamma \frac{de}{d\Theta} \frac{\partial h}{\partial t} - (1+e) \sum_{i=1}^n \frac{1}{\rho_i} \gamma_i (C_i^{(max)}(\mathbf{c}, T) - c_i) N_i^{\alpha_i}}{\left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{\rho_i} (1+e)\right) (1+e)} dz.$$

І у випадку найпростішої компресійної залежності  $e = e(\Theta)$  у вигляді спрямленого відрізка компресійної кривої

$$e = -a \frac{\Theta}{1 + (R-1)\xi} + b, \quad \frac{de}{d\Theta} = \frac{-a}{1 + (R-1)\xi},$$

кінематична гранична умова на верхній рухомій межі матиме вигляд

$$\begin{aligned} \frac{dl(\mathbf{X}^*, t)}{dt} = & - \int_{l(\mathbf{X}^*, t)}^{L(\mathbf{X}^*)} \frac{1}{\left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{\rho_i} (1+e)\right) (1+e)} \left( \frac{R\gamma a}{1 + (R-1)\xi} \frac{\partial h}{\partial t} - (1+e) \times \right. \\ & \left. \times \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{\rho_i} (C_i^{(max)}(\mathbf{c}, T) - c_i) N_i^{\alpha_i} \right) dz. \end{aligned} \quad (2.24)$$

## 2.6. Залежність параметрів фільтрації та масопереносу від фізико-механічних властивостей ґрунту та хімічного складу порової рідини, які можуть впливати на динаміку процесів хімічної суфозії

### 2.6.1. Залежність коефіцієнта швидкості розчинення солей від швидкості фільтрації

Кінетика розчинення солі в загальному випадку описується рівнянням

$$\frac{\partial N}{\partial t} = f(\sigma_m, c, N).$$

Функція  $f$  може бути конкретизована наступним чином [33]

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\gamma N^\alpha (C_m - c),$$

де  $\gamma = \gamma_1 + \eta \sqrt{|\mathbf{u}|}$  - коефіцієнт швидкості розчинення, що залежить від швидкості фільтрації  $\mathbf{u}$ ;  $\gamma_1, \eta$  - константи, що залежать від фільтруючої води та виду солей [32]);  $\alpha$  - коефіцієнт засолення, рівний нулю при поверхневому або плівковому засоленні і 0,5 або 1 при об'ємному (дисперсному) засоленні;  $C_m$  - концентрація граничного насичення.

### 2.6.2. Залежність коефіцієнта фільтрації від концентрації солей в рідкій і твердій фазі та від температури

З кожним роком техногенний вплив людської діяльності на навколишнє середовище зростає. Тому виникає необхідність переглядати та коригувати основні підходи в математичному моделюванні процесів підземної гідродинаміки з точки зору врахування залежності фізичних параметрів ґрунтів від температурного режиму та хімічного складу порової рідини.

Математична модель процесів фільтрації та солепереносу враховує наступні основні фізичні фактори: фільтрацію рідини (водний розчин солі) в масиві ґрунту, міграцію розчинених солей включаючи конвективний перенос і

дифузію; фізико-хімічні процеси солеобміну [81]. В реальних умовах має місце взаємовплив даних процесів. З одного боку, розчинення солі, що міститься в ґрунті, змінює його пористість і впливає на фільтрацію розчину. З іншого боку, фільтрація рідини безпосередньо впливає на кінетику розчинення солей.

З врахуванням стиснення ґрунту під дією тиску  $p(\mathbf{X}, t)$  пористість ґрунту можна виразити формулою [114]

$$\sigma = \sigma_0 + \beta_n(p - p_n) - N\rho^{-1}, \quad (2.25)$$

де  $\sigma_0$  - пористість при початковому тиску  $p_n$  і повній відсутності солі в ґрунті;  $\rho$  - щільність солі в твердій фазі;  $\beta_n$  - коефіцієнт стискуваності шару ґрунту.

Як відомо, коефіцієнт фільтрації порової рідини виражається через коефіцієнт проникливості  $k = f(k_{np})$ .

В свою чергу коефіцієнт проникності  $k_{np}$  в загальному випадку є функцією пористості [81]

$$k_{np} = A\sigma^3(1 - \sigma)^{-2}, \quad (2.26)$$

де  $A = const$  і залежить від питомої поверхневої пористості і діаметру частинки середовища. Проводячи суперпозицію (2.25) та (2.26) маємо, що  $k = k(N)$ , де  $k$  - коефіцієнт фільтрації.

Як було зазначено раніше, для дослідження процесів фільтраційної консолідації ґрунтів, на яких розміщені промислові об'єкти або які є основами гідротехнічних споруд і є засолених легко- і середньорозчиненими солями, доцільно використовувати математичні моделі з урахуванням процесів розчинення і кристалізації на основі рівняння кінетики масообміну, що описує концентрацію розчинених солей у твердій фазі.

В [36, 43] проведено комплексний огляд робіт, в яких наведено експериментальні дослідження залежностей коефіцієнта фільтрації від концентрації солей та температури. Наприклад, в таблиці 2.1., наведено результати проведених досліджень коефіцієнта фільтрації від концентрації фільтруючого розчину для одиничного градієнту напору [34]

Таблиця 2.1

Результати досліджень коефіцієнта фільтрації сольових розчинів в піщаних ґрунтах

Концентрація фільтраційного розчину $c$ , %																
Коефіцієнт фільтрації $k$ , м/доба																
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
18,4	20,7	24,3	29	30,4	31	23	19,8	18,4	17,5	16,1	15,2	13,8	12,9	12,4	11,5	19,2

Крім концентрації сольового розчину значний вплив на коефіцієнт фільтрації має температура. Про це свідчить велика кількість експериментальних досліджень, детальний огляд яких наведено в [36, 43]. Наприклад, на рис. 2.1. наведені графіки залежностей коефіцієнта фільтрації від температури для каоліну та гумбрину [17]. Як видно, для гумбрину при зростанні температури від 3°C до 70 °C коефіцієнт фільтрації зростає на чотири порядки.

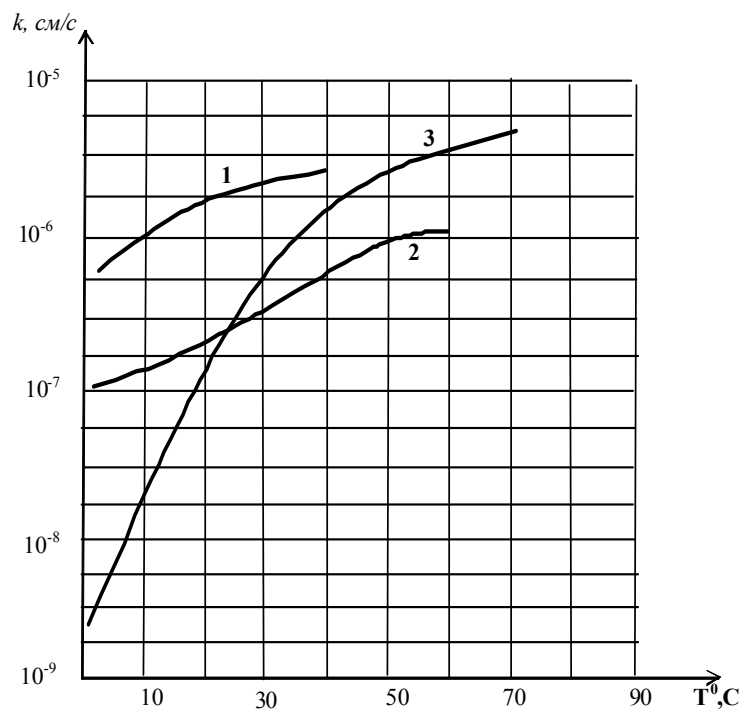


Рис. 2.2. Залежність коефіцієнта фільтрації від температури: 1, 2 – каолін на верхній та нижній межах пластичності; 3 – гумбрин на верхній межі пластичності.

В роботі [43] залежність коефіцієнта фільтрації від концентрації сольового розчину та від температури визначалась шляхом апроксимації функції  $k = k(c, T)$  радіальними базисними функціями за експериментальними

даними, наведеними в таблиці 2.2. Однак, залежності коефіцієнта фільтрації від концентрації солей в твердій фазі в цих роботах не досліджено.

Таблиця 2.2

Експериментальні значення коефіцієнта фільтрації, залежного від температури та концентрації солей

T, °C \ C, г/л	4	20	30	40
0	4.147	9.215	11.519	18.430
10	4.667	10.370	12.963	20.740
20	5.702	12.670	15.838	25.340
30	6.532	14.515	18.144	29.030
40	6.843	15.205	19.006	30.410
50	6.976	15.500	19.375	31.000
60	5.185	11.520	14.400	23.040
70	4.458	9.905	12.381	19.810
80	4.147	9.215	11.519	18.430
90	3.940	8.755	10.944	17.510
100	3.630	8.065	10.081	16.130
110	3.423	7.605	9.506	15.210
120	3.110	6.910	8.638	13.820
130	2.903	6.450	8.063	12.900
140	2.799	6.220	7.775	12.440
150	2.592	5.760	7.200	11.520
160	2.075	4.610	5.763	9.220
170	2.025	4.500	5.625	9.000
180	1.980	4.400	5.500	8.800
190	1.935	4.300	5.375	8.600
200	1.913	4.250	5.313	8.500
210	1.890	4.200	5.250	8.400
220	1.800	4.000	5.000	8.000
230	1.755	3.900	4.875	7.800
240	1.665	3.700	4.625	7.400
250	1.620	3.600	4.500	7.200
260	1.530	3.400	4.250	6.800
270	1.485	3.300	4.125	6.600
280	1.395	3.100	3.875	6.200
290	1.350	3.000	3.750	6.000
300	1.305	2.900	3.625	5.800
310	1.215	2.700	3.375	5.400
320	1.170	2.600	3.250	5.200
330	1.080	2.400	3.000	4.800
340	0.990	2.200	2.750	4.400
350	0.900	2.000	2.500	4.000

Також на даний час широко використовується експонентна залежність коефіцієнта фільтрації від концентрації солей у твердій фазі [71, 136]:



$$k(N) = k_0 \cdot e^{-\chi \frac{N}{N_{\max}}}$$

Тут  $N$  - концентрація солей в твердій фазі (осад);  $N_{\max}$  - концентрація граничного насичення солей в твердій фазі;  $\chi$  - експериментальний параметр;  $k_0$  - коефіцієнт фільтрації чистої води при температурі  $20^\circ\text{C}$ .

Оскільки комплексні експериментальні дані щодо одночасної залежності коефіцієнта фільтрації від концентрації сольового розчину та від температури відсутні, то можна покласти

$$k(c, N, T) = k_0(c, T) \cdot e^{-\chi \frac{N}{N_{\max}}},$$

де залежність  $k_0(c, T)$  апроксимована методом РБФ.

### 2.6.3. Концентрація граничного насичення гіпсу в різних хімічних розчинах

В роботі [181] наведено експериментальні дані залежності концентрації граничного насичення гіпсу від концентрації інших хімічних речовин. Аналогічні дані наявні також в роботі Л. Лукнера та В.М. Шестакова [72]. Тобто при надходженні в загіпсований ґрунт інших хімічних розчинів розчинність гіпсу може змінюватися в значних межах від майже повністю нерозчинного (наприклад, для хімічних розчинів  $MgSO_4$  та  $CaCl_2$ ) до 15 г/л (наприклад, для хімічного розчину  $Mg(NO_3)_2$ ). В той же час, концентрація граничного насичення гіпсу в чистій воді складає 2 г/л. в графічному вигляді вказані залежності наведені на рисунку 2.3.

Отже, якщо хімічне підприємство збудоване на загіпсованому ґрунті, і в ґрунт починає надходити, наприклад, розчин звичайної кам'яної солі  $NaCl$  концентрацією 100 г/л, то концентрація граничного насичення гіпсу зросте майже в три рази. Це зумовить інтенсифікацію процесів розчинення гіпсу, а звідси – додаткові просідання ґрунту. Зрозуміло, що такими процесами

нехтувати не можна. Математичні моделі таких процесів з метою прогнозування негативних наслідків побудовані в дисертаційній роботі.

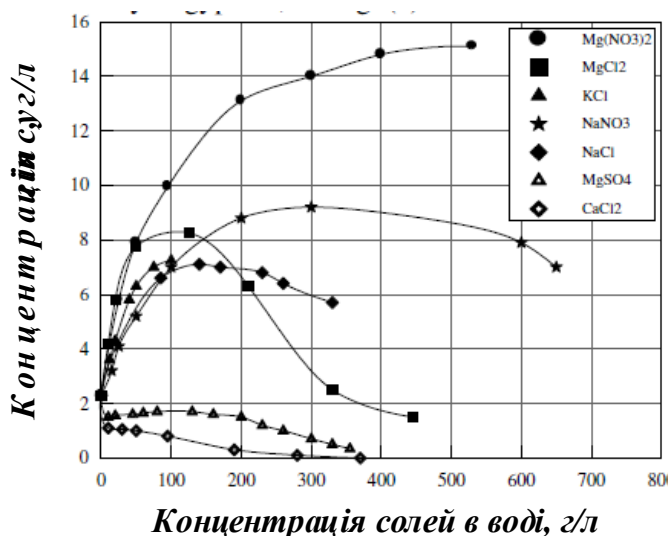


Рис. 2.3. Розчинність гіпсу

#### 2.6.4. Залежність концентрації насичення розчинів солей від температури.

В роботі [72] наведено експериментальні дані залежності розчинності деяких хімічних речовин у воді від температури. З таблиці 2.3 видно, що при зростанні температури всього від 0°C до 20°C розчинність одних хімічних речовин майже не змінюється (наприклад, розчинність  $NaCl$  змінюється на 0,6%,  $CaSO_4 \cdot 2H_2O$  – на 16%), а для інших хімічних речовин може змінюватися в значних межах (наприклад, розчинність  $Na_2CO_3 \cdot 10H_2O$  зростає на 213%). Зрозуміло, що при дослідженні процесів масо переносу та розчинення в умовах змінних теплових полів нехтувати не можна.

Таблиця 2.3

Розчинність деяких мінералів у воді

Температура, °C	Розчинність мінералів, г/л				
	$CaCl_2 \cdot 6H_2O$	$NaCl$	$KCl$	$Na_2CO_3 \cdot 10H_2O$	$CaSO_4 \cdot 2H_2O$
0	603	356	282	69	1,76
10	650	357	313	120	1,93
20	745	358	344	216	2,04

## ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 2

Основні результати даного розділу зводяться до наступного:

1. Закон руху багатокомпонентних хімічних розчинів для двофазного ґрунту запропоновано описати узагальненим законом Дарсі-Герсеванова

$$\mathbf{u} - e\mathbf{v} = -\mathbf{K}_h(\mathbf{c}, \mathbf{N}, T)\nabla h + \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_{c_i} \nabla c_i + \mathbf{v}_T \nabla T, .$$

2. Кінематична гранична умова на рухомій верхній межі ґрунту з урахуванням кристалізації та розчинення солей (в припущеннях лише вертикальних зміщень)

$$\begin{aligned} \frac{dl(\mathbf{X}^*, t)}{dt} = & - \int_{l(\mathbf{X}^*, t)}^{L(\mathbf{X}^*)} \frac{1}{\left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{\rho_i} (1+e)\right) (1+e)} \left( \frac{R\gamma a}{1+(R-1)\xi} \frac{\partial h}{\partial t} - (1+e) \times \right. \\ & \left. \times \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{\rho_i} (C_i^{(max)}(\mathbf{c}, T) - c_i) N_i^{\alpha_i} \right) dz. \end{aligned}$$

3. Модифіковано математичну модель  $R$ -вимірної задачі фільтраційної консолідації ґрунту з урахуванням впливу багатокомпонентних сольових розчинів в неізотермічних умовах. Вказану модель можна описати наступною крайовою задачею:

$$\begin{aligned} & \frac{(1+e)(1+(R-1)\xi)}{R\gamma a} \left( \operatorname{div}(\mathbf{K}_h(\mathbf{c}, \mathbf{N}, T)\nabla h) - \sum_{i=1}^n \operatorname{div}(\mathbf{v}_{c_i} \nabla c_i) - \operatorname{div}(\mathbf{v}_T \nabla T) \right) + \\ & + \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i (1+e)(1+(R-1)\xi)}{R\gamma \rho_i a} \left( \sigma \frac{\partial c_i}{\partial t} - e \frac{\partial N_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial h}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad t > 0, \\ & \operatorname{div}(\mathbf{D}_T^{(i)} \nabla T) + \operatorname{div}(\mathbf{D}_i \nabla c_i) - (\mathbf{u}, \nabla c_i) = \sigma \frac{\partial c_i}{\partial t} + \frac{\partial N_i}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad i = \overline{1, n}, \quad t > 0, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} = -\gamma_i (C_i^{(max)}(\mathbf{c}, T) - c_i) N_i^{\alpha_i}, \quad \mathbf{X} \in \overline{\Omega}, \quad i = \overline{1, n}, \quad t > 0,$$

$$\operatorname{div}(\lambda \nabla T) - \rho C_\rho(\mathbf{u}, \nabla T) = C_T \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad t > 0,$$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}_h(\mathbf{c}, \mathbf{N}, T) \nabla h + \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_{c_i} \nabla c_i + \mathbf{v}_T \nabla T;$$

$$h(\mathbf{X}, 0) = H_0(\mathbf{X}), \quad c_i(\mathbf{X}, 0) = C_i^{(0)}(\mathbf{X}), \quad T(\mathbf{X}, 0) = T_0(\mathbf{X}),$$

$$N_i(\mathbf{X}, 0) = N_i^{(0)}(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \overline{\Omega}, \quad i = \overline{1, n},$$

$$l_h h(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma} = H_1(\mathbf{X}, t), \quad l_{c_i} c_i(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma} = C_i^{(1)}(\mathbf{X}, t), \quad i = \overline{1, n},$$

$$l_T T(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma} = T_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma,$$

$$\begin{aligned} \frac{dl(\mathbf{X}^*, t)}{dt} = & - \int_{l(\mathbf{X}^*, t)}^{l(\mathbf{X}^*)} \frac{1}{\left(1 - \sum_{s=1}^n \frac{N_s}{\rho_s} (1+e)\right) (1+e)} \left( \frac{R\gamma a}{1+(R-1)\xi} \frac{\partial h}{\partial t} - (1+e) \times \right. \\ & \left. \times \sum_{i=1}^n \left( \frac{\gamma_i}{\rho_i} (C_i^{(max)}(\mathbf{c}, T) - c_i) N^{\alpha_i} \right) dz. \end{aligned}$$

де  $t \in [0; t_0]$ ,  $l_h, l_{c_i}, l_T, i = \overline{1, n}$  - оператори, що задають граничні умови на межі  $\Gamma$  для напору, концентрації солей у рідкій фазі та температури відповідно.

Результати даного розділу опубліковані в роботах [38, 83]

### РОЗДІЛ 3

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЛЬТРАЦІЙНОЇ КОНСОЛІДАЦІЇ ЗАСОЛЕНОГО ГРУНТУ З УРАХУВАННЯМ ХІМІЧНОЇ СУФОЗІЇ

В даному розділі побудовано математичну модель консолідації ґрунтів з урахуванням їх засоленості та хімічної суфозії. Сенс розгляду такої задачі з урахуванням впливу однокомпонентного сольового розчину обумовлюється тим, що в піонерських роботах з даного напрямку А. П. Власюка, П. М. Мартинюка, О. В. Жеребятська, В. В. Скопечького, В. М. Булавацького не було досліджено вплив хімічної суфозії на просідання верхньої межі масиву ґрунту. В даному розділі для визначення величини просідань використано кінематичну граничну умову на верхній рухомій межі масиву ґрунту виведену в розділі 2. Числовий розв'язок відповідних одно-, дво- та тривимірної крайової задачі знайдено безсітковим методом радіальних базисних функцій. Проведено ряд числових експериментів та здійснено їх аналіз.

### 3.1. Числове розв'язання одновимірної задачі фільтраційної консолідації засоленого ґрунту з урахуванням хімічної суфозії

#### 3.1.1. Постановка задачі та її вдосконалена математична модель

Розглянемо одновимірну задачу фільтраційної консолідації шару засоленого ґрунту товщиною  $l$  нескінченної ширини під впливом миттєво прикладеного незмінного у часі зовнішнього навантаження інтенсивністю  $q$  (рис. 3.1).

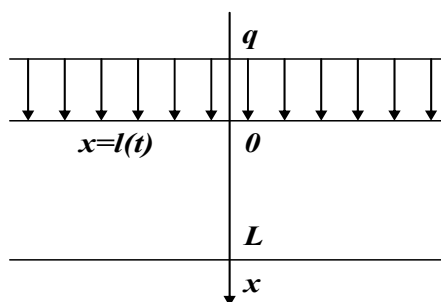


Рис. 3.1. Засолений масив ґрунту(одновимірний випадок)

Не зменшуючи загальності будемо вважати, що фізично для порової рідини верхня межа непроникна, а нижня дренована. Зважаючи на це визначимо тип граничних умов для невідомих функцій наступним чином:

- 1) Для надлишкових напорів на верхній межі задається гранична умова непроникності, а на нижній – надлишкові напори відсутні.
- 2) На верхній межі концентрація солей є відомою, а на нижній межі задається гранична умова швидкого виносу солей.
- 3) На верхній межі температура ґрунту є відомою, а нижня межа щодо теплового поля є межею симетрії.

Однак вказана конкретизація граничних умов суттєво не впливає на алгоритм числового розв'язання нижче сформульованої крайової задачі. Вказані умови можуть змінюватись, залежно від фізичних умов.

Коефіцієнт фільтрації залежить від температури та концентрації солей у твердій [136] та рідкій [34, 138] фазах.

Враховуючи всі міркування розділу 2 та результати робіт [35, 36, 43, 44, 82, 93, 95], математична модель даної задачі фільтраційної консолідації з урахуванням хімічної суфозії в неізотермічних умовах описується наступною крайовою задачею:

$$\begin{aligned} & \frac{1+e}{\gamma a} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( K_h(c, N, T) \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( v_c \frac{\partial c}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( v_T \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right) + \\ & + \frac{\varepsilon(1+e)}{\gamma \rho_1 a} \left( \frac{\partial(\sigma c)}{\partial t} - e \frac{\partial N}{\partial t} \right) = \frac{\partial h}{\partial t}, \quad x \in (l(t); L), \quad t > 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial c}{\partial x} \right) - \mathbf{u} \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( D_T \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \sigma \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t}, \quad x \in (l(t); L), \quad t > 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \mathbf{u} c_p \rho_1 \frac{\partial T}{\partial x} = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, \quad x \in (l(t); L), \quad t > 0, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\gamma_1 (C_1^{(\max)} - c) N^\alpha, \quad x \in [l(t); L], \quad t > 0, \quad (3.4)$$

$$\mathbf{u} = -K_h(c, T, N) \frac{\partial h}{\partial x} + v_c \frac{\partial c}{\partial x} + v_T \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (3.5)$$

$$h(x,0) = \frac{q}{\gamma}, \quad c(x,0) = C_0(x), \quad N(x,0) = N_0(x), \quad T(x,0) = T_0(x), \quad x \in [l(t); L], \quad (3.6)$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad h(l,t) = 0, \quad t > 0, \quad (3.7)$$

$$c(0,t) = C_1(t), \quad \left. \frac{\partial c(x,t)}{\partial x} \right|_{x=l} = 0, \quad t > 0, \quad (3.8)$$

$$T(0,t) = T_1(t), \quad \left. \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right|_{x=l} = 0, \quad t > 0, \quad (3.9)$$

$$\frac{dl(t)}{dt} = - \int_{l(t)}^L \frac{1}{(\rho_1 - (1+e)N)(1+e)} \left( \gamma \rho_1 a \frac{\partial h}{\partial t} - \gamma_1 (1+e) (C_1^{(\max)} - c) N^\alpha \right) dx, \quad t > 0. \quad (3.10)$$

### 3.1.2. Схема відшукування наближеного розв'язку одновимірної крайової задачі методом радіальних базисних функцій

Числовий розв'язок крайової задачі (3.1)–(3.10) шукаємо методом радіальних базисних функцій [43, 162, 168, 174, 175], який відноситься до класу так званих безсіткових методів. Ґрунтується він на методі колокації в точці, де множини вузлових та колокаційних точок можуть не співпадати.

В початковий момент часу  $t = 0$  покриємо замикання  $\overline{\Omega} = [l(0), L]$  області  $\Omega = (l(0), L)$  вузловими точками  $x_j$ ,  $j = \overline{1, m}$  [77, 78]. Наближені розв'язки крайової задачі (3.1)–(3.10) шукаємо у вигляді

$$h(x,t) \approx h_m(x,t) = \sum_{j=1}^m h_j(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon_h), \quad (3.11)$$

$$c(x,t) \approx c_m(x,t) = \sum_{j=1}^m c_j(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon_c), \quad (3.12)$$

$$T(x,t) \approx T_m(x,t) = \sum_{j=1}^m T_j(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon_T), \quad (3.13)$$

$$N(x,t) \approx N_m(x,t) = \sum_{j=1}^m N_j(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon_N), \quad (3.14)$$

де  $\varepsilon_h > 0, \varepsilon_C > 0, \varepsilon_T > 0, \varepsilon_N > 0$  – параметри форми;  $\varphi_j(r_j, \varepsilon)$  – відомі радіальні базисні функції [43, 162];  $h_j(t), c_j(t), T_j(t), N_j(t)$  – невідомі коефіцієнти, які залежать лише від часу,  $r_j = \sqrt{(x - x_j)^2}$ ,  $j = \overline{1, m}$ .

Також в початковий момент часу  $t = 0$  покриємо замикання  $\overline{\Omega} = [l(0), L]$  області  $\Omega$  колокаційними точками  $y_i, i = \overline{1, M}$ . Причому вимагаємо  $y_1 = 0, y_s = l, M \geq m$  і введемо позначення  $r_{ij} = \sqrt{(y_i - x_j)^2}$ ,  $j = \overline{1, m}, i = \overline{1, M}$ .

Зрозуміло, що координати вузлових та колокаційних точок можуть змінюватись в часі. Підставляючи (3.11)–(3.14) в рівняння (3.1)–(3.4), початкові умови (3.6) та граничні умови (3.7)–(3.9), використовуючи метод колокації в точці, отримаємо задачу Коші для системи нелінійних диференціальних рівнянь відносно векторів невідомих  $\mathbf{H}(t) = \{h_j(t)\}_{j=1}^m$ ,  $\mathbf{C}(t) = \{C_j(t)\}_{j=1}^m$ ,  $\mathbf{N}(t) = \{N_j(t)\}_{j=1}^m$ ,  $\mathbf{T}(t) = \{T_j(t)\}_{j=1}^m$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{(1)} \frac{d\mathbf{H}(t)}{dt} + \mathbf{L}^{(1)}(\mathbf{C}(t), \mathbf{N}(t), \mathbf{T}(t))\mathbf{H}(t) = \\ = \mathbf{K}^{(1)} \frac{d\mathbf{N}(t)}{dt} + \mathbf{A}^{(1)} \frac{d\mathbf{C}(t)}{dt} + \mathbf{A}'^{(1)}\mathbf{C}(t) + \mathbf{E}'^{(1)}\mathbf{T}(t) + \mathbf{F}^{(1)}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\mathbf{M}^{(2)} \frac{d\mathbf{C}(t)}{dt} + \mathbf{L}^{(2)}(\mathbf{C}(t), \mathbf{N}(t), \mathbf{T}(t))\mathbf{C}(t) = \mathbf{K}^{(2)} \frac{d\mathbf{N}(t)}{dt} + \mathbf{E}'^{(2)}\mathbf{T}(t) + \mathbf{F}^{(2)}, \quad (3.16)$$

$$\mathbf{M}^{(3)} \frac{d\mathbf{T}(t)}{dt} + \mathbf{L}^{(3)}(\mathbf{C}(t), \mathbf{N}(t), \mathbf{T}(t))\mathbf{T}(t) = \mathbf{F}^{(3)}, \quad (3.17)$$

$$\mathbf{M}^{(4)} \frac{d\mathbf{N}(t)}{dt} = \mathbf{L}^{(4)}(\mathbf{C}(t), \mathbf{N}^\alpha(t)), \quad (3.18)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}^{(1)}\mathbf{H}_0(t) = \tilde{\mathbf{F}}^{(1)}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(2)}\mathbf{C}_0(t) = \tilde{\mathbf{F}}^{(2)}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(3)}\mathbf{T}_0(t) = \tilde{\mathbf{F}}^{(3)}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(4)}\mathbf{N}_0(t) = \tilde{\mathbf{F}}^{(4)}, \quad (3.19)$$

де

$$\mathbf{M}^{(k)} = \{m_{ij}^{(k)}\}_{i=1, j=1}^M, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(k)} = \{\tilde{m}_{ij}^{(k)}\}_{i=1, j=1}^M, \quad \tilde{\mathbf{F}}^{(k)} = \{\tilde{f}_i^{(k)}\}_{i=1}^M, \quad k = \overline{1, 4}, \quad \mathbf{L}^{(k)} = \{l_{ij}^{(k)}\}_{i=1, j=1}^M, \quad k = \overline{1, 3},$$

$$\mathbf{L}^{(4)} = \{l_{ij}^{(4)}\}_{i=1}^M, \quad \mathbf{A}'^{(1)} = \{a'_{ij}^{(1)}\}_{i=1, j=1}^M, \quad \mathbf{A}^{(1)} = \{a_{ij}^{(1)}\}_{i=1, j=1}^M, \quad \mathbf{E}'^{(k)} = \{e'_{ij}^{(k)}\}_{i=1, j=1}^M,$$

$$\mathbf{K}^{(k)} = \{k_{ij}^{(k)}\}_{i=1, j=1}^M, \quad k = \overline{1, 2}, \quad \mathbf{F}^{(k)} = \{f_i^{(k)}\}_{i=1}^M, \quad k = \overline{1, 3};$$



$$m_{ij}^{(1)} = \begin{cases} -\varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_h), & i = \overline{2, M-1}, \\ 0, & i = 1; M; \end{cases} \quad m_{ij}^{(2)} = \begin{cases} -\sigma\varphi_j(r_j, \varepsilon_C), & i = \overline{2, M-1}, \\ 0, & i = 1; M; \end{cases}$$

$$m_{ij}^{(3)} = \begin{cases} -c_T\varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T), & i = \overline{2, M-1}, \\ 0, & i = 1; M; \end{cases} \quad m_{ij}^{(4)} = \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_N), \quad i = \overline{1, M},$$

$$l_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \frac{1+e}{\gamma a} \frac{\partial}{\partial x} \left( K_h(c, N, T) \frac{\partial \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_h)}{\partial x} \right), & i = \overline{2, M-1}, \\ K_h(c, T, N) \frac{\partial \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_h)}{\partial x}, & i = 1, \\ \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_h), & i = M; \end{cases}$$

$$l_{ij}^{(2)} = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_C)}{\partial x} \right) - \mathbf{u} \frac{\partial \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_C)}{\partial x}, & i = \overline{2, M-1}, \\ \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_C), & i = 1, \\ \frac{\partial \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_C)}{\partial x}, & i = M; \end{cases}$$

$$l_{ij}^{(3)} = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T)}{\partial x} \right) - \rho_1 c_p \mathbf{u} \frac{\partial \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T)}{\partial x}, & i = \overline{2, M-1}, \\ \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T), & i = 1, \\ \frac{\partial \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T)}{\partial x}, & i = M; \end{cases}$$

$$l_i^{(4)} = \gamma_1 \left( \sum_{j=1}^m C_j(t) \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_C) - C_1^{(\max)} \right) \cdot \left( \sum_{j=1}^m N_j(t) \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_N) \right)^\alpha, \quad i = \overline{1, M};$$

$$k_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \frac{\varepsilon(1+e)e}{\gamma \rho_1 a} \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_N), & i = \overline{2, M-1}, \\ 0, & i = 1; M; \end{cases} \quad k_{ij}^{(2)} = \begin{cases} \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_N), & i = \overline{2, M-1}, \\ 0, & i = 1; M; \end{cases}$$

$$a_{ij}^{(1)} = \begin{cases} -\frac{\varepsilon(1+e)\sigma}{\gamma \rho_1 a} \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_C), & i = \overline{2, M-1}, \\ 0, & i = 1; M. \end{cases}$$

$$f_i^{(1)} = \begin{cases} 0, & i = 1, \\ 0, & i = M; \end{cases} \quad f_i^{(2)} = \begin{cases} C_1^{(\max)}, & i = 1, \\ 0, & i = M; \end{cases} \quad f_i^{(3)} = \begin{cases} T_1, & i = 1, \\ 0, & i = M; \end{cases}$$

$$a_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \frac{1+e}{\gamma a} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu_C \frac{\partial \varphi_{ij}(r_{ij}, \varepsilon_C)}{\partial x} \right), & i = \overline{2, M-1}, \\ \nu_C \frac{\partial \varphi_{ij}(r_{ij}, \varepsilon_C)}{\partial x}, & i = 1, \\ 0, & i = M; \end{cases}$$

$$e_{ij}'^{(1)} = \begin{cases} \frac{1+e}{\gamma a} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu_T \frac{\partial \varphi_{ij}(r_{ij}, \varepsilon_T)}{\partial x} \right), & i = \overline{2, M-1}, \\ \nu_T \frac{\partial \varphi_{ij}(r_{ij}, \varepsilon_T)}{\partial x}, & i = 1, \\ 0, & i = M; \end{cases}$$

$$e_{ij}'^{(2)} = \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x} \left( D_T \frac{\partial \varphi_{ij}(r_{ij}, \varepsilon_T)}{\partial x} \right), & i = \overline{2, M-1}, \\ 0, & i = 1; M; \end{cases}$$

$$\tilde{f}_i^{(1)} = H_0(x_i), \quad \tilde{f}_i^{(2)} = C_0(x_i), \quad \tilde{f}_i^{(3)} = T_0(x_i), \quad \tilde{f}_i^{(4)} = N_0(x_i), \quad i = \overline{1, M}, \quad j = \overline{1, m}.$$

Для знаходження числового розв'язку задачі Коші (3.15)–(3.19) поділили часовий відрізок  $[0, t_0]$  на  $s$  однакових частин з кроком  $\tau$ . Для дискретизації рівнянь (3.15)–(3.17) за часом використаємо лінеаризовану повністю неявну різницеву схему [36, 43, 120]:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{(3)} \frac{\mathbf{T}^{(k+1)} - \mathbf{T}^{(k)}}{\tau} + \mathbf{L}^{(3)}(\mathbf{C}^{(k)}, \mathbf{N}^{(k)}, \mathbf{T}^{(k)}) \mathbf{T}^{(k+1)} &= \mathbf{F}^{(3)}(t_k), \\ \mathbf{M}^{(2)} \frac{\mathbf{C}^{(k+1)} - \mathbf{C}^{(k)}}{\tau} + \mathbf{L}^{(2)}(\mathbf{C}^{(k)}, \mathbf{N}^{(k)}, \mathbf{T}^{(k)}) \mathbf{C}^{(k+1)} &= \\ &= \mathbf{K}^{(2)} \frac{\mathbf{N}^{(k+1)} - \mathbf{N}^{(k)}}{\tau} + \mathbf{E}'^{(2)} \mathbf{T}^{(k+1)} + \mathbf{F}^{(2)}(t_k), \\ \mathbf{M}^{(1)} \frac{\mathbf{H}^{(k+1)} - \mathbf{H}^{(k)}}{\tau} + \mathbf{L}^{(1)}(\mathbf{C}^{(k)}, \mathbf{N}^{(k)}, \mathbf{T}^{(k)}) \mathbf{H}^{(k+1)} &= \\ &= \mathbf{K}^{(1)} \frac{\mathbf{N}^{(k+1)} - \mathbf{N}^{(k)}}{\tau} + \mathbf{A}^{(1)} \frac{\mathbf{C}^{(k+1)} - \mathbf{C}^{(k)}}{\tau} + \mathbf{A}'^{(1)} \mathbf{C}^{(k+1)} + \mathbf{E}'^{(1)} \mathbf{T}^{(k+1)} + \mathbf{F}^{(1)}(t_k). \end{aligned}$$

Для дискретизації нелінійного диференціального рівняння (3.18) за часом використаємо лінеаризацію за Ньютоном [120]

$$\mathbf{M}^{(4)} \frac{\mathbf{N}^{(k+1)} - \mathbf{N}^{(k)}}{\tau} = \alpha \mathbf{L}^{(4)}(\mathbf{C}^{(k)}, \mathbf{N}^{(k)}) \cdot (\mathbf{N}^{(k+1)} - \mathbf{N}^{(k)}) + \mathbf{L}^{(4)}(\mathbf{C}^{(k)}, \mathbf{N}^\alpha(t_k)).$$

$$\mathbf{L}^{(4)}(\mathbf{C}^{(k)}, \mathbf{N}^{(k)}) = \{l'_{ij}{}^{(4)}\}_{i=1, j=1}^{M, m},$$

$$l'_{ij}{}^{(4)} = \gamma_1 \left( \sum_{j=1}^m \mathbf{C}_j^{(k)} \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_C) - C_1^{(\max)} \right) \left( \sum_{j=1}^m \mathbf{N}_j^{(k)} \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_N) \right)^{\alpha-1} \times \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_N),$$

З вищенаведених різницевих схем маємо наступні СЛАР:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} \mathbf{M}^{(4)} \mathbf{N}^{(k+1)} &= \frac{1}{\tau} \mathbf{M}^{(4)} \mathbf{N}^{(k)} + \alpha \mathbf{L}^{(4)}(\mathbf{C}^{(k)}, \mathbf{N}^{\alpha-1}(t_k)) (\mathbf{N}^{(k+1)} - \mathbf{N}^{(k)}) + \\ &+ \mathbf{L}^{(4)}(\mathbf{C}^{(k)}, \mathbf{N}^\alpha(t_k)), \\ \left( \frac{1}{\tau} \mathbf{M}^{(3)} + \mathbf{L}^{(3)}(\mathbf{C}^{(k)}, \mathbf{N}^{(k)}, \mathbf{T}^{(k)}) \right) \mathbf{T}^{(k+1)} &= \frac{1}{\tau} \mathbf{M}^{(3)} \mathbf{T}^{(k)} + \mathbf{F}^{(3)}(t_k), \\ \left( \frac{1}{\tau} \mathbf{M}^{(2)} + \mathbf{L}^{(2)}(\mathbf{C}^{(k)}, \mathbf{N}^{(k)}, \mathbf{T}^{(k)}) \right) \mathbf{C}^{(k+1)} &= \\ &= \frac{1}{\tau} \mathbf{M}^{(2)} \mathbf{C}^{(k)} + \mathbf{K}^{(2)} \frac{\mathbf{N}^{(k+1)} - \mathbf{N}^{(k)}}{\tau} + \mathbf{E}'^{(2)} \mathbf{T}^{(k+1)} + \mathbf{F}^{(2)}(t_k), \\ \left( \frac{1}{\tau} \mathbf{M}^{(1)} + \mathbf{L}^{(1)}(\mathbf{C}^{(k)}, \mathbf{N}^{(k)}, \mathbf{T}^{(k)}) \right) \mathbf{H}^{(k+1)} &= \\ &= \frac{1}{\tau} \mathbf{M}^{(1)} \mathbf{H}^{(k)} + \mathbf{K}^{(1)} \frac{\mathbf{N}^{(k+1)} - \mathbf{N}^{(k)}}{\tau} + \mathbf{A}^{(1)} \frac{\mathbf{C}^{(k+1)} - \mathbf{C}^{(k)}}{\tau} + \mathbf{A}'^{(1)} \mathbf{C}^{(k+1)} + \mathbf{E}'^{(1)} \mathbf{T}^{(k+1)} + \mathbf{F}^{(1)}(t_k). \end{aligned}$$

де

$$\mathbf{u}^{(k)} = -K_h(\mathbf{C}^{(k)}, \mathbf{N}^{(k)}, \mathbf{T}^{(k)}) \mathbf{H}^{(k)} \frac{\partial \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_h)}{\partial x} + \nu_C \mathbf{C}^{(k)} \frac{\partial \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_C)}{\partial x} + \nu_T \mathbf{T}^{(k)} \frac{\partial \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T)}{\partial x}.$$

Наведену вище СЛАР розв'язано модифікованим методом Гауса, але перед цим попередньо використовувався метод найменших квадратів. Необхідність застосування методу найменших квадратів обумовлюється тим, що кількість колокаційних точок (а саме це визначає кількість рівнянь в СЛАР) більша за кількість вузлових точок [148]. Нехай маємо СЛАР  $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$ . Матриця  $\mathbf{A}$  розмірності  $(n_1 \times n_2)$ ,  $n_1 > n_2$ ,  $\mathbf{B}$  -  $(n_1 \times 1)$ ,  $\mathbf{X}$  -  $n_2 \times 1$ . Щоб знайти розв'язок даної СЛАР, згідно методу найменших квадратів представимо її у вигляді  $\mathbf{L}\mathbf{X} = \mathbf{D}$ , де  $\mathbf{L} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{D} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ . В результаті отримаємо СЛАР, яка має

однакову кількість рівнянь і змінних. Отриману СЛАР можна розв'язати методом Гауса.

Значення коефіцієнта фільтрації, який залежить від концентрації солей в рідкій та твердій фазі і температури, знаходимо за формулою [58, 71, 136]

$$K_h(c, T, N) = k_0(c, T) e^{-\chi \frac{N}{N_{\max}}}, \quad (3.20)$$

де [43]

$$k_0(c, T) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^{36} k_{ij} \varphi_{ij}(c, T, C_j, T_i),$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( K_h(c, T, N) \frac{\partial h}{\partial x} \right) = \left( \frac{\partial K_h}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial K_h}{\partial N} \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial K_h}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} \right) \frac{\partial h}{\partial x} + K_h(c, T, N) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial K_h}{\partial c} = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^{36} k_{ij} \frac{d\varphi_{ij}(c, T, C_j, T_i)}{dc} e^{-\chi \frac{N}{N_{\max}}}, \quad \frac{\partial K_h}{\partial T} = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^{36} k_{ij} \frac{d\varphi_{ij}(c, T, C_j, T_i)}{dT} e^{-\chi \frac{N}{N_{\max}}},$$

$$\frac{\partial K_h}{\partial N} = k_0(c, T) e^{-\chi \frac{N}{N_{\max}}} \left( -\chi \frac{N}{N_{\max}} \right).$$

Тут  $k_0(c, T)$  - коефіцієнт фільтрації незасоленого ґрунту ( $N(x, t) \equiv 0$ ).

Принципово залежність  $k_0(c, T)$  полягає в наступному:

- 1) У випадку зростання температури  $T(x, t)$  ( $T(x, t) \geq 0$ ) коефіцієнт фільтрації є монотонно зростаючою функцією.
- 2) Для концентрації солей  $c(x, t)$  існує значення  $\bar{c}$ , при якому коефіцієнт фільтрації досягає максимального значення. Збільшення або зменшення концентрації солей веде до зменшення значення коефіцієнта фільтрації (висновки зроблені відповідно до робіт А.І. Фіалко, Ф.А. Руденко [138] і підтверджені натурними експериментами інших авторів). Для апроксимації залежності  $k_0(c, T)$  використаний метод РБФ [45].

Також на кожному часовому шарі необхідно перераховувати координати вузлових та колокаційних точок. Для цього використаємо кінематичну умову верхньої змінної межі ґрунту (3.10)

$$\frac{x^{(s+1)} - x^{(s)}}{\tau} = - \int_{x^{(s)}}^L \frac{1}{\left( \rho_1 - (1+e) \sum_{j=1}^m N_j^{(s+1)} \varphi_j(r_j, \varepsilon_N) \right) (1+e)} \times$$

$$\times \left( \gamma \rho_1 a \left( \sum_{j=1}^m \frac{h_j^{(s+1)} - h_j^{(s)}}{\tau} \varphi_j(r_j, \varepsilon_h) \right) - \gamma_1 (1+e) \left( C_1^{(\max)} - \sum_{j=1}^m c_j^{(s+1)} \varphi_j(r_j, \varepsilon_C) \right) \right) \times$$

$$\times \left( \sum_{j=1}^m N_j^{(s+1)} \varphi_j(r_j, \varepsilon_N) \right)^\alpha dx, s = \overline{1, S-1}.$$

Інтеграл у вищенаведеній формулі можна обчислити за допомогою квадратурних формул. Зокрема, при програмній реалізації використовувалася формула прямокутників.

### 3.1.3. Результати числових експериментів в одновимірному випадку та їх аналіз

Розглянемо одновимірну задачу фільтраційної консолідації шару засоленого глинистого ґрунту товщини  $l=25$  м з такими вхідними даними:

$$\sigma = 0.4, e = 0.7, \alpha = 0.5, a = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2 / \text{Н}, \rho_s = 2000 \text{ кг} / \text{м}^3, C_1^{(\max)} = 350 \text{ г} / \text{л},$$

$$\gamma_1 = 6.5 \cdot 10^{-4} \text{ доба}^{-1}, C_0(x) = 8 \text{ г} / \text{л}, \nu_c = 2.8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^5 / (\text{кг} \cdot \text{доба}), C_1(t) = C_1^{(\max)},$$

$$T_1(t) = 30^\circ \text{C}, c_T = 2137 \text{ кДж} / (\text{м}^3 \cdot \text{град}), T_0(x) = 4^\circ \text{C},$$

$$\lambda = 108 \text{ кДж} / (\text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба}), c_\rho = 4,2 \text{ кДж} / (\text{кг} \cdot \text{град}),$$

$$\nu_T = 2,8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 / (\text{доба} \cdot \text{град}).$$

Коефіцієнт фільтрації незасоленого ґрунту при фільтрації чистої води і при температурі  $20^\circ \text{C}$  у випадку  $K_h = \text{const}$  беремо рівним  $K_h = 0,005 \text{ м} / \text{доба}$ .

Початковий розподіл солей  $C_0(x) = 2 \text{ кг} / \text{м}^3$ ,

$$N_0(x) = \left( 240 \left( - \left( \frac{x}{l} \right)^2 + \frac{x}{l} \right) + 40 \right). \text{ Розмірність функції } N_0(x) \text{ також дорівнює}$$

$\text{кг} / \text{м}^3$ .  $C_0(x)$  відповідає слабо насиченому сольовому розчину (якщо

врахувати, що  $C_1^{(\max)}(x) = 350 \text{ кг/м}^3$ ). Початковий розподіл  $N_0(x)$  має форму параболи з максимальним значенням  $80 \text{ кг/м}^3$  при  $x = l/2$ . При наближенні до точок  $x = 0$  та  $x = l$  концентрація солей в твердій фазі зменшується  $40 \text{ кг/м}^3$ . Вважається, що біля верхньої межі часткове розсолення відбулося за рахунок атмосферних опадів, а біля нижньої – у зв'язку із впливом ґрунтових вод. Така модельна задача може виникнути:

- 1) у випадку різкого підняття рівня ґрунтових вод і затоплення засоленого ґрунту під фундаментом споруди. Підняття ґрунтових вод може бути як результатом зміни гідрологічного режиму так і результатом прикладеного зовнішнього навантаження.
- 2) при розрахунку суфозійних просідань основи споруди, що будується на засолених ґрунтах, для підготовки проектної документації [105]

Звичайно при дослідженні конкретних об'єктів початкові розподіли  $C_0(x)$ ,  $N_0(x)$  повинні визначатися з натурних вимірювань природних зразків ґрунту.

На верхню межу ґрунту миттєво прикладається зовнішнє навантаження інтенсивністю  $q = 20 \cdot 10^4 \text{ кг/м}^2 \text{ доба}^2$ .

Кількість вузлових точок покладалася рівною 100, а колокаційних – 1000. Крок по часу  $\tau = 30 \text{ дїб}$ . Кількість часових проміжків 36. Параметр форми становив 1 для всіх невідомих функцій.

При вказаних даних були знайдені значення напору, концентрації солей у твердій та рідкій фазах, температури на кожному часовому проміжку з використанням мультіквадратичної РБФ  $\varphi(r) = \sqrt{1 + (r\varepsilon)^2}$  і побудовані відповідні графіки (рис. 3.2–3.8).

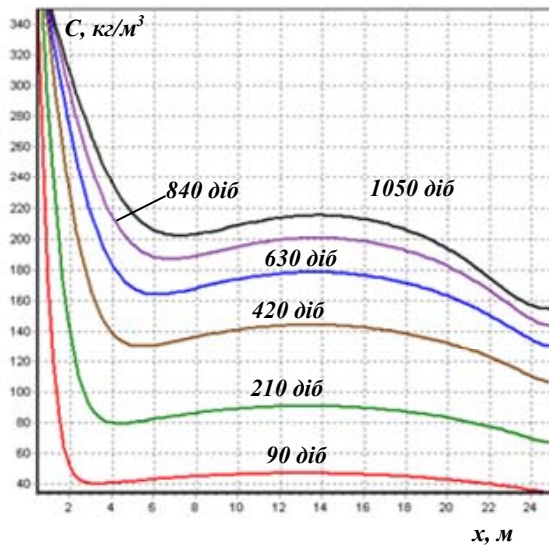


Рис. 3.2. Концентрація солей у твердій фазі, ( $K_h=K_h(c, T, N)$ )

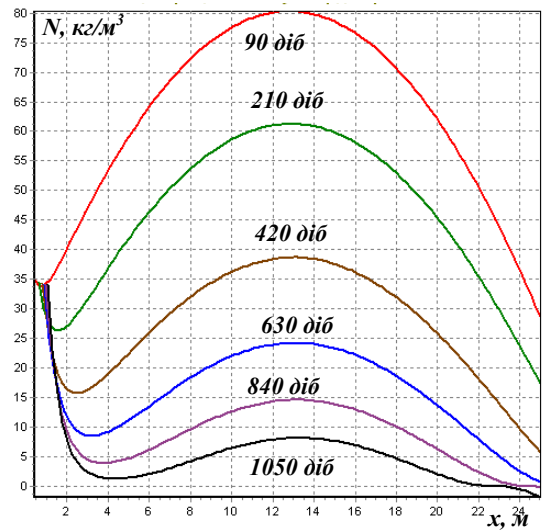


Рис. 3.3. Концентрація солей у рідкій фазі, ( $K_h=K_h(c, T, N)$ )

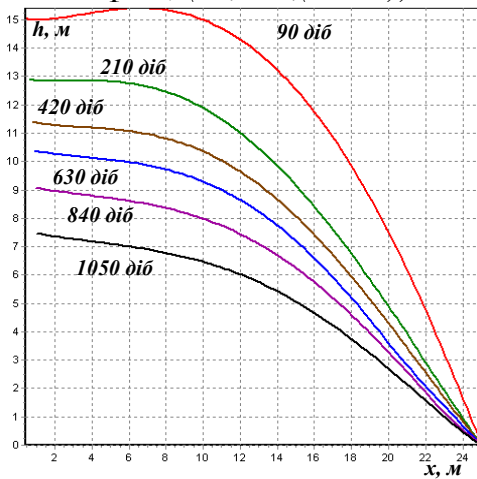


Рис. 3.4. Розподіл надлишкових напорів, ( $K_h=K_h(c, T, N)$ )

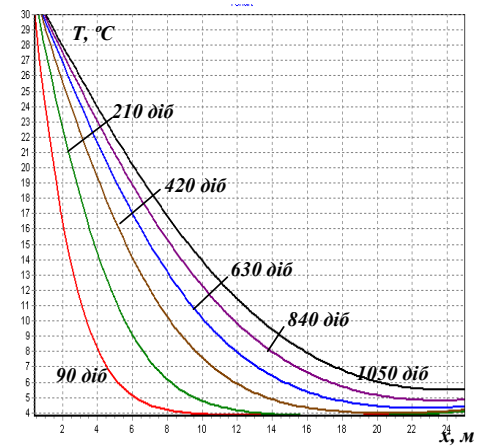


Рис. 3.5. Розподіл температури, ( $K_h=K_h(c, T, N)$ )

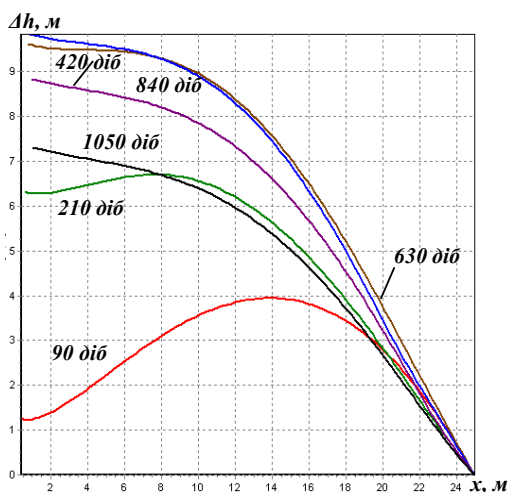


Рис. 3.6. Різниця розподілів надлишкових напорів засоленого і незасоленого ґрунту із врахуванням просідань, ( $K_h=K_h(c, T, N)$ )

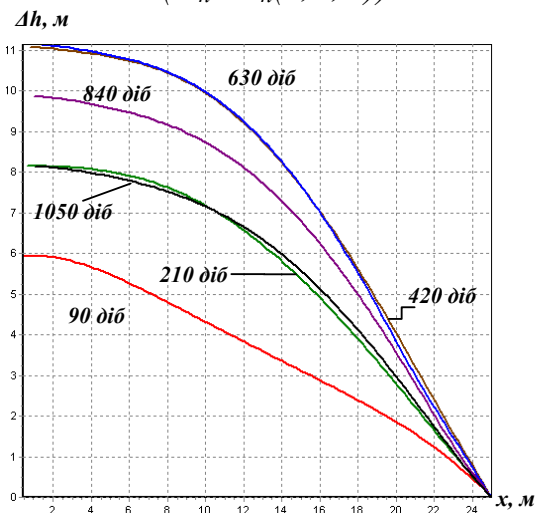


Рис. 3.7. Різниця розподілів надлишкових напорів із врахуванням просідань при  $\epsilon=1$  та  $\epsilon=0$ , ( $K_h=K_h(c, T, N)$ )

Таблиця 3.1.1

Величина просідань верхньої межі ґрунту при  $t = 1080$  діб

№	Параметри	Величина просідань ґрунту			
		$K_h = K_h(c, N, T)$			$K_h = const$
			За рахунок зміни напорів	за рахунок хімічної суфозії	
1	$\varepsilon = 1$	105 см	55 см	50 см	119 см
2	$\varepsilon = 0$	75 см	75 см	-	72 см

Порівнюючи розподіл надлишкових напорів при врахуванні таких факторів, як просідання та засоленість ґрунту бачимо, напори розсіюються повільніше, аніж у випадку незасоленого ґрунту (рис. 3.6). Це пояснюється залежністю  $K_h(c, N, T)$ . Концентрація солей у рідкій фазі  $c(x, t)$  стає більшою за 60 г/л і коефіцієнт фільтрації різко зменшується.

Також відмітимо, що врахування наявності солей в рідкій та твердій фазах (рис. 3.7) уповільнює розсіювання надлишкових напорів. Це пояснюється тим, що при розчиненні кристаликів солі об'єм порової рідини збільшується, а отже і збільшується тиск порової рідини, який вона чинить на скелет ґрунту. Величина просідань також збільшується при врахуванні цього фактору, як при  $K_h = K_h(c, N, T)$  (див. наприклад експерименти №1 та 2, де величини просідань стають 105 та 75 см відповідно), так і при  $K_h = const$  (див. ті ж експерименти, де величини просідань складають 119 см та 72 см відповідно). Загалом, якщо враховувати залежність  $K_h = K_h(c, N, T)$ , то величина просідань зменшуються, адже напори розсіюються повільніше. Як видно з експерименту №1 (див. табл. 3.1.1), просідання за рахунок хімічної суфозії та просідання за рахунок зміни надлишкових напорів приблизно однакові. Це означає, що просіданням за рахунок впливу хімічних факторів на засоленіх ґрунтах нехтувати не можна. Навіть як би надлишкові напори були відсутні (ґрунт перебував би в стабілізованому стані), то просідання були б значними і становили б загрозу стійкості споруд, зведених на даному масиві ґрунту.



Для перевірки стійкості отриманих розв'язків було проведено ряд експериментів визначення величини просідань верхньої рухомої межі ґрунту на різних часових сітках за час  $t = 360$  діб. Результати наведені в таблиці 3.1.2.

Таблиця 3.1.2

Величина просідань верхньої рухомої межі ґрунту при зміні кроку по часу

Величина кроку $\tau$	Величина просідань, см	Зміна величини просідань
$\tau = 10$ діб	101,6	4,4%
$\tau = 15$ діб	100,13	2,89%
$\tau = 20$ діб	98,99	1,72%
$\tau = 30$ діб	97,32	-

З таблиці 3.1.2 видно, що при зменшенні кроку за часом спостерігається незначне зростання величини просідань верхньої рухомої межі ґрунту. Зокрема, при зменшенні значення величини  $\tau$  в три рази просідання зросло всього на 4,4% (у випадку шаблонного значення при  $\tau = 30$  діб). Це свідчить про те, що отриманий числовий розв'язок є стійким. Більше того, з таблиці 1 чітко прослідковується лінійна залежність між зміною у величині просідання та співвідношенням кроків по часу. Це відповідає теоретичній точності  $O(\tau)$  використаної лінеаризованої повністю неявної різницевої схеми.

## 3.2. Двовимірна задача фільтраційної консолідації засоленого ґрунту з урахуванням хімічної суфозії та її числове розв'язання

### 3.2.1. Постановка двовимірної задачі та її вдосконалена математична модель задачі

Розглянемо двовимірну задачу фільтраційної консолідації масиву засоленого ґрунту в області  $\Omega$  під впливом миттєво прикладеного незмінного у часі зовнішнього навантаження інтенсивністю  $q(x)$  (рис. 3.8).

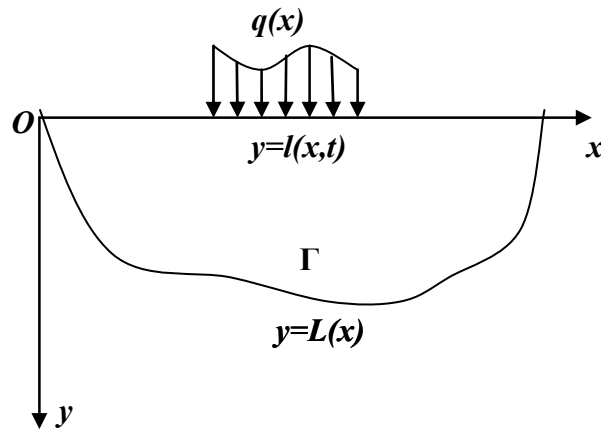


Рис. 3.8. Фільтраційна консолідація досліджуваного засоленого масиву ґрунту в двовимірному випадку

Враховуючи всі міркування розділу 2, математичну модель даної задачі фільтраційної консолідації засоленого ґрунту з урахуванням хімічної суфозії в неізотермічних умовах можна описати наступною крайовою задачею [88, 95]:

$$\begin{aligned} & \frac{(1+e)(1+\xi)}{2\gamma a} [\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c, T, N) \nabla h - \mathbf{v}_c \nabla c - \mathbf{v}_T \nabla T)] + \\ & + \frac{\varepsilon(1+e)(1+\xi)}{2\gamma \rho_1 a} \left( \frac{\partial(\sigma c)}{\partial t} - e \frac{\partial N}{\partial t} \right) = \frac{\partial h}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad t > 0, \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla c) + \nabla \cdot (\mathbf{D}_T \nabla T) - (\mathbf{u}, \nabla c) = \sigma \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (3.22)$$

$$\nabla \cdot (\lambda \nabla T) - \rho c_p (\mathbf{u}, \nabla T) = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\gamma_1 (C_1^{(\max)} - c) N^\alpha, \quad \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, \quad t > 0, \quad (3.24)$$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}_h(c, T, N) \nabla h + \mathbf{v}_c \nabla c + \mathbf{v}_T \nabla T, \quad (3.25)$$

$$h(\mathbf{X}, 0) = H_0(\mathbf{X}), \quad c(\mathbf{X}, 0) = C_0(\mathbf{X}), \quad T(\mathbf{X}, 0) = T_0(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, \quad (3.26)$$

$$N(\mathbf{X}, 0) = N_0(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, \quad (3.27)$$

$$h(\mathbf{X}, t) \Big|_{\Gamma_1^{(h)}} = H_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_1^{(h)}, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{n}) \Big|_{\Gamma_2^{(h)}} = 0, \quad \mathbf{X} \in \Gamma_2^{(h)}, \quad t > 0, \quad (3.28)$$

$$c(\mathbf{X}, t) \Big|_{\Gamma_1^{(c)}} = C_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_1^{(c)}, \quad (\mathbf{q}_c, \mathbf{n}) \Big|_{\Gamma_2^{(c)}} = 0, \quad \mathbf{X} \in \Gamma_2^{(c)}, \quad t > 0 \quad (3.29)$$

$$T(\mathbf{X}, t) \Big|_{\Gamma_1^{(T)}} = T_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_1^{(T)}, \quad (\mathbf{q}_T, \mathbf{n}) \Big|_{\Gamma_2^{(T)}} = 0, \quad \mathbf{X} \in \Gamma_2^{(T)}, \quad t > 0 \quad (3.30)$$

$$\frac{dl(t)}{dt} = - \int_{l(x,t)}^{L(x)} \frac{1}{(\rho_1 - (1+e)N)(1+e)} \left( \frac{2\gamma\rho_1 a}{1+\xi} \frac{\partial h}{\partial t} - \gamma_1(1+e)(C_1^{(\max)} - c)N^\alpha \right) dy, \quad t > 0, \quad (3.31)$$

де  $\mathbf{X} = (x, y)$ ,  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ ,  $t \in [0; t_0]$ ,  $\Gamma_1^{(h)} \cup \Gamma_2^{(h)} = \Gamma$  - межа області  $\Omega$ . Причому  $\Gamma_1^{(h)} \cap \Gamma_2^{(h)} = \emptyset$ . Аналогічні позначення використані для інших невідомих функцій.

Тут також використані такі позначення:

$\mathbf{K}_h(c, T, N) = \{k_{hij}(c, T, N)\}$ ,  $i, j = 1, 2$ , – коефіцієнт (тензор) фільтрації;

$\mathbf{v}_c = \{v_{cij}\}$ ,  $i, j = 1, 2$ , – коефіцієнт (тензор) хімічного осмосу;

$\mathbf{v}_T = \{v_{Tij}\}$ ,  $i, j = 1, 2$ , – коефіцієнт (тензор) термічного осмосу;

$\mathbf{D} = \{D_{ij}\}$ ,  $i, j = 1, 2$ , – коефіцієнт (тензор) хімічної дифузії;

$\mathbf{D}_T = \{(D_T)_{ij}\}$ ,  $i, j = 1, 2$ , – коефіцієнт (тензор) термодифузії;

$\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_{ij}(C)\}$ ,  $i, j = 1, 2$ , – коефіцієнт (тензор) теплопровідності;

$\mathbf{u} = (u_1; u_2)$  – вектор швидкості фільтрації сольового розчину;

$\mathbf{q}_c = \mathbf{u}c - \mathbf{D}\nabla c$  - вектор потоку розчинених солей;

$\mathbf{q}_T = \rho c_p \mathbf{u}\nabla T - \boldsymbol{\lambda}\nabla T$  - вектор теплового потоку.

### 3.2.2. Схема відшукування наближеного розв'язку двовимірної крайової задачі методом радіальних базисних функцій

Числовий розв'язок крайової задачі (3.21)–(3.31) шукаємо методом радіальних базисних функцій [43, 162, 168, 174, 175].

Покриємо область  $\Omega$  вузловими точками  $\mathbf{X}_j = (x_j^{(x)}, y_j^{(y)})$ ,  $j = \overline{1, m}$  [77, 78].

Наближені значення невідомих функцій крайової задачі (3.21)–(3.31) шукаємо у вигляді

$$h(\mathbf{X}, t) \approx \sum_{j=1}^m h_j(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon_h), \quad (3.32)$$

$$c(\mathbf{X}, t) \approx \sum_{j=1}^m c_j(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon_C), \quad (3.33)$$

$$T(\mathbf{X}, t) \approx \sum_{j=1}^m T_j(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon_T), \quad (3.34)$$

$$N(\mathbf{X}, t) \approx \sum_{j=1}^m N_j(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon_N), \quad (3.35)$$

де  $\varepsilon_h > 0, \varepsilon_C > 0, \varepsilon_T > 0, \varepsilon_N > 0$  – параметри форми;  $\varphi_j(r_j, \varepsilon)$  – радіальні базисні функції;  $h_j(t), c_j(t), N_j(t), T_j(t)$  – невідомі коефіцієнти, які залежать від часу,  $r_j = \sqrt{(x - x_j^{(X)})^2 + (y - y_j^{(X)})^2}$ ,  $j = \overline{1, m}$ .

Покриємо замикання  $\overline{\Omega}$  області  $\Omega$  колокаційними точками  $\mathbf{Y}_i = (x_i^{(Y)}, y_i^{(Y)})$ ,  $i = \overline{1, M}$ . Введемо множини  $\omega = \{i : \mathbf{Y}_i \in \Omega\}$ ,  $\gamma_1^{(h)} = \{i : \mathbf{Y}_i \in \Gamma_1^{(h)}\}$ ,  $\gamma_2^{(h)} = \{i : \mathbf{Y}_i \in \Gamma_2^{(h)}\}$ . Аналогічно визначаємо множини номерів граничних колокаційних точок для інших невідомих функцій. Введемо позначення  $r_{ij} = \sqrt{(x_i^{(Y)} - x_j^{(X)})^2 + (y_i^{(Y)} - y_j^{(X)})^2}$ ,  $j = \overline{1, m}, i = \overline{1, M}, m \geq M$ .

Підставляючи (3.32)–(3.35) в рівняння (3.21)–(3.24), початкові умови (3.26), (3.27) та граничні умови (3.28)–(3.30), використовуючи метод колокації в точці, отримаємо задачу Коші типу (3.15)–(3.19) для системи нелінійних диференціальних рівнянь відносно векторів невідомих  $\mathbf{H}(\mathbf{t}) = \{h_j(t)\}_{j=1}^m$ ,  $\mathbf{C}(\mathbf{t}) = \{C_j(t)\}_{j=1}^m$ ,  $\mathbf{N}(\mathbf{t}) = \{N_j(t)\}_{j=1}^m$ ,  $\mathbf{T}(\mathbf{t}) = \{T_j(t)\}_{j=1}^m$ , де

$$\mathbf{M}^{(k)} = \{m_{ij}^{(k)}\}_{i=1, j=1}^{M, m}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(k)} = \{\tilde{m}_{ij}^{(k)}\}_{i=1, j=1}^{M, m}, \quad \tilde{\mathbf{F}}^{(k)} = \{\tilde{f}_i^{(k)}\}_{i=1}^M, \quad k = \overline{1, 4},$$

$$\mathbf{L}^{(k)} = \{l_{ij}^{(k)}\}_{i=1, j=1}^{M, m}, \quad k = \overline{1, 3},$$

$$\mathbf{L}^{(4)} = \{l_{ij}^{(4)}\}_{i=1}^M, \quad \mathbf{A}'^{(1)} = \{a'_{ij}^{(1)}\}_{i=1, j=1}^{M, m}, \quad \mathbf{A}^{(1)} = \{a_{ij}^{(1)}\}_{i=1, j=1}^{M, m}, \quad \mathbf{E}'^{(k)} = \{e'_{ij}^{(k)}\}_{i=1, j=1}^{M, m},$$

$$\mathbf{K}^{(k)} = \{k_{ij}^{(k)}\}_{i=1, j=1}^{M, m}, \quad k = 1; 2, \quad \mathbf{F}^{(k)} = \{f_i^{(k)}\}_{i=1}^M, \quad k = \overline{1, 3};$$

$$m_{ij}^{(1)} = \begin{cases} -\varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_h), & i \in \omega, \\ 0, & i \notin \omega; \end{cases} \quad m_{ij}^{(2)} = \begin{cases} -\sigma \varphi_j(r_j, \varepsilon_C), & i \in \omega, \\ 0, & i \notin \omega; \end{cases}$$

$$m_{ij}^{(3)} = \begin{cases} -c_T \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T), & i \in \omega, \\ 0, & i \notin \omega; \end{cases} \quad m_{ij}^{(4)} = \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_N), \quad i = \overline{1, M},$$

$$k_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \frac{\varepsilon e(1+e)(1+\xi)}{2\gamma\rho_1 a} \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_N), & i \in \omega, \\ 0, & i \notin \omega; \end{cases} \quad k_{ij}^{(2)} = \begin{cases} \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_N), & i \in \omega, \\ 0, & i \notin \omega; \end{cases}$$

$$l_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \frac{(1+e)(1+\xi)}{2\gamma a} \nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c, N, T) \nabla \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_h)), & i \in \omega, \\ (\mathbf{K}_h(c, T, N) \nabla \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_h), \mathbf{n}), & i \in \gamma_2^h, \\ \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_h), & i \in \gamma_1^h; \end{cases}$$

$$l_{ij}^{(2)} = \begin{cases} \nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_C)) - (\mathbf{u}, \nabla \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_C)), & i \in \omega, \\ \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_C), & i \in \gamma_1^c, \\ (\mathbf{D} \nabla \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_C), \mathbf{n}), & i \in \gamma_2^c; \end{cases}$$

$$l_{ij}^{(3)} = \begin{cases} \nabla \cdot (\lambda \nabla \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T)) - \rho c_p (\mathbf{u}, \nabla \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T)), & i \in \omega, \\ \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T), & i \in \gamma_1^T, \\ (\lambda \nabla \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T), \mathbf{n}), & i \in \gamma_2^T; \end{cases}$$

$$l_i^{(4)} = \gamma_1 \left( \sum_{j=1}^m C_j(t) \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_C) - C_1^{(\max)} \right) \cdot \left( \sum_{j=1}^m N_j(t) \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_N) \right)^\alpha, \quad i = \overline{1, M};$$

$$a_{ij}^{(1)} = \begin{cases} -\frac{\varepsilon \sigma(1+e)(1+\xi)}{2\gamma\rho_1 a} \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_C), & i \in \omega, \\ 0, & i \notin \omega. \end{cases}$$

$$f_i^{(1)} = \begin{cases} 0, & i \in \omega, \\ 0, & i \notin \omega; \end{cases} \quad f_i^{(2)} = \begin{cases} C_1, & i \in \gamma_1^c, \\ 0, & i \notin \gamma_1^c; \end{cases} \quad f_i^{(3)} = \begin{cases} 0, & i \in \gamma_2^T \cup \omega, \\ T_1, & i \in \gamma_1^T, \\ T_2, & i \in \gamma_1^T; \end{cases}$$

$$a_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \frac{(1+e)(1+\xi)}{2\gamma a} \nabla \cdot (\mathbf{v}_C \nabla \varphi_{ij}(r_{ij}, \varepsilon_C)), & i \in \omega, \\ (\mathbf{v}_C \nabla \varphi_{ij}(r_{ij}, \varepsilon_C), \mathbf{n}), & i \in \gamma_2^c, \\ 0, & i \notin \omega \cup \gamma_2^c; \end{cases}$$

$$e'_{ij}{}^{(1)} = \begin{cases} \frac{(1+e)(1+\xi)}{2\gamma a} \nabla \cdot (\mathbf{v}_T \nabla \varphi_{ij}(r_{ij}, \varepsilon_T)), & i \in \omega, \\ (\mathbf{v}_T \nabla \varphi_{ij}(r_{ij}, \varepsilon_T), \mathbf{n}), & i \in \gamma_2^T, \\ 0, & i \notin \omega \cup \gamma_2^T; \end{cases}$$

$$e'_{ij}{}^{(2)} = \begin{cases} \nabla \cdot (\mathbf{D}_T \nabla \varphi_{ij}(r_{ij}, \varepsilon_T)), & i \in \omega, \\ 0, & i \notin \omega; \end{cases}$$

$$\tilde{f}_i^{(1)} = H_0(\mathbf{Y}_i), \quad \tilde{f}_i^{(2)} = C_0(\mathbf{Y}_i), \quad \tilde{f}_i^{(3)} = T_0(\mathbf{Y}_i), \quad \tilde{f}_i^{(4)} = N_0(\mathbf{Y}_i), \quad i = \overline{1, M}, \quad j = \overline{1, m}.$$

Числовий розв'язок отриманої задачі Коші знаходимо, як і в одновимірному випадку.

Також на кожному часовому шарі необхідно перераховувати координати вузлових та колокаційних точок. Для цього використаємо кінематичну умову верхньої змінної межі ґрунту (3.31), яка дає змогу скоригувати координати вузлів не лише на верхній рухомій межі. Маємо

$$\begin{aligned} \frac{y^{(s+1)} - y^{(s)}}{\tau} = & - \int_{y^{(s)}}^{L(x)} \frac{1}{\left( \rho_1 - (1+e) \sum_{j=1}^m N_j^{(s+1)} \varphi_j(r_j, \varepsilon_N) \right) (1+e)} \times \\ & \times \left( \gamma \rho_1 a \left( \sum_{j=1}^m \frac{h_j^{(s+1)} - h_j^{(s)}}{\tau} \varphi_j(r_j, \varepsilon_h) \right) - \gamma_1 (1+e) \left( C_1^{(\max)} - \sum_{j=1}^m c_j^{(s+1)} \varphi_j(r_j, \varepsilon_C) \right) \right) \times \\ & \times \left( \sum_{j=1}^m N_j^{(s+1)} \varphi_j(r_j, \varepsilon_N) \right)^\alpha dy. \end{aligned}$$

Тут  $\tau$  - крок дискретизації в часі;  $(x, y^{(s)})$  - точка в замиканні області консолідації на часовому шарі з номером  $(s)$ , яка переходить у точку  $(x, y^{(s+1)})$  (враховуються лише вертикальні зміщення).

Інтеграл можна обчислити за допомогою квадратурних формул. Зокрема, при програмній реалізації використовувалася формула прямокутників.

Початковий розподіл надлишкових напорів  $h_0(x, y)$  залежить від властивостей ґрунту, а також від зовнішнього навантаження. Нехай маємо довільний закон розподілу навантаження  $q(x)$ . Початкове значення

надлишкового напору для точки, що лежить в області прикладання навантаження, визначаємо за формулою [65]

$$h_0(x, y) = \frac{q(x)}{\gamma} + h_p,$$

де  $h_p$  - значення напору в точці  $(x, y)$  до прикладання навантаження.

Для довільної точки  $\mathbf{X} = (x, y)$  області консолідації  $\Omega$ , що не належить до області прикладання навантаження, значення надлишкових напорів у початковий момент часу визначаємо за формулою [65]

$$h_0(\mathbf{X}) = \frac{\Theta(\mathbf{X})}{2\gamma},$$

де  $\Theta(\mathbf{X})$  - сума головних напружень у точці  $\mathbf{X}$ . Згідно [65], маємо

$$\Theta(\mathbf{X}) = \int_{l_1}^{l_2} \frac{2q(\xi)}{\pi} \frac{y}{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}} d\xi, \quad (3.36)$$

$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}$ ;  $[l_1; l_2]$  - відрізок прикладення навантаження.

Для наближеного обчислення інтегралу (3.36) використаємо метод прямокутників. Розбиваємо відрізок  $[l_1; l_2]$  прикладення навантаження на  $n$  частин з кроком  $\Delta x$ . На кожному відрізку  $[l_1 + (i-1)\Delta x; l_1 + i\Delta x]$  замінюємо розподілене навантаження елементарними зосередженими силами  $q_i \Delta x$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Тоді інтеграл (3.36) наближено можна представити у вигляді суми

$$\Theta(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^n q(x_i) \frac{y}{\sqrt{(x-x_i)^2 + y^2}} \Delta x, \quad i = \overline{1, n}.$$

### 3.2.3. Числові експерименти та їх аналіз для двовимірної задачі

Розглянемо двохвимірну задачу фільтраційної консолідації шару засоленого глинистого ґрунту прямокутної форми довжиною  $l=24$  м, товщиною  $b=10$  м (рис. 3.9).

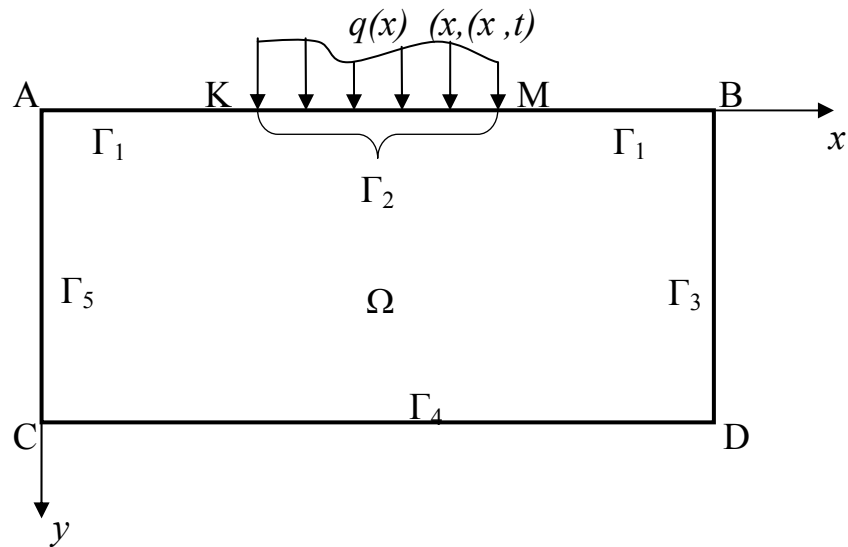


Рис. 3.9. Фільтраційна консолідація шару засоленого глинистого ґрунту прямокутної форми в двовимірному випадку

Вихідні дані беремо наступними:

$$\sigma = 0.4, \quad e = 0.7, \quad \alpha = 0.5, \quad a = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2 / \text{Н}, \quad \rho_1 = 2000 \text{ кг} / \text{м}^3, \quad C_1^{(\max)} = 350 \text{ г} / \text{л},$$

$$D = 0.02 \text{ м}^2 / \text{доба}, \quad \gamma = 10^4 \text{ кг} / (\text{м}^2 \cdot \text{доба}^2), \quad \gamma_1 = 6.5 \cdot 10^{-4} \text{ доба}^{-1},$$

$$\nu_c = 2.8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^5 / (\text{кг} \cdot \text{доба}), \quad C_1(t) = C_1^{(\max)}, \quad \xi = 0.75, \quad T_1(t) = 50^\circ \text{C},$$

$$c_\rho = 4,2 \text{ кДж} / (\text{кг} \cdot \text{град}), \quad \lambda = 108 \text{ кДж} / (\text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба}),$$

$$c_T = 2137 \text{ кДж} / (\text{м}^3 \cdot \text{град}), \quad \nu_T = 2,8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 / (\text{доба} \cdot \text{град}),$$

$$N_0(x, y) = 240 \left( -\left( \frac{x}{l} \right)^2 + \frac{x}{l} \right) + 40, \quad T_2(t) = 17 + 13 \cos \left( \frac{\pi t}{180} \right),$$

$$C_0(x, y) = \begin{cases} 350 \text{ г} / \text{л}, & y = 0, \\ 8 \text{ г} / \text{л}, & y \neq 0; \end{cases} \quad T_0(x, y) = \begin{cases} 50^\circ \text{C}, & y = 0, \\ 4^\circ \text{C}, & y \neq 0. \end{cases}$$

Граничні умови беруться наступними

$$(\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{\Gamma_2} = (\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{\Gamma_4} = 0, \quad h(x, y, t)|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_5} = 0, \quad t > 0,$$

$$\frac{\partial c}{\partial y} \Big|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_4} = 0, \quad c(x, y, t)|_{\Gamma_2} = C_1, \quad \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{\Gamma_3 \cup \Gamma_5} = 0, \quad t > 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{\Gamma_4} = 0, \quad T(x, y, t)|_{\Gamma_2} = T_1, \quad T(x, y, t)|_{\Gamma_1} = T_2, \quad \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{\Gamma_3 \cup \Gamma_5} = 0, \quad t > 0.$$



Коефіцієнт фільтрації чистої води покладалася рівним  $K_h = 0,002 \text{ м/доба}$ . Для залежності коефіцієнта фільтрації від концентрації солей в рідкій та твердій фазах, а також від температури використовувалася формула (3.20).

На верхній межі ґрунту на відріжку КМ прикладається зовнішнє навантаження інтенсивністю  $q = 20 \cdot 10^4 \text{ кг/м}^2 \text{ доба}^2$ .

Кількість вузлових точок покладалася рівною 121, а колокаційних – 484. Крок за часом  $\tau = 30 \text{ діб}$ . Кількість часових проміжків 12. Параметр форми становив 1 для всіх невідомих функцій.

При вказаних даних були знайдені значення напору, концентрації солей у твердій та рідкій фазах, температури на кожному часовому проміжку з використанням мультиквадратичної РБФ  $\varphi(r) = \sqrt{1 + (r\varepsilon)^2}$  і побудовані відповідні графіки (рис. 3.10–3.15).

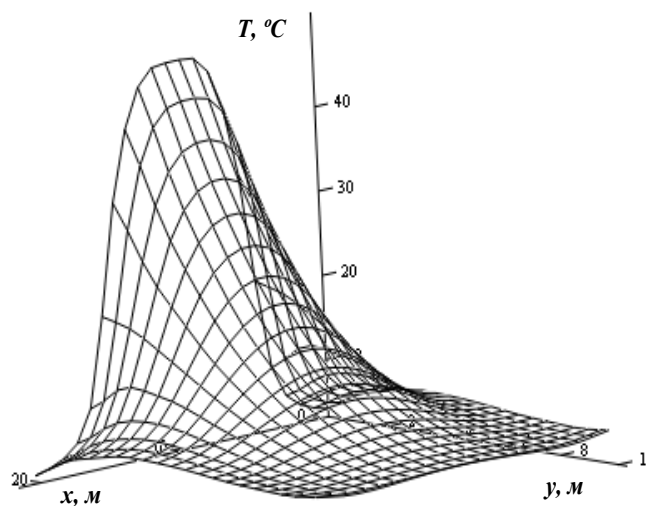


Рис. 3.10. Розподіл температури  
(  $t = 270 \text{ діб}$ ,  $K_h = K_h(c, N, T)$  )

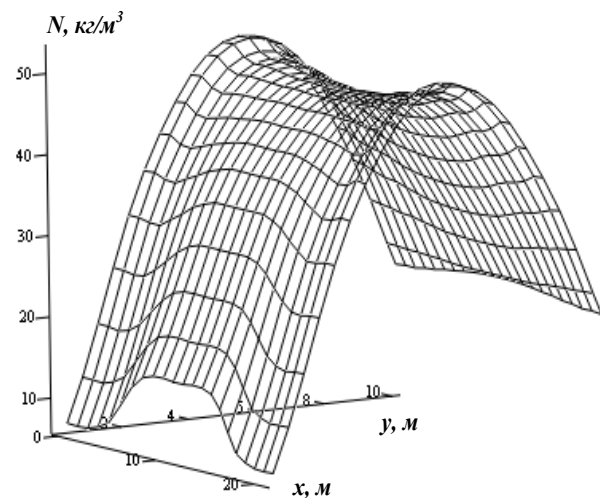


Рис. 3.11. Концентрація солей у  
твердій фазі (  $t = 270 \text{ діб}$ ,  
 $K_h = K_h(c, N, T)$  )

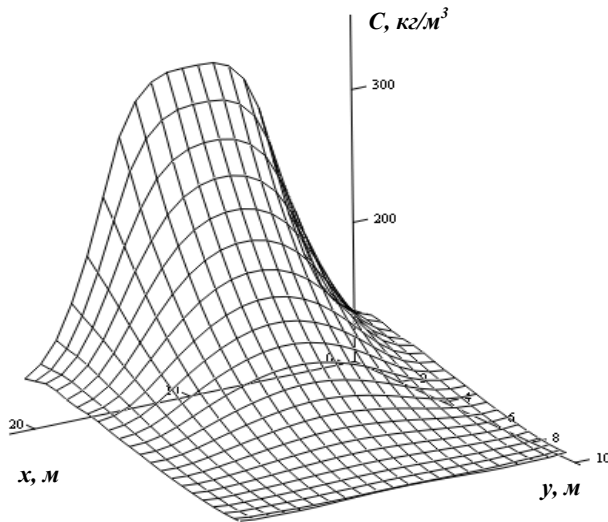


Рис. 3.12. Концентрація солей у рідкій фазі (  $t = 270$  діб ,  $K_h = K_h(c, N, T)$  )

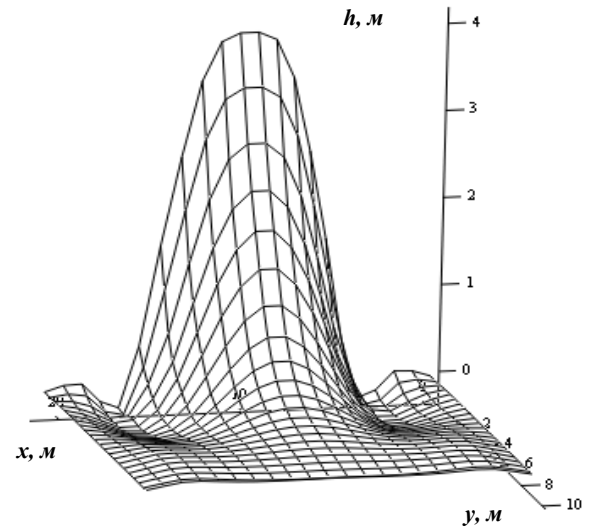


Рис. 3.13. Розподіл надлишкових напорів (  $t = 270$  діб ,  $K_h = K_h(c, N, T)$  )

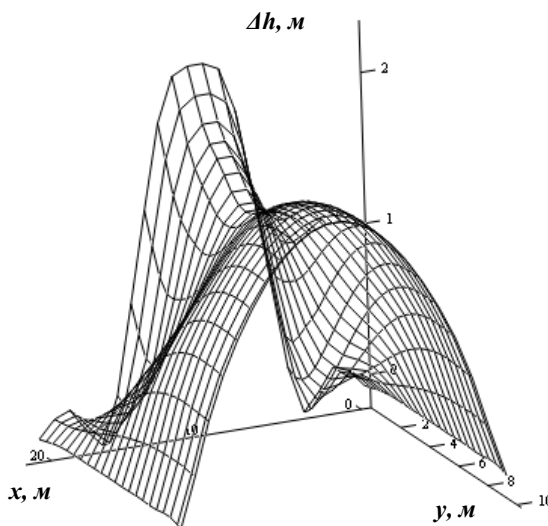


Рис. 3.14. Різниця розподілів надлишкових напорів із врахуванням просідання при  $\varepsilon = 1$  та  $\varepsilon = 0$ , (  $t = 270$  діб ,  $K_h = K_h(c, N, T)$  )

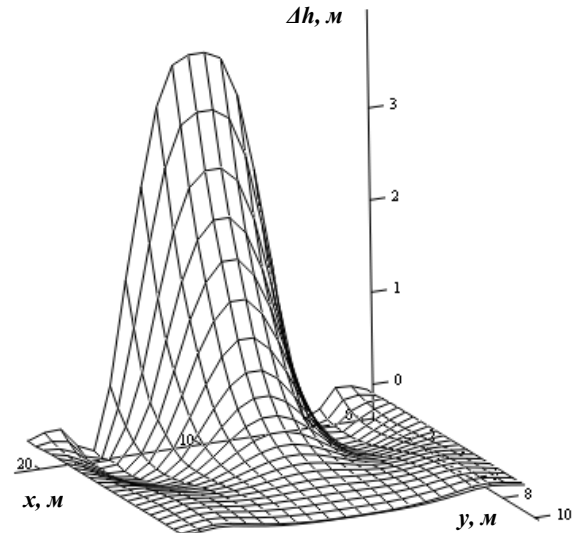


Рис. 3.15. Різниця розподілів надлишкових напорів засоленого і незасоленого ґрунту при врахуванні просідання (  $t = 270$  діб ,  $K_h = K_h(c, N, T)$  )

Таблиця 3.2

Величина просідання верхньої межі ґрунту при  $t = 330$  діб

Координати	$y, м$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$x, м$	0	2	4	6	8	10	11	13	15	17	19	21
Просідання, см		28,6	31,8	35,3	45,9	53,3	55	55	53,3	45,9	35,3	31,8	28,6

Таблиця 3.3

Величина просідання верхньої межі ґрунту ( $t = 330$  діб,  $x = 10$  м)

№	Параметри	Величина просідань ґрунту			
		$K_h = K_h(c, N, T)$			$K_h = const$
			за рахунок зміни напорів	за рахунок хімічної суфозії	
1	$\varepsilon = 1$	55 см	39 см	16 см	55,1 см
2	$\varepsilon = 0$	40,6 см	40,6 см	-	40,6 см

Порівнюючи розподіл надлишкових напорів при врахуванні таких факторів, як просідання та засоленість ґрунту бачимо, напори розсіюються повільніше, аніж у випадку незасоленого ґрунту (рис. 3.15). Це пояснюється залежністю  $K_h(c, N, T)$ . Концентрація солей у рідкій фазі  $c(X, t)$  стає більшою за 60 г/л і коефіцієнт фільтрації різко зменшується.

Також відмітимо, що врахування наявності солей в рідкій та твердій фазах (рис. 3.14) уповільнює розсіювання надлишкових напорів. Це пояснюється тим, що при розчиненні кристаликів солі об'єм порової рідини збільшується, а отже і збільшується тиск порової рідини, який вона чинить на скелет ґрунту. Величина просідань також збільшується при врахуванні цього фактору, як при  $K_h = K_h(c, N, T)$  (див. наприклад табл. 3.3 експерименти №1 та 2, де величини просідань стають 55 та 40,6 см відповідно), так і при  $K_h = const$  (див. ті ж експерименти, де величини просідань складають 55,1 см та 40,6 см відповідно).

Просідання ґрунту найбільше в області прикладання навантаження.

Зазначимо, що при врахуванні лише хімічного осмосу просідання становить 54,9 см, а при врахування лише термічного осмосу – 47,8 см. Як видно з експерименту №1 (див. табл. 3.3), просідання за рахунок хімічної суфозії менше ніж просідання за рахунок зміни надлишкових напорів. Просідання за рахунок хімічної суфозії від загального просідання становить 29,1 %, а за рахунок зміни надлишкових напорів – 70,9 %. Тому, якщо консолідація ґрунту завершилася, але активізуються процеси хімічної суфозії, то споруда, зведена на такому ґрунті, перейде в аварійний стан. Зрозуміло,

такими процесами нехтувати не можна. Також відмітимо, що просідання при розгляді двовимірної задачі є значно меншими, ніж в одновимірному випадку.

### 3.3. Просторова задача фільтраційної консолідації засоленого ґрунту з урахуванням хімічної суфозії

#### 3.3.1. Постановка просторової задачі та її математична модель

Розглянемо тривимірну задачу фільтраційної консолідації масиву засоленого ґрунту в області  $\Omega$  з межею  $\Gamma$  під впливом миттєво прикладеного незмінного у часі зовнішнього навантаження інтенсивністю  $q(x,y)$  (рис. 3.16).

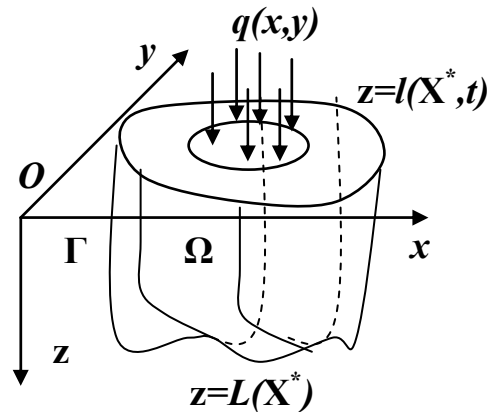


Рис. 3.16. Фільтраційна консолідація досліджуваного засоленого масиву ґрунту у тривимірному випадку.

Враховуючи всі міркування розділу 2 та результати робіт [35, 36, 43, 44], математичну модель даної задачі фільтраційної консолідації засоленого ґрунту з урахуванням хімічної суфозії в неізотермічних умовах можна описати наступною крайовою задачею:

$$\begin{aligned} & \frac{(1+e)(1+2\xi)}{3\gamma a} [\nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c, T, N) \nabla h - \mathbf{v}_c \nabla c - \mathbf{v}_T \nabla T)] + \\ & + \frac{\varepsilon(1+e)(1+2\xi)}{3\gamma \rho_1 a} \left( \frac{\partial(\sigma c)}{\partial t} - e \frac{\partial N}{\partial t} \right) = \frac{\partial h}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad t > 0, \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla c) + \nabla \cdot (\mathbf{D}_T \nabla T) - (\mathbf{u}, \nabla c) = \sigma \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (3.38)$$

$$\nabla \cdot (\lambda \nabla T) - \rho c_p (\mathbf{u}, \nabla T) = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\gamma_1 (C_1^{(\max)} - c) N^\alpha, \quad \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, \quad t > 0, \quad (3.40)$$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}_h(c, T, N) \nabla h + \mathbf{v}_c \nabla c + \mathbf{v}_T \nabla T, \quad (3.41)$$

$$h(\mathbf{X}, 0) = H_0(\mathbf{X}), \quad c(\mathbf{X}, 0) = C_0(\mathbf{X}), \quad T(\mathbf{X}, 0) = T_0(\mathbf{X}), \quad N(\mathbf{X}, 0) = N_0(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \bar{\Omega}, \quad (3.42)$$

$$h(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_1^{(h)}} = H_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_1^{(h)}, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{\Gamma_2^{(h)}} = 0, \quad \mathbf{X} \in \Gamma_2^{(h)}, \quad t > 0, \quad (3.43)$$

$$c(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_1^{(c)}} = C_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_1^{(c)}, \quad (\mathbf{q}_s, \mathbf{n})|_{\Gamma_2^{(c)}} = 0, \quad \mathbf{X} \in \Gamma_2^{(c)}, \quad t > 0 \quad (3.44)$$

$$T(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_1^{(T)}} = T_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_1^{(T)}, \quad (\mathbf{q}_T, \mathbf{n})|_{\Gamma_2^{(T)}} = 0, \quad \mathbf{X} \in \Gamma_2^{(T)}, \quad t > 0 \quad (3.45)$$

$$\frac{dl(\mathbf{X}^*, t)}{dt} = - \int_{l(\mathbf{X}^*, t)}^{l(\mathbf{X}^*)} \frac{1}{(\rho_1 - (1+e)N)(1+e)} \left( \frac{3\gamma\rho_1 a}{1+2\xi} \frac{\partial h}{\partial t} - \gamma_1(1+e)(C_1^{(\max)} - c)N^\alpha \right) dz, \quad t > 0, \quad (3.46)$$

де  $\mathbf{X} = (x, y, z)$ ,  $\mathbf{X}^* = (x, y)$   $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ ,  $t \in [0; t_0]$ ,  $\Gamma_1^{(h)} \cup \Gamma_2^{(h)} = \Gamma$  - межа області  $\Omega$ . Причому  $\Gamma_1^{(h)} \cap \Gamma_2^{(h)} = \emptyset$ . Аналогічні позначення частин межі області використані для інших невідомих функцій.

Тут використані такі позначення:

$\mathbf{K}_h(c, T, N) = \{k_{hij}(c, T, N)\}$ ,  $i, j = \overline{1, 3}$ , - коефіцієнт (тензор) фільтрації;

$\mathbf{v}_c = \{v_{cij}\}$ ,  $i, j = \overline{1, 3}$ , - коефіцієнт (тензор) хімічного осмосу;

$\mathbf{v}_T = \{v_{Tij}\}$ ,  $i, j = \overline{1, 3}$ , - коефіцієнт (тензор) термічного осмосу;

$\mathbf{D} = \{D_{ij}\}$ ,  $i, j = \overline{1, 3}$ , - коефіцієнт (тензор) хімічної дифузії;

$\mathbf{D}_T = \{(D_T)_{ij}\}$ ,  $i, j = \overline{1, 3}$  - коефіцієнт (тензор) термодифузії;

$\lambda = \{\lambda_{ij}(C)\}$ ,  $i, j = \overline{1, 3}$ , - коефіцієнт (тензор) теплопровідності;

$\mathbf{u} = (u_1; u_2; u_3)$  - вектор швидкості фільтрації сольового розчину;

$\mathbf{q}_c = \mathbf{u} \cdot c - \mathbf{D} \nabla c$  - вектор потоку розчинених солей;

$\mathbf{q}_T = \rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T - \lambda \nabla T$  - вектор теплового потоку.

### 3.3.2. Метод радіальних базисних функцій в просторовій задачі фільтраційної консолідації засоленого ґрунту з урахуванням хімічної суфозії

Числовий розв'язок крайової задачі (3.37)–(3.46) шукаємо методом радіальних базисних функцій [43, 162, 168, 174, 175].

Покриємо область  $\Omega$  вузловими точками  $\mathbf{X}_j = (x_j^{(x)}, y_j^{(x)}, z_j^{(x)})$ ,  $j = \overline{1, m}$  [77, 78]. Наближені значення невідомих функцій крайової задачі (3.37)–(3.46) шукаємо у вигляді

$$h(\mathbf{X}, t) \approx h_m(\mathbf{X}, t) = \sum_{j=1}^m h_j(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon_h), \quad (3.47)$$

$$c(\mathbf{X}, t) \approx c_m(\mathbf{X}, t) = \sum_{j=1}^m c_j(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon_c), \quad (3.48)$$

$$T(\mathbf{X}, t) \approx T_m(\mathbf{X}, t) = \sum_{j=1}^m T_j(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon_T) \quad (3.49)$$

$$N(\mathbf{X}, t) \approx N_m(\mathbf{X}, t) = \sum_{j=1}^m N_j(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon_N), \quad (3.50)$$

де  $\varepsilon_h > 0$ ,  $\varepsilon_c > 0$ ,  $\varepsilon_T > 0$ ,  $\varepsilon_N > 0$  – параметри форми базисної функції;  $\varphi_j(r_j, \varepsilon)$  – радіальні базисні функції;  $h_j(t)$ ,  $c_j(t)$ ,  $N_j(t)$ ,  $T_j(t)$  – невідомі коефіцієнти, які залежать від часу,  $r_j = \sqrt{(x - x_j^{(x)})^2 + (y - y_j^{(x)})^2 + (z - z_j^{(x)})^2}$ ,  $j = \overline{1, m}$ .

Покриємо замикання  $\overline{\Omega}$  області  $\Omega$  колокаційними точками  $\mathbf{Y}_i = (x_i^{(y)}, y_i^{(y)}, z_i^{(y)})$ ,  $i = \overline{1, M}$ . Вимагаємо  $m \leq M$ . Введемо множини  $\omega = \{i : \mathbf{Y}_i \in \Omega\}$ ,  $\gamma_1^{(h)} = \{i : \mathbf{Y}_i \in \Gamma_1^{(h)}\}$ ,  $\gamma_2^{(h)} = \{i : \mathbf{Y}_i \in \Gamma_2^{(h)}\}$ . Аналогічно визначаємо множини номерів граничних колокаційних точок для інших невідомих функцій. Введемо позначення

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i^{(y)} - x_j^{(x)})^2 + (y_i^{(y)} - y_j^{(x)})^2 + (z_i^{(y)} - z_j^{(x)})^2}, \quad j = \overline{1, m}, i = \overline{1, M}.$$

Підставляючи (3.47)–(3.50) в рівняння (3.37)–(3.40), початкові умови (3.42) та граничні умови (3.43)–(3.45), використовуючи метод колокації в точці, отримаємо задачу Коші типу (3.15)–(3.19) для системи нелінійних диференціальних рівнянь відносно векторів невідомих  $\mathbf{H}(\mathbf{t}) = \{h_j(t)\}_{j=1}^m$ ,

$$\mathbf{C}(\mathbf{t}) = \{C_j(t)\}_{j=1}^m, \quad \mathbf{N}(\mathbf{t}) = \{N_j(t)\}_{j=1}^m, \quad \mathbf{T}(\mathbf{t}) = \{T_j(t)\}_{j=1}^m,$$

$$\text{де } \mathbf{M}^{(k)} = \{m_{ij}^{(k)}\}_{i=1, j=1}^{M, m}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(k)} = \{\tilde{m}_{ij}^{(k)}\}_{i=1, j=1}^{M, m}, \quad \tilde{\mathbf{F}}^{(k)} = \{\tilde{f}_i^{(k)}\}_{i=1}^M, \quad k = \overline{1, 4}, \quad \mathbf{L}^{(k)} = \{l_{ij}^{(k)}\}_{i=1, j=1}^{M, m},$$

$$k = \overline{1, 3}, \quad \mathbf{L}^{(4)} = \{l_i^{(4)}\}_{i=1}^M, \quad \mathbf{A}'^{(1)} = \{a'_{ij}{}^{(1)}\}_{i=1, j=1}^{M, m}, \quad \mathbf{A}^{(1)} = \{a_{ij}^{(1)}\}_{i=1, j=1}^{M, m}, \quad \mathbf{E}'^{(k)} = \{e'_{ij}{}^{(k)}\}_{i=1, j=1}^{M, m},$$

$$\mathbf{K}^{(k)} = \{k_{ij}^{(k)}\}_{i=1, j=1}^{M, m}, \quad k = 1, 2, \quad \mathbf{F}^{(k)} = \{f_i^{(k)}\}_{i=1}^M, \quad k = \overline{1, 3};$$

$$m_{ij}^{(1)} = \begin{cases} -\varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_h), & i \in \omega, \\ 0, & i \notin \omega; \end{cases} \quad m_{ij}^{(2)} = \begin{cases} -\sigma\varphi_j(r_j, \varepsilon_C), & i \in \omega, \\ 0, & i \notin \omega; \end{cases}$$

$$m_{ij}^{(3)} = \begin{cases} -c_T\varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T), & i \in \omega, \\ 0, & i \notin \omega; \end{cases} \quad m_{ij}^{(4)} = \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_N), \quad i = \overline{1, M},$$

$$l_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \frac{(1+e)(1+2\xi)}{3\gamma a} \nabla \cdot (\mathbf{K}_h(c, N, T) \nabla \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_h)), & i \in \omega, \\ (\mathbf{K}_h(c, N, T) \nabla \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_h), \mathbf{n}), & i \in \gamma_2^h, \\ \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_h), & i \in \gamma_1^h; \end{cases}$$

$$a'_{ij}{}^{(1)} = \begin{cases} \frac{(1+e)(1+2\xi)}{3\gamma a} \nabla \cdot (\mathbf{v}_C \nabla \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_C)), & i \in \omega, \\ (\mathbf{v}_C \nabla \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_C), \mathbf{n}), & i \in \gamma_2^c, \\ 0, & i \notin \omega \cup \gamma_2^c; \end{cases}$$

$$l_{ij}^{(2)} = \begin{cases} \nabla \cdot (\mathbf{D} \nabla \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_C)) - (\mathbf{u}, \nabla \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_C)), & i \in \omega, \\ \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_C), & i \in \gamma_1^c, \\ (\mathbf{D} \nabla \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_C), \mathbf{n}), & i \in \gamma_2^c; \end{cases}$$

$$k_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \frac{\varepsilon e(1+e)(1+2\xi)}{3\gamma \rho_1 a} \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_N), & i \in \omega, \\ 0, & i \notin \omega; \end{cases} \quad k_{ij}^{(2)} = \begin{cases} \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_N), & i \in \omega, \\ 0, & i \notin \omega; \end{cases}$$

$$l_{ij}^{(3)} = \begin{cases} \nabla \cdot (\lambda \nabla \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T)) - \rho c_p(\mathbf{u}, \nabla \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T)), & i \in \omega, \\ \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T), & i \in \gamma_1^T, \\ (\lambda \nabla \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T), \mathbf{n}), & i \in \gamma_2^T; \end{cases}$$

$$l_i^{(4)} = \gamma_1 \left( \sum_{j=1}^m C_j(t) \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_C) - C_1^{(\max)} \right) \cdot \left( \sum_{j=1}^m N_j(t) \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_N) \right)^\alpha, \quad i = \overline{1, M};$$

$$a_{ij}^{(1)} = \begin{cases} -\frac{\varepsilon \sigma (1+e)(1+2\xi)}{3\gamma \rho_1 a} \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_C), & i \in \omega, \\ 0, & i \notin \omega. \end{cases}$$

$$f_i^{(1)} = \begin{cases} 0, & i \in \omega, \\ 0, & i \notin \omega; \end{cases} \quad f_i^{(2)} = \begin{cases} C_1, & i \in \gamma_1^c, \\ 0, & i \notin \gamma_1^c; \end{cases} \quad f_i^{(3)} = \begin{cases} 0, & i \in \gamma_2^T \cup \omega, \\ T_1, & i \in \gamma_1^T, \\ T_2, & i \in \gamma_1^T; \end{cases}$$

$$e'_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \frac{(1+e)(1+2\xi)}{3\gamma a} \nabla \cdot (\mathbf{v}_T \nabla \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T)), & i \in \omega, \\ (\mathbf{v}_T \nabla \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_T), \mathbf{n}), & i \in \gamma_2^T, \\ 0, & i \notin \omega \cup \gamma_2^T; \end{cases}$$

$$\tilde{f}_i^{(1)} = H_0(\mathbf{Y}_i), \quad \tilde{f}_i^{(2)} = C_0(\mathbf{Y}_i), \quad \tilde{f}_i^{(3)} = T_0(\mathbf{Y}_i), \quad \tilde{f}_i^{(4)} = N_0(\mathbf{Y}_i), \quad i = \overline{1, M}, \quad j = \overline{1, m}.$$

Для знаходження числового розв'язку отриманої задачі Коші діємо, як і в одновимірному або двовимірному випадках.

Також на кожному часовому шарі необхідно перераховувати координати вузлових та колокаційних точок. Для цього використаємо кінематичну умову верхньої змінної межі ґрунту (3.46), яка дає змогу скоригувати координати вузлів лише на верхній рухомій межі. Нехай на часовому шарі з номером  $(s)$  деяка точка області консолідації має координати  $(x, y, z^{(s)})$ . Згідно наших припущень в процесі консолідації масив ґрунту просідає лише у вертикальному напрямку. Тому для координат  $x, y$  вертикальний індекс  $(s)$  не застосовано. Для визначення нової вертикальної координати  $z^{(s+1)}$  вказаної точки області консолідації



$$\frac{z^{(s+1)} - z^{(s)}}{\tau} = - \int_{z^{(s)}}^{L(x,y)} \frac{1}{\left( \rho_1 - (1+e) \sum_{j=1}^m N_j^{(s+1)} \varphi_j(r_j, \varepsilon_N) \right) (1+e)} \times$$

$$\times \left( \gamma \rho_1 a \left( \sum_{j=1}^m \frac{h_j^{(s+1)} - h_j^{(s)}}{\tau} \varphi_j(r_j, \varepsilon_h) \right) - \gamma_1 (1+e) \left( C_1^{(max)} - \sum_{j=1}^m C_j^{(s+1)} \varphi_j(r_j, \varepsilon_C) \right) \right) \times$$

$$\times \left( \sum_{j=1}^m N_j^{(s+1)} \varphi_j(r_j, \varepsilon_N) \right)^\alpha dz.$$

Інтеграл можна обчислити за допомогою квадратурних формул, наприклад, за допомогою формули прямокутників.

### 3.3.3. Результати числових експериментів для просторової задачі та їх аналіз

Розглянемо тривимірну задачу фільтраційної консолідації шару засоленого глинистого ґрунту форми прямокутного паралелепіпеда довжиною ребер 22 м, 22 м, 11 м (рис. 3.17).

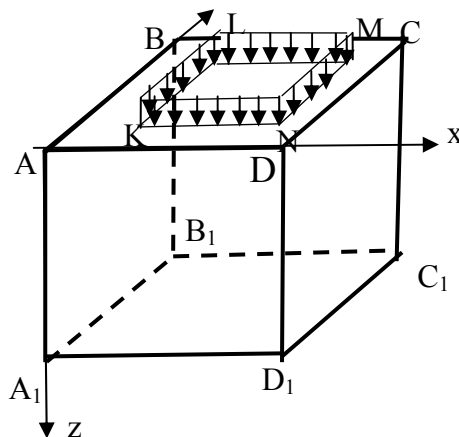


Рис. 3.17. Фільтраційна консолідація засоленого масиву ґрунту в формі прямокутного паралелепіпеда.

В області KLMN ґрунту прикладається зовнішнє навантаження інтенсивністю  $q(x,y)$ . Область KLMN – прямокутник зі сторонами, паралельними відповідним осям координат.

Для надлишкових напорів межі ABCD, ADA<sub>1</sub>D<sub>1</sub>, ABA<sub>1</sub>B<sub>1</sub>, CDC<sub>1</sub>D<sub>1</sub>, BCB<sub>1</sub>C<sub>1</sub> є дренажними, область KLMN та межа A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub> є непроникними. Для концентрації межі ABA<sub>1</sub>B<sub>1</sub>, CDC<sub>1</sub>D<sub>1</sub>, A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub>, ADA<sub>1</sub>D<sub>1</sub>, BCB<sub>1</sub>C<sub>1</sub>, ABCD непроникні, а область KLMN є дренажною. Температура на межі ABCD та області KLMN вважається відомою. Межу ABCD позначимо як Γ<sub>1</sub>, A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub> – Γ<sub>3</sub>, ABA<sub>1</sub>B<sub>1</sub> і CDC<sub>1</sub>D<sub>1</sub> – Γ<sub>4</sub>, ADA<sub>1</sub>D<sub>1</sub> та BCB<sub>1</sub>C<sub>1</sub> – Γ<sub>5</sub>, область KLMN – Γ<sub>2</sub>. Вихідні дані беремо наступними:

$$\sigma = 0.4, e = 0.7, \alpha = 0.5, a = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2 / \text{H}, \rho_1 = 2000 \text{ кг} / \text{м}^3,$$

$$C_1^{(\max)} = 350 \text{ г} / \text{л},$$

$$\lambda = 108 \text{ кДж} / (\text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба}), c_\rho = 4,2 \text{ кДж} / (\text{кг} \cdot \text{град}), T_1(t) = 50^\circ \text{C},$$

$$D = 0.02 \text{ м}^2 / \text{доба}, D_T = 0.002 \text{ м}^2 / \text{доба}, \gamma = 10^4 \text{ кг} / (\text{м}^2 \cdot \text{доба}^2), C_1(t) = C_1^{(\max)},$$

$$\gamma_1 = 6.5 \cdot 10^{-4} \text{ доба}^{-1}, \nu_c = 2.8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^5 / (\text{кг} \cdot \text{доба}), C_0(x) = 8 \text{ г} / \text{л},$$

$$c_T = 2137 \text{ кДж} / (\text{м}^3 \cdot \text{град}), \nu_T = 2,8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3 / (\text{доба} \cdot \text{град}),$$

$$T_2(t) = 17 + 13 \cos\left(\frac{\pi t}{180}\right), N_0(x, y, z) = 240 \left(-\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \frac{x}{l}\right) + 40,$$

$$C_0(x, y, z) = \begin{cases} C_1^{(\max)}, & p = 0, \\ C_0, & p \neq 0; \end{cases} \quad T_0(x, y, z) = \begin{cases} 50^\circ \text{C}, & p = 0, \\ 4^\circ \text{C}, & p \neq 0. \end{cases}$$

З урахуванням припущень щодо непроникності та дренажності меж, граничні умови матимуть наступний вигляд:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{\Gamma_2} = (\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{\Gamma_3} = 0, \quad h(x, y, z, t)|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial x}|_{\Gamma_4} = \frac{\partial h}{\partial y}|_{\Gamma_5} = 0, \quad t > 0,$$

$$\frac{\partial c}{\partial z}|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3} = \frac{\partial c}{\partial y}|_{\Gamma_5} = \frac{\partial c}{\partial x}|_{\Gamma_4} = 0, \quad c(x, y, z, t)|_{\Gamma_2} = C_1, \quad t > 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial z}|_{\Gamma_3} = \frac{\partial T}{\partial y}|_{\Gamma_5} = \frac{\partial T}{\partial x}|_{\Gamma_4} = 0, \quad T(x, y, z, t)|_{\Gamma_2} = T_1, \quad T(x, y, z, t)|_{\Gamma_1} = T_2(t), \quad t > 0.$$

Коефіцієнт фільтрації чистої води покладался рівним  $K_h = 0,002 \text{ м/доба}$ . Для залежності коефіцієнта фільтрації від концентрації солей в рідкій та твердій фазах, а також від температури використовувалася формула (3.20).

В області KLMN ґрунту прикладається зовнішнє навантаження інтенсивністю  $q=20 \cdot 10^4 \text{ кг/м}^2 \text{ доба}^2$ . Область KLMN – квадрат зі сторонами, паралельними відповідним осям координат при  $x \in [6,16]$  та  $y \in [6,16]$ .

Функцію  $T_2(t)$  визначали з умов сезонних коливань температури, причому  $T_{\max}(t) = 30^\circ \text{C}$ ,  $T_{\min}(t) = 4^\circ \text{C}$ .

Початковий розподіл надлишкових напорів  $h_0(\mathbf{X})$  залежить від властивостей ґрунту, а також від зовнішнього навантаження. Нехай маємо довільний закон розподілу навантаження  $q(x, y)$  в області  $\Phi$  його прикладання, яка лежить у площині  $z=0$ . Початкове значення надлишкового напору для точки, що лежить в області  $\Phi$  прикладання навантаження, визначаємо за формулою [65]

$$h_0(\mathbf{X}) = \frac{q(x, y)}{\gamma} + h_p, \quad (x, y) \in \Phi,$$

де  $h_p$  - значення напору в точці  $(x, y) \in \Phi$  до прикладання навантаження. Для довільної точки  $\mathbf{X} = (x, y, z)$  області консолідації  $\Omega$ , що не належить до області  $\Phi$  прикладання навантаження, значення надлишкових напорів у початковий момент часу визначаємо за формулою [65]

$$h_0(\mathbf{X}) = \frac{\Theta(\mathbf{X})}{3\gamma},$$

де  $\Theta(\mathbf{X})$  - сума головних напружень у точці  $\mathbf{X}$ , яка визначається згідно формули [65]

$$\Theta(\mathbf{X}) = \iint_{\Phi} \frac{q(\xi, \eta)}{\pi} (1 - \nu) \frac{z}{r^3} d\xi d\eta, \quad (3.51)$$

$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2}$ ;  $\nu$  - коефіцієнт Пуассона.

Розглянемо випадок, коли область  $\Phi$  являє собою прямокутник  $x \in [a; b], y \in [c; d]$ , а площина прикладення навантаження є паралельною до площини  $XOY$ . Тоді для наближеного обчислення інтеграла (3.51) покриваємо область  $\Phi$  сіткою  $n_x \times m_y$  з кроками  $\Delta x, \Delta y$  і на кожному з отриманих прямокутників  $(i, j), i = \overline{1, n_x}, j = \overline{1, m_y}$  замінюємо розподілене навантаження елементарними зосередженими силами  $q(x_i, y_j) \Delta x \Delta y$ , де  $(x_i, y_i)$  - внутрішня точка прямокутника  $(i, j)$ . Тоді інтеграл (3.51) можна замінити наступною сумою:

$$\Theta(x, y, z) = \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{m_y} \frac{q(x_i, y_j)}{\pi} (1 - \nu) \frac{z}{\left( (x - x_i)^2 + (y - y_j)^2 + z^2 \right)^{3/2}} \Delta x \Delta y.$$

Кількість вузлових точок покладалася рівною 216, а колокаційних – 1728. Крок по часу  $\tau = 30$  діб. Кількість часових проміжків 36. Параметр форми становив 1 для всіх невідомих функцій і використовувалась мультиквадратична РБФ  $\varphi(r) = \sqrt{1 + (r\varepsilon)^2}$ .

При наведених даних у площині при  $x = 10$  м паралельній  $YOZ$  побудовано графіки напорів, концентрації солей у твердій та рідкій фазах, температури на кожному часовому шарі (рис. 3.17–3.22).

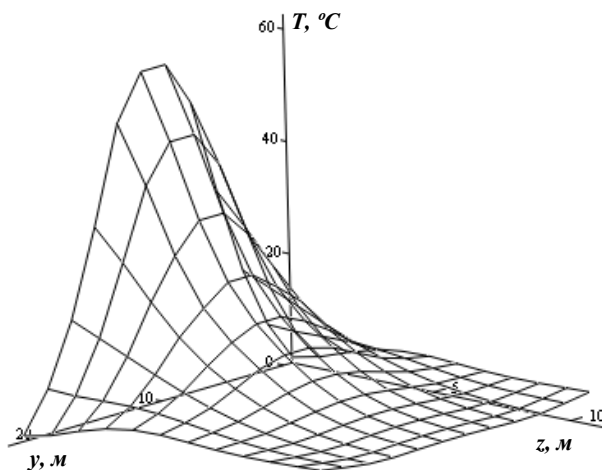


Рис. 3.17. Розподіл температури  
(  $t = 270$  діб,  $K_h = K_h(c, N, T)$  )

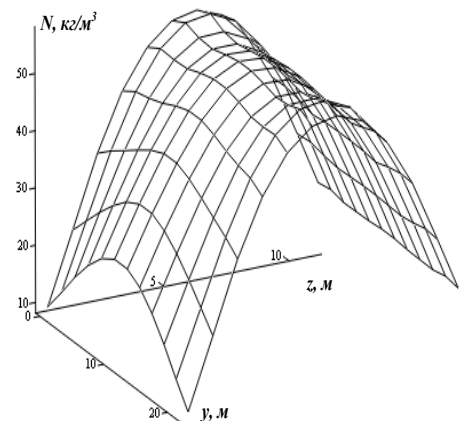


Рис. 3.18. Концентрація солей у  
твердій фазі  
(  $t = 270$  діб,  $K_h = K_h(c, N, T)$  )

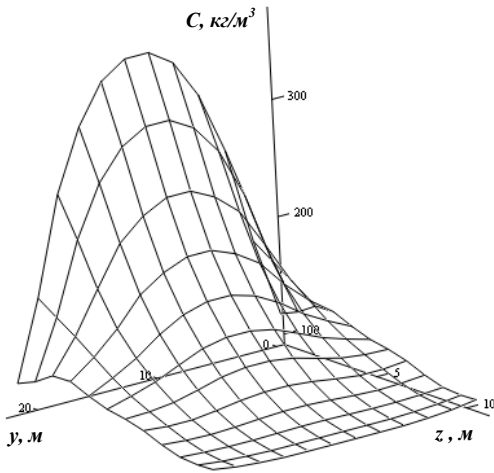


Рис. 3.19. Концентрація солей у рідкій фазі (  $t = 270$  діб ,  $K_h = K_h(c, N, T)$  )

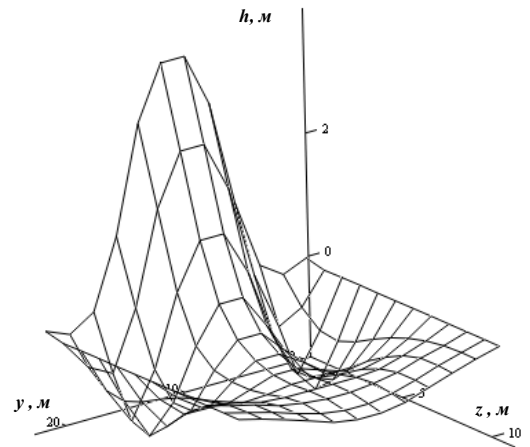


Рис. 3.20. Розподіл надлишкових напорів (  $t = 270$  діб ,  $K_h = K_h(c, N, T)$  )

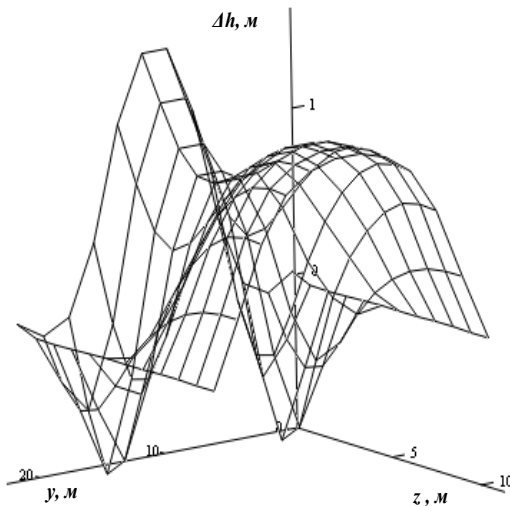


Рис. 3.21. Різниця розподілів надлишкових напорів із врахуванням просідання при  $\varepsilon = 1$  та  $\varepsilon = 0$ , (  $t = 270$  діб ,  $K_h = K_h(c, N, T)$  )

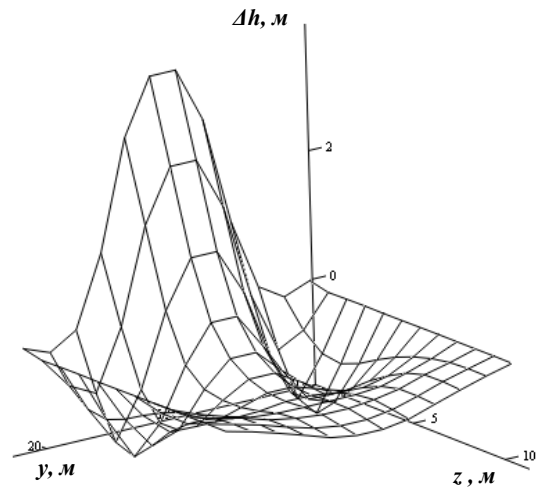


Рис. 3.22. Різниця розподілів надлишкових напорів засоленого і незасоленого ґрунту при врахуванні просідання (  $t = 270$  діб ,  $K_h = K_h(c, N, T)$  )

Таблиця 3.4

Величина просідань верхньої межі ґрунту при  $t = 330$  діб

Координати	X	10	10	10	10	10	10
	Y	0	2	4	6	8	10
Просідання, см		22,8	25,3	27,8	30,8	33,4	35,4

Таблиця 3.4 (продовження)

Координати	X	10	10	10	10	10	10
	Y	12	14	16	18	20	22
Просідання, см		35,4	33,4	30,8	27,8	25,3	22,8

Таблиця 3.5

Величина просідань верхньої межі ґрунту ( $t = 330$  діб,  $x = 10$  м,  $y = 10$  м)

№	Параметри	Величина просідань ґрунту			
		$K_h = K_h(c, N, T)$			$K_h = const$
			за рахунок зміни напорів	за рахунок хімічної суфозії	
1	$\varepsilon = 1$	35,4 см	16,5 см	18,9 см	36,3 см
2	$\varepsilon = 0$	20,4 см	20,4 см	-	20,4 см

Порівнюючи розподіл надлишкових напорів при врахуванні таких факторів, як просідання та засоленість ґрунту бачимо, напори розсіюються повільніше, аніж у випадку незасоленого (рис. 3.21). Це пояснюється залежністю  $K_h(c, N, T)$ . Концентрація солей у рідкій фазі  $c(\mathbf{X}, t)$  стає більшою за 60 г/л і коефіцієнт фільтрації різко зменшується.

Також відмітимо, що врахування наявності солей в рідкій та твердій фазах (рис. 3.21) уповільнює розсіювання надлишкових напорів. Це пояснюється тим, що при розчиненні кристаликів солі об'єм порової рідини збільшується, а отже і збільшується тиск порової рідини, який вона чинить на скелет ґрунту. Величина просідань також збільшується при врахуванні цього фактору, як при  $K_h = K_h(c, N, T)$  (див., наприклад, табл. 3.5 експерименти №1 та 2, де величини просідань стають 35,4 та 20,4 см відповідно), так і при  $K_h = const$  (див. ті ж експерименти, де величини просідань складають 36,3 см та 20,4 см відповідно).

Порівнюючи тенденцію впливу засоленості на розподіл надлишкових напорів з одно- та двовимірними задачами відмітимо, що якісна картина впливів співпадає. Але числові значення відрізняються. Так при збільшенні розмірності задачі величини просідань верхньої межі ґрунту зменшуються. Таке зменшення в основному зумовлюється змінами в початковому розподілі та в динаміці розсіювання надлишкових напорів. Просідання за рахунок хімічної суфозії в усіх задачах приблизно однакове (в табл.3.1. величина просідань

складає 50см і наведена при  $t = 1080 \text{ діб}$  в той час як в табл.3.3. просідання складає 16см при  $t = 330 \text{ діб}$ , в табл.3.5. – просідання 18,5см при  $t = 330 \text{ діб}$ ).

Просідання досягає максимального значення в області прикладання навантаження, і поступово зменшується із збільшенням відстані від даної області. Також просідання є симетричним (табл. 3.4).

Зазначимо, що при врахуванні лише хімічного осмосу просідання становить 35,4 см, а при врахування лише термічного осмосу – 30 см. Як видно з експерименту №1 (див. табл. 3.5), просідання за рахунок хімічної суфозії (53,4 % від загальної величини просідання) є більшим, ніж просідання за рахунок зміни надлишкових напорів (46,6 % від загальної величини просідання). Отже, просіданням за рахунок впливу хімічних факторів на засолених ґрунтах є значним і нехтувати їм не можна.

### ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 3

В даному розділі отримані наступні результати:

1. Сформульовані постановки задач фільтраційної консолідації ґрунтів з урахуванням їх засоленості та хімічної суфозії в одно-, дво- та тривимірному випадках.
2. Використовуючи результати розділу 2, побудовані математичні моделі вищевказаних задач. Математичні моделі описуються нелінійними крайовими задачами для систем параболічних рівнянь, що доповнені рівняннями кінетики масообмінних процесів.
3. Знайдено числовий розв'язок відповідних одно-, дво- та тривимірної крайових задач безсітковим методом радіальних базисних функцій.
4. Проведено ряд числових експериментів. Зокрема досліджено частковий випадок фільтраційної консолідації шару засоленого глинистого ґрунту з урахуванням ряду факторів. Наприклад, порівнюючи розподіл надлишкових напорів при врахуванні таких факторів, як просідання та засоленість ґрунту напори розсіюються повільніше у випадку засоленого ґрунту, аніж у випадку

незасоленого. Також відмітимо, що урахування наявності солей в рідкій та твердій фазах уповільнює розсіювання надлишкових напорів. Врахування даного фактору також збільшує величину просідань, як при  $K_h = K_h(c, N, T)$  (величини просідань стають 35,4 та 20,4 см відповідно), так і при  $K_h = const$  (величини просідань складають 36,3 см та 20,4 см відповідно).

Отже, в процесі тривалої фільтраційної консолідації і наявності хімічної суфозії здійснюється значне вилуговування сольового комплексу, внаслідок чого відбувається суфозійне осідання поверхні ґрунту і можуть виникати значні деформації будівель, що розміщені на них. Тому потрібно досить ретельно враховувати вказані фактори при проектуванні будівництва на таких ділянках, щоб при експлуатації споруд не зазнати значних збитків.

Результати даного розділу опубліковані в роботах [40, 44, 82, 88-90, 95]



## РОЗДІЛ 4

### МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЛЬТРАЦІЙНОЇ КОНСОЛІДАЦІЇ ГРУНТІВ З УРАХУВАННЯМ ВПЛИВУ БАГАТОКОМПОНЕНТНИХ ХІМІЧНИХ РОЗЧИНІВ

В даному розділі сформульовані постановки та дослідженні математичні моделі задач фільтраційної консолідації ґрунтів з урахуванням впливу багатоконпонентних сольових розчинів. Для визначення посідань використано кінематичну граничну умову на верхній рухомій межі масиву ґрунту з урахуванням хімічної суфозії. Числові розв'язки відповідних одно-, дво- та тривимірної крайових задач знайдено безсітковим методом радіальних базисних функцій. Проведено ряд числових експериментів та здійснений їх аналіз.

#### 4.1. Одновимірна задача фільтраційної консолідації ґрунту з урахуванням впливу багатоконпонентних хімічних розчинів та її числове розв'язання

##### 4.1.1. Постановка задачі та її математична модель

Нехай маємо масив ґрунту початковою товщиною  $L$ , який під впливом миттєво прикладеного незмінного у часі зовнішнього навантаження інтенсивністю  $q$  знаходиться в процесі фільтраційної консолідації (рис.4.1). Ґрунт містить в своєму складі різні хімічні речовини. Тобто, поровою рідиною ґрунту є  $n_0$  - компонентний хімічний розчин з концентрацією речовин  $c_i(x,t), i = \overline{1, n_0}$ . Крім того, дані  $n_0$  хімічних компонент в ґрунті наявні і в твердій фазі. З основи прикладеного навантаження, що являє собою фундамент цеху деякого хімічного виробництва, в ґрунт починає надходити  $n_z$  - компонентний хімічний розчин, концентрацією  $c_i(x,t), i = \overline{1, n_z}$ . Це призводить до зміни масобмінних процесів в ґрунті. Як результат реакції між  $n_0$  -

компонентним поровим розчином та  $n_z$  - компонентним розчином, що надходить у ґрунт, утворюється  $n$  - компонентний розчин (причому,  $(n_1 + n_z)$  не обов'язково дорівнює  $n$ ). Крім того, фундамент споруди призводить до зміни температурного поля ґрунту. Задача полягає в дослідженні процесів консолідації досліджуваного масиву ґрунту з урахуванням впливу тепло-солепереносу коли поровий розчин є  $n$  - компонентний (рис.4.1).

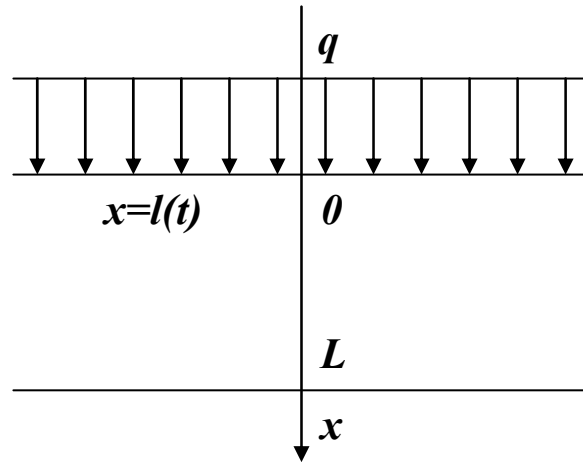


Рис. 4.1. Досліджуваний масив ґрунту в одновимірному випадку

Математична модель поставленої задачі консолідації ґрунту в області  $\Omega$  під впливом миттєво прикладеного незмінного у часі зовнішнього навантаження з урахуванням впливу  $n$ -компонентного сольового розчину та неізотермічних умов на основі викладок розділу 2 може бути описана наступною крайовою задачею [92-94]:

$$\frac{1+e}{\gamma a} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( K_h(\mathbf{c}, \mathbf{N}, T) \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x} \left( v_{c_i} \frac{\partial c_i}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( v_T \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right) + \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon_i (1+e)}{\gamma \rho_i a} \left( \sigma \frac{\partial c_i}{\partial t} - e \frac{\partial N_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial h}{\partial t}, \quad x \in (l(t); L), \quad t > 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( D_T^{(i)} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( D_i \frac{\partial c_i}{\partial x} \right) - \mathbf{u} \frac{\partial c_i}{\partial x} = \sigma \frac{\partial c_i}{\partial t} + \frac{\partial N_i}{\partial t}, \quad i = \overline{1, n}, \quad x \in (l(t); L), \quad t > 0, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} = -\gamma_i (C_i^{(\max)}(\mathbf{c}, T) - c_i) N_i^{\alpha_i}, \quad i = \overline{1, n}, \quad x \in (l(t); L), \quad t > 0, \quad (4.3)$$

$$\mathbf{u} - e v = -K_h(\mathbf{c}, \mathbf{N}, T) \frac{\partial h}{\partial x} + \sum_{i=1}^n v_{c_i} \frac{\partial c_i}{\partial x} + v_T \frac{\partial T}{\partial x}, \quad i = \overline{1, n}, \quad x \in (l(t); L), \quad t > 0, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \rho c_{\rho} \mathbf{u} \frac{\partial T}{\partial x} = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, \quad x \in (l(t); L), t > 0, \quad (4.5)$$

$$h(x, 0) = H_0(x), \quad c_i(x, 0) = C_i^{(0)}(x), \quad N_i(x, 0) = N_i^{(0)}(x), \quad i = \overline{1, n},$$

$$T(x, 0) = T_0(x), \quad x \in (l(t); L), \quad (4.6)$$

$$h(0, t) = 0, \quad \mathbf{u}|_{x=l} = 0, \quad c_i(0, t) = C_i^{(1)}(t), \quad \left. \frac{\partial c_i(x, t)}{\partial x} \right|_{x=l} = 0, \quad i = \overline{1, n},$$

$$T(0, t) = T_1(t), \quad \left. \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right|_{x=l} = 0, \quad (4.7)$$

де  $l(0) = 0$ ,  $t \in [0; t]$ ,  $H_0(x)$ ,  $C_i^{(0)}(x)$ ,  $N_i^{(0)}(x)$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $T_0(x)$  - задані функції;  $e$  - коефіцієнт пористості;  $\gamma$  - питома вага сольового розчину;  $a$  - коефіцієнт стисливості ґрунту;  $K_h(\mathbf{c}, \mathbf{N}, T)$  - коефіцієнт фільтрації;  $\nu_{c_i}, i = \overline{1, n}$ ,  $\nu_T$  - коефіцієнти хімічного та термічного осмосів;  $N_i, i = \overline{1, n}$  - концентрація солей в твердій фазі;  $\rho_i, i = \overline{1, n}$  - густина солей в твердій фазі;  $\varepsilon_i \in \{0, 1\}, i = \overline{1, n}$  - коефіцієнт врахування або не врахування впливу концентрації солей на рівняння нерозривності рідкої та твердої фаз;  $\sigma$  - пористість ґрунту;  $D_i, i = \overline{1, n}$  - коефіцієнти хімічної дифузії;  $\gamma_i, i = \overline{1, n}$  - коефіцієнти швидкості масообміну;  $\alpha_i, i = \overline{1, n}$  - показники степенів, які визначаються експериментальним шляхом і залежать від характеру засоленості породи;  $D_T^{(i)}, i = \overline{1, n}$  - коефіцієнти термічної дифузії;  $C_i^{(\max)}(\mathbf{c}, T), i = \overline{1, n}$  - концентрації граничного насичення;  $\mathbf{u}$  - вектор швидкості фільтрації;  $\mathbf{v}$  - вектор швидкості руху твердих частинок ґрунту;  $\lambda$  - коефіцієнт теплопровідності вологого ґрунту;  $\rho$  - густина порового сольового розчину;  $c_{\rho}$  - питома теплоємність порового сольового розчину;  $c_T$  - об'ємна теплоємність ґрунту.

В процесі консолідації тверді частинки ґрунту зближаються. Як результат – верхня межа ґрунту просідає і область консолідації змінюється з часом. Крім того, зміна області консолідації може відбуватись і за рахунок хімічної суфозії. Тому крайова задача (4.1)-(4.7) має бути доповнена кінематичною граничною умовою на рухомій верхній межі. Дану умову виведено в тривимірному

випадку в пункті 2.5 розділу 2, припустивши, що ґрунт може просідати лише за рахунок вертикальних зміщень. Тому для одновимірної задачі маємо

$$\frac{dl(t)}{dt} = - \int_{l(t)}^L \frac{1}{\left(1 - (1+e) \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{\rho_i}\right) (1+e)} \times$$

$$\times \left( \gamma \alpha \frac{\partial h}{\partial t} - (1+e) \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{\rho_i} (C_i^{(max)}(\mathbf{c}, T) - c_i) N_i^{\alpha_i} \right) dx. \quad (4.8)$$

#### 4.1.2. Схема відшукування наближеного розв'язку одновимірної крайової задачі методом радіальних базисних функцій

Числове розв'язання крайової задачі (4.1)–(4.8) шукаємо методом радіальних базисних функцій [43, 162, 168, 174, 175].

Покриємо замикання  $\bar{\Omega} = [l(t), L]$  області  $\Omega = (l(t), L)$  вузловими точками  $x_j$ ,  $j = \overline{1, m}$  [77, 78]. Враховуємо, що  $l(t)|_{t=0} = 0$ . Наближені значення невідомих функцій крайової задачі (4.1)–(4.8) шукаємо у вигляді

$$h(x, t) \approx \sum_{j=1}^m h_j(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon_h), \quad (4.9)$$

$$c_i(x, t) \approx \sum_{j=1}^m c_{ij}(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon_{c_i}), \quad i = \overline{1, n}, \quad (4.10)$$

$$N_i(x, t) \approx \sum_{j=1}^m N_{ij}(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon_{N_i}), \quad i = \overline{1, n}, \quad (4.11)$$

$$T(x, t) \approx \sum_{j=1}^m T_j(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon_T), \quad (4.12)$$

де  $\varepsilon_h, \varepsilon_{c_i}, \varepsilon_{N_i}, \varepsilon_T$ ,  $i = \overline{1, n}$  – параметри форми базисної функції;  $\varphi_j(r_j, \varepsilon)$  – радіальні базисні функції;  $h_j(t), c_{ij}(t), N_{ij}(t), T_j(t)$  – невідомі коефіцієнти, які залежать від часу;  $r_j = \sqrt{(x - x_j)^2}$ ,  $j = \overline{1, m}$ .

Покриємо замикання  $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$  області  $\Omega$  колокаційними точками  $y_k$ ,  $k = \overline{1, M}$ . Причому  $y_1 = 0$ ,  $y_M = l$ ,  $M \geq m$ . Також введемо позначення

$$r_{kj} = \sqrt{(y_k - x_j)^2}, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, M}, \quad M \geq m.$$

Підставляючи (4.9)–(4.12) в рівняння (4.1)–(4.3), (4.5) початкові умови (4.6) та граничні умови (4.7) використовуючи метод колокації в точці, отримаємо задачу Коші для системи нелінійних диференціальних рівнянь відносно векторів невідомих  $\mathbf{H}(t) = \{h_j(t)\}_{j=1}^m$ ,  $\mathbf{C}_i(t) = \{c_{ij}(t)\}_{j=1}^m$ ,  $\mathbf{N}_i(t) = \{N_{ij}(t)\}_{j=1}^m$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $\mathbf{T}(t) = \{T_j(t)\}_{j=1}^m$  :

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}^{(1)} \frac{d\mathbf{H}(t)}{dt} + \mathbf{L}^{(1)}(\mathbf{C}(t), \mathbf{N}(t), \mathbf{T}(t))\mathbf{H}(t) = \\ & = \sum_{i=1}^n \left( \mathbf{K}_i^{(1)} \frac{d\mathbf{N}_i(t)}{dt} + \mathbf{A}_i^{(1)} \frac{d\mathbf{C}_i(t)}{dt} + \mathbf{A}_i^{\prime(1)} \mathbf{C}_i(t) \right) + \mathbf{E}^{(1)} \mathbf{T}(t) + \mathbf{F}^{(1)}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\mathbf{M}_i^{(2)} \frac{d\mathbf{C}_i(t)}{dt} + \mathbf{L}_i^{(2)}(\mathbf{C}_i(t), \mathbf{N}_i(t), \mathbf{T}(t))\mathbf{C}_i(t) = \mathbf{K}_i^{(2)} \frac{d\mathbf{N}_i(t)}{dt} + \mathbf{E}^{(2)} \mathbf{T}(t) + \mathbf{F}^{(2)}, \quad i = \overline{1, n} \quad (4.14)$$

$$\mathbf{M}_i^{(3)} \frac{d\mathbf{N}_i(t)}{dt} = \mathbf{L}_i^{(3)}(\mathbf{C}_i(t), \mathbf{N}_i(t), \mathbf{T}(t)), \quad i = \overline{1, n}, \quad (4.15)$$

$$\mathbf{M}^{(4)} \frac{d\mathbf{T}(t)}{dt} + \mathbf{L}^{(4)}(\mathbf{C}(t), \mathbf{N}(t), \mathbf{T}(t))\mathbf{T}(t) = \mathbf{F}^{(4)}, \quad (4.16)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}^{(1)} \mathbf{H}_0(t) = \tilde{\mathbf{F}}^{(1)}, \quad \tilde{\mathbf{M}}_i^{(2)} \mathbf{C}_i^{(0)}(t) = \tilde{\mathbf{F}}^{(2)}, \quad \tilde{\mathbf{M}}_i^{(3)} \mathbf{N}_i^{(0)}(t) = \tilde{\mathbf{F}}^{(3)}, \quad i = \overline{1, n}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(4)} \mathbf{T}_0(t) = \tilde{\mathbf{F}}^{(4)}, \quad (4.17)$$

де  $\mathbf{M}_i^{(s)} = \{m_{ikj}^{(s)}\}_{k=1, j=1}^{M, m}$ ,  $\tilde{\mathbf{M}}_i^{(s)} = \{\tilde{m}_{ikj}^{(s)}\}_{k=1, j=1}^{M, m}$ ,  $s = 2, 3$ ;  $\mathbf{L}_i^{(2)} = \{l_{ikj}^{(2)}\}_{k=1, j=1}^{M, m}$ ,  $\mathbf{L}_i^{(3)} = \{l_{ikj}^{(3)}\}_{k=1}^M$ ,  
 $\mathbf{M}^{(s)} = \{m_{kj}^{(s)}\}_{k=1, j=1}^{M, m}$ ,  $\tilde{\mathbf{M}}^{(s)} = \{\tilde{m}_{kj}^{(s)}\}_{k=1, j=1}^{M, m}$ ,  $\mathbf{L}^{(s)} = \{l_{kj}^{(s)}\}_{k=1, j=1}^{M, m}$ ,  $s = 1, 4$ ;  $\mathbf{K}_i^{(s)} = \{k_{ikj}^{(s)}\}_{k=1, j=1}^{M, m}$ ,  
 $s = 1, 2$ ;  $\mathbf{A}_i^{(1)} = \{a_{ikj}^{(1)}\}_{k=1, j=1}^{M, m}$ ,  $\mathbf{A}_i^{\prime(1)} = \{a_{ikj}^{\prime(1)}\}_{k=1, j=1}^{M, m}$ ,  $\mathbf{E}^{(1)} = \{e_{kj}^{(1)}\}_{k=1, j=1}^{M, m}$ ,  $\mathbf{E}^{(2)} = \{e_{kj}^{(2)}\}_{k=1, j=1}^{M, m}$ ,  
 $\tilde{\mathbf{F}}^{(s)} = \{\tilde{f}_j^{(s)}\}_{j=1}^m$ ,  $\mathbf{F}^{(k)} = \{f_j^{(k)}\}_{j=1}^m$ ,  $s = \overline{1, 4}$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Елементи матриць задачі Коші (4.13)–(4.17) визначаються наступним чином:

$$\begin{aligned} m_{kj}^{(1)} &= -\varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_h), \quad k = \overline{2, M-1}; \quad m_{ikj}^{(2)} = -\sigma \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_{c_i}), \quad k = \overline{2, M-1}, \quad i = \overline{1, n}; \\ m_{ikj}^{(3)} &= \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_{N_i}), \quad k = \overline{1, M}, \quad i = \overline{1, n}; \quad m_{kj}^{(4)} = -c_T \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_T), \quad k = \overline{2, M-1}; \end{aligned}$$

$$l_{kj}^{(1)} = \begin{cases} \frac{1+e}{\gamma a} \frac{\partial}{\partial x} \left( K_h(\mathbf{c}, \mathbf{N}, T) \frac{d\varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_h)}{dx} \right), & k = \overline{2, M-1}; \\ K_h(\mathbf{c}, \mathbf{N}, T) \frac{d\varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_h)}{dx}, & k = 1; \\ \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_h), & k = M; \end{cases}$$

$$l_{ikj}^{(2)} = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left( \mathbf{D}_i \frac{d\varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_{c_k})}{dx} \right) - \mathbf{u} \frac{d\varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_{c_k})}{dx}, & k = \overline{2, M-1}; \\ \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_{c_k}), & k = 1; \\ \frac{d\varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_{c_k})}{dx}, & k = M; \end{cases}$$

$$l_{ik}^{(3)} = \gamma_i \left( \sum_{j=1}^m \mathbf{c}_{ij}(\mathbf{t}) \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_{c_k}) - C_i^{(\max)}(\mathbf{c}, T) \right) \cdot \left( \sum_{j=1}^m \mathbf{N}_{ij}(\mathbf{t}) \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_{N_i}) \right)^{\alpha_i}, \quad k = \overline{1, M}, i = \overline{1, n};$$

$$l_{kj}^{(4)} = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x^2} \left( \lambda \frac{\partial \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_T)}{\partial x} \right) - \rho c_\rho \mathbf{u} \frac{\partial \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_T)}{\partial x}, & k = \overline{2, M-1}; \\ \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_T), & k = 1; \\ \frac{\partial \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_T)}{\partial x}, & k = M; \end{cases}$$

$$k_{ikj}^{(1)} = \frac{\varepsilon_{c_i} (1+e)e}{\gamma \rho_i a} \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_{N_i}), \quad k = \overline{2, M-1}, i = \overline{1, n}; \quad k_{ikj}^{(2)} = \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_{N_i}), \quad k = \overline{2, M-1};$$

$$a_{kij}^{(1)} = -\frac{\varepsilon_{c_i} (1+e)n}{\gamma \rho_i a} \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_{c_i}), \quad k = \overline{2, M-1}, i = \overline{1, n};$$

$$a_{ikj}^{(1)} = \frac{1+e}{\gamma a} \cdot \frac{d}{dx} \left( v_{c_i} \frac{d\varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_{c_i})}{dx} \right), \quad k = \overline{2, M-1}, i = \overline{1, n};$$

$$e_{kj}^{(1)} = \frac{1+e}{\gamma a} \cdot \frac{d}{dx} \left( v_T \frac{d\varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_T)}{dx} \right), \quad k = \overline{2, M-1};$$

$$e_{kj}^{(2)} = \frac{d}{dx} \left( D_T^{(i)} \frac{d\varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_T)}{dx} \right), \quad k = \overline{2, M-1}; \quad f_j^{(1)} = 0; \quad f_j^{(2)} = C_i^{(\max)}, \quad i = \overline{1, n};$$

$$\tilde{f}_j^{(1)} = H_0(x_j), \quad \tilde{f}_j^{(2)} = C_i^{(0)}(x_j), \quad \tilde{f}_j^{(3)} = N_i^{(0)}(x_j), \quad \tilde{f}_j^{(4)} = T_0(x_j), \quad j = \overline{1, m}, i = \overline{1, n}.$$

Для знаходження числового розв'язку задачі Коші (4.13)–(4.17) поділили часовий відрізок  $[0, t_0]$  на  $s$  однакових частин з кроком  $\tau$ . Для дискретизації рівнянь (4.13), (4.14), (4.16) по часу використано повністю неявну лінеаризовану різницеву схему [120]. Запис цієї схеми аналогічний до наведеного в розділі 3 для системи лінійних рівнянь задачі Коші (3.15)–(3.19). Аналогічно, оскільки рівняння системи (4.15) є нелінійними, то для знаходження їх числових розв'язків використано лінеаризацію за Ньютоном. Отриману після дискретизації по часу систему лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) розв'язано модифікованим методом Гауса, але перед цим попередньо використовувався метод найменших квадратів [148].

Також на кожному часовому шарі необхідно перераховувати координати вузлових та колокаційних точок. Для цього використаємо кінематичну умову (4.8). Маємо

$$\begin{aligned} \frac{x_j^{(s+1)} - x_j^{(s)}}{\tau} = & - \int_{x^{(s)}}^L \frac{1}{\left(1 - (1+e) \sum_{i=1}^n \frac{1}{\rho_i} \sum_{k=1}^m N_{ik}^{(s+1)} \varphi_k(r_{kj}, \varepsilon_{N_i})\right)(1+e)} \times \\ & \times \left( \gamma \alpha \left( \sum_{k=1}^m \frac{h_k^{(s+1)} - h_k^{(s)}}{\tau} \varphi_k(r_{kj}, \varepsilon_h) \right) - \right. \\ & \left. - (1+e) \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{\rho_i} \left( C_i^{(\max)}(\mathbf{c}, T) - \sum_{k=1}^m c_k^{(s+1)} \varphi_k(r_{kj}, \varepsilon_{c_i}) \right) \left( \sum_{k=1}^m N_{ik}^{(s+1)} \varphi_k(r_{kj}, \varepsilon_{N_i}) \right)^{\alpha_i} dx. \end{aligned}$$

#### 4.1.3. Результати числових експериментів в одновимірному випадку та їх аналіз

Розглянемо одновимірну задачу фільтраційної консолідації шару загіпсованого ґрунту товщини  $l=25$  м. Ґрунт вважається однорідним та ізотропним за своїми характеристиками. Прикладене навантаження інтенсивністю  $q = 10^5 \text{ кг/м}^2 \cdot \text{доба}^2$ . З фундаменту споруди в ґрунт починає надходити висококонцентрований розчин кам'яної солі. Нехай  $c_1(\mathbf{X}, t)$ ,  $N_1(\mathbf{X}, t)$

- концентрації звичайної кам'яної солі NaCl, яка починає надходити в ґрунт з фундаменту споруди;  $c_2(\mathbf{X}, t)$ ,  $N_2(\mathbf{X}, t)$  - концентрації гіпсу. Вхідні дані вибираємо наступними:

$$\begin{aligned} \sigma &= 0.4, \quad e = 0.7, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 0.5, \quad a = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{H}, \quad \rho_1 = 2000 \text{ кг/м}^3, \\ \rho_2 &= 2300 \text{ кг/м}^3, \quad C_1^{(\max)} = 350 \text{ г/л}, \quad \nu_2 = 2.9 \cdot 10^{-5} \text{ м}^5/\text{кг} \cdot \text{доба}, \\ \nu_T &= 2.8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^5/\text{кг} \cdot \text{доба}, \quad \gamma_1 = 0 \text{ доба}^{-1}, \quad \gamma_2 = 6.5 \cdot 10^{-5} \text{ доба}^{-1}, \\ \gamma &= 10^4 \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{доба}^2), \quad c_T = 2137 \text{ кДж/м}^3 \cdot \text{град}, \quad c_p = 4,2 \text{ кДж/кг} \cdot \text{град}, \\ \lambda &= 108 \text{ кДж/м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба}, \quad T_1 = 20^\circ\text{C}, \quad T_2 = 4^\circ\text{C}, \quad C_1^{(0)}(x) = 10 \text{ г/л}, \\ C_2^{(0)}(x) &= 0.1 \text{ г/л}, \quad T_0(x) = 4^\circ\text{C}, \quad H_1(t) = 0, \quad H_2(t) = 0, \quad C_1^{(1)}(t) = 0.1 \text{ г/л}, \\ C_2^{(1)}(t) &= 0.1 \text{ г/л}, \quad C_1^{(2)}(t) = 5 \text{ г/л}, \quad C_2^{(2)}(t) = 10 \text{ г/л}. \end{aligned}$$

Для апроксимації залежності  $C_2^{(\max)} = C_2^{(\max)}(C_1, T)$  використовувався метод РБФ з експериментальними даними, взятими з графічної залежності, зображеної на рис.2.3 для NaCl. Також використовувалась залежність концентрації граничного насичення для гіпсу від температури (див. табл. 2.3). Графічно вказані залежності зображено на рис.4.3.

Коефіцієнт фільтрації чистої води покладался рівним  $0,001 \text{ м/доба}$ . В залежності  $K_h(c_1, N_2, T) = k_0(c_1, T) e^{-\gamma \frac{N_2}{N_2^{(\max)}}}$  [58, 71] при апроксимації  $k_0(c_1, T)$  використовувався метод РБФ з експериментальними даними взятими із таблиці 2.2 (див. рис. 4.2). Оскільки концентрація  $c_2(x, t)$  не перевищує  $8 \text{ г/л}$ , то коефіцієнт фільтрації покладался залежним лише від  $c_1(x, t)$ . З іншого боку вважається, що NaCl в твердій фазі в ґрунті відсутній, а наявний лише гіпс з концентрацією  $N_2(x, t)$ , який з часом може розчинятись. Тому коефіцієнт фільтрації покладається залежним від  $N_2(x, t)$ .

Загіпсованість ґрунту приймалась в межах від 10% до 30%, а густина ґрунту  $\rho_g = 2000 \text{ кг/м}^3$  (сюди включаються тверді нерозчинні частинки та



гіпс). Початкове значення гіпсу в твердій фазі обчислювалось за формулою

$$N_1^{(0)} = \frac{m_g}{100} \rho_g, \text{ де } m_g - \text{загіпсованість ґрунту (у відсотках).}$$

Кількість вузлових точок покладалася рівною 100, а колокаційних – 120. Крок по часу  $\tau = 30$  діб. Параметри форми для невідомих функцій становили:

$$\varepsilon_h = 1.2, \varepsilon_{c_1} = 1.1, \varepsilon_{c_2} = 1.1, \varepsilon_{N_1} = 0.9, \varepsilon_{N_2} = 0.7, \varepsilon_T = 0.3.$$

При вказаних даних були знайдені значення напору, концентрації солей та гіпсу у твердій та рідкій фазах, температури на кожному часовому проміжку з використанням мультиквадратичної РБФ  $\varphi(r, \varepsilon) = \sqrt{1 + (r\varepsilon)^2}$  і побудовані відповідні графіки (рис. 4.4. – 4.14) при  $t = 720$  діб.

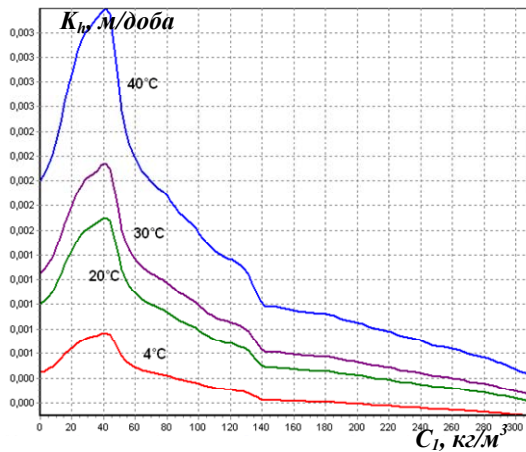


Рис. 4.2. Графік коефіцієнта фільтрації  $K_h = K_h(C_1, T)$

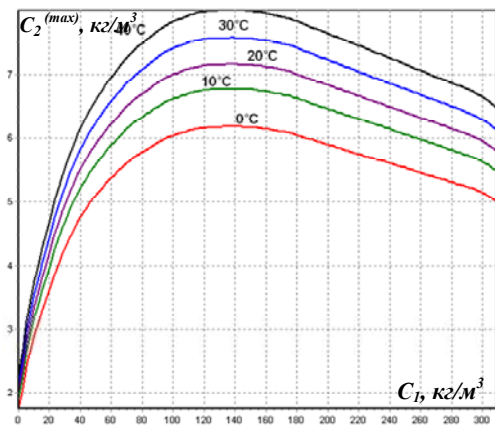


Рис. 4.3. Графік залежності  $C_2^{(max)} = C_2^{(max)}(C_1, T)$

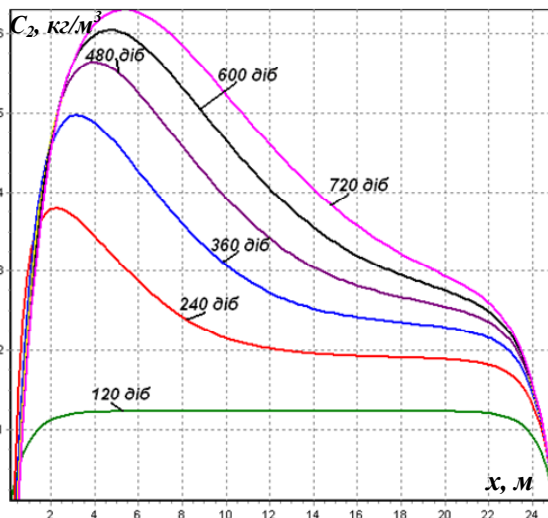


Рис. 4.4. Концентрація гіпсу у рідкій фазі ( $C_2^{(max)} = C_2^{(max)}(C_1, T)$ )

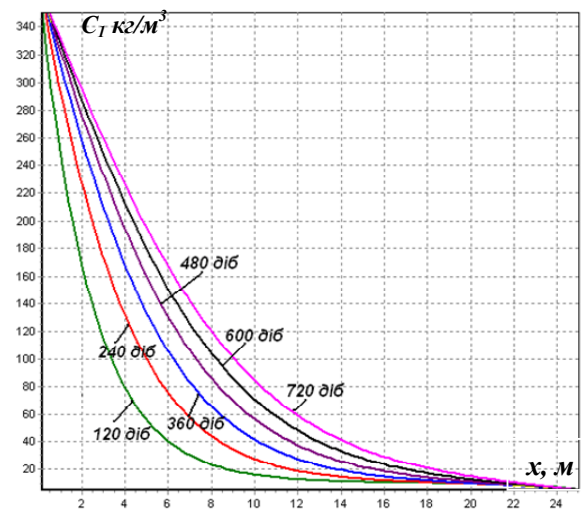


Рис. 4.5. Концентрація солей NaCl у рідкій фазі ( $C_2^{(max)} = C_2^{(max)}(C_1, T)$ )

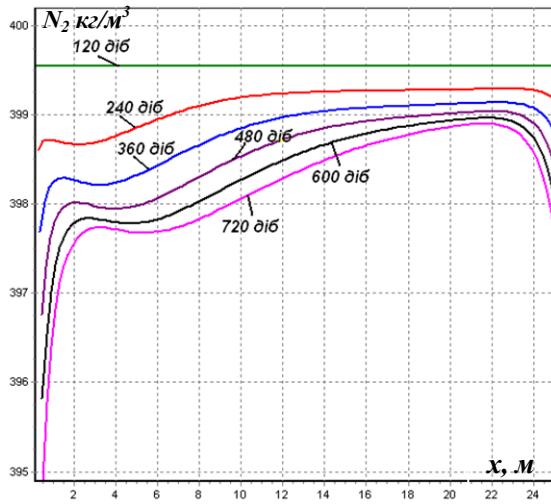


Рис. 4.6. Концентрація гіпсу у твердій фазі ( $C_2^{(max)} = C_2^{(max)}(C_1, T)$ )

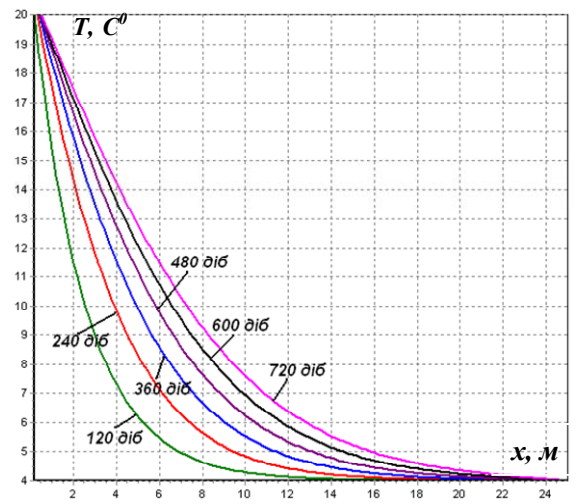


Рис. 4.7. Розподіл температури ( $C_2^{(max)} = C_2^{(max)}(C_1, T)$ )

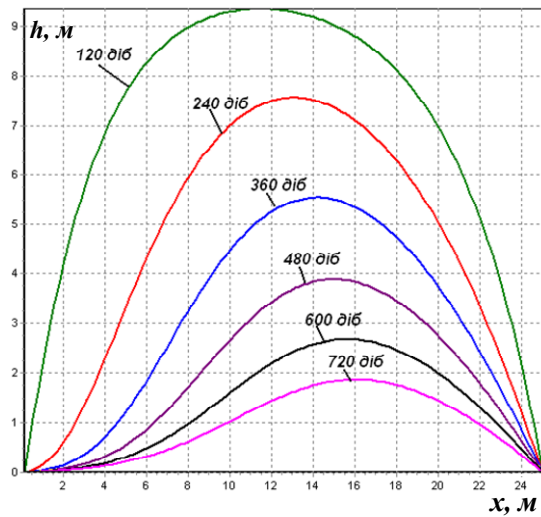


Рис. 4.8. Розподіл надлишкових напорів ( $C_2^{(max)} = C_2^{(max)}(C_1, T)$ )

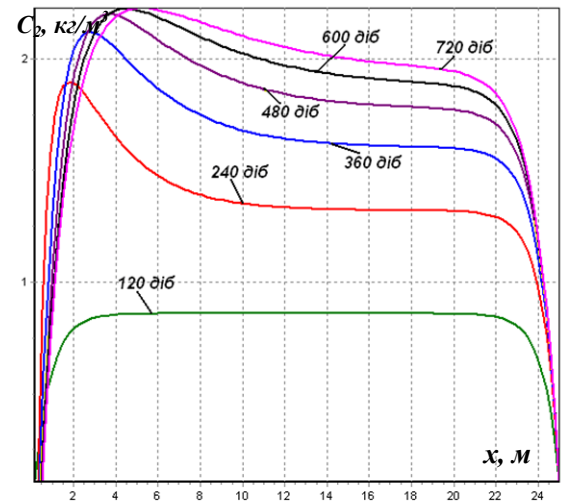


Рис. 4.9. Концентрація гіпсу у рідкій фазі ( $C_2^{(max)} = const$ )

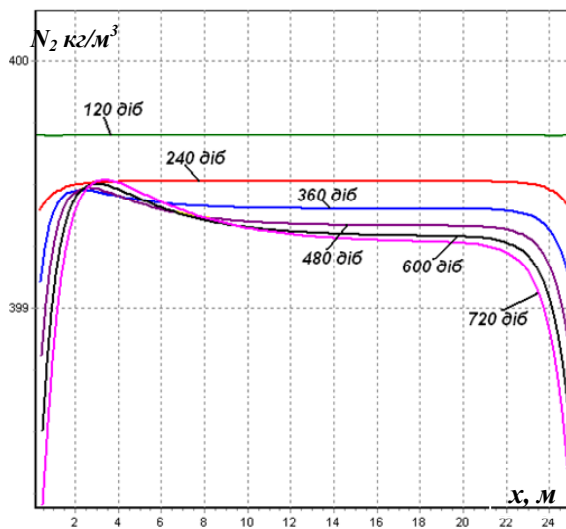


Рис. 4.10. Концентрація гіпсу у твердій фазі ( $C_2^{(max)} = const$ )

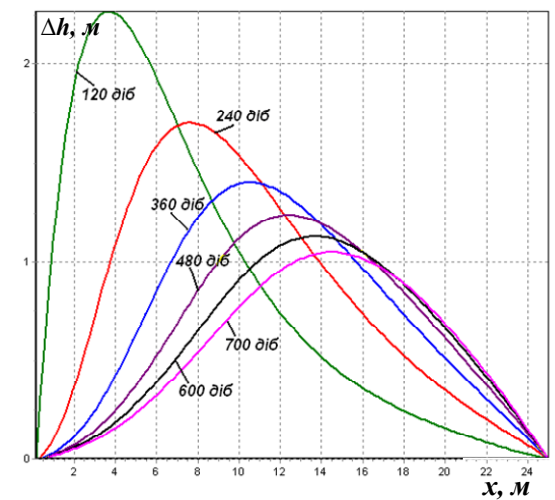


Рис. 4.11. Різниця розподілів надлишкових напорів при ( $C_2^{(max)} = C_2^{(max)}(C_1, T)$ ) та  $C_2^{(max)} = const$ )

Таблиця 4.1.1

Величина просідань верхньої межі ґрунту при  $t = 720$  діб

№	Параметри	Величина просідань загіпсованого ґрунту при $C_2^{(\max)} = C_2^{(\max)}(C_1, T)$	Величина просідань загіпсованого ґрунту при $C_2^{(\max)} = const$	Збільшення просідань при $C_2^{(\max)} = C_2^{(\max)}(C_1, T)$ в порівнянні $C_2^{(\max)} = const$
1	$m_g = 10\%$ , $a = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{Н}$ , $q = 10^5 \text{ кг}/\text{м}^2 \text{ доба}^2$	40,8 см	39,4 см	3,6 %
2	$m_g = 10\%$ , $a = 10^{-7} \text{ м}^2/\text{Н}$ , $q = 10^5 \text{ кг}/\text{м}^2 \text{ доба}^2$	9,6 см	8,9 см	7,9 %
3	$m_g = 20\%$ , $a = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{Н}$ , $q = 10^5 \text{ кг}/\text{м}^2 \text{ доба}^2$	51,8 см	49,8 см	4,1 %
4	$m_g = 20\%$ , $a = 1 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{Н}$ , $q = 10^5 \text{ кг}/\text{м}^2 \text{ доба}^2$	12,3 см	11,3 см	8,8 %
5	$m_g = 20\%$ , $a = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{Н}$ , $q = 0 \text{ кг}/\text{м}^2 \text{ доба}^2$	2,3 см	1,7 см	35,3 %
6	$m_g = 20\%$ , $a = 1 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{Н}$ , $q = 0 \text{ кг}/\text{м}^2 \text{ доба}^2$	1,8 см	0,9 см	100 %
7	$m_g = 30\%$ , $a = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{Н}$ , $q = 10^5 \text{ кг}/\text{м}^2 \text{ доба}^2$	74,2 см	67,2 см	10,4 %
8	$m_g = 30\%$ , $a = 1 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{Н}$ , $q = 10^5 \text{ кг}/\text{м}^2 \text{ доба}^2$	17,6 см	15,2 см	15,8 %

Як видно із графіків концентрація гіпсу у твердій фазі з часом (рис. 4.5) зменшується, а в рідкій – збільшується (рис. 4.3). Це пояснюється тим, що під час суфозії вода розчиняє кристалики гіпсу і порова рідина стає насичена гіпсовим розчином. Також після потрапляння в ґрунт сольовий розчин, взаємодіючи з гіпсом, збільшує розчинність (концентрацію граничного насичення) гіпсу в рідкій фазі (див. рис. 4.3 та 4.9, а також 4.5 та 4.10).

В таблиці 4.1.1 можна помітити, що урахування залежності концентрації граничного насичення гіпсу призводить до збільшення величини просідання верхньої межі масиву ґрунту. Це можна пояснити тим, що гіпс розчиняється швидше при збільшенні концентрації солі в поровій рідині. Однак, на цей процес великий вплив має значення коефіцієнта стисливості ґрунту. Для

порівняння можна проаналізувати останній стовпець, в якому наведено просідання у відсотках.

Також корисними є числові експерименти з визначення просідання верхньої межі масиву ґрунту при відсутності початкових надлишкових напорів (експерименти №5 та №6 табл. 4.1.1). Зокрема, як видно з експериментів №5 та №6 табл. 4.1.1, просідання в результаті розчинення гіпсу і урахування залежності  $C_2^{(\max)} = C_2^{(\max)}(C_1, T)$  збільшується на 35,3% та 100% відповідно. Отже, урахування дії не чистої води, а сольового розчину може значно змінити прогнозні розрахунки просідання будівель на загіпсованих ґрунтах навіть у випадку, коли ґрунт перебуває в стабілізованому стані (надлишкові напори відсутні).

Для перевірки стійкості отриманих розв'язків проведено ряд експериментів з визначення величини просідань верхньої рухомої межі ґрунту при різних кількостях вузлових та колокаційних точок, кроку по часу  $\tau = 60 \text{ дїб}$ , протягом загального часу  $t = 360 \text{ дїб}$ . Результати наведено в таблиці 4.1.2.

Таблиця 4.1.2

Величина просідань верхньої межі ґрунту при різній кількості вузлових та колокаційних точок

Кількість вузлових $k_x$ та колокаційних $k_y$ точок	Величина просідань, см	Зміна величини просідань
$k_x = 50, k_y = 60$	42,25	0,14%
$k_x = 100, k_y = 120$	42,2	0,024%
$k_x = 200, k_y = 240$	42,19	-

З вищенаведеної таблиці видно, що при зменшенні кількості вузлових та колокаційних точок (збільшенні кроку по просторові змінній) спостерігається незначне зростання величини просідань верхньої рухомої межі ґрунту. Зокрема, при зменшенні кількості вузлових та колокаційних точок в чотири рази просідання зросло всього на 0,14%. Це свідчить про те, що отриманий числовий розв'язок є стійким відносно кроку по просторових змінних.

В роботі [5] для визначення величини суфозійного просідання загіпсованих ґрунтів запропоновано використовувати наступну формулу:

$$s_{sf} = 0,5 \sum_{i=1}^s \varepsilon_{sfi},$$

де  $\varepsilon_{sfi}$  - відносне суфозійне стиснення ґрунту  $i$ -го шару під впливом сумарного напруження від зовнішнього навантаження і власної ваги ґрунту. Відносне суфозійне стиснення

$$\varepsilon_{sfi} = k_1 \cdot d_0 \cdot \rho_d \cdot \beta_n \cdot \rho_g.$$

Тут  $k_1$  - коефіцієнт, який залежить від виду ґрунту, ступеня його загіпсованості та величини прикладеного зовнішнього навантаження [5];  $d_0$  - початковий вміст гіпсу в ґрунті;  $\rho_d$  - початкова густина сухого ґрунту, г/см<sup>3</sup>;  $\rho_g$  - густина гіпсу, г/см<sup>3</sup>;  $\beta_n$  - ступінь вилуговування.

Результатом застосування даних формул до вищенаведеної задачі (загіпсованість ґрунту приймалась 20%) є отримане значення 45,67 см суфозійного просідання ґрунту. Відносна різниця між отриманими значеннями згідно формули і результатів числового експерименту, становить 8%. Це свідчить про адекватність отриманого числового розв'язку згідно побудованої в дисертаційній роботі нової математичної моделі.

Недолік даної інженерної формули – неможливість її застосування у випадку фільтрації багатоконпонентного хімічного розчину. Результати дисертаційної роботи вказують на один із шляхів вирішення даної проблеми.

## **4.2. Числове розв'язання двовимірної задачі фільтраційної консолідації ґрунту з урахуванням впливу багатоконпонентних хімічних розчинів**

### **4.2.1. Постановки задач та їх математичні моделі**

Розглянемо двовимірну задачу фільтраційної консолідації масиву ґрунту в області  $\Omega$ , який під впливом миттєво прикладеного незмінного у часі зовнішнього навантаження інтенсивністю  $q$  знаходиться в процесі фільтраційної консолідації (рис. 4.12). Ґрунт містить в своєму складі різні хімічні речовини. Тобто, поровою рідиною ґрунту є  $n_0$  - компонентний

хімічний розчин з концентрацією речовин  $c_i(\mathbf{X}, t), i = \overline{1, n_0}$ . Крім того, дані  $n_0$  хімічних компонент в ґрунті наявні і в твердій фазі. З основи прикладеного навантаження, що являє собою фундамент цеху деякого хімічного виробництва, в ґрунт починає надходити  $n_z$  - компонентний хімічний розчин, концентрацією  $c_i(\mathbf{X}, t), i = \overline{1, n_z}$ . В результаті це призводить до зміни масобмінних процесів в ґрунті. Як результат гомогенної реакції між  $n_0$  - компонентним поровим розчином та  $n_z$  - компонентним розчином, що надходить у ґрунт, утворюється  $n$  - компонентний розчин (причому,  $(n_0 + n_z)$  не обов'язково дорівнює  $n$ ). Крім того, фундамент споруди призводить до зміни температурного поля ґрунту. Задача полягає в дослідженні процесів консолідації досліджуваного масиву ґрунту з урахуванням впливу тепло-солепереносу.

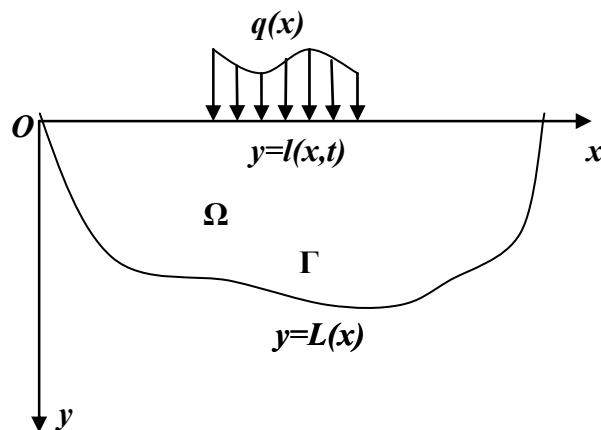


Рис. 4.12. Фільтраційна консолідація досліджуваного масиву ґрунту в двовимірному випадку

Враховуючи міркування розділу 2 та результати робіт [36, 43, 86], математичну модель даної задачі фільтраційної консолідації ґрунту з урахуванням впливу багатоконпонентних хімічних розчинів в неізотермічних умовах можна описати крайовою задачею

$$\begin{aligned} & \frac{(1+e)(1+\xi)}{2\gamma a} \times \nabla \cdot \left[ \left( \mathbf{K}(\mathbf{c}, \mathbf{N}, T) \nabla h - \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_{c_i} \nabla c_i - \mathbf{v}_T \nabla T \right) \right] + \\ & + \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon(1+e)(1+\xi)}{2\gamma \rho_i a} \left( \sigma \frac{\partial c_i}{\partial t} - e \frac{\partial N_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial h}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, t > 0, \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{D}_i \nabla c_i) + \nabla \cdot (\mathbf{D}_{T_i} \nabla T) - (\mathbf{u}, \nabla c_i) = \sigma \frac{\partial c_i}{\partial t} + \frac{\partial N_i}{\partial t}, \quad i = \overline{1, n}, \mathbf{X} \in \Omega, t > 0, \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} = -\gamma_i (C_i^{(\max)}(\mathbf{c}, T) - c_i) N_i^{\alpha_i}, \quad i = \overline{1, n}, \mathbf{X} \in \overline{\Omega}, t > 0, \quad (4.20)$$

$$\nabla \cdot (\lambda \nabla T) - \rho c_p (\mathbf{u}, \nabla T) = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, t > 0, \quad (4.21)$$

$$\mathbf{u} - e\mathbf{v} = -\mathbf{K}(\mathbf{c}, \mathbf{N}, T) \nabla h + \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_{c_i} \nabla c_i + \mathbf{v}_T \nabla T, \quad \mathbf{X} \in \Omega, t > 0, \quad (4.22)$$

$$h(\mathbf{X}, 0) = H_0(\mathbf{X}), \quad c_i(\mathbf{X}, 0) = C_i^{(0)}(\mathbf{X}), \quad N_i(\mathbf{X}, 0) = N_i^{(0)}(\mathbf{X}), \quad i = \overline{1, n}, \quad (4.23)$$

$$T(\mathbf{X}, 0) = T_0(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \overline{\Omega},$$

$$h(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_1^{(h)}} = H_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_1^{(h)}, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{\Gamma_2^{(h)}} = 0, \quad \mathbf{X} \in \Gamma_2^{(h)},$$

$$c_i(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_1^{(c_i)}} = C_1^{(i)}(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_1^{(c_i)}, \quad (\mathbf{q}_i, \mathbf{n})|_{\Gamma_2^{(c_i)}} = 0, \quad \mathbf{X} \in \Gamma_2^{(c_i)}, \quad i = \overline{1, n},$$

$$T(\mathbf{X}, t)|_{\Gamma_1^{(T)}} = T_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_1^{(T)}, \quad (\mathbf{q}_T, \mathbf{n})|_{\Gamma_2^{(T)}} = 0, \quad \mathbf{X} \in \Gamma_2^{(T)}, \quad (4.24)$$

де  $H_0(\mathbf{X})$ ,  $C_i^{(0)}(\mathbf{X})$ ,  $N_i^{(0)}(\mathbf{X})$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $T_0(\mathbf{X})$ ,  $H_1(\mathbf{X}, t)$ ,  $T_1(\mathbf{X}, t)$  - задані функції. Тут використані наступні позначення:  $e$  - коефіцієнт пористості;  $\gamma$  - питома вага сольового розчину;  $a$  - коефіцієнт стисливості ґрунту;  $\xi$  - коефіцієнт бічного тиску ґрунту;  $\mathbf{K}(\mathbf{c}, \mathbf{N}, T)$  - коефіцієнт фільтрації, що залежить від концентрації солей в рідкій та твердій фазах та температури;  $\mathbf{v}_{c_i} = \{\nu_{c_{ikj}}\}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $\mathbf{v}_T = \{\nu_{T_{kj}}\}$ ,  $k, j = 1, 2$  - коефіцієнти (тензори) хімічного та термічного осмосів;  $N_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  - концентрації солей в твердій фазі;  $\rho_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  - густини солей в твердій фазі;  $\sigma$  - пористість ґрунту;  $\mathbf{D}_i = \{D_i^{(kj)}\}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $k, j = 1, 2$  - коефіцієнти (тензори) дифузії;  $\gamma_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  - коефіцієнти швидкості масообміну;  $\alpha_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  - показники степенів, які визначаються експериментальним шляхом і залежать від характеру засоленості породи [33];  $\mathbf{D}_{T_i} = \{D_{T_i}^{(kj)}\}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $k, j = 1, 2$  - коефіцієнти (тензори) термічної дифузії;  $C_i^{(\max)}$ ,  $i = \overline{1, n}$  - концентрації граничного насичення, які залежать від температури та концентрації інших солей в рідкій фазі [72];  $\lambda = \{\lambda_{kj}\}$ ,  $k, j = 1, 2$  - коефіцієнт (тензор) теплопровідності вологого ґрунту;  $\rho$  -

густина порового сольового розчину;  $C_\rho$  - питома теплоємність порового сольового розчину;  $C_T$  - об'ємна теплоємність ґрунту;  $\mathbf{u} = (u_1; u_2)$  - вектор швидкості фільтрації;  $\mathbf{v} = (v_1; v_2)$  - вектор швидкості руху твердих частинок ґрунту;  $\mathbf{q}_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{c}_i - \mathbf{D}_i \nabla c_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ ;  $\mathbf{q}_T = \rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T - \lambda \nabla T$ . Також  $\Gamma_1^{(h)} \cup \Gamma_2^{(h)} = \Gamma$  - межа області  $\Omega$ . Причому  $\Gamma_1^{(h)} \cap \Gamma_2^{(h)} = \emptyset$ . Аналогічні позначення використані для інших невідомих функцій.

В процесі консолідації тверді частинки ґрунту зближаються. Як результат – верхня межа ґрунту просідає і область консолідації змінюється з часом. Крім того, зміна області консолідації може відбуватись і за рахунок хімічної суфозії. Тому крайова задача (4.18)-(4.24) має бути доповнена кінематичною граничною умовою на рухомій верхній межі. Дану умову виведено в розділі 2, припустивши, що ґрунт може просідати лише за рахунок вертикальних зміщень. Маємо

$$\frac{dl(t)}{dt} = - \int_{l(x,t)}^{L(x)} \frac{1}{\left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{\rho_i} N_i(t)(1+e)\right)(1+e)} \left( \frac{2\gamma\alpha}{1+\xi} \frac{\partial h}{\partial t} - (1+e)^2 \times \right. \\ \left. \times \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{\rho_i} (C_i^{(max)}(\mathbf{c}, T) - c_i) N_i^{\alpha_i} \right) dx. \quad (4.25)$$

Математична модель двовимірної задачі консолідації тіла ґрунтової греблі (рис.4.13.) з урахуванням впливу багатокомпонентного сольового розчину та неізотермічних умов на основі викладок розділу 2 та робіт [36, 43, 87, 96] може бути описана наступною крайовою задачею:

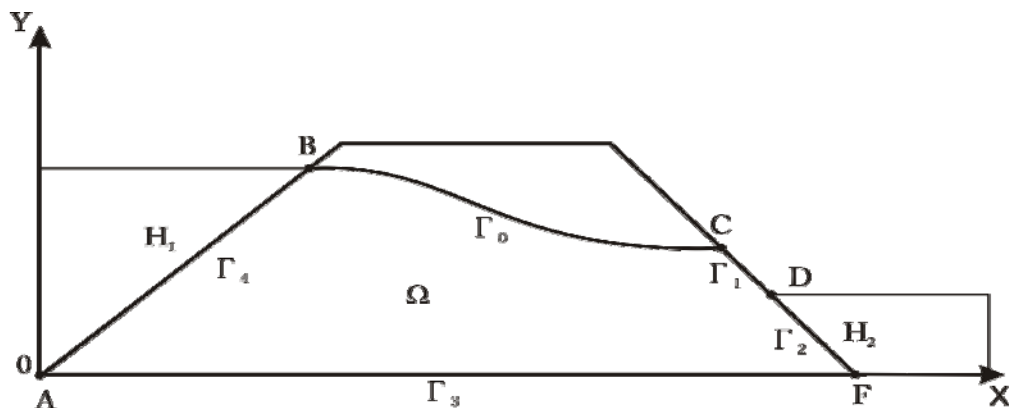


Рис. 4.13. Консолідація тіла ґрунтової греблі



$$\begin{aligned} & \frac{(1+e)(1+\xi)}{2\gamma a} \nabla \cdot \left[ \left( \mathbf{K}(\mathbf{c}, \mathbf{N}, T) \nabla h - \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_{c_i} \nabla c_i - \mathbf{v}_T \nabla T \right) \right] + \\ & + \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon(1+e)(1+\xi)}{2\gamma \rho_i a} \left( \sigma \frac{\partial c_i}{\partial t} - e \frac{\partial N_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial h}{\partial t}, \mathbf{X} \in \Omega, t > 0, \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{D}_i \nabla c_i) + \nabla \cdot (\mathbf{D}_T \nabla T) - (\mathbf{u}, \nabla c_i) = \sigma \frac{\partial c_i}{\partial t} + \frac{\partial N_i}{\partial t}, i = \overline{1, n}, \mathbf{X} \in \Omega, t > 0 \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} = -\gamma_i (C_i^{(\max)}(\mathbf{c}, T) - c_i) N_i^{\alpha_i}, i = \overline{1, n}, \mathbf{X} \in \overline{\Omega}, t > 0 \quad (4.28)$$

$$\nabla \cdot (\lambda \nabla T) - \rho c_p (\mathbf{u}, \nabla T) = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, \mathbf{X} \in \Omega, t > 0 \quad (4.29)$$

$$\mathbf{u} - e\mathbf{v} = -\mathbf{K}(\mathbf{c}, \mathbf{N}, T) \nabla h + \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_{c_i} \nabla c_i + \mathbf{v}_T \nabla T, \mathbf{X} \in \Omega, t > 0 \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} h(\mathbf{X}, 0) = H_0(\mathbf{X}), \quad c_i(\mathbf{X}, 0) = C_i^{(0)}(\mathbf{X}), \quad N_i(\mathbf{X}, 0) = N_i^{(0)}(\mathbf{X}), i = \overline{1, n}, \\ T(\mathbf{X}, 0) = T_0(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \overline{\Omega}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} h(\mathbf{X}, t) \Big|_{\Gamma_1^{(h)}} = H_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_1^{(h)}, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{n}) \Big|_{\Gamma_2^{(h)}} = 0, \quad \mathbf{X} \in \Gamma_2^{(h)}, \\ c_i(\mathbf{X}, t) \Big|_{\Gamma_1^{(c)}} = C_i^{(1)}(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_1^{(c)}, \quad (\mathbf{q}_i, \mathbf{n}) \Big|_{\Gamma_2^{(c)}} = 0, \quad \mathbf{X} \in \Gamma_2^{(c)}, i = \overline{1, n}, \\ T(\mathbf{X}, t) \Big|_{\Gamma_1^{(T)}} = T_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_1^{(T)}, \quad (\mathbf{q}_T, \mathbf{n}) \Big|_{\Gamma_2^{(T)}} = 0, \quad \mathbf{X} \in \Gamma_2^{(T)}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

Тут позначення аналогічні, як і в математичній моделі (4.18)-(4.25).

На вільній поверхні  $\Gamma_0$  (депресійній кривій) функція  $h(\mathbf{X}, t)$  задовольняє наступними умовам [53, 54]:

$$h(\mathbf{X}, t) \Big|_{\Gamma_0} = y, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{n}) \Big|_{\Gamma_0} = \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (4.33)$$

Співвідношення  $\varphi(\mathbf{X}, t) = (y - h(\mathbf{X}, t)) \Big|_{\Gamma_0} = 0$  описує вільну поверхню  $\Gamma_0$ . Для концентрацій сольових розчинів в рідкій фазі на депресійній кривій в неізотермічному режимі виконується наступна гранична умова [36]:

$$(\mathbf{D}_i \nabla c_i + \mathbf{D}_T \nabla T, \mathbf{n}) \Big|_{\Gamma_0} = 0, i = \overline{1, n}. \quad (4.34)$$

Вважаємо, що на межі  $\Gamma_0$  температура є відомою, а тому відповідна гранична умова вже записана в (4.32).

В результаті розсіювання надлишкових напорів та розчинення (кристалізації) солей ґрунт буде просідати (набухати). Тому на верхній межі ґрунту має задаватись кінематична гранична умова [86], яка виведена в розділі 2. Тобто,

$$\frac{dl(x,t)}{dt} = \int_{l(x,t)}^{L(x)} \frac{1}{\left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{\rho_i} N_i(\mathbf{X}, t)(1+e)\right)(1+e)} \left( \frac{2\gamma a}{1+\xi} \frac{\partial h}{\partial t} - (1+e)^2 \times \right. \\ \left. \times \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{\rho_i} (C_i^{(\max)}(\mathbf{c}, T) - c_i) N_i^{\alpha_i} \right) dx. \quad (4.35)$$

#### 4.2.2. Схема відшукування наближеного розв'язку двовимірних крайових задач методом радіальних базисних функцій

Не зменшуючи загальності наведемо детальне описання відшукування наближеного розв'язку методом РБФ крайової задачі (4.18)–(4.25) [43, 162, 168, 174, 175].

Покриємо область  $\Omega$  вузловими точками  $\mathbf{X}_j = (x_j^{(X)}, y_j^{(X)})$ ,  $j = \overline{1, m}$  [77, 78]. Наближені значення невідомих функцій крайової задачі (4.18)–(4.25) шукаємо у вигляді

$$h(\mathbf{X}, t) \approx \sum_{j=1}^m h_j(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon_h), \quad c_i(\mathbf{X}, t) \approx \sum_{j=1}^m c_{ij}(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon_{c_i}), \\ N_i(\mathbf{X}, t) \approx \sum_{j=1}^m N_{ij}(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon_{N_i}), \quad i = \overline{1, n}, \quad T(\mathbf{X}, t) \approx \sum_{j=1}^m T_j(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon_T), \quad (4.36)$$

де  $\varepsilon_h, \varepsilon_{c_i}, \varepsilon_{N_i}, \varepsilon_T$ ,  $i = \overline{1, n}$  – параметри форми базисних функцій;  $\varphi_j(r_j, \varepsilon)$  – радіальні базисні функції;  $h_j(t), c_{ij}(t), N_{ij}(t), T_j(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , – невідомі коефіцієнти, які залежать від часу;  $r_j = \sqrt{(x - x_j^{(X)})^2 + (y - y_j^{(X)})^2}$ ,  $j = \overline{1, m}$ .

Покриємо замикання  $\overline{\Omega}$  області  $\Omega$  колокаційними точками  $\mathbf{Y}_k = (x_k^{(Y)}, y_k^{(Y)})$ ,  $k = \overline{1, M}$ . Введемо множини  $\omega = \{k : \mathbf{Y}_k \in \Omega\}$ ,  $\gamma_1^{(h)} = \{k : \mathbf{Y}_k \in \Gamma_1^{(h)}\}$ ,

$\gamma_2^{(h)} = \{k : \mathbf{Y}_k \in \Gamma_2^{(h)}\}$ . Аналогічно визначаємо множини номерів граничних колокаційних точок для інших невідомих функцій. Введемо позначення  $r_{kj} = \sqrt{(x_k^{(Y)} - x_j^{(X)})^2 + (y_k^{(Y)} - y_j^{(X)})^2}$ ,  $j = \overline{1, m}$ ,  $k = \overline{1, M}$ ,  $m \geq M$ .

Підставляючи (4.36) в рівняння (4.18)–(4.21), початкові умови (4.23) та граничні умови (4.24), використовуючи метод колокації в точці, отримаємо задачу Коші (4.13)–(4.17) для системи нелінійних диференціальних рівнянь

$$\text{відносно векторів невідомих } \mathbf{H}(t) = \{h_j(t)\}_{j=1}^m, \quad \mathbf{C}_i(t) = \{c_{ij}(t)\}_{j=1}^m,$$

$$\mathbf{N}_i(t) = \{N_{ij}(t)\}_{j=1}^m, \quad i = \overline{1, n}, \quad \mathbf{T}(t) = \{T_j(t)\}_{j=1}^m,$$

$$\text{де } \mathbf{M}_i^{(s)} = \{m_{ikj}^{(s)}\}_{k=1, j=1}^{M, m}, \quad \tilde{\mathbf{M}}_i^{(s)} = \{\tilde{m}_{ikj}^{(s)}\}_{k=1, j=1}^{M, m}, \quad s = 2, 3; \quad \mathbf{L}_i^{(2)} = \{l_{ikj}^{(2)}\}_{k=1, j=1}^{M, m}, \quad \mathbf{L}_i^{(3)} = \{l_{ikj}^{(3)}\}_{k=1}^M,$$

$$\mathbf{M}^{(s)} = \{m_{kj}^{(s)}\}_{k=1, j=1}^{M, m}, \quad \tilde{\mathbf{M}}^{(s)} = \{\tilde{m}_{kj}^{(s)}\}_{k=1, j=1}^{M, m}, \quad \mathbf{L}^{(s)} = \{l_{kj}^{(s)}\}_{k=1, j=1}^{M, m}, \quad s = 1, 4; \quad \mathbf{K}_i^{(s)} = \{k_{ikj}^{(s)}\}_{k=1, j=1}^{M, m},$$

$$s = 1, 2; \quad \mathbf{A}_i^{(1)} = \{a_{ikj}^{(1)}\}_{k=1, j=1}^{M, m}, \quad \mathbf{A}'^{(1)} = \{a'_{ikj}^{(1)}\}_{k=1, j=1}^{M, m}, \quad \mathbf{E}'^{(1)} = \{e'_{kj}^{(1)}\}_{k=1, j=1}^{M, m}, \quad \mathbf{E}'^{(2)} = \{e'_{kj}^{(2)}\}_{k=1, j=1}^{M, m},$$

$$\tilde{\mathbf{F}}^{(s)} = \{\tilde{f}_j^{(s)}\}_{j=1}^m, \quad \mathbf{F}^{(k)} = \{f_j^{(k)}\}_{j=1}^m, \quad s = \overline{1, 4}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Тут

$$m_{kj}^{(1)} = -\varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_H), \quad k \in \omega; \quad m_{ikj}^{(2)} = -\sigma \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_{c_i}), \quad k \in \omega, \quad i = \overline{1, n};$$

$$m_{ikj}^{(3)} = \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_{N_i}), \quad k \in \omega, \quad i = \overline{1, n}; \quad m_{ikj}^{(4)} = -c_T \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_T), \quad k \in \omega;$$

$$l_{kj}^{(1)} = \begin{cases} \frac{(1+e)(1+\xi)}{2\gamma\alpha} \nabla \cdot (\mathbf{K}_h(\mathbf{c}, \mathbf{N}, T) \nabla \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_h)), & k \in \omega; \\ (\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{\mathbf{X}=\mathbf{Y}_k}, & k \in \gamma_2^{(h)}; \\ \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_h), & k \in \gamma_1^{(h)}; \end{cases}$$

$$l_{ikj}^{(2)} = \begin{cases} \nabla \cdot (\mathbf{D}_C \nabla \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_{c_i})) - (\mathbf{u}, \nabla \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_{c_i})), & k \in \omega; \\ \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_{c_i}), & k \in \gamma_1^{(c_i)}; \\ (\mathbf{q}_i, \mathbf{n})|_{\mathbf{X}=\mathbf{Y}_k}, & k \in \gamma_2^{(c_i)}; \end{cases}$$

$$l_{ik}^{(3)} = \gamma_i \left( \sum_{j=1}^m c_{ij}(\mathbf{t}) \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_{c_i}) - C_i^{(\max)}(\mathbf{c}, T) \right) \cdot \left( \sum_{j=1}^m \mathbf{N}_{ij}(\mathbf{t}) \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_{N_i}) \right)^{\alpha_i}, \quad k = \overline{1, M}, \quad i = \overline{1, n};$$

$$l_{kj}^{(4)} = \begin{cases} \nabla \cdot (\lambda \nabla \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_T)) - \rho C_p(\mathbf{u}, \nabla \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_T)), & k \in \omega; \\ \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_T), & k \in \gamma_1^{(T)}; \\ (\mathbf{q}_T, \mathbf{n})|_{\mathbf{x}=\mathbf{Y}_k}, & k \in \gamma_2^{(T)}; \end{cases}$$

$$k_{ikj}^{(1)} = \frac{\varepsilon_{c_i}(1+e)(1+\xi)e}{2\gamma\rho_i a} \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_{N_i}), k \in \omega, i = \overline{1, n}; k_{ikj}^{(2)} = \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_{N_i}), k \in \omega, i = \overline{1, n};$$

$$a_{ikj}^{(1)} = -\frac{\varepsilon_{c_i}(1+e)(1+\xi)\sigma}{2\gamma\rho_i a} \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_{c_i}), k \in \omega, i = \overline{1, n};$$

$$a_{ikj}^{(1)} = \begin{cases} \frac{(1+e)(1+\xi)}{2\gamma a} \nabla \cdot (\mathbf{v}_{c_i} \nabla \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_{c_i})), & k \in \omega, i = \overline{1, n}; \\ (\mathbf{v}_{c_i} \nabla \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_{c_i}), \mathbf{n}), & k \in \gamma_2^{(h)}; \end{cases}$$

$$e_{kj}^{(1)} = \begin{cases} \frac{(1+e)(1+\xi)}{2\gamma a} \nabla \cdot (\mathbf{v}_T \nabla \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_T)), & k \in \omega; \\ (\mathbf{v}_T \nabla \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_T), \mathbf{n}), & k \in \gamma_2^{(h)}; \end{cases}$$

$$e_{kj}^{(2)} = \nabla \cdot (\mathbf{D}_T^{(i)} \nabla \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_T)), k \in \omega; f_k^{(1)} = H_1(\mathbf{Y}_k, t), k \in \gamma_1^{(h)};$$

$$f_k^{(2)} = C_i^{(1)}(\mathbf{Y}_k, t), k \in \gamma_1^{(h)}; f_k^{(4)} = T_1(\mathbf{Y}_k, t), k \in \gamma_1^{(T)};$$

$$\tilde{f}_k^{(1)} = H_0(\mathbf{Y}_k), \tilde{f}_k^{(2)} = C_i^{(0)}(\mathbf{Y}_k), \tilde{f}_k^{(3)} = N_i^{(0)}(\mathbf{Y}_k), \tilde{f}_k^{(4)} = T_0(\mathbf{Y}_k), k = \overline{1, M}, i = \overline{1, n}.$$

Для знаходження числового розв'язку задачі Коші (4.13)–(4.17) застосовуємо ту ж методику, що і в одновимірному випадку.

Також на кожному часовому шарі необхідно перераховувати координати вузлових та колокаційних точок. Для цього використаємо кінематичну умову (4.25)

$$\begin{aligned} \frac{y^{(s+1)} - y^{(s)}}{\tau} = & - \int_{y^{(s)}}^{L(x)} \frac{1}{\left(1 - (1+e) \sum_{i=1}^n \frac{1}{\rho_i} \sum_{j=1}^m N_{ij}^{(s+1)} \varphi_j(r_j, \varepsilon_{N_i})\right) (1+e)} \times \\ & \times \left( \frac{2\gamma a}{1+\xi} \left( \sum_{j=1}^m \frac{h_j^{(s+1)} - h_j^{(s)}}{\tau} \varphi_j(r_j, \varepsilon_h) \right) - \right. \\ & \left. - (1+e) \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{\rho_i} \left( C_i^{(max)}(\mathbf{c}, T) - \sum_{j=1}^m c_j^{(s+1)} \varphi_j(r_j, \varepsilon_{c_i}) \right) \left( \sum_{j=1}^m N_{ij}^{(s+1)} \varphi_j(r_j, \varepsilon_{N_i}) \right)^{\alpha_i} \right) dy, s = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Інтеграл можна обчислити за допомогою квадратурних формул, наприклад, за допомогою формули прямокутників.

Кінематичні граничні умови (4.33), (4.35) апроксимуються аналогічним чином.

### 4.2.3. Результати числових експериментів та їх аналіз

#### Приклад 4.2.1.

Розглянемо двовимірну задачу фільтраційної консолідації масиву загіпсованого ґрунту прямокутної форми довжиною  $l=24$  м, товщиною  $b=10$  м (рис. 4.14).

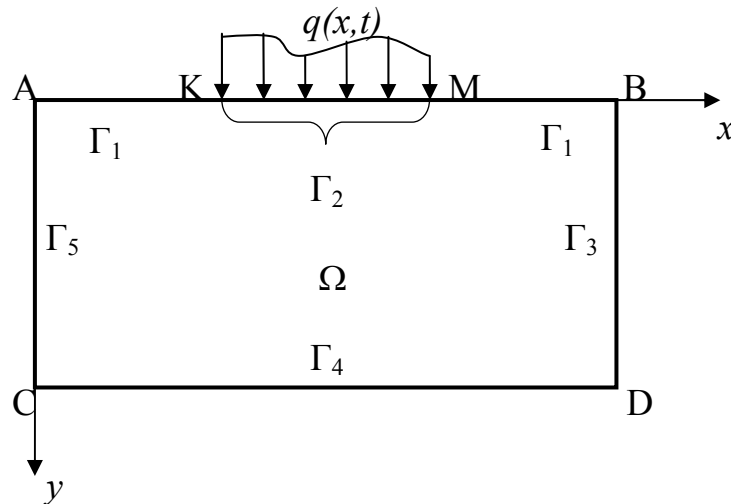


Рис. 4.14. Фільтраційна консолідація загіпсованого масиву ґрунту в двовимірному випадку

Нехай  $c_1(\mathbf{X}, t)$ ,  $N_1(\mathbf{X}, t)$  - концентрації звичайної кам'яної солі NaCl, яка починає надходити в ґрунт з фундаменту споруди, що і являє собою прикладене навантаження;  $c_2(\mathbf{X}, t)$ ,  $N_2(\mathbf{X}, t)$  - концентрації гіпсу. Вхідні дані беремо наступними:

$$\begin{aligned} \sigma &= 0.4, \quad e = 0.7, \quad \alpha_1 = 0.5, \quad \alpha_2 = 0.5, \quad a = 5 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{Н}, \quad \rho_1 = 2000 \text{ кг/м}^3, \\ \rho_2 &= 2300 \text{ кг/м}^3, \quad C_1^{(max)} = 350 \text{ г/л}, \quad D_1 = 0.002 \text{ м}^2/\text{доба}, \quad D_2 = 0.02 \text{ м}^2/\text{доба}, \\ \nu_{c_1} &= 2.8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^5/\text{кг} \cdot \text{доба}, \quad \nu_{c_2} = 2.9 \cdot 10^{-5} \text{ м}^5/\text{кг} \cdot \text{доба}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nu_T &= 2.8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^5 / \text{кг} \cdot \text{доба}, \gamma_1 = 0 \text{ доба}^{-1}, \gamma_2 = 6.5 \cdot 10^{-5} \text{ доба}^{-1}, \\
\gamma &= 10^4 \text{ кг} / (\text{м}^2 \cdot \text{доба}^2), c_T = 2137 \text{ кДж} / \text{м}^3 \cdot \text{град}, c_\rho = 4,2 \text{ кДж} / \text{кг} \cdot \text{град}, \\
\lambda &= 108 \text{ кДж} / \text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба}, C_2^{(0)}(\mathbf{X}) = 0.1 \text{ г/л}, C_1^{(0)}(\mathbf{X}) = 10 \text{ г/л}, \\
T_0(\mathbf{X}) &= 4^\circ\text{C}, T_1(t) = 30^\circ\text{C}, T_2(t) = 17 + 13 \cos\left(\frac{\pi t}{180}\right), C_1^{(1)}(x, t) = 0.1 \text{ г/л}, \\
C_2^{(1)}(x, t) &= 0.1 \text{ г/л}, C_1^{(2)}(x, t) = 5 \text{ г/л}, C_2^{(2)}(x, t) = 10 \text{ г/л}.
\end{aligned}$$

Граничні умови для шуканих функцій відповідно до рис. 4.14 є наступними:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u}, n)|_{\Gamma_2} &= (\mathbf{u}, n)|_{\Gamma_4} = 0, \quad h(x, y, t)|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_5} = 0, \quad t > 0, \\
\frac{\partial c_i}{\partial y}|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_4} &= 0, \quad c_1(x, y, t)|_{\Gamma_2} = C_1^{(\max)}, \quad \frac{\partial c_i}{\partial x}|_{\Gamma_3 \cup \Gamma_5} = 0, \quad i = 1, 2, t > 0, \\
\frac{\partial T}{\partial y}|_{\Gamma_4} &= 0, \quad T(x, y, t)|_{\Gamma_2} = T_1, \quad T(x, y, t)|_{\Gamma_1} = T_2, \quad \frac{\partial T}{\partial x}|_{\Gamma_3 \cup \Gamma_5} = 0, \quad t > 0.
\end{aligned}$$

Коефіцієнт фільтрації чистої води покладался рівним  $K_h = 0,001 \text{ м/доба}$ .

Експериментальні дані для залежностей  $K_h(C_1, N_2, T)$ ,  $C_2^{(\max)}(C_1, T)$  та їх апроксимації аналогічні до одновимірної задачі (див. п. 4.1.3). Загіпсованість ґрунту покладалась в межах від 10% до 30%, а густина ґрунту  $\rho_g = 2000 \text{ кг/м}^3$ . Початкове значення гіпсу в твердій фазі обчислювалось за формулою  $N_2^{(0)} = \frac{m_g}{100} \rho_g$ , де  $m_g$  - загіпсованість ґрунту у відсотках.

Кількість вузлових і колокаційних точок покладалась рівною 625. Крок по часу  $\tau = 10 \text{ діб}$ . Кількість часових проміжків 31. Параметр форми для невідомих функцій становив  $\varepsilon = 2.75$ .

Початковий розподіл надлишкових напорів  $h_0(x, y)$  визначався, як і в числовому експерименті пункту 3.2.3.

При вказаних даних були знайдені значення напору, концентрації солей та гіпсу у твердій та рідкій фазах, температури на кожному часовому проміжку з використанням мультіквадратичної РБФ  $\varphi(r, \varepsilon) = \sqrt{1 + (r\varepsilon)^2}$  і побудовані

відповідні графіки (рис.4.15 – 4.24). В таблицях 4.2 - 4.4 наведено значення просідань деяких точок верхньої межі масиву ґрунту.

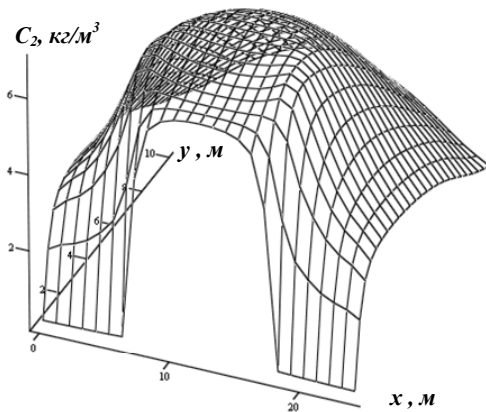


Рис. 4.15. Концентрація гіпсу у рідкій фазі ( $C_2^{(\max)} = C_2^{(\max)}(C_1, T)$ )

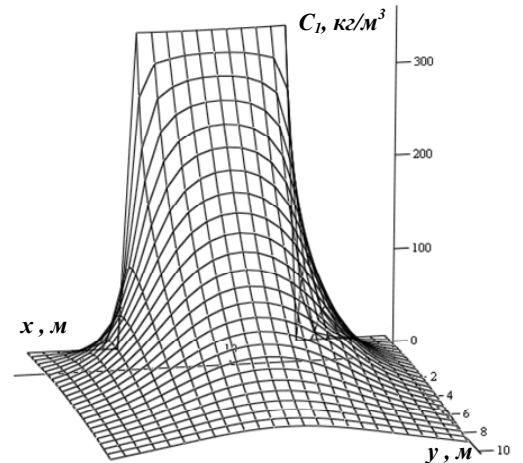


Рис. 4.16. Концентрація солей у рідкій фазі ( $C_2^{(\max)} = C_2^{(\max)}(C_1, T)$ )

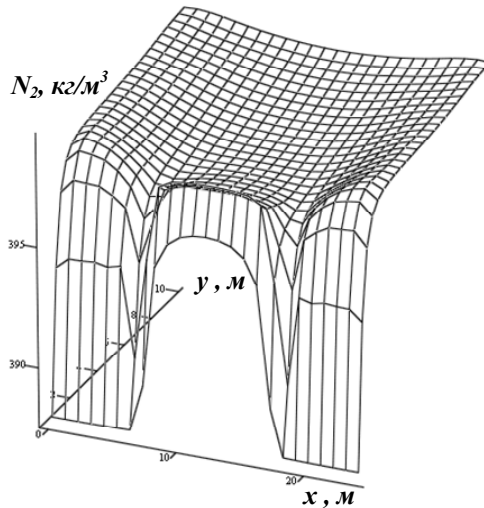


Рис. 4.17. Концентрація гіпсу у твердій фазі ( $C_2^{(\max)} = C_2^{(\max)}(C_1, T)$ )

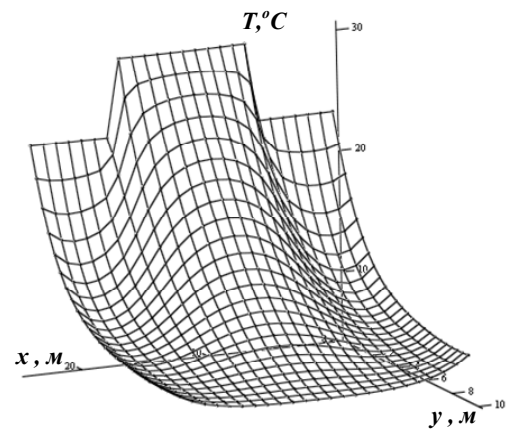


Рис. 4.18. Розподіл температури ( $C_2^{(\max)} = C_2^{(\max)}(C_1, T)$ )

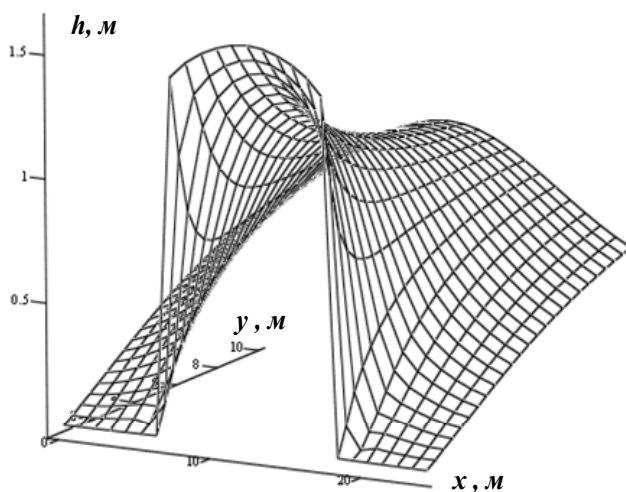


Рис. 4.19. Розподіл надлишкових напорів ( $C_2^{(\max)} = C_2^{(\max)}(C_1, T)$ )

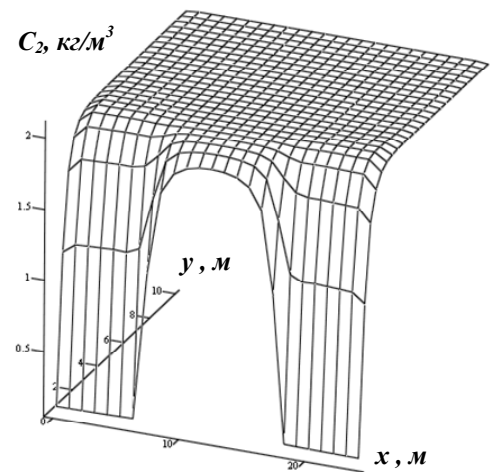


Рис. 4.20. Концентрація гіпсу у рідкій фазі ( $C_2^{(\max)} = const$ )

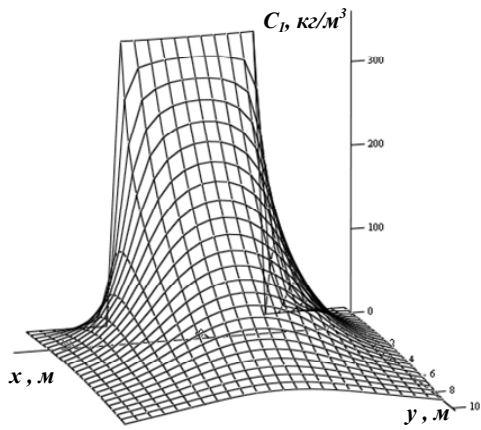


Рис. 4.21. Концентрація солі у рідкій фазі ( $C_2^{(\max)} = const$ )

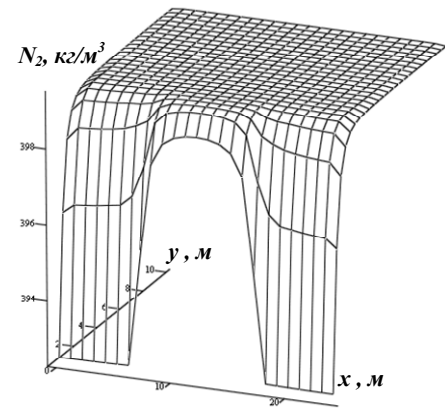


Рис. 4.22. Концентрація гіпсу у твердій фазі ( $C_2^{(\max)} = const$ )

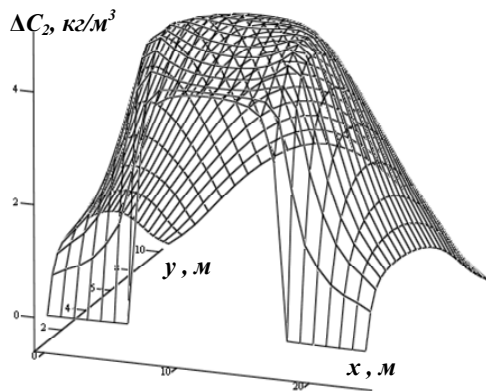


Рис. 4.23. Різниця розподілів концентрації гіпсу в рідкій фазі при ( $C_2^{(\max)} = C_2^{(\max)}(C_1, T)$ ) та  $C_2^{(\max)} = const$ )

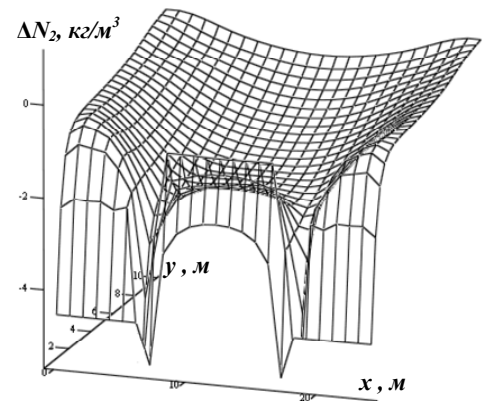


Рис. 4.24. Різниця розподілів концентрації гіпсу в твердій фазі при ( $C_2^{(\max)} = C_2^{(\max)}(C_1, T)$ ) та  $C_2^{(\max)} = const$ )

Таблиця 4.2

Величина просідань верхньої межі ґрунту за 300 діб

Координати $X, м$	2	6	8	12	16	18	22
Просідання при $C_2^{(\max)} = C_2^{(\max)}(C_1, T)$ , см	5,89	12,55	21,04	25,04	21,04	12,55	5,89
За рахунок зміни напорів $C_2^{(\max)} = C_2^{(\max)}(C_1, T)$ , см	4,86	10,86	19,77	23,81	19,77	10,86	4,86
За рахунок зміни загіпсованості $C_2^{(\max)} = C_2^{(\max)}(C_1, T)$ , см	1,03	1,69	1,27	1,23	1,27	1,69	1,03
Просідання при $C_2^{(\max)} = const$ , см	5,51	11,49	20,21	24,24	20,21	11,49	5,51
За рахунок зміни напорів при $C_2^{(\max)} = const$ , см	4,92	10,92	19,86	23,93	19,86	10,92	4,92
За рахунок зміни засоленості $C_2^{(\max)} = const$ , см	0,59	0,57	0,35	0,31	0,35	0,57	0,59



Таблиця 4.3

Величина просідань верхньої межі ґрунту за 300 діб при  $x = 12$  м

№	Параметри	Величина просідань загіпсованого ґрунту при $C_2^{(\max)} = C_2^{(\max)}(C_1, T)$	Величина просідань загіпсованого ґрунту при $C_2^{(\max)} = const$	Збільшення просідань при $C_2^{(\max)} = C_2^{(\max)}(C_1, T)$ в порівнянні $C_2^{(\max)} = const$
1	$m_g = 10\%$ , $q = 20 \cdot 10^4$ кг/м <sup>2</sup> доба <sup>2</sup>	20,77 см	20,11 см	3,28 %
2	$m_g = 10\%$ , $q = 0$ кг/м <sup>2</sup> доба <sup>2</sup>	1,07 см	0,29 см	268,97 %
3	$m_g = 20\%$ , $q = 20 \cdot 10^4$ кг/м <sup>2</sup> доба <sup>2</sup>	25,04 см	24,24 см	3,31 %
4	$m_g = 20\%$ , $q = 0$ кг/м <sup>2</sup> доба <sup>2</sup>	1,23 см	0,32 см	284,38 %
5	$m_g = 30\%$ , $q = 20 \cdot 10^4$ кг/м <sup>2</sup> доба <sup>2</sup>	31,57 см	30,55 см	3,34 %
6	$m_g = 30\%$ , $q = 0$ кг/м <sup>2</sup> доба <sup>2</sup>	1,49 см	0,36 см	313,89 %

Таблиця 4.4

Величина просідань верхньої межі ґрунту за 300 діб в одновимірному випадку

№	Параметри	Величина просідань загіпсованого ґрунту при $C_2^{(\max)} = C_2^{(\max)}(C_1, T)$	Величина просідань загіпсованого ґрунту при $C_2^{(\max)} = const$	Збільшення просідань при $C_2^{(\max)} = C_2^{(\max)}(C_1, T)$ в порівнянні $C_2^{(\max)} = const$
1	$m_g = 10\%$ , $q = 20 \cdot 10^4$ кг/м <sup>2</sup> доба <sup>2</sup>	34,77 см	33,84 см	2,75 %
2	$m_g = 10\%$ , $q = 0$ кг/м <sup>2</sup> доба <sup>2</sup>	1,61 см	0,57 см	182,46 %
3	$m_g = 20\%$ , $q = 20 \cdot 10^4$ кг/м <sup>2</sup> доба <sup>2</sup>	42,12 см	40,89 см	3,01 %
4	$m_g = 20\%$ , $q = 0$ кг/м <sup>2</sup> доба <sup>2</sup>	2,13 см	0,75 см	182,66 %
5	$m_g = 30\%$ , $q = 20 \cdot 10^4$ кг/м <sup>2</sup> доба <sup>2</sup>	53,22 см	51,62 см	3,12 %
6	$m_g = 30\%$ , $q = 0$ кг/м <sup>2</sup> доба <sup>2</sup>	2,82 см	0,99 см	184,84 %

При надходженні сольового розчину у загіпсований ґрунт, концентрація гіпсу у рідкій фазі з часом збільшується (рис. 4.16), а в твердій зменшується (рис. 4.17). З графіку різниці концентрації гіпсу у твердій фазі (рис. 4.23) видно, що гіпс, що наявний у ґрунті в твердій фазі, розчиняється швидше при врахуванні залежності  $C_2^{(\max)} = C_2^{(\max)}(C_1, T)$ .

Просідання досягає максимального значення в області прикладання навантаження і поступово зменшується із збільшенням відстані від даної області. Також просідання є симетричним (табл. 4.2).

В таблиці 4.3 видно, що врахування залежності концентрації граничного насичення гіпсу від концентрації солей призводить до збільшення величини просідання верхньої межі масиву ґрунту. Це можна пояснити тим, що гіпс розчиняється швидше при збільшенні концентрації солі в поровій рідині. Для порівняння можна проаналізувати останній стовпець таблиці 4.3, в якому наведено просідання у відсотках. Також в таблиці 4.3 наведено результати просідання при різній загіпсованості ґрунту (10%, 20% та 30%). Збільшення загіпсованості ґрунту збільшує об'єм розчиненого гіпсу, що в свою чергу призводить до збільшення просідання ґрунту.

Корисними є числові експерименти з визначення просідання верхньої межі масиву ґрунту при відсутності початкових надлишкових напорів. Зокрема, як видно з таблиці 4.3, просідання в результаті розчинення гіпсу і врахування залежності  $C_2^{(\max)} = C_2^{(\max)}(C_1, T)$  збільшується від 0,32 см до 1,23 см (на 284,38 %). Тобто, якщо процес консолідації ґрунту під фундаментом цеху хімічного виробництва завершився, але в ґрунт починає надходити не вода, а сольовий розчин, то це спричиняє додаткові просідання. До того ж, ці просідання будуть нерівномірними. Тому врахування дії не чистої води, а сольового розчину може значно змінити прогностні розрахунки просідання будівель на загіпсованих ґрунтах.

Для порівняльного аналізу було проведено числові експерименти в одновимірному випадку (табл. 4.4). Просідання верхньої межі ґрунту в одновимірному випадку становлять 42,12 см, а при аналогічних вхідних в

двовимірному випадку – 25,04 см. Така велика різниця у просіданнях обумовлена тим, що розрахунки при розв’язанні двовимірної задачі дають точніші результати, адже враховується не тільки глибина масиву ґрунту, а й його ширина.

#### Приклад 4.2.2.

Розглянемо двохвимірну задачу фільтраційної консолідації загіпсованої ґрунтової греблі ( $c_2(\mathbf{X}, t)$ ,  $N_2(\mathbf{X}, t)$  - концентрації гіпсу) з профілем рівносторонньої трапеції висотою 30м, довжинами верхньої та нижньої основ 80м та 20м відповідно (рис.4.25). У верхньому б’єфі знаходиться концентрований сольовий розчин з концентрацією граничного насичення 160 г/літр ( $c_1(\mathbf{X}, t)$ ,  $N_1(\mathbf{X}, t)$  - концентрації звичайної кам’яної солі NaCl).

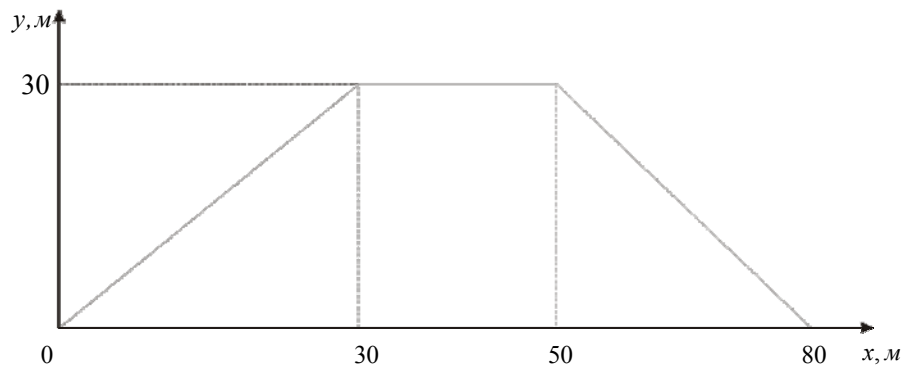


Рис. 4.25. Схема і розміри греблі

Вхідні дані задачі візьмемо наступними:

$$\begin{aligned} \sigma &= 0.4, \quad e = 0.7, \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 0.5, \quad a_0 = 4 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2 / \text{Н}, \quad a_1 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{Н}, \\ \rho_1 &= 2100 \text{ кг} / \text{м}^3, \quad C_1^{\max} = 160 \text{ г} / \text{л}, \quad \rho_2 = 2300 \text{ кг} / \text{м}^3, \quad D_1 = 0.08 \text{ м}^2 / \text{доба}, \\ D_2 &= 0.008 \text{ м}^2 / \text{доба}, \quad \nu_{C_1} = 6 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2 / \text{кг} \cdot \text{доба}, \quad \nu_{C_2} = 6 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2 / \text{кг} \cdot \text{доба}, \\ \nu_T &= 6 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2 / \text{кг} \cdot \text{доба}, \quad \gamma_1 = 0 \text{ доба}^{-1}, \quad \gamma_2 = 6.5 \cdot 10^{-5} \text{ доба}^{-1}, \\ \gamma &= 1.1 \cdot 10^4 \text{ кг} / (\text{м}^2 \cdot \text{доба}^2), \quad c_T = 2137 \text{ кДж} / \text{м}^3 \cdot \text{град}, \quad c_\rho = 4,2 \text{ кДж} / \text{кг} \cdot \text{град}, \\ \lambda &= 108 \text{ кДж} / \text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба}, \quad T_0(x) = 4^\circ\text{C}, \quad T_{\text{амм}} = 17 + 13 \cos\left(\frac{\pi t}{180}\right), \quad C_1^{(0)}(x) = 8 \text{ г} / \text{л}, \end{aligned}$$

$$C_2^{(0)}(x) = 0.1z / л, \quad C_1^{(1)}(t) = 8z / л, \quad C_2^{(1)}(t) = 0.1z / л,$$

$$H_0 = \sqrt{(H_1)^2 - \frac{(H_1)^2 - (H_2)^2}{L} x}, \quad H_1(t) = 20м, \quad H_2(t) = 10м.$$

Значення температури на верхньому б'єфі береться з розрахунку, що там розміщена водойма охолоджувач АЕС [99].

Таблиця 4.5

## Сезонні коливання температури в водоймі охолоджувачі АЕС

Місяць	Температура води, °С
Січень	17,8
Лютий	15,9
Березень	18,1
Квітень	22,7
Травень	27,5
Червень	28,6
Липень	30,9
Серпень	31,9
Вересень	28,5
Жовтень	23,6
Листопад	18,2
Грудень	18,3

Розглянемо випадок, коли початковий розподіл напорів в тілі греблі зумовлюється власною вагою ґрунту. Тобто,

$$H_0(x, y) = y_{\Gamma} \frac{\gamma_{\Gamma}}{\gamma} + y,$$

де  $y_{\Gamma}$  - вертикальна відстань від точки з координатами  $(x, y)$  до верхньої межі греблі (висота стовпа ґрунту прикладеного до даної точки);  $\gamma_{\Gamma} = 1,95 \cdot 10^4 \text{ Па} / \text{м}^3$  - питома вага ґрунту;  $\gamma$  - питома вага порового сольового розчину.

При відсутності початкових надлишкових напорів положення вільної межі визначалося згідно формули Дюпюї [75]

$$H_0 = \sqrt{(H_1)^2 - \frac{(H_1)^2 - (H_2)^2}{L} x}$$

Коефіцієнт фільтрації для чистої води рівний  $0.001 \text{ м/доба}$ . Для апроксимації залежностей  $K_h(C_1, N_2, T)$  та  $C_2^{(\max)}(C_1, T)$  використовувався той же підхід, що і в прикладі 4.2.1.

Процес досліджувався протягом 360 діб, з кроком по часу 10 діб.

Були отримані значення температури, концентрації солі та гіпсу в твердій та рідкій фазі, та напорів на момент часу 350 діб, які відображені графічно (рис.4.26 - рис.4.31).

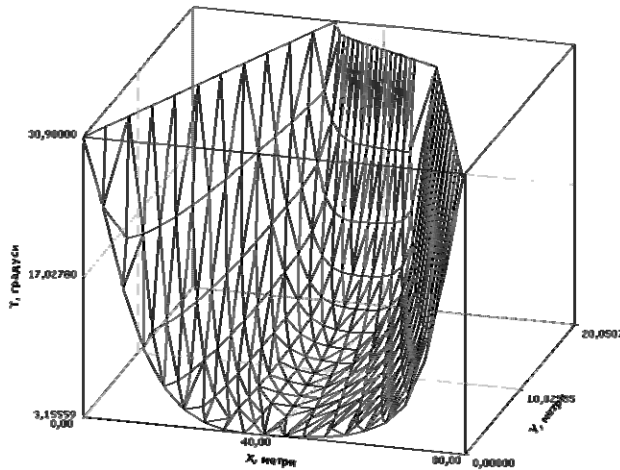


Рис. 4.26. Розподіл температури

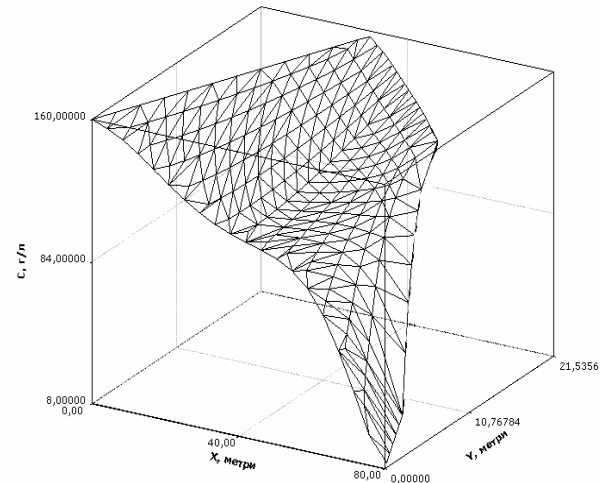


Рис. 4.27. Розподіл концентрації солі в рідкій фазі

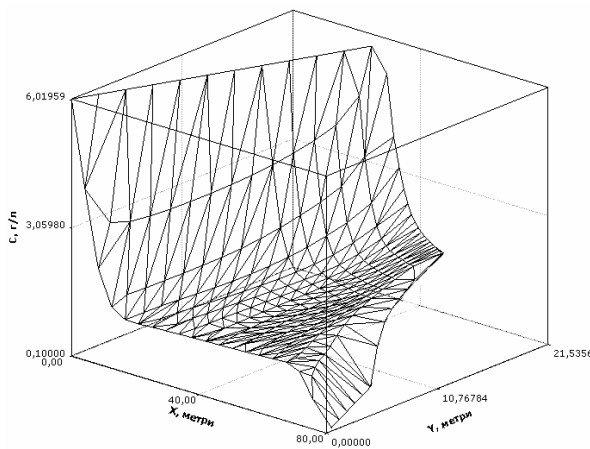


Рис. 4.28. Розподіл концентрації гіпсу в рідкій фазі з врахуванням залежності  $C_2^{(\max)} = C_2^{(\max)}(C_1, T)$

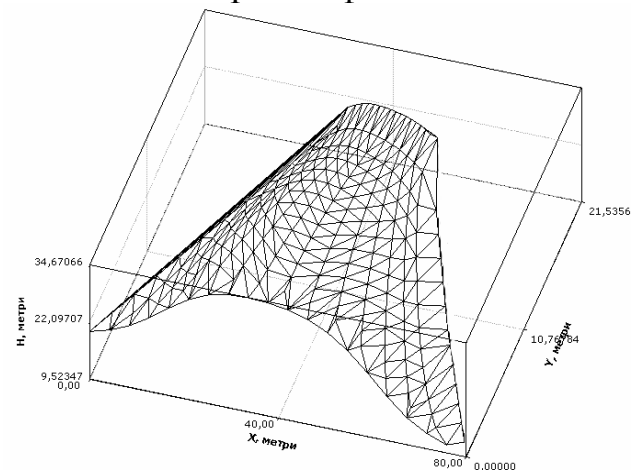


Рис. 4.29. Розподіл надлишкових напорів

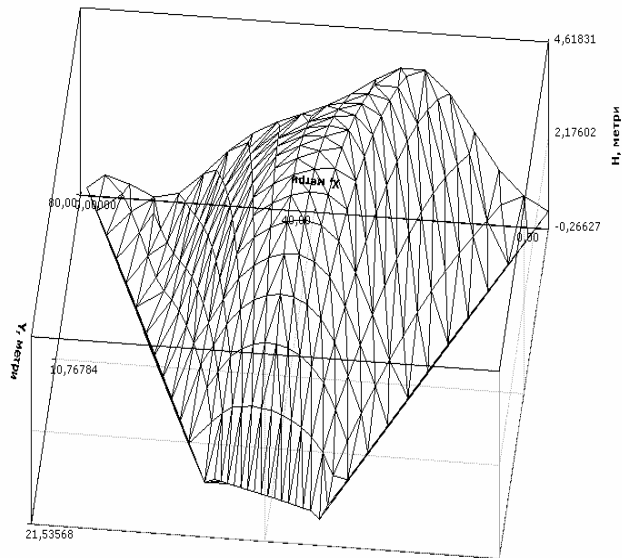


Рис. 4.30. Різниця розподілу напорів з врахуванням наявності солі і чистою водою

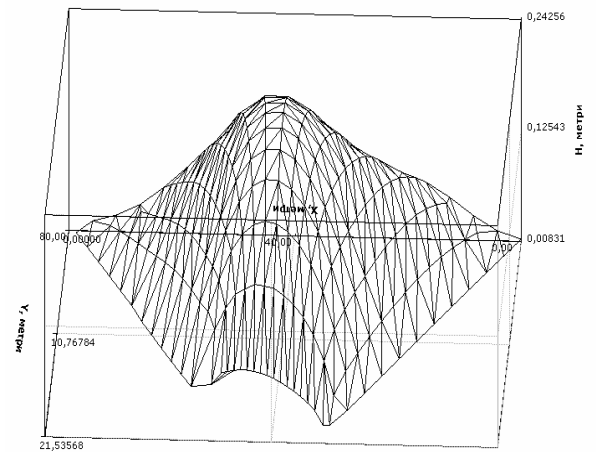


Рис. 4.31. Різниця розподілу напорів з врахуванням наявності гіпсу і без урахування

Як видно з рис.4.31 наявність гіпсу не має значного впливу на розподіл надлишкових напорів оскільки його концентрація в рідкій фазі є дуже малою в порівнянні з концентрацією солі. Рис. 4.30 навпаки демонструє, що сіль здійснює значний вплив на розподіл поля надлишкових напорів в тілі греблі (максимальна різниця напорів близько 4.62 м). При наявності солі надлишкові напори розсіюються повільніше. Тому нехтування наявністю солі в поровій рідині при обрахунках реальних задач може призвести до катастрофічних наслідків. Ці дані підтверджують висновки робіт [36, 43].

В таблицях 4.6 і 4.7 показано величину просідання верхньої межі ґрунту за рахунок зміни напорів і концентрації солей.

Як видно з таблиці 4.6, при наявності солі та гіпсу відбувається сумарно більше просідання верхньої межі греблі, аніж у інших випадках. Крім того, без врахування солі та гіпсу відбувається незначне набухання ґрунту. Це пояснюється приблизним характером розподілу початкових напорів (згідно формули Дюпюі). В процесі обрахунків депресійна крива піднімається і ґрунт набухає. Також у випадку врахування впливу хімічних речовин напори в тілі греблі значно змінюються і відбувається набухання (рядок “Н”). Але це набухання компенсується присутністю солі та гіпсу.

Таблиця 4.6

Просідання верхньої межі ґрунту в сантиметрах при відсутності початкових надлишкових напорів

<b>х, м</b>	31,17	33,52	35,88	38,23	40,58	42,94	45,2	47,64	50
<b>З врахуванням солі і гіпсу <math>C_2^{(\max)} = C_2^{(\max)}(C_1, T)</math></b>									
<b>Н</b>	9,06	9,3	9,31	9,17	8,93	8,58	8,15	7,57	6,82
<b>C<sub>1</sub>+C<sub>2</sub></b>	-17,47	-18,99	-19,92	-20,55	-20,86	-21,01	-21,06	-21,02	-21,04
<b>Сума</b>	-8,41	-9,69	-10,61	-11,38	-11,93	-12,43	-12,91	-13,45	-14,22
<b>З врахуванням солі і гіпсу <math>C_2^{(\max)} = const</math></b>									
<b>Н</b>	9,07	9,31	9,32	9,19	8,94	8,6	8,17	7,58	6,83
<b>C<sub>1</sub>+C<sub>2</sub></b>	-16,67	-18,17	-19,11	-19,76	-20,08	-20,24	-20,28	-20,25	-20,27
<b>Сума</b>	-7,6	-8,86	-9,79	-10,57	-11,14	-11,64	-12,11	-12,67	-13,44
<b>%</b>	9,63%	8,57%	7,73%	7,12%	6,62%	6,36%	6,2%	5,8%	5,49%
<b>З врахуванням солі, без врахування гіпсу</b>									
<b>Н</b>	8,97	9,2	9,22	9,08	8,84	8,5	8,07	7,49	6,75
<b>C<sub>1</sub>+C<sub>2</sub></b>	-16,43	-17,91	-18,87	-19,51	-19,83	-19,98	-20,03	-20,01	-20,05
<b>Сума</b>	-7,46	-8,71	-9,65	-10,43	-10,99	-11,48	-11,96	-12,52	-13,3
<b>Без врахування солі, з врахуванням гіпсу</b>									
<b>Н</b>	2,5	2,3	2,16	2,06	1,98	1,92	1,85	1,74	1,59
<b>C<sub>1</sub>+C<sub>2</sub></b>	-0,13	-0,17	-0,18	-0,18	-0,18	-0,18	-0,17	-0,16	-0,16
<b>Сума</b>	2,37	2,13	1,98	1,88	1,8	1,74	1,68	1,58	1,43
<b>Без врахування солі і гіпсу</b>									
<b>Н</b>	2,5	2,4	2,34	2,3	2,26	2,23	2,17	2,08	1,96

Як видно з таблиці 4.7 сумарне просідання з урахуванням солі та гіпсу в кілька разів перевищує просідання у випадку фільтрації чистої води. Тобто, нехтувати впливом хімічних розчинів не можна.

Таблиця 4.7.

Просідання верхньої межі ґрунту в сантиметрах при наявності початкових надлишкових напорів

<b>Х, м</b>	31,17	33,52	35,88	38,23	40,58	42,94	45,2	47,64	50
<b>З врахуванням солі і гіпсу <math>C_2^{(\max)} = C_2^{(\max)}(C_1, T)</math></b>									
<b>Н</b>	3,01	4,18	4,55	4,36	3,77	2,76	1,31	-0,69	-3,65
<b>C<sub>1</sub>+C<sub>2</sub></b>	-17,67	-19,72	-21,05	-21,9	-22,43	-22,82	-23,01	-23,1	-23,19
<b>Сума</b>	-14,66	-15,54	-16,5	-17,54	-18,66	-20,06	-21,7	-23,79	-26,84
<b>З врахуванням солі і гіпсу <math>C_2^{(\max)} = const</math></b>									
<b>Н</b>	3,16	4,35	4,72	4,53	3,92	2,9	1,44	-0,58	-3,56
<b>C<sub>1</sub>+C<sub>2</sub></b>	-16,89	-18,87	-20,17	-21,07	-21,6	-21,96	-22,17	-22,24	-22,34
<b>Сума</b>	-13,73	-14,52	-15,45	-16,54	-17,68	-19,06	-20,73	-22,82	-25,9
<b>%</b>	6,34%	6,58%	6,36%	5,7%	5,25%	4,99%	4,47%	4,08%	3,5%
<b>З врахуванням солі, без врахування гіпсу</b>									
<b>Н</b>	2,8	3,94	4,28	4,07	3,47	2,46	1,03	-0,94	-3,85
<b>C<sub>1</sub>+C<sub>2</sub></b>	-16,63	-18,58	-19,89	-20,77	-21,3	-21,66	-21,88	-21,95	-22,06
<b>Сума</b>	-13,83	-14,64	-15,61	-16,7	-17,83	-19,2	-20,85	-22,89	-25,91
<b>Без врахування солі, з врахуванням гіпсу</b>									
<b>Н</b>	-2,3	-1,39	-1,01	-1,04	-1,37	-2,03	-3,03	-4,46	-6,5
<b>C<sub>1</sub>+C<sub>2</sub></b>	-0,11	-0,18	-0,19	-0,2	-0,19	-0,19	-0,19	-0,18	-0,17
<b>Сума</b>	-2,41	-1,57	-1,2	-1,24	-1,56	-2,22	-3,22	-4,64	-6,67
<b>Без врахування солі і гіпсу</b>									
<b>Н</b>	-5,38	-4,65	-4,28	-4,27	-4,54	-5,11	-5,99	-7,23	-8,95

У вищенаведених таблицях: “Н” – просідання за рахунок зміни напорів; “C<sub>1</sub>+C<sub>2</sub>” – просідання за рахунок зміни концентрації солі та гіпсу; “Сума” – сумарне просідання; “%” – різниця між просіданнями ґрунту з врахуванням залежності  $C_2^{(\max)} = C_2^{(\max)}(C_1, T)$  і константою  $C_2^{(\max)} = const$  у відсотках. Причому знак “-” означає просідання, а “+” – набухання ґрунту.



### 4.3. Числове розв'язання тривимірної задачі фільтраційної консолідації ґрунту з урахуванням впливу багатоконпонентних хімічних розчинів

#### 4.3.1. Постановка просторової задачі та її математична модель

Розглянемо тривимірну задачу фільтраційної консолідації масиву ґрунту в області  $\Omega$  з межею  $\Gamma$  під впливом миттєво прикладеного незмінного у часі зовнішнього навантаження (рис. 4.32). Ґрунт містить в своєму складі різні хімічні речовини. Тобто, поровою рідиною ґрунту є  $n_0$  - компонентний хімічний розчин з концентрацією речовин  $c_i(x,t), i = \overline{1, n_0}$ . Крім того, дані  $n_0$  хімічних компонент в ґрунті наявні і в твердій фазі. З основи прикладеного навантаження, що являє собою фундамент цеху деякого хімічного виробництва, в ґрунт починає надходити  $n_z$  - компонентний хімічний розчин, концентрацією  $c_i(x,t), i = \overline{1, n_z}$ . В результаті це призводить до зміни масобмінних процесів в ґрунті. Як результат реакції між  $n_0$  - компонентним поровим розчином та  $n_z$  - компонентним розчином, що надходить у ґрунт, утворюється  $n$  - компонентний розчин (причому,  $(n_0 + n_z)$  не обов'язково дорівнює  $n$ ). Крім того, фундамент споруди призводить до зміни температурного поля ґрунту. Задача полягає в дослідженні процесів консолідації даного масиву ґрунту з урахуванням впливу тепло-солепереносу.

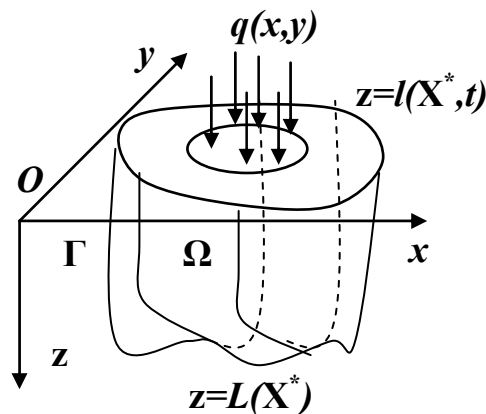


Рис. 4.32. Фільтраційна консолідація масиву ґрунту у тривимірному випадку

Враховуючи всі міркування розділу 2 та результати робіт [36, 43, 84, 85], математичну модель даної просторової задачі консолідації ґрунту в області  $\Omega$  під впливом миттєво прикладеного незмінного у часі зовнішнього навантаження з урахуванням впливу  $n$ -компонентного сольового розчину та неізотермічних умов може бути описана наступною крайовою задачею:

$$\begin{aligned} & \frac{(1+e)(1+2\xi)}{3\gamma a} \times \nabla \cdot \left[ \left( \mathbf{K}(\mathbf{c}, \mathbf{N}, T) \nabla h - \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_{c_i} \nabla c_i - \mathbf{v}_T \nabla T \right) \right] + \\ & + \sum_{i=1}^n \frac{\varepsilon(1+e)(1+2\xi)}{3\gamma \rho_i a} \left( \sigma \frac{\partial c_i}{\partial t} - e \frac{\partial N_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial h}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad t > 0, \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{D}_i \nabla c_i) + \nabla \cdot (\mathbf{D}_{T_i} \nabla T) - (\mathbf{u}, \nabla c_i) = \sigma \frac{\partial c_i}{\partial t} + \frac{\partial N_i}{\partial t}, \quad i = \overline{1, n}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} = -\gamma_i (C_i^{(\max)}(\mathbf{c}, T) - c_i) N_i^{\alpha_i}, \quad i = \overline{1, n}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (4.39)$$

$$\nabla \cdot (\lambda \nabla T) - \rho c_p (\mathbf{u}, \nabla T) = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (4.40)$$

$$\mathbf{u} - e \mathbf{v} = -\mathbf{K}(\mathbf{c}, \mathbf{N}, T) \nabla h + \sum_{i=1}^n \mathbf{v}_{c_i} \nabla c_i + \mathbf{v}_T \nabla T, \quad \mathbf{X} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} h(\mathbf{X}, 0) = H_0(\mathbf{X}), \quad c_i(\mathbf{X}, 0) = C_i^{(0)}(\mathbf{X}), \quad N_i(\mathbf{X}, 0) = N_i^{(0)}(\mathbf{X}), \quad i = \overline{1, n}, \\ T(\mathbf{X}, 0) = T_0(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \overline{\Omega}, \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$h(\mathbf{X}, t) \Big|_{\Gamma_1^{(h)}} = H_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_1^{(h)}, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{n}) \Big|_{\Gamma_2^{(h)}} = 0, \quad \mathbf{X} \in \Gamma_2^{(h)},$$

$$c_i(\mathbf{X}, t) \Big|_{\Gamma_1^{(c_i)}} = C_i^{(1)}(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_1^{(c_i)}, \quad (\mathbf{q}_i, \mathbf{n}) \Big|_{\Gamma_2^{(c_i)}} = 0, \quad \mathbf{X} \in \Gamma_2^{(c_i)}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (4.43)$$

$$T(\mathbf{X}, t) \Big|_{\Gamma_1^{(T)}} = T_1(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} \in \Gamma_1^{(T)}, \quad (\mathbf{q}_T, \mathbf{n}) \Big|_{\Gamma_2^{(T)}} = 0, \quad \mathbf{X} \in \Gamma_2^{(T)},$$

$$\frac{dI(\mathbf{X}^*, t)}{dt} = - \int_{I(\mathbf{X}^*, t)}^{I(\mathbf{X}^*)} \frac{1}{\left( 1 - \sum_{i=1}^n \frac{1}{\rho_i} N_i(t) (1+e) \right) (1+e)} \left( \frac{3\gamma a}{1+2\xi} \frac{\partial h}{\partial t} - (1+e)^2 \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{\rho_i} (C_i^{(\max)}(\mathbf{c}, T) - c_i) N_i^{\alpha_i} \right) dz. \quad (4.44)$$

де  $\mathbf{X} = (x, y, z)$ ,  $\mathbf{X}' = (x, y)$ ,  $H_0(\mathbf{X})$ ,  $C_i^{(0)}(\mathbf{X})$ ,  $N_i^{(0)}(\mathbf{X})$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $T_0(\mathbf{X})$ ,  $H_1(\mathbf{X}, t)$ ,  $T_1(\mathbf{X}, t)$  - задані функції. Тут використані наступні позначення:  $h(\mathbf{X}, t)$  - надлишкові напори в поровій рідині;  $\mathbf{c}(\mathbf{X}, t) = \{c_i(\mathbf{X}, t)\}_{i=1}^n$ ,  $\mathbf{N}(\mathbf{X}, t) = \{N_i(\mathbf{X}, t)\}_{i=1}^n$  - вектори концентрації солей в рідкій та твердій фазах відповідно;  $e$  - коефіцієнт

пористості;  $\gamma$  - питома вага сольового розчину;  $a$  - коефіцієнт стисливості ґрунту;  $\xi$  - коефіцієнт бічного тиску ґрунту;  $\mathbf{K}(\mathbf{c}, \mathbf{N}, T)$  - коефіцієнт (тензор) фільтрації, що залежить від концентрації солей в рідкій та твердій фазах та температури;  $\mathbf{v}_{c_i} = \{v_{c_{ikj}}\}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $\mathbf{v}_T = \{v_{T_{ij}}\}$ ,  $k, j = \overline{1, 3}$  - коефіцієнти (тензори) хімічного та термічного осмосів;  $N_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  - концентрації солей в твердій фазі;  $\rho_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  - густини солей в твердій фазі;  $n$  - пористість ґрунту;  $\mathbf{D}_i = \{D_{ikj}\}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $k, j = \overline{1, 3}$  - коефіцієнти (тензори) дифузії;  $\gamma_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  - коефіцієнти швидкості масообміну;  $\alpha_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  - показники степенів, які визначаються експериментальним шляхом і залежать від характеру засоленості породи [33];  $\mathbf{D}_{Ti} = \{D_{Ti}^{(kj)}\}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $k, j = \overline{1, 3}$  - коефіцієнти (тензори) термічної дифузії;  $C_i^{(\max)}$ ,  $i = \overline{1, n}$  - концентрації граничного насичення, які залежать від температури та концентрації інших солей в рідкій фазі [72];  $\lambda = \{\lambda_{kj}\}$ ,  $k, j = \overline{1, 3}$  - коефіцієнт (тензор) теплопровідності вологого ґрунту;  $\rho$  - густина порового сольового розчину;  $c_p$  - питома теплоємність порового сольового розчину;  $c_T$  - об'ємна теплоємність ґрунту;  $\mathbf{u} = (u_1; u_2; u_3)$  - вектор швидкості фільтрації;  $\mathbf{v} = (v_1; v_2; v_3)$  - вектор швидкості руху твердих частинок ґрунту;  $\mathbf{q}_i = \mathbf{u} \cdot c_i - \mathbf{D}_s \nabla c_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ ;  $\mathbf{q}_T = \rho c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T - \lambda \nabla T$ . Також  $\Gamma_1^{(h)} \cup \Gamma_2^{(h)} = \Gamma$  - межа області  $\Omega$ . Причому  $\Gamma_1^{(h)} \cap \Gamma_2^{(h)} = \emptyset$ . Аналогічні позначення використані для інших невідомих функцій.

#### 4.3.2. Схема відшукування наближеного розв'язку просторової крайової задачі методом радіальних базисних функцій

Покриємо область  $\Omega$  вузловими точками  $\mathbf{X}_j = (x_j^{(x)}, y_j^{(x)}, z_j^{(x)})$ ,  $j = \overline{1, m}$  [77, 78]. Згідно методу РБФ наближені значення невідомих функцій крайової задачі (4.37)–(4.44) шукаємо у вигляді

$$\begin{aligned}
h(\mathbf{X}, t) &\approx \sum_{j=1}^m h_j(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon_H), & c_i(\mathbf{X}, t) &\approx \sum_{j=1}^m c_{ij}(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon_{c_i}), \\
N_i(\mathbf{X}, t) &\approx \sum_{j=1}^m N_{ij}(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon_{N_i}), & T(\mathbf{X}, t) &\approx \sum_{j=1}^m T_j(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon_T),
\end{aligned} \tag{4.45}$$

де  $\varepsilon_h, \varepsilon_{c_i}, \varepsilon_{N_i}, \varepsilon_T, i = \overline{1, n}$ , – параметри форми базисної функції;  $\varphi_j(r_j, \varepsilon)$  – радіальні базисні функції;  $h_j(t), c_{ij}(t), N_{ij}(t), T_j(t), i = \overline{1, n}$ , – невідомі коефіцієнти, які залежать від часу;  $r_j = \sqrt{(x - x_j^{(x)})^2 + (y - y_j^{(x)})^2 + (z - z_j^{(x)})^2}$ ,  $j = \overline{1, m}$ .

Покриємо замикання  $\overline{\Omega}$  області  $\Omega$  колокаційними точками  $\mathbf{Y}_k = (x_k^{(y)}, y_k^{(y)}, z_k^{(y)})$ ,  $k = \overline{1, M}$ . Вимагаємо  $m \leq M$ . Введемо множини  $\omega = \{k : \mathbf{Y}_k \in \Omega\}$ ,  $\gamma_1^{(h)} = \{k : \mathbf{Y}_k \in \Gamma_1^{(h)}\}$ ,  $\gamma_2^{(h)} = \{k : \mathbf{Y}_k \in \Gamma_2^{(h)}\}$ . Аналогічно визначаємо множини номерів внутрішніх та граничних колокаційних точок для інших невідомих функцій. Введемо позначення

$$r_{kj} = \sqrt{(x_k^{(y)} - x_j^{(x)})^2 + (y_k^{(y)} - y_j^{(x)})^2 + (z_k^{(y)} - z_j^{(x)})^2}, \quad j = \overline{1, m}, k = \overline{1, M}.$$

Підставляючи (4.45) в рівняння (4.37)-(4.40), початкові умови (4.42) та граничні умови (4.43), використовуючи метод колокації в точці, отримаємо задачу Коші типу (4.13)-(4.17) для системи нелінійних диференціальних рівнянь відносно векторів невідомих  $\mathbf{H}(t) = \{h_j(t)\}_{j=1}^m$ ,  $\mathbf{C}_i(t) = \{c_{ij}(t)\}_{j=1}^m$ ,  $\mathbf{N}_i(t) = \{N_{ij}(t)\}_{j=1}^m$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $\mathbf{T}(t) = \{T_j(t)\}_{j=1}^m$ ,

$$\begin{aligned}
\text{де } \mathbf{M}_i^{(s)} &= \{m_{ikj}^{(s)}\}_{k=1, j=1}^{M, m}, & \tilde{\mathbf{M}}_i^{(s)} &= \{\tilde{m}_{ikj}^{(s)}\}_{i=1, j=1}^{k, m}, & s &= 2, 3; & \mathbf{L}_i^{(2)} &= \{l_{ikj}^{(2)}\}_{k=1, j=1}^{M, m}, & \mathbf{L}_i^{(3)} &= \{l_{ikj}^{(3)}\}_{k=1}^M, \\
\mathbf{M}^{(s)} &= \{m_{kj}^{(s)}\}_{k=1, j=1}^{M, m}, & \tilde{\mathbf{M}}^{(s)} &= \{\tilde{m}_{kj}^{(s)}\}_{k=1, j=1}^{M, m}, & \mathbf{L}^{(s)} &= \{l_{kj}^{(s)}\}_{k=1, j=1}^{M, m}, & s &= 1, 4; & \mathbf{K}_i^{(s)} &= \{k_{ikj}^{(s)}\}_{k=1, j=1}^{M, m}, \\
s &= 1, 2; & \mathbf{A}_i^{(1)} &= \{a_{ikj}^{(1)}\}_{k=1, j=1}^{M, m}, & \mathbf{A}_i^{(1)} &= \{a_{ikj}^{(1)}\}_{k=1, j=1}^{M, m}, & \mathbf{E}^{(1)} &= \{e_{kj}^{(1)}\}_{k=1, j=1}^{M, m}, & \mathbf{E}^{(2)} &= \{e_{kj}^{(2)}\}_{k=1, j=1}^{M, m}, \\
\tilde{\mathbf{F}}^{(s)} &= \{\tilde{f}_j^{(s)}\}_{j=1}^m, & \mathbf{F}^{(s)} &= \{f_j^{(s)}\}_{j=1}^m, & s &= \overline{1, 4}, & i &= \overline{1, n}.
\end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned}
m_{kj}^{(1)} &= -\varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_H), k \in \omega; & m_{ikj}^{(2)} &= -\sigma \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_{c_i}), k \in \omega, & i &= \overline{1, n}, & m_{ikj}^{(3)} &= \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_{N_i}), k \in \omega, \\
i &= \overline{1, n}, & m_{kj}^{(4)} &= -c_T \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_T), k \in \omega;
\end{aligned}$$

$$l_{kj}^{(1)} = \begin{cases} \frac{(1+e)(1+2\xi)}{3\gamma a} \nabla \cdot (\mathbf{K}_h(\mathbf{c}, \mathbf{N}, T) \nabla \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_h)), k \in \omega; \\ (\mathbf{u}, \mathbf{n})|_{\mathbf{x}=\mathbf{Y}_k}, k \in \gamma_2^{(h)}; \\ \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_h), k \in \gamma_1^{(h)}; \end{cases}$$

$$l_{ikj}^{(2)} = \begin{cases} \nabla \cdot (\mathbf{D}_C \nabla \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_{c_i})) - (\mathbf{u}, \nabla \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_{c_i})), k \in \omega; \\ \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_{c_i}), k \in \gamma_1^{(c_i)}; \\ (\mathbf{q}_i, \mathbf{n})|_{\mathbf{x}=\mathbf{Y}_k}, k \in \gamma_2^{(c_i)}; \end{cases}$$

$$l_{ik}^{(3)} = \gamma_i \left( \sum_{j=1}^m c_{ij}(\mathbf{t}) \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_{c_i}) - C_i^{(\max)}(\mathbf{c}, T) \right) \cdot \left( \sum_{j=1}^m \mathbf{N}_{ij}(\mathbf{t}) \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_{N_i}) \right)^{\alpha_i}, k = \overline{1, M}, i = \overline{1, n};$$

$$l_{kj}^{(4)} = \begin{cases} \nabla \cdot (\lambda \nabla \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_T)) - \rho C_p (\mathbf{u}, \nabla \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_T)), k \in \omega; \\ \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_T), k \in \gamma_1^{(T)}; \\ (\mathbf{q}_T, \mathbf{n})|_{\mathbf{x}=\mathbf{Y}_k}, k \in \gamma_2^{(T)}; \end{cases}$$

$$k_{ikj}^{(1)} = \frac{\varepsilon_{c_i} (1+e)(1+2\xi)e}{3\gamma \rho_i a} \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_{N_i}), k \in \omega, i = \overline{1, n}; k_{ikj}^{(2)} = \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_{N_i}), k \in \omega, i = \overline{1, n};$$

$$a_{ikj}^{(1)} = -\frac{\varepsilon_{c_i} (1+e)(1+2\xi)\sigma}{3\gamma \rho_i a} \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_{c_i}), k \in \omega, i = \overline{1, n};$$

$$a_{ikj}^{(1)} = \begin{cases} \frac{(1+e)(1+2\xi)}{3\gamma a} \nabla \cdot (\mathbf{v}_{c_i} \nabla \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_{c_i})), k \in \omega, i = \overline{1, n}; \\ (\mathbf{v}_{c_i} \nabla \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_{c_i}), \mathbf{n}), k \in \gamma_2^{(h)}; \end{cases}$$

$$e_{kj}^{(1)} = \begin{cases} \frac{(1+e)(1+2\xi)}{3\gamma a} \nabla \cdot (\mathbf{v}_T \nabla \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_T)), k \in \omega; \\ (\mathbf{v}_T \nabla \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_T), \mathbf{n}), k \in \gamma_2^{(h)}; \end{cases}$$

$$e_{kj}^{(2)} = \nabla \cdot (\mathbf{D}_T^{(i)} \nabla \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_T)), k \in \omega, i = \overline{1, n}; f_k^{(1)} = H_1(\mathbf{Y}_k, t), k \in \gamma_1^{(h)};$$

$$f_k^{(2)} = C_i^{(1)}(\mathbf{Y}_k, t), k \in \gamma_1^{(c_i)}; f_k^{(4)} = T_1(\mathbf{Y}_k, t), k \in \gamma_1^{(T)};$$

$$\tilde{f}_k^{(1)} = H_0(\mathbf{Y}_k), \tilde{f}_k^{(2)} = C_i^{(0)}(\mathbf{Y}_k), \tilde{f}_k^{(3)} = N_i^{(0)}(\mathbf{Y}_k), \tilde{f}_k^{(4)} = T_0(\mathbf{Y}_k), k = \overline{1, M}, i = \overline{1, n}.$$

Для знаходження числового розв'язку отриманої задачі Коші використано той же підхід, що і в одновимірному та двовимірному випадках.

Також на кожному часовому шарі необхідно перераховувати координати вузлових та колокаційних точок. Для цього використаємо кінематичну умову (4.34). Маємо

$$\begin{aligned} & \frac{z_j^{(s+1)} - z_j^{(s)}}{\tau} = \\ & = - \int_{l^{(s)}(\mathbf{x}', t)}^{L(\mathbf{x}')} \frac{1}{1 - (1+e) \sum_{i=1}^n \frac{1}{\rho_i} \sum_{j=1}^m N_{ij}^{(s+1)} \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_{N_i})} (1+e) \times \\ & \quad \times \left( \frac{3\gamma a}{1+2\xi} \left( \sum_{j=1}^m \frac{h_j^{(s+1)} - h_j^{(s)}}{\tau} \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_h) \right) - \right. \\ & \quad \left. - (1+e) \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{\rho_i} \left( C_i^{(\max)}(\mathbf{c}, T) - \sum_{j=1}^m c_j^{(s+1)} \varphi_j(r_{kj}, \varepsilon_{c_i}) \right) \left( \sum_{j=1}^m N_{ij}^{(s+1)} \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_{N_i}) \right)^{\alpha_i} \right) dz, s = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Інтеграл можна обчислити за допомогою квадратурних формул, наприклад, за допомогою формули прямокутників.

### 4.3.3. Результати числових експериментів та їх аналіз

Розглянемо просторову задачу фільтраційної консолідації масиву загіпсованого ґрунту форми прямокутного паралелепіпеда довжиною ребер 24 м, 24 м, 10 м (рис. 4.33). Ґрунт вважається однорідним та ізотропним за своїми характеристиками.

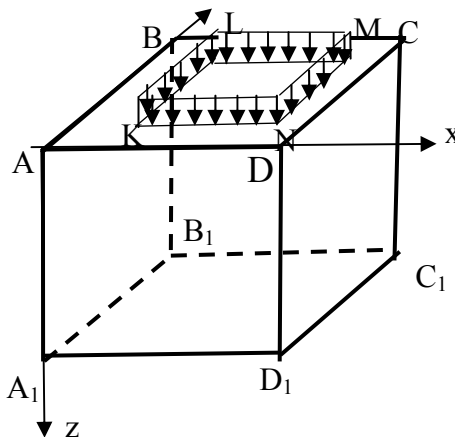


Рис. 4.33. Фільтраційна консолідація масиву ґрунту у тривимірному випадку

В області KLMN ґрунту прикладається зовнішнє навантаження інтенсивністю  $q(x,y)$ . Область KLMN – прямокутник зі сторонами, паралельними відповідним осям координат.

Межі ABCD (без області прикладеного навантаження), ADA<sub>1</sub>D<sub>1</sub>, ABA<sub>1</sub>B<sub>1</sub>, CDC<sub>1</sub>D<sub>1</sub>, BCB<sub>1</sub>C<sub>1</sub> є дренажними, область KLMN та межа A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub> є непроникними. Температура на межі ABCD та області KLMN вважається відомою.

Межу ABCD (без області прикладеного навантаження) позначимо як  $\Gamma_1$ , A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub> –  $\Gamma_3$ , ABA<sub>1</sub>B<sub>1</sub> і CDC<sub>1</sub>D<sub>1</sub> –  $\Gamma_4$ , ADA<sub>1</sub>D<sub>1</sub> та BCB<sub>1</sub>C<sub>1</sub> –  $\Gamma_5$ , область KLMN –  $\Gamma_2$ .

Нехай  $c_1(\mathbf{X},t)$ ,  $N_1(\mathbf{X},t)$  – концентрації звичайної кам'яної солі NaCl, яка починає надходити в ґрунт з фундаменту споруди;  $c_2(\mathbf{X},t)$ ,  $N_2(\mathbf{X},t)$  – концентрації гіпсу. Вхідні дані беремо наступними:

$$\sigma = 0.4, e = 0.7, \alpha_1 = 0.5, \alpha_2 = 0.5, a = 2.5 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2 / \text{H}, \rho_1 = 2000 \text{ кг} / \text{м}^3,$$

$$\rho_2 = 2300 \text{ кг} / \text{м}^3, C_1^{(\max)} = 350 \text{ г} / \text{л}, D_1 = 0.02 \text{ м}^2 / \text{доба}, D_2 = 0.02 \text{ м}^2 / \text{доба},$$

$$\gamma = 10^4 \text{ кг} / (\text{м}^2 \cdot \text{доба}^2), \gamma_2 = 6.5 \cdot 10^{-4} \text{ доба}^{-1}, \gamma_1 = 0 \text{ доба}^{-1},$$

$$\nu_{c_2} = 2.8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^5 / (\text{кг} \cdot \text{доба}), \nu_{c_1} = 2.9 \cdot 10^{-5} \text{ м}^5 / (\text{кг} \cdot \text{доба}), C_1(t) = C_1^{(\max)},$$

$$\xi = 0.75, T_1(t) = 30^\circ \text{C}, C_p = 4.2 \text{ кДж} / (\text{кг} \cdot \text{град}),$$

$$\lambda = 108 \text{ кДж} / (\text{м} \cdot \text{град} \cdot \text{доба}), C_T = 2137 \text{ кДж} / (\text{м}^3 \cdot \text{град}),$$

$$\nu_T = 2.8 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 / (\text{доба} \cdot \text{град}),$$

$$T_2(t) = 17 + 13 \cos\left(\frac{\pi t}{180}\right), C_1^{(0)} = \begin{cases} C_1^{(\max)}, & z = 0, \\ 10 \text{ г} / \text{л}, & z \neq 0; \end{cases} T_0 = \begin{cases} 30^\circ \text{C}, & z = 0, \\ 4^\circ \text{C}, & z \neq 0. \end{cases}$$

Коефіцієнт фільтрації чистої води покладался рівним  $0,001 \text{ м} / \text{доба}$ . Коефіцієнт фільтрації залежить від концентрації солей у твердій та рідкій фазах і температури. Апроксимаційні залежності використовувались ті ж самі, що в одно- та двовимірній задачах.

Загіпсованість ґрунту  $m_g$  приймалася рівною від 10% до 30%, а густина ґрунту  $\rho_g = 2000 \text{ кг/м}^3$ . Початкове значення гіпсу в твердій фазі обчислювалось за формулою  $N_2^{(0)} = \frac{m_g}{100} \rho_g$ .

Кількість вузлових і колокаційних точок покладалася рівною 2744. Крок по часу  $\tau = 10$  діб. Кількість часових проміжків 31. Параметр форми для невідомих функцій становив  $\varepsilon = 2.5$ .

Значення концентрації граничного насичення гіпсу  $C_2^{(\max)}(C_1, T)$ , що залежить від концентрації солі та температури отримано внаслідок апроксимації даних, взятих з [72], аналогічно одно- та двовимірним задачам.

Початковий розподіл надлишкових напорів  $h_0(x, y, z)$  знаходили як і у випадку тривимірної задачі розділу 3.

При вказаних даних у площині при  $x = 12 \text{ м}$ , паралельній  $YOZ$ , були знайдені значення напору, концентрації солей та гіпсу у твердій та рідкій фазах, температури на кожному часовому проміжку з використанням мультиквадіфратичної РБФ  $\varphi(r, \varepsilon) = \sqrt{1 + (r\varepsilon)^2}$  і побудовані відповідні графіки (рис.4.34 – 4.42).

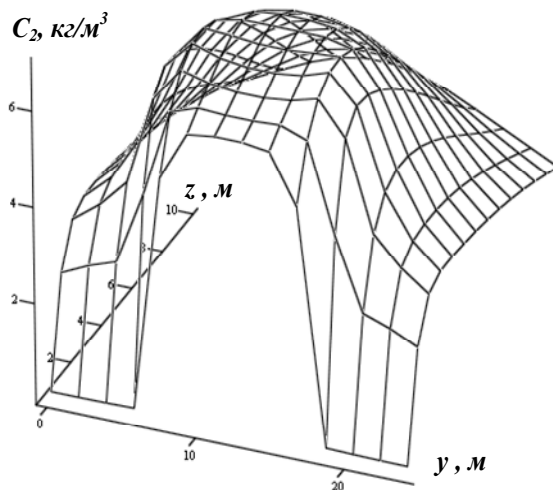


Рис. 4.34. Концентрація гіпсу у рідкій фазі ( $C_2^{(\max)} = C_2^{(\max)}(C_1, T)$ )

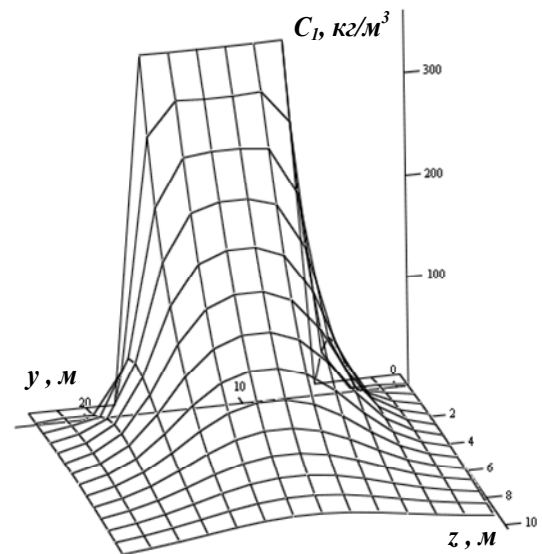


Рис. 4.35. Концентрація солей у рідкій фазі ( $C_2^{(\max)} = C_2^{(\max)}(C_1, T)$ )



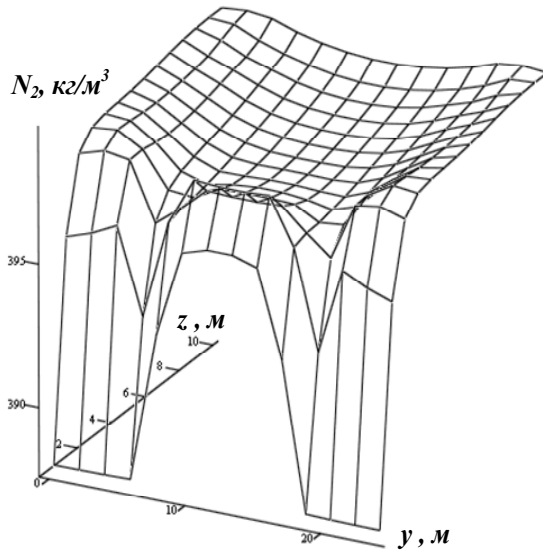


Рис. 4.36. Концентрація гіпсу у твердій фазі ( $C_2^{(\max)} = C_2^{(\max)}(C_1, T)$ )

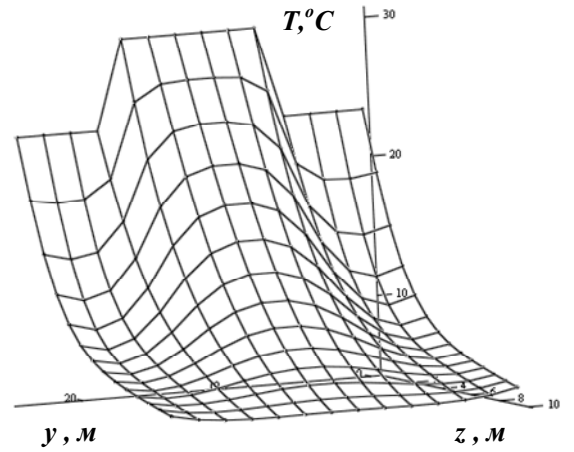


Рис. 4.37. Розподіл температури ( $C_2^{(\max)} = C_2^{(\max)}(C_1, T)$ )

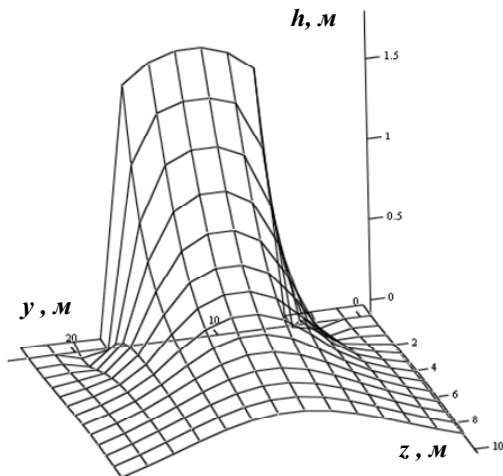


Рис. 4.38. Розподіл надлишкових напорів ( $C_2^{(\max)} = C_2^{(\max)}(C_1, T)$ )

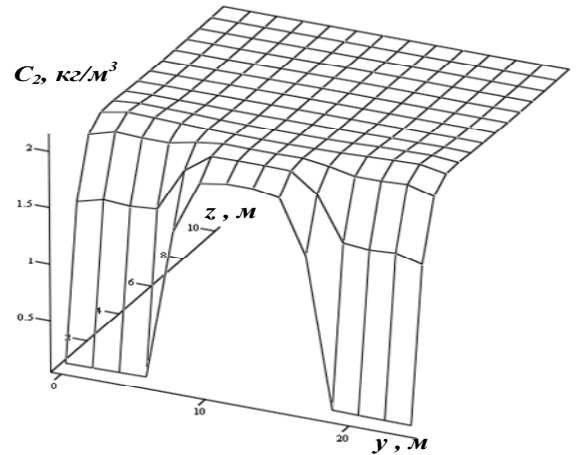


Рис. 4.39. Концентрація гіпсу у рідкій фазі ( $C_2^{(\max)} = const$ )

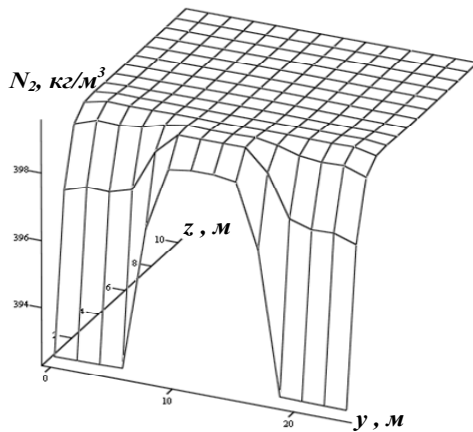


Рис. 4.40. Концентрація гіпсу у твердій фазі ( $C_2^{(\max)} = const$ )

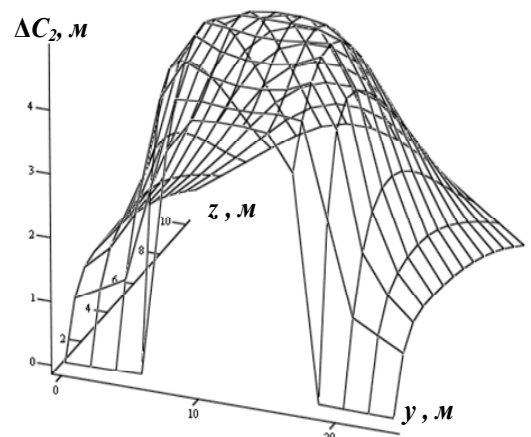


Рис. 4.41. Різниця розподілів концентрації гіпсу в рідкій фазі при ( $C_2^{(\max)} = C_2^{(\max)}(C_1, T)$ ) та ( $C_2^{(\max)} = const$ )

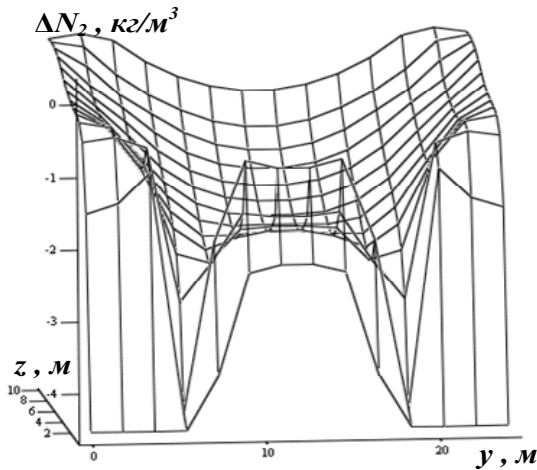


Рис. 4.42. Різниця розподілів концентрації гіпсу в твердій фазі при  $(C_2^{(\max)} = C_2^{(\max)}(C_1, T))$  та  $C_2^{(\max)} = \text{const}$

Таблиця 4.8

Величина просідань верхньої межі ґрунту за 300 діб при  $x = 12$  м

Координати $y, м$	2	6	8	12	16	18	22
Просідання при $C_2^{(\max)} = C_2^{(\max)}(C_1, T), см$	3,85	9,54	18,91	22,03	18,91	9,54	3,85
За рахунок зміни напорів при $C_2^{(\max)} = C_2^{(\max)}(C_1, T), см$	2,59	7,75	17,42	20,78	17,42	7,75	2,59
За рахунок зміни засоленості $C_2^{(\max)} = C_2^{(\max)}(C_1, T), см$	1,26	1,79	1,49	1,25	1,49	1,79	1,26
Просідання при $C_2^{(\max)} = \text{const}, см$	3,34	8,51	17,91	21,16	17,91	8,51	3,34
За рахунок зміни напорів при $C_2^{(\max)} = \text{const}, см$	2,59	7,76	17,47	20,84	17,47	7,76	2,59
За рахунок зміни засоленості $C_2^{(\max)} = \text{const}, см$	0,75	0,75	0,44	0,32	0,44	0,75	0,75

Надходження сольового розчину у загіпсований ґрунт збільшує концентрацію гіпсу у рідкій фазі (рис. 4.26), а в твердій - зменшує (рис. 4.27). З графіку різниці концентрації гіпсу у твердій фазі (рис. 4.34) видно, що гіпс, що наявний у ґрунті в твердій фазі, розчиняється швидше при врахуванні залежності  $C_2^{(\max)} = C_2^{(\max)}(C_1, T)$ .

Просідання досягає максимального значення в області прикладання навантаження і поступово зменшується із збільшенням відстані від даної області. Також просідання є симетричним (табл. 4.5).

Таблиця 4.9

Величина просідань верхньої межі ґрунту за 300 діб при  $x = 12$  м,  $y = 12$  м

№	Параметри	Величина просідань загіпсованого ґрунту при $C_2^{(\max)} = C_2^{(\max)}(C_1, T)$	Величина просідань загіпсованого ґрунту при $C_2^{(\max)} = const$	Збільшення просідань при $C_2^{(\max)} = C_2^{(\max)}(C_1, T)$ в порівнянні $C_2^{(\max)} = const$
1	$m_g = 10\%$ , $q = 20 \cdot 10^4$ кг/м <sup>2</sup> доба <sup>2</sup>	18,31 см	17,59 см	4,09 %
2	$m_g = 10\%$ , $q = 0$ кг/м <sup>2</sup> доба <sup>2</sup>	1,08 см	0,31 см	248,39 %
3	$m_g = 20\%$ , $q = 20 \cdot 10^4$ кг/м <sup>2</sup> доба <sup>2</sup>	22,03 см	21,16 см	4,11 %
4	$m_g = 20\%$ , $q = 0$ кг/м <sup>2</sup> доба <sup>2</sup>	1,25 см	0,32 см	290,62 %
5	$m_g = 30\%$ , $q = 20 \cdot 10^4$ кг/м <sup>2</sup> доба <sup>2</sup>	27,69 см	26,59 см	4,14 %
6	$m_g = 30\%$ , $q = 0$ кг/м <sup>2</sup> доба <sup>2</sup>	1,52 см	0,36 см	322,22 %

В таблиці 4.6 видно, що урахування залежності концентрації граничного насичення гіпсу призводить до збільшення величини просідання верхньої межі масиву ґрунту. Це можна пояснити тим, що гіпс розчиняється швидше при збільшенні концентрації солі в поровій рідині. Для порівняння можна проаналізувати останній стовпець таблиці 4.6, в якому наведено просідання у відсотках. Також в таблиці 4.6 наведено результати просідання при різній загіпсованості ґрунту (10%, 20% та 30%). Збільшення загіпсованості ґрунту збільшує об'єм розчиненого гіпсу, що в свою чергу призводить до збільшення просідання ґрунту.

Корисними є числові експерименти з визначення просідання верхньої межі масиву ґрунту при відсутності початкових надлишкових напорів. Зокрема, як видно з таблиці 4.6, просідання в результаті розчинення гіпсу і урахування

залежності  $C_2^{(\max)} = C_2^{(\max)}(C_1, T)$  збільшується від 0,32 см до 1,25 см (на 290,62 %). Тобто, якщо процес консолідації ґрунту під фундаментом цеху хімічного виробництва завершився, але в ґрунт починає надходити не вода, а сольовий розчин, то це спричиняє додаткові просідання. До того ж, ці просідання будуть нерівномірними. Тому урахування дії не чистої води, а сольового розчину може значно змінити прогностичні розрахунки просідання будівель на загіпсованих ґрунтах.

Величина просідання верхньої межі ґрунту при однакових вхідних даних в тривимірному випадку (22,03 см) менша, ніж у двовимірному (25,04 см). Така різниця у просіданнях обумовлена тим, що тривимірна математична модель з фізичної точки зору адекватніше описує досліджувану задачу.

#### ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 4

В даному розділі отримані наступні результати:

1. Сформульовані постановки задач фільтраційної консолідації ґрунтів з урахуванням впливу багатоконпонентних хімічних розчинів в одно-, дво- та тривимірному випадках.
2. Використовуючи результати розділу 2 побудовані математичні моделі вищевказаних задач. Математичні моделі описуються нелінійними крайовими задачами для систем параболічних рівнянь, що доповнені рівняннями кінетики масообмінних процесів.
3. Знайдено числовий розв'язок відповідних одно-, дво- та тривимірної крайових задач безсітковим методом радіальних базисних функцій.
4. Проведено ряд числових експериментів. Зокрема досліджено частковий випадок фільтраційної консолідації загіпсованих ґрунтів при надходженні в них розчину звичайної кам'яної солі. Враховано залежність концентрації граничного насичення гіпсу від концентрації розчину звичайної кам'яної солі та температури. При урахуванні вказаного фактору збільшується величина просідань верхньої рухомої межі досліджуваного масиву ґрунту.

Зокрема при відсутності початкових надлишкових напорів просідання збільшується приблизно на 290% (у випадку тривимірної задачі). Тобто, якщо процес консолідації ґрунту під фундаментом цеху хімічного виробництва завершився, але в ґрунт починає надходити не вода, а сольовий розчин, то це спричиняє додаткові просідання. До того ж, ці просідання будуть нерівномірними. Тому урахування дії не чистої води, а сольового розчину може значно змінити прогнольні розрахунки просідання будівель на загіпсованих ґрунтах.

5. Результати, які підтверджують сформульовані висновки, отримані і при дослідженні фільтраційної консолідації греблі побудованої із загіпсованих ґрунтів в якості греблі-огорожувача хвостосховища рідких хімічних відходів.

Отже, в процесі фільтраційної консолідації при надходженні в загіпсований ґрунт іншого хімічного розчину може відбуватися значне вилуговування сольового комплексу, яке сприяє збільшенню осідання поверхні ґрунту. Це загрожує виникненню значних деформацій будівель, що розміщені на поверхні досліджуваного ґрунту. Тому потрібно досить ретельно враховувати всі ці фактори при проектуванні будівництва на таких ділянках, щоб при експлуатації зведених споруд не зазнати великих збитків в результаті виникнення критичних ситуацій .

Результати даного розділу опубліковані в роботах [83-87, 91-94, 96]

## ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота є завершеним науковим дослідженням, у якому розв'язано важливу науково-технічну задачу математичного моделювання процесів фільтраційної консолідації ґрунтів з урахуванням впливу багатокomпонентних хімічних розчинів при проходженні гетерогенних процесів розчинення-кристалізації та залежності концентрації граничного насичення від теплового стану і хімічного складу порового розчину. При цьому отримано такі основні результати та висновки:

1. Вперше сформовано нелінійну математичну модель фільтраційної консолідації ґрунтів шляхом урахування впливу хімічної суфозії, кінетики гетерогенних масообмінних процесів, комплексного урахування залежності концентрації граничного насичення одних хімічних речовин від присутності в поровій рідині інших хімічних речовин та залежності коефіцієнта фільтрації від концентрації солей у рідкій і твердій фазах. Встановлено, що врахування залежності коефіцієнта фільтрації від концентрації солей в рідкій і твердій фазі сповільнює процес розсіювання надлишкових напорів в ґрунті, що, в свою чергу, веде до збільшення часу його стабілізації.
2. Вдосконалено кінематичну граничну умову на верхній рухомій межі масиву ґрунту шляхом урахування кінетики масообмінних процесів, і як частковий випадок, хімічної суфозії. Це дало можливість уточнення прогностичних даних щодо величини вертикальних просідань верхньої рухомої межі ґрунту завдяки врахуванню процесів розчинення та кристалізації, а також впливу хімічної суфозії на 53,4%.
3. Вперше досліджено можливість застосування безсіткового методу радіальних базисних функцій до класу крайових задач в областях з рухомими межами. Створено ефективну програмно-числову реалізацію з наближеного розв'язування відповідних нелінійних крайових задач в одно-, дво- та тривимірному випадку.

4. Досліджено практично важливі випадки фільтраційної консолідації загіпсованих ґрунтів з урахуванням хімічної суфозії при надходженні в ґрунт чистої води або розчину звичайної кам'яної солі. Встановлена необхідність урахування хімічної суфозії при дослідженні консолідації вказаного типу ґрунтів оскільки це призводить до підвищення точності прогнозних даних щодо величини просідань до 74%. У випадку, якщо загіпсований ґрунт вже перебуває в стабілізованому стані, то надходження в нього не чистої води, а розчину кам'яної солі приводить до інтенсифікації розчинення гіпсу і, як результат, до нових просідань поверхні ґрунту за рахунок хімічної суфозії. Величина просідань зростає до 200-300% в порівнянні з просіданнями при розгляді в якості порової рідини чистої води. Результати, які підтверджують сформульовані висновки, отримані і при дослідженні фільтраційної консолідації греблі, побудованої із загіпсованих ґрунтів, в якості греблі-огорожувача хвостосховища рідких хімічних відходів.
5. Практичне значення дисертаційної роботи полягає в наступному: результати дисертації впроваджено в процесі досліджень можливості виникнення загрози руйнування ґрунтової греблі, що оточує Басівкутське водосховище (м. Рівне), внаслідок хімічної суфозії. Дане дослідження проводилося спільно з Рівненським обласним управлінням водних ресурсів. Одержані в дисертаційній роботі результати впроваджені в навчальному процесі при підготовці спецкурсів «Математичне і комп'ютерне моделювання природних та техногенних процесів», «Чисельні методи прикладної математики» для студентів Національного університету водного господарства та природокористування МОН України за спеціальністю «Прикладна математика». Отримане авторське право на комп'ютерну програму «Комплекс комп'ютерних програм «Фільтраційна консолідація ґрунтів з урахуванням впливу техногенних факторів»» (свідоцтво №51618, дата реєстрації 08.10.2013р., автори П. М. Мартинюк, О. Р. Мічута).

**СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ**

1. Абелев М. Ю. О суффозионной сжимаемости и фильтрационных свойствах засоленных грунтов / М.Ю. Абелев, Г.Я. Карапетов, Г.С. Бабичева. // Проектирование и инженерные изыскания, 1990. - № 5. - С.39-40.
2. Абелев М. Ю. Строительство на засоленных грунтах / М.Ю. Абелев, У.Р. Джумашев. - М.: МИСИ, 1978. - 46 с.
3. Авторське право на комп'ютерну програму «Комплекс комп'ютерних програм «Фільтраційна консолідація ґрунтів з урахуванням впливу техногенних факторів»» (свідоцтво №51618, дата реєстрації 08.10.2013р., автори П. М. Мартинюк, О. Р. Мічута).
4. Агошков В. И. Методы решения задач математической физики / В.И. Агошков, П.Б. Дубровский, В.П. Шутяев. – М: Физматлит, 2002. – 320с.
5. Антонов В. М. Проектирование зданий при особых условиях строительства и эксплуатации / В.М. Антонов, В.В. Леденев, В.И. Скрылев. - Учеб. пособ. - Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2002. – 240 с.
6. Аравин В. И. Натурные исследования фильтрации / В.И. Аравин, О.Н. Носова. – Л.: Энергия, 1969. – 256 с.
7. Білеуш А. І. Протиаварійні заходи на ділянці північно–кримського каналу (162 км), де в ґрунтових основах розповсюджені гіпси / А.І. Білеуш, Т.В. Літвінчук, І.А. Омельченко. // Прикладна гідромеханіка. - 2006. – Том 8, №2. - С. 3-8.
8. Бабій Н. В. Математичне моделювання масопереносу зі змінними коефіцієнтами дифузії для неоднорідних обмежених магнітних середовищ / Н.В. Бабій, М.Р. Петрик // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки: зб. наук. пр. - Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільськ. нац. ун-т, 2010. - Вип. 4. - С. 3-17.
9. Баламирзоев А. Г. Развитие теории и методов прогнозирования суффозионных деформаций при фильтрации в трещиноватых основаниях



гидротехнических сооружений: дис. докт. техн.наук: 05.23.07 / А.Г. Баламирзоев. – Махачкала, 2006. – 391с.

10. Богаєнко В. О. Моделювання пливу засоленості на динаміку геохімічних процесів / В.О. Богаєнко // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія фіз.-матем. науки. – 2010. – Вип. 3. – С.3-13.

11. Богаєнко В. О. Паралельні алгоритми моделювання процесу фільтраційної консолідації під дією двокомпонентного розчину / В.О. Богаєнко // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія фіз.-матем. науки. – 2011. – Вип. 5 – С.3-13.

12. Бомба А. Я. Математичне моделювання фільтраційних процесів у криволінійних областях складної геометрії з невизначеними ділянками меж / А.Я. Бомба, В.І. Гаврилюк // Вісник Київського нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер. фіз.-матем. науки. – 2009. – Вип.4. - С.73-76.

13. Бомба А. Я. Метод квазіконформних відображень моделювання нелінійних процесів витіснення у деформівних середовищах / А.Я. Бомба, С.В. Ярошак // Вісник Київського нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер. фіз.-матем. науки. – 2010. – Вип.2. - С. 91-96.

14. Бомба А.Я. Нелінійні обернення крайових задач на квазіконформні відображення в анізотропних середовищах/ А.Я. Бомба, С.С. Каштан // Вісник Київського нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер. фіз.-матем. науки. – 2001. – Вип.4. - С. 182-195.

15. Бомба А.Я. Про один підхід до моделювання просторової квазіідеальної течії / А.Я. Бомба, А.В. Теребус // Вісник Київського нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер. фіз.-матем. науки. – 2011. – Вип.3. – С. 93-98.

16. Бомба А.Я. Просторові нелінійні сингулярно збурені крайові задачі типу "конвекція-дифузія" в анізотропних середовищах / А.Я. Бомба, В.В. Скопечкий // Вісник Київського нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер. фіз.-матем. науки. – 2007. – Вип.7. - С. 105-113.

17. Брилинг И. А. Влияние давления и температуры на фильтрационные свойства глин / И. А. Брилинг // Связанная вода в дисперсных системах. – М.: Изд. МГУ, 1977. – Вып. 4. – С.82-89.
18. Булавацький В. М. Некласическая задача теории фильтрационной консолидации водонасыщенных массивов / В.М. Булавацький, Г.Г. Федоренко, Р.А. Шувар // Моделирование деформируемых сред. – Киев: Наук. думка, 1993. – С. 71-75.
19. Булавацький В. М. Біпараболічна математична модель процесу фільтраційної консолідації / В.М Булавацький // Доп. НАН України. – 1997.- №8. –С.13-17.
20. Булавацький В. М. Математичне моделювання динаміки консолідаційних процесів з урахуванням релаксаційних ефектів / В.М. Булавацький, В.В. Скопецький // Кибернетика и системный анализ. – 2008. - №6. – С. 59-66.
21. Булавацький В. М. Математичне моделювання процесу консолідації основ накопичувачів промислових стоків / В.М. Булавацький, І.В. Рогаль // Доповіді НАН України. – 2004. - №1. – С. 42-47.
22. Булавацький В. М. Математичне моделювання процесу фільтраційної консолідації з урахуванням дифузійної нерівно важності та масообміну / В.М. Булавацький, В.І. Лаврик // Наукові записки НУКМА. Фізико-математичні науки. – 2006. – Том 51. – С. 7-10.
23. Булавацький В. М. Некласичні математичні модель процесів тепло- та масо переносу / В.М. Булавацький, Ю.Г. Кривонос, В.В. Скопецький. – Київ: Наук. думка, 2005. –282с.
24. Булавацький В. М. Системний підхід до проблеми математичного моделювання процесу фільтраційної консолідації / В.М. Булавацький, В.В. Скопецький // Кібернетика та системний аналіз. – 2006. – №6. С. 71-79.
25. Булавацький В. М. Чисельно-аналітичне розв'язання двовимірної крайової задачі біпараболічної теорії консолідації / В.О. Булавацький // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. праць. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1997. – Вип. 8. – С.13-17.

26. Бураго Н. Г. Обзор контактных алгоритмов / Н. Г. Бураго, В.Н. Кукуджанов // Изв. РАН. МТТ. – 2005. - №1. – С. 45-87.
27. Веригин Н. Н. Гидродинамические и физико-химические свойства горных пород / Н.Н. Веригин, С. В. Васильев, В.С. Саркисян, Б.С. Шержуков // М.: Недра, 1977. – 271с
28. Веригин Н. Н. Диффузия и массообмен при фильтрации жидкостей в пористых средах / Н.Н. Веригин, Б.С. Шержуков // В кн.: Развитие исследований по теории фильтрации в СССР. – М.: Наука, 1966. – С.237-313.
29. Веригин Н. Н. Консолидация водонасыщенного грунта при действии внешней нагрузки, нормальной к границе полупространства / Н.Н. Веригин // Доклады к VI Международному конгрессу по механике грунтов и фундаментостроению. - М.:Стройиздат, 1965. - С.26-31.
30. Веригин Н.Н. Консолидация грунта под гибким фундаментом (плоская задача) / Н.Н. Веригин // Основания, фундаменты, механика грунтов. - 1961. - №5. - С.20-23.
31. Веригин Н.Н. Консолидация грунтов в основании плотин / Н.Н. Веригин // Труды к VII Международному конгрессу по механике грунтов и фундаментостроению. - М.:Стройиздат, 1969. - С.102-110.
32. Веригин Н. Н. Методы прогноза солевого режима грунтов и грунтовых вод / Н.Н. Веригин, С.В. Васильев, Н.П. Куранов и др. – М.:Колос, 1979. – 336с.
33. Веригин Н.Н. О кинетике растворения при фильтрации воды в грунтах / Н.Н. Веригин // В. кн.: Растворение и выщелачивание горных пород. - М.: Госстройиздат, 1957. – С. 3-14.
34. Власюк А. П. Експериментальні дослідження деяких параметрів фільтрації сольових розчинів у піщаних грунтах / А.П. Власюк, М.Т. Кузло // Меліорація та водне господарство: міжвідомчий тематич. наук. зб. – К.: Аграрна наука – 2000. – Вип. 87. – С. 43-46.
35. Власюк А. П. Математичне моделювання консолідації ґрунтів в процесі фільтрації сольових розчинів / А.П. Власюк, П.М. Мартинюк. – Рівне: Вид-во УДУВГП, 2004. – 211с.

36. Власюк А. П. Математичне моделювання консолідації ґрунтів при фільтрації сольових розчинів в неізотермічних умовах / А.П. Власюк, П.М. Мартинюк. - Рівне: НУВГП, 2008. – 416 с.
37. Власюк А. П. Монотонна різницєва схема для нелінійного одновимірного рівняння параболічного типу, що містить першу похідну / А.П. Власюк, О.М. Степанченко, О.П. Остапчук // Вісник Київського ун-ту. Серія фіз.-математ. науки. – 2005. – Вип.2. – С. 188-197.
38. Власюк А. П. Про одну задачу консолідації ґрунтів із врахуванням впливу багатокомпонентних сольових розчинів в неізотермічних умовах ґрунтів / А.П. Власюк, П.М. Мартинюк, О.Р. Мічута // Тези ХІХ Міжнародної наукової конференції «Прийняття рішень в умовах невизначеності». – Ялта, 2011. - С.107.
39. Власюк А. П. Про одну задачу фільтраційної консолідації засоленого масиву ґрунту при урахуванні залежності параметрів фільтрації та масообміну від температури / А.П. Власюк, П.М. Мартинюк О.Р. Мічута // Тези ХVІ Всеукраїнської наукової конференції «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики». – Львів: Вид-во ЛНУ, 2008. – С. 149.
40. Власюк А. П. Про одну задачу фільтраційної консолідації масиву ґрунту з глинистим включенням за наявності тепло-масопереносу / А.П. Власюк, П.М. Мартинюк О.Р. Мічута // Тези ХV Всеукраїнської наукової конференції «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики». – Львів: Вид-во ЛНУ, 2008. – С. 51.
41. Власюк А. П. Теоретичне дослідження процесів розчинення та вимивання солей і карстових порід при фільтрації підземних вод в областях з криволінійними та вільними границями / А. П. Власюк // Дис. д-ра техн. наук: 05.13.02. – Київ, 1996. – 368с.
42. Власюк А. П. Фільтраційна консолідація глинистих ґрунтів при наявності масопереносу солей / А.П. Власюк, О.В. Жеребятєв // Вісник Укр. держ. акад. водн. госп.-ва. Вип. 1. Част. 1.– Рівне. - 1998. – С.40-43.

43. Власюк А. П. Чисельне розв'язування задач консолідації та фільтраційного руйнування ґрунтів в умовах тепло-масопереносу методом радіальних базисних функцій / А.П.Власюк, П.М.Мартинюк. – Рівне: Вид-во НУВГП, 2010. – 277 с.
44. Власюк А. П. Числове розв'язання одновимірної задачі фільтраційної консолідації засолених ґрунтів в неізотермічному режимі. / А.П. Власюк, П.М. Мартинюк, О.Р. Фурсович. // Матем. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – 51, №1. – С.197-204.
45. Власюк А. П. Чисельне розв'язування просторових задач фільтраційної консолідації з урахуванням впливу техногенних факторів методом радіальних базисних функцій/ А.П. Власюк, П.М. Мартинюк // Матем. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – 52, №3. – С.170-181.
46. Воронков Д. А. Математическое моделирование процессов переноса многокомпонентных смесей в электромембранных системах с учетом гомогенной и гетерогенной реакций диссоциации нейтрального компонента / Д.А. Воронков, Е.Н. Коржов // Конденсированные среды и межфазные границы. – 2006. - Т.8, № 1. – С.12-17.
47. Гера Б. Дифузія у тришаровій смузї з урахуванням стрибка функції концентрації домішкової речовини на внутрішніх поверхнях контакту / Б. Гера, Є. Чапля, О. Чернуха // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. - 2010. - Вип. 12. - С. 61-68.
48. Герсеванов Н.М. Основы динамики грунтовой массы / Н.М. Герсеванов – М.:Госстройиздат, 1931. - 242с.
49. Голубев В.С. Динамика геохимических процессов / В.С. Голубев. – М.: Недра, 1981. – 208 с.
50. Гольдин А.Л. Анализ консолидации растущей двухмерной области грунта / А.Л. Гольдин //Известия ВНИИГ. – 1974. - Т.104. - С.184-190.
51. Гончарук В. Є. Фізико-математичне моделювання процесів переносу радіоактивних забруднень / В.Є. Гончарук, Г.Т. Лянце, Є.Я. Чапля, О.Ю. Чернуха // Екологія довкілля та безпека життєдіяльності : Науково-

технічний журнал / Т-во "Знання"; НАНУ; Мін.осв. і науки Укр; Мін екології та природних ресурсів Укр. – Київ, 2002. – № 1. – С. 77-82.

52. Горелик Л.В. Расчеты консолидации оснований и плотин из грунтовых материалов / Л.В. Горелик. - Л.:Энергия, 1975. - 220 с..

53. Дейнека В.С. Модели и методы решения задач в неоднородных средах / В.С. Дейнека, И.В. Сергиенко. Киев: Наук. думка, 2001. – 605с.

54. Дейнека В.С. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения / В.С. Дейнека, И.В. Сергиенко, В.В. Скопецкий. – Киев: Наук. думка, 1998. – 614с.

55. Дейнека В.С. Параметрична ідентифікація кінетичних параметрів дифузії в багатошарових неоднорідних Fe/Dy-наномультиматрицях / В.С. Дейнека, М.Р. Петрик // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. пр. - Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільськ. нац. ун-т, 2011. - Вип. 5. - С. 85-111.

56. Дерягин Б.В. Поверхностные силы / Б.В. Дерягин, Н.В. Чураев, В.М. Муллер. – М.: Наука, 1987. – 398 с.

57. Джоші О.І. Експериментальні дослідження консолідації ґрунтів в умовах наявності градієнта концентрації сольового розчину / О.І. Джоші, О.В. Жеребят'єв // Вісник РДТУ. Гідромеліорація та гідротехнічне будівництво. Спецвипуск. – Рівне: 1999. - С. 195-199.

58. Добронравов О.О. Моделювання фільтрації ґрунтових вод з урахуванням суфозії і кольматації / О.О. Добронравов, В.С. Кремез // Проблеми водопостачання, водовідведення та гідравліки. -2006. - Вип. 7. – С. 141-146.

59. Дорджиев А. Г. Инженерно-геологические свойства карбонатосодержащих прочадочных грунтов Северо-Западного Прикаспия / А.Г. Дорджиев. – Элиста: ЗАОр «НПП «Джангар», – 2006. – 220 с.

60. Дроботенко М.И. Задача фильтрационной консолидации для сред с долговременной памятью / М.И. Дроботенко // Журнал выч. математ. и математ. физики. – 1998. – 38, №2. – С. 330-336.

61. Дроботенко М.И. Исследование фильтрационной консолидации путем сведения к задаче Коши для смещений скелета / М.И. Дроботенко, А.В. Костерин. - Препр./НИИ матем. и мех. Им. Н.Г.Чеботарева; 1991.1. - Казань: 1991. - 32с.
62. Дроботенко М.И. Обобщенное решение задачи фильтрационной консолидации / М.И. Дроботенко, А.В. Костерин // Докл. Российской акад. наук. – 1996. – Т.350, №5. – С. 619-62.
63. Дроботенко М.И. Регуляризация задачи фильтрационной консолидации упругой пористой среды / М.И. Дроботенко, А.В. Костерин // Известия ВУЗов. Математика. – 1998. - №4. – С.18-22.
64. Зарецкий Ю. К. Теория консолидации грунтов / Ю.К. Зарецкий. – М.:Наука, 1967. - 270с.
65. Иванов П. Л. Грунты и основания гидротехнических сооружений. Механика грунтов / П.Л. Иванов. – М.: Высш. шк., 1991. – 447 с.
66. Исаев В. И. Развитие метода коллокаций и наименьших квадратов / В.И. Исаев, В.П. Шапеев // Труды Ин-та математики и механики.- 2008. – Т.14, №1. – С. 41-60.
67. Колодяжний В.М. Деякі властивості атомарних функцій багатьох змінних / В.М. Колодяжний, В.О. Рвачов // Доповіді НАН України. – 2005. - №1. – С.12-20.
68. Колодяжний В.М. Щодо утворення сімейств атомарних радіальних базисних функцій / В.М. Колодяжний, О.Ю. Лісіна // Доповіді НАН України. – 2011. - №8. – С.16-22.
69. Колодяжний В.М. Бессеточные методы в задачах моделирования физических процессов / В.М. Колодяжний, О.Ю. Лисина // Проблемы машиностроения. – 2010. – Т.13, №3. – С.67-74.
70. Колодяжний В.М. Численные схемы решения краевых задач на основе бессеточных методов с использованием РБФ и АРБФ / В.М. Колодяжний, О.Ю. Лисина // Проблемы машиностроения. – 2010. – Т.13, №4. – С.49-56.

71. Кремез В. С. Моделирование влияния кольматации грунта на уровень грунтовых вод при фильтрации из водохранилища / В.С. Кремез // Гидравлика и гидротехника. – 1999. – Вып. 60. – С. 67–71.
72. Лукнер Л. Моделирование миграции подземных вод / Л. Лукнер, В.М. Шестаков. – М.: Недра, 1986. – 208 с.
73. Лучко И.А. Двумерная задача теории фильтрационной консолидации грунтового массива с учётом ползучести его скелета / И.А. Лучко // Докл. АН УССР. Сер. А. Физ.-матем. и техн. науки. - 1986. - №2. - С.23-26.
74. Лучко И.А. Некоторые задачи теории консолидации водонасыщенных грунтов / И.А. Лучко, В.М. Булавацкий. - Препр./АН УССР. Ин-т геофизики; 84.05. – К.:1984. - 52 с.
75. Магомедова А. В. Гидравлические расчеты на ЭВМ гидротехнических сооружений: учебное пособие / А. В. Магомедова, И. А-Г. Сулейманов, А. И. Ибрагимов, З. А. Курбанова, М. Р. Гусейнова. – Махачкала: ГОУ ВПО «ДГТУ», 2009. – 166 с.
76. Максимович Г. А. Карст Пермской области / Г.А. Максимович, К.А. Горбунова. – Пермь: Недра, 1953.– 121 с.
77. Мартинюк П.М. Вузлове і скінченноелементне покриття двовимірних областей: деякі алгоритми та їх програмна реалізація / П.М. Мартинюк, Ю.А. Семенчук // Вісник Нац. ун-ту водн. госп-та та природокористування. Сер. технічні науки. – 2010. Вип. 4(52). – С. 202-209.
78. Мартинюк П.М. Генерація вузлових та скінченноелементних сіток в просторі / П.М. Мартинюк, Ю.А. Семенчук // Вісник Нац. ун-ту водн. госп-та та природокористування. Сер. технічні науки. – 2011. Вип. 1(53). – С. 193-200.
79. Марчук Г.И. Введение в проекционно-сеточные методы / Г.И. Марчук, В.И. Агошков. – М: Наука, 1981. – 416с.
80. Маслов Н.Н. Некоторые новые вопросы расчёта консолидации глинистых грунтов / Н.Н. Маслов, Ле Ба Лыонг // Основания, фундаменты, механика грунтов. – 1986. - №6. – С.3-6.



81. Мистецкий Г.Е. Автоматизация расчета массопереноса в почвогрунтах / Г.Е. Мистецкий. – К. : Будівельник, 1985. – 136с.
82. Мичута О. Р. Математическое моделирование влияния химической суффозии на фильтрационную консолидацию засоленных грунтов в неизотермических условиях / О.Р. Мичута, А.П. Власюк, П. Н. Мартинюк // Математическое моделирование. – 2013. –Т.25, №2. - С. 3-18.
83. Мічута О. Р. R-вимірна задача впливу багатокomпонентних хімічних розчинів на процеси фільтраційної консолидації ґрунтів / О.Р. Мічута, А.П. Власюк, П.М. Мартинюк // Вісник Київського нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер. фіз.-матем. науки. – 2013. – Вип.2. – С. 196-204.
84. Мічута О. Р. Математичне моделювання взаємовпливів фільтраційних, теплових та багатокomпонентних хімічних полів в деформівному масиві ґрунту. I. Математична модель та чисельне розв'язання / О.Р. Мічута, П.М. Мартинюк // Вісник Нац. ун-ту водного госп-ва та природокорист. Сер. технічні науки. – 2012. – Вип.2(58). – С. 189-197.
85. Мічута О. Р. Математичне моделювання взаємовпливів фільтраційних, теплових та багатокomпонентних хімічних полів в деформівному масиві ґрунту. II. Результати чисельних експериментів / О.Р. Мічута, П.М. Мартинюк // Вісник Нац. ун-ту водного госп-ва та природокорист. Сер. технічні науки. – 2012. – Вип.2(58). – С. 198-203.
86. Мічута О. Р. Математичне моделювання впливу багатокomпонентних хімічних розчинів та неизотермічних умов на процеси консолидації ґрунтів в двовимірному випадку // Математичне та комп'ютерне моделювання. Сер. технічні науки. – 2012. – Вип.6. – С. 143-153.
87. Мічута О.Р. Математичне моделювання впливу багатокomпонентних хімічних розчинів та неизотермічних умов на фільтраційну консолидацію тіла ґрунтової греблі / О.Р. Мічута, А.П. Власюк, П.М. Мартинюк // Вісник Київського нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер. фіз.-матем. науки. – 2012. – Вип.3. – С. 209-215.

88. Мічута О. Р. Математичне моделювання впливу хімічної суфозії на фільтраційну консолідацію засолених ґрунтів в неізотермічних умовах в двовимірному випадку / О.Р. Мічута, А.П. Власюк, П. М. Мартинюк // Вісник Київського нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер. фіз.-матем. науки. – 2011. – Вип.4. - С. 169-175.
89. Мічута О. Р. Математичне моделювання впливу хімічної суфозії та неізотермічних умов на фільтраційну консолідацію засолених ґрунтів в тривимірному випадку / О.Р. Мічута, А.П. Власюк, П.М. Мартинюк // Таврійський вісник інформатики та математики. – 2012. – Вип.2. – С. 64-73.
90. Мічута О. Р. Математичне моделювання впливу хімічної суфозії та температури на консолідацію засолених ґрунтів в тривимірному випадку / О.Р. Мічута, А.П. Власюк, П.М. Мартинюк // Тези XVII Всеукраїнської наукової конференції «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики». – Львів: Вид-во ЛНУ, 2011. - С.76.
91. Мічута О. Р. Математичне моделювання консолідації ґрунтів з врахуванням неізотермічних умов та впливу багатоконпонентних хімічних розчинів в одновимірному випадку / О.Р. Мічута // Наукові записки НаУКМА. Сер. комп. науки. – 2012. – Т.138. - С. 100-105.
92. Мічута О. Р. Математичне моделювання консолідації загіпсованих ґрунтів із врахуванням впливу сольового розчину в неізотермічних умовах в одновимірному випадку / О.Р. Мічута, О.В. Валькова // Вісник Нац. ун-ту водного госп-ва та природокорист. Сер. технічні науки. – 2011. – Вип.3(55). – С. 129-136.
93. Мічута О. Р. Математичне моделювання фільтраційної консолідації засолених ґрунтів при залежності концентрації граничного насичення від температури / О.Р. Мічута, А.П. Власюк, П.М. Мартинюк // Вісник Нац. ун-ту водного госп-ва та природокорист. Сер. технічні науки. – 2010. – Вип.4(52). – С. 194-201.
94. Мічута О. Р. Про одну задачу консолідації ґрунтів із врахуванням впливу багатоконпонентних сольових розчинів в неізотермічних умовах ґрунтів / О.Р.

Мічута // Тези Всеукраїнської наукової конференції «Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів». – Рівне: Вид-во НУВГП, 2013. - С.107.

95. Мічута О. Р. Про одну задачу фільтраційної консолідації засолених ґрунтів з урахуванням впливу хімічної суфозії в неізотермічних умовах ґрунтів / О.Р. Мічута, А.П. Власюк, П.М. Мартинюк // Тези XVII Міжнародної наукової конференції «Прийняття рішень в умовах невизначеності». – Східниця, 2011. – С. 138-140.

96. Мічута О. Р. Про вплив багатокомпонентних хімічних розчинів та неізотермічних умов на фільтраційну консолідацію тіла ґрунтової греблі ґрунтів / О.Р. Мічута, А.П. Власюк, П.М. Мартинюк // Тези XVIII Всеукраїнської наукової конференції «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики». – Львів: Вид-во ЛНУ, 2012. – С.118.

97. Мічута О. Р. Про математичну модель загальної задачі впливу багатокомпонентних хімічних розчинів на процеси фільтраційної консолідації ґрунтів / О. Р. Мічута, А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Тези XVIII Всеукраїнської наукової конференції «Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики». – Львів: Вид-во ЛНУ, 2013. – С.55-56.

98. Молчанов И.И. Основы метода конечных элементов / И.И. Молчанов, Л.Д. Николаенко. Киев: Наук. думка, 1989. – 269с.

99. Мостова Н.М. Особливості температурного і кисневого режимів водойм в умовах теплового навантаження / Н.М. Мостова. – 2005.

100. Мустафаев А. А. Расчёт суффозионной осадки сооружений на засоленных грунтах с использованием центробежного моделирования / А.А. Мустафаев // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1984. - № 3. – С. 26-29.

101. Олейник А.Я. Математическое моделирование экологических катастроф, связанных с изменением режима грунтовых вод / А.Я. Олейник, В.С. Кремез, А.А. Добронравов // Вісник Укр. держ. акад. водн. госп-ва: зб. наук. статей за матер. Міжнар. конф. “Сучасні проблеми теорії фільтрації”, присв. пам’яті П.Ф.Фільчакова, 1-3 червня, 1998. – Рівне, 1998. – С.113-118.

102. Олійник О.Я. Прогноз фільтраційної консолідації глинистих ґрунтів при підготовці підвалин гідротехнічних споруд у складних гідрогеологічних умовах / О.Я. Олійник, А.І. Білеуш, С.О. Дворник та ін. // Меліорація і водне господарство: міжвідомч. темат. наук. зб. – К.:Аграрна наука, 1999. – Вип.86. – С.125-134.
103. Орадовская А.Е. Изменение фильтрационных свойств засоленных пород при длительной фильтрации / А.Е. Орадовская // Растворение и выщелачивание горных пород. - М.: Госстройиздат, 1957. - С.175-185.
104. Орадовская А.Е. Фильтрационное выщелачивание дисперсно распределенного гипса из песчано-глинистых пород/ А.Е. Орадовская // Растворение и выщелачивание горных пород. – М.: Госстройиздат, 1957. – С. 46-71.
105. Основания зданий и сооружений: СП 22.13330.2011. – М.: 2011. – 161 с.
106. Павилонский В.М. Изменение свойств суглинков в результате долговременной фильтрации раствора / В.М. Павилонский // Основания, фундаменты и механика грунтов. - 1983. - № 3. - С.17-19.
107. Петрик М.Р. Математичне моделювання фільтраційної консолідації в багатокомпонентних неоднорідних циліндричних середовищах вологомістких пористих частинок методами інтегральних перетворень / М.Р. Петрик, М.М. Петрик // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. пр. - Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільськ. нац. ун-т, 2012. - Вип. 7. - С. 222-241.
108. Петрухин В.П. О механизме деформирования загипсованных глинистых грунтов / В.П. Петрухин, С.В. Альперович // Основания, фундаменты и механика грунтов. - 1980. - № 2. - С.7-10.
109. Петрухин В.П. Расчёт суффозионных деформаций оснований в засоленных грунтах / В.П. Петрухин // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1995. - №5. – С. 11–13.
110. Петрухин В.П. Строительные свойства засоленных и загипсованных грунтов / В.П. Петрухин. – М.: Стройиздат, 1980. – 120 с.

111. Петрухин В.П. Строительство сооружений на засоленных грунтах / В.П. Петрухин. – М.: Стройиздат, 1989. – 264 с.
112. Платов Н.А. Инженерно-геологические изыскания в сложных условиях / Н.А. Платов, А.Д. Потапов, Н.А. Лаврова и др. - М.: МГСУ, 2011. – 130 с.
113. Поляков В.Л. К расчету фильтрации со свободной поверхностью / В.Л. Поляков // Теория и расчеты фильтрации. - К.: Наук. думка, 1980. - С. 46-56.
114. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР (1917-1967). / Под ред.. П.Я. Полубариновой-Кочиной. М.: Наука, 1969. – 546с.
115. Савула Я.Г. Числовий аналіз задач математичної фізики варіаційними методами / Я.Г. Савула. – Львів: Видавничий центр ЛНУ ім.Івана Франка, 2004. – 221с.
116. Самарский А.А. Аддитивные схемы для задач математической физики / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич.. – М.: Наука, 2001. – 319с.
117. Самарский А.А. Вычислительная теплопередача / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 784с.
118. Самарский А.А. Монотонные разностные схемы для задач конвекции-диффузии на треугольных сетках / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2002. – 42(9). – С. 1368-1382.
119. Самарский А.А. Монотонные разностные схемы на треугольных сетках / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич // Докл. РАН. – 2000. – 371. – С.742-746.
120. Самарский А.А. Численные методы математической физики / А.А. Самарский, А.В. Гулин. – М.: Научный мир, 2003. – 316с.
121. Самарский А.А. Численные методы решения задач конвекции-диффузии / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 248с.
122. Самарський А.А. Теорія разностних схем / А.А. Самарський. – М.: Наука, 1989. – 616с.
123. Семенов М. П. Задачи изучения выщелачивания и растворения горных пород при проектировании гидротехнических сооружений / М. П. Семенов //

Растворение и выщелачивание горных пород. – М.: Госстройиздат, 1957. – С. 6-10.

124. Семиохин И.А. Кинетика химических реакций / И.А. Семиохин, Б.В. Страхов, А.И. Осипов. – М.: Изд-во МГУ, 1995. – 351 с.

125. Сергиенко И.В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И.В. Сергиенко, В.В. Скопецкий, В.С. Дейнека. – Киев: Наук. думка, 1991. – 432с.

126. Сергиенко И.В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И.В. Сергиенко, В.В. Скопецкий, В.С. Дейнека. – Киев: Наук. думка, 1991. – 432с.

127. Сівак В. Процеси дифузії-конвекції з урахуванням сорбції у двошаровому фільтрі / В. Сівак, Є. Чапля, О. Чернуха // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. - 2006. - Вип. 4. - С. 78-91.

128. Словарь по гидрогеологии и инженерной геологии / Под ред. А.А. Маккавеева, О.К. Ланге. – М.: Недра, 1971. – 216 с.

129. Степанченко О. М. Математичне моделювання процесів розчинення та вилуговування водорозчинних порід з основ та фундаментів гідротехнічних споруд / О. М. Степанченко // Дис. канд техн. наук: 01.05.02. – Тернопіль, 2013. – 232с.

130. Сухинов А.А. Построение декартовых сеток с динамической адаптацией к решению / А.А. Сухинов // Математическое моделирование. - 2010. – 22(1). – С. 86-98.

131. Сухинов А.И. Адаптивно модифицированный попеременно-треугольный итерационный метод для решения сеточных уравнений с несамосопряженным оператором / А.И. Сухинов, А.Е. Чистяков // Математическое моделирование. – 2012. – 24(1). – С. 3-20.

132. Терлецкая М.Н. Деформации гипсоносного грунта при фильтрации / М.Н. Терлецкая // Почвоведение. - 1955. - № 9. - С.15-21.

133. Терлецкая М.Н. К вопросу суффозионной устойчивости засоленных гипсом грунтов в гидротехнических сооружениях / М.Н. Терлецкая //

- Растворение и выщелачивание горных пород. – М.: Госстройиздат, 1957. – С. 161-173.
134. Тер-Мартirosян З. Г. Консолидация и ползучесть слоя грунта ограниченной ширины под действием местной нагрузки / З.Г. Тер-Мартirosян, Пак Чун Сун // Основания, фундаменты, механика грунтов. - 1998. - №2. - С.2-6.
135. Токарчук М. Кінетика переносу радіонуклідів у склоподібних радіоактивно збуджених матеріалах / М. Токарчук, А. Жаліло, Є. Чапля, О. Чернуха // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. - 2005. - Вип. 2. - С. 87-99.
136. Тугай А. М. Визначення динаміки зміни рівнів води свердловин при їх кольматації сполуками заліза / А.М. Тугай // Вісник Рівненського державного технічного ун-ту. – 2002. – №1(14). – С. 107–115.
137. Ухов С.Б. Механика грунтов, основания и фундаменты / С.Б. Ухов. – М.: АСВ, 1994. – 525 с.
138. Фиалко А. И. Исследование влияния степени минерализации водных растворов на фильтрационные свойства горных пород / А. И. Фиалко, Ф. А. Руденко // Материалы по геологии и геохимии Украины, РСФСР и Молдавии. – Вып. 14. – Киев: Выш. шк., 1978. – С.63-68.
139. Флорин В. А. К вопросу о гидродинамических напряжениях в грунтовой массе / В.А. Флорин. – М.: ГОНТИ, 1938. - 124 с
140. Флорин В. А. Основные уравнения динамики грунтовой массы / В.А. Флорин //Изв. НИИГ. – 1939. – Т.15. – С.87-103.
141. Флорин В. А. Основы механики грунтов Т.2. / В.А. Флорин. – М.: Госстройиздат, 1961. – 560 с.
142. Флорин В. А. Теория уплотнения земляных масс / В.А. Флорин. – М.: Госстройиздат, 1948. – 284 с.
143. Хоменко В. П. Закономерности и прогноз суффозионных процессов / В.П. Хоменко. – М.: ГЕОС, 2003. – 216 с.

144. Храмченков М. Г. Элементы физико-химической механики природных пористых сред / М.Г. Храмченков // Казань: Издательство Казанского математического общества, 2003. – 178 с.
145. Цытович Н. А. Основы прикладной геомеханики в строительстве / Н.А. Цытович, З.Г. Тер-Мартirosян. – М.: Высш. шк., 1981. – 317 с.
146. Чапля Є. Математичне моделювання дифузії розпадної речовини у регулярних структурах / Є. Чапля, О. Чернуха // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. - 2008. - Вип. 8. - С. 173-185.
147. Чернуха О. Математичне моделювання дифузійних процесів у багатофазних тілах випадкової структури з використанням діаграм Фейнмана / О. Чернуха // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. - 2005. - Вип. 1. - С. 116-131.
148. Шахно С.М. Чисельні методи лінійної алгебри / С.М. Шахно. – Львів: ЛНУ ім. Івана Франка, 2007. – 243 с.
149. Ширинкулов Т. Ш. Ползучесть и консолидация грунтов / Т.Ш. Ширинкулов, Ю.К. Зарецкий. – Ташкент: Фан, 1986. – 390 с.
150. Шишкин Г. И. Сеточная аппроксимация параболического уравнения конвекции-дифузии на априорно адаптирующихся сетках:  $\epsilon$ -равномерно сходящиеся схемы / Г.И. Шишкин // Ж. вычисл. матем. и матем. Физика. – 2008. – 48(6). – С. 1014 -1033.
151. Ahmad F. Effect of leaching and gypsum content on properties of gypseous soil / F. Ahmad, Md Azlin, Md Said, L. Najah // International Journal of Scientific and Research Publications. - 2012. – Vol.2, Issue 9. – Pp.1-5.
152. Al-Banna L.A.A. Effect of soaking and leaching on the dissolution of Al-Dour gypseous soil / L.A.A. Al-Banna // M.Sc. Thesis, Building and Construction Department, University of Technology. - 2004.
153. Al-Busoda B.S. Studies on the behavior of gypseous soil and its treatment during loading / B.S. Al-Busoda // M.Sc. Thesis, Civil Eng. Dept. University of Baghdad, 1999.



154. Al-Qaissy F.F. Effect of gypsum content and its migration on compressibility and shear strength of the soil / F.F. Al- Qaissy // M.Sc. Thesis, Building and Construction Department, University of Technology, 1989.
155. Azimi G. Modelling of calcium sulphate solubility in concentrated multi-component sulphate solutions / G. Azimi, V.G. Papangelakis, J.E. Dutrizac // Fluid Phase Equilibria. - 2007. – Vol.260. – Pp.300–315.
156. Bear J. Dynamics of fluids in porous media / J. Bear // New York: El-sevier, 1972. – 764 p.
157. Beinum Van Modelling multicomponent solute transport in structured soils / Van Beinum // PhD-thesis, Wageningen, The Netherlands: Wageningen University. – 2007. - 176 p.
158. Berdugo I. On the behaviour of the Ca-SO<sub>4</sub>-H<sub>2</sub>O system / I. Berdugo, E. Romero, M. Saaltink, M. Albis. // Rev. Acad. Colomb. Cienc. – 2008. – Vol. 32(125). – Pp. 545-557.
159. Biot M.A. General solution of the equations of elasticity and consolidation for a porous material / M.A. Biot //J. Appl. Mech. – 1956. – Vol. 23, №1. – P.91-96.
160. Biot M.A. General theory of three-dimensional consolidation / M.A. Biot // J.Appl.Phys. – 1941. – Vol. 12, №2. – Pp. 155-165
161. Bona E. Multicomponent diffusion during Prato cheese ripening: mathematical modeling using the finite element method / E. Bona, Rui Sergio dos Santos Ferreira da Silva, D. Borsato, L.H.M. Silva, Dayanne Aline de Souza Fidelis // Cienc. Tecnol. Aliment. – 2010. – Vol.30(4). - Pp. 955-963.
162. Buhmann M. D. Radial basis functions: theory and implementations / M.D. Buhmann. – Cambridge: University Press, 2003. – 272 c.
163. Buhmann M. D. Radial basis functions: theory and implementations / M.D. Buhmann. – Cambridge: Cambridge University Press, 2004. – 260p.
164. Busoda B.S. Studies on the behavior of gypseous soil and its treatment during loading / B.S. Busoda // M.Sc. Thesis, Civil Eng. Dept. University, 1999. – Pp.\_\_\_\_\_

165. Class H. Numerical simulation of non-isothermal multiphase multicomponent processes in porous media. 1. An efficient solution technique / H. Class, R. Helmig, P. Bastian. // *Advances in Water Resources*. - 2002. – Vol.25. – Pp.533-550.
166. Farhan Al-Abdullah Highway S. Characteristics of gypseous soils treated with calcium chloride solution / S.Farhan Al-Abdullah Highway, N.Shaker Mahmood Al-Dulaimi // *Journal of Engineering*. – 2006. - Number 3, Vol. 13.- Pp. 681-692.
167. Forster M. Use of event trees to estimate the probability of failure of embankment dams by internal erosion and piping / M. Forster, R. Fell // *20<sup>th</sup> Congress on Large Dams, Beijing*. – 2000. – Pp.237-259.
168. Grady B. Wright Scattered node compact finite difference – type formulas generated from radial basis functions / B. Grady, B. Fornberg // *Journal of computational physics methods*. – 2006. – Vol. 212. – Pp. 99-123.
169. Greenkorn R. A. Phlow phenomena in porous media. – New York – Basel: Marcell Dekker, Inc., 1983. – 540 p.
170. Kansa E. J. Multiquadrics – a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics. II. Solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations / E.J. Kansa. // *Comput. Math. Appl.* – 1990. – 19. – Pp. 147-161.
171. Karkush M.O. Theoretical modeling and experimental investigation of the leaching behavior of salty soils / M.O. Karkush , Y.J. Al-Shakarchi, A.N. Al-Jorany // *ICCBT*. - 2008. – Vol.11. – Pp.123-138.
172. Khomenko V. P. Suffosion hazard: Today's and tomorrow's problem for cities / V.P. Khomenko // *Engineering geology special publication*. – 2009. – Vol. 22. – Pp. 113 – 123.
173. Least – squares collocation meshless method / X. Zhang, X. – H. Liu, K. – Z. Song, M. – W. Lu // *Int. J. Numer. Methods Engin.* – 2001. – Vol. 51. – Pp.1089-1100.
174. Liu G.R. Mesh free methods: Moving beyond the finite element method / G.R. Liu. – Boca Raton: CRC Press, 2003. – 694p.

175. Liu X. Radial point collocation methods for solving convection – diffusion problems / X. Liu // J. Zhejiang Univ. SCIENCE A. – 2006. – Vol. 7(6). – Pp.1862-1875.
176. Mao X. Three-dimensional model for multi-component reactive transport with variable density groundwater flow / X. Mao, H. Prommer, D. A. Barry, C. D. Langevin, B. Panteleit, L. Li // Environmental Modelling and Software. – 2006. – Vol. 21. - Pp. 615-628.
177. Nashat I.H. Engineering characteristics of gypsiferous soils in Iraq / I.H. Nashat // Thesis, Civil Engineering Department, University of Baghdad. – 1990. – Pp. \_\_\_\_
178. Nedunuri K.V. Modeling of heavy metal movement in vegetated, unsaturated soils with emphasis on geochemistry / K.V. Nedunuri, R.S. Govindaraju, L.E. Erickson, A.P. Schwab // Proc. 10th Annual Conference on Hazardous Waste Research, Kansas State University, Manhattan. – 1995. Pp 57-66.
179. Olander D.R. Simulation mass transfer and equilibrium chemical reaction / D.R. Olander // Amer. Inst. Chem. Eng. J. – 1960. – №6. – Pp.223-239.
180. Petrukhin V.P. Analysis of suffusion deformation of bases / V.P. Petrukhin, V.S Zie'bery, G.M. Velikhina, M.P. Raikhlin // Soil mechanics and foundation engineering. – 1992. – Vol. 29, № 5. – Pp. 160-164.
181. Saad Farhan Al-Abdullah Highway Characteristics of gypsiferous soils treated with calcium chloride solution / Saad Farhan Al-Abdullah Highway, Nabeel Shaker Mahmood Al-Dulaimi // Journal of Engineering. 2006. - № 3. – C. 681-692.
182. Sbai M.A. A numerical model for miscible displacement of multi-component reactive species / M.A. Sbai, M. Azaroual // 15<sup>th</sup> International Conference on Computational Methods in Water Resources, Chapel Hill, NC. – 2004. – Pp.237-259.
183. Sheng D. 2D finite element analysis of multicomponent contaminant transport through soils / D. Sheng, D.W. Smith // The International Journal of Geomechanics. – 2002. - Vol. 2. - №1. – Pp.113-134.
184. Shynkarenko H. A posteriori error estimations for finite element approximations on quadrilateral meshes / H. Shynkarenko, O. Vovk // Журнал

- обчислювальної та прикладної математики. – 2013. - №3(113). – С. 107-118.
185. Terzaghi K. Erdbaumechanik / K. Terzaghi. - Franz Deuticke, Vienna, 1925. - 185 p.
186. Vlasyuk A. P. Numerical solution of a one-dimensional problem of filtration consolidation of saline soils in a nonisothermal regime / A. P. Vlasyuk, P. M. Martinyuk, O. R. Fursovych // Journal of Mathematical Sciences. – 2009. – Vol. 160, №4. – Pp.525-535.
187. Wendland H. Scattered data approximation / H. Wendland. - Cambridge: Cambridge University Press, 2005. – 336 p.
188. Yousif A.H. Gypseous soil improvement using fuel oil / A.H. Yousif // Engenharia Ambiental. - 2011. - Vol. 8, №2. - Pp.207-215.

## ДОДАТКИ

## ДОДАТОК А

### Програмний комплекс

#### **«Фільтраційна консолідація ґрунтів з урахуванням впливу техногенних факторів»**

Програмний комплекс розроблений для розв'язання задач фільтраційної консолідації ґрунтів із врахуванням впливу тепломасопереносу одно- та багатокомпонентних сольових розчинів, повзучості скелету пористого середовища та наявності газової складової в областях з вільними межами. Він дає можливість проводити чисельні експерименти варіюючи вхідні дані та параметри форми, а також відображати результати цих експериментів у вигляді графіків та числових даних відповідно по кожному часовому шарі.

Даний програмний комплекс включає в себе три програмні додатки «Prog1», «Prog2» та «Prog3» розроблені в інтегрованому середовищі розробки Microsoft Visual Studio 2008 на мові C#. Для коректної роботи програмного комплексу вимагається наявність встановленого .NET Framework 3.5 і вище.

Перевагою програмного комплексу є використання стандартних засобів і функцій для створення графіків. Тому від користувача не вимагається встановлення DirectX або OpenGL бібліотек.

Частина числових розрахунків, що містить дисертаційна робота, отримана з використанням програмного додатку «Prog3»

#### **Програмний додаток «Prog3»**

Цей програмний додаток розроблений для розв'язання задачі фільтраційної консолідації тіла ґрунтової греблі із врахуванням впливу тепломасопереносу одно- та багатокомпонентних сольових розчинів та хімічної суфозії в областях з вільними межами. Він дає можливість проводити чисельні експерименти варіюючи вхідні дані та параметри форми, а також відображати результати цих експериментів у вигляді графіків та числових даних відповідно по кожному часовому шарі.

Після запуску програмного додатку перед користувачем з'являється головне вікно програми рис.1.

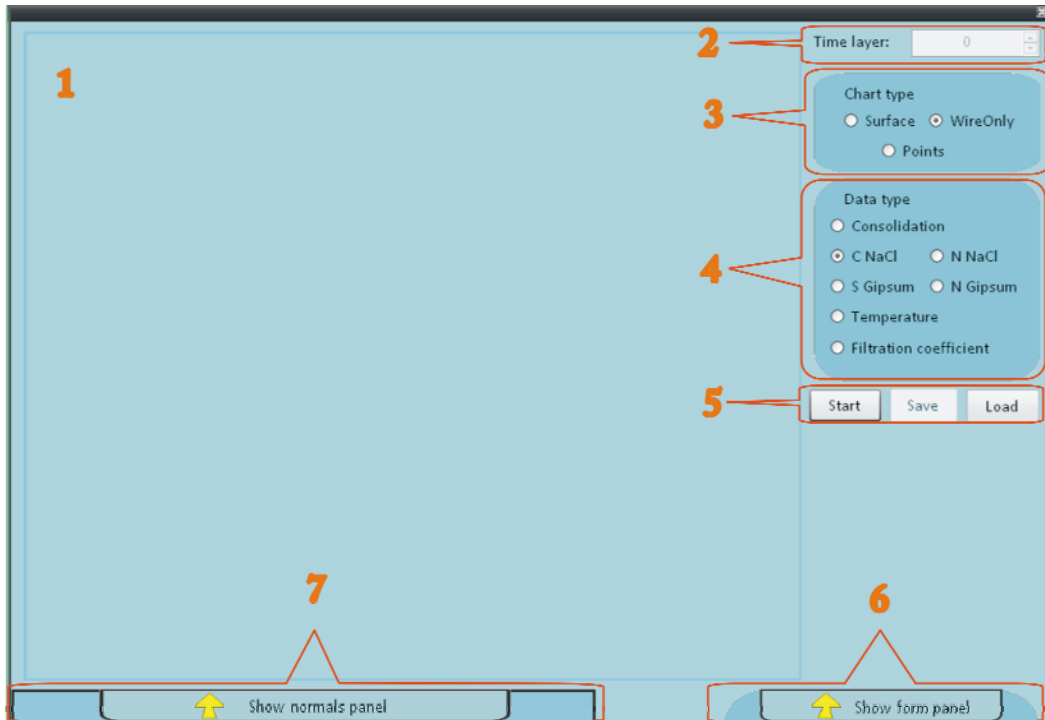


Рис. А1. Головне вікно додатку

Інтерфейс користувача можна розділити на 7 основних частин (див.рис. А1):

1. Головне полотно для побудови графіків в ході виконання програми.
2. Перемикач часових шарів (Якщо процес обрахунку не запущений то даний елемент вимкнений).
3. Секція вибору типу відображення графіків. Користувач може вибрати, щоб графіки відображались як поверхня, лінії або окремі точки.
4. Секція вибору типу графіка який відображається (Надлишкові напори, концентрація солі та гіпсу в твердій та рідкій фазі, температура, а також графік апроксимації коефіцієнта фільтрації).
5. Керуючі кнопки для запуску обрахунків, збереження результатів роботи, а також завантаження збережених результатів.
6. Панель керування параметрами форми (у згорнутому вигляді).
7. Панель для відображення зовнішніх нормалей до поверхні, що дозволяє динамічно спостерігати за їх зміною в процесі роботи програми.

Панелі 6 і 7 при натисненні на заголовок з'являються в повному розмірі рис. А2.

Панель відображення зовнішніх нормалей 1 (див. рис. А2) показує границю області з вузловими точками і векторами нормалі в цих точках.

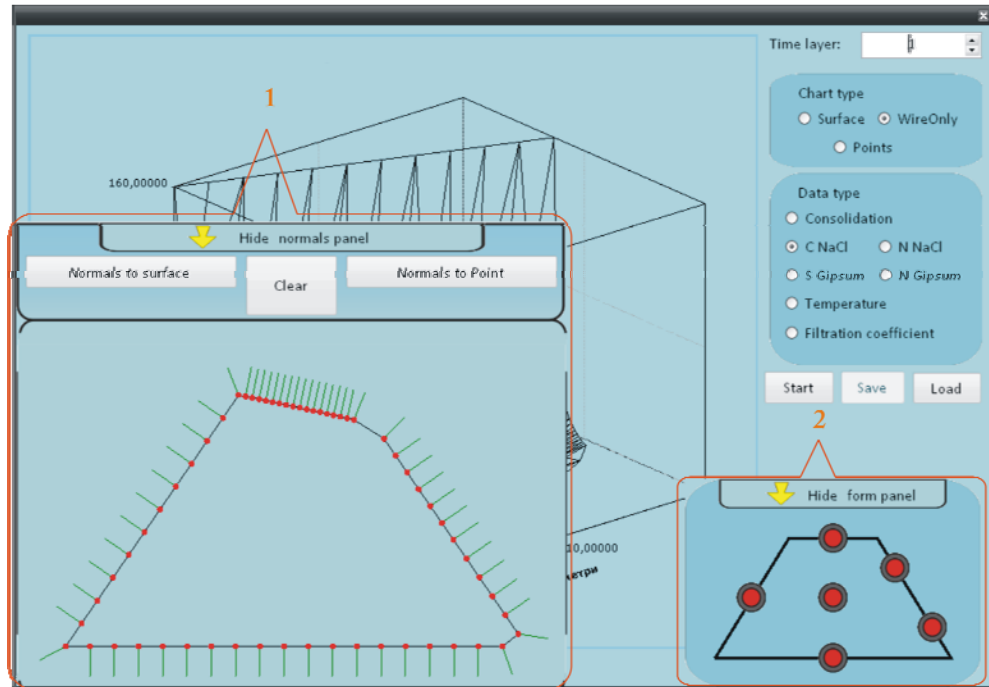


Рис. А2. Панелі зовнішніх нормалей та керування параметрами форми.

Панель керування параметрами форми 2 реалізована у вигляді зручного графічного інтерфейсу. Вона зображена як область з відповідними керуючими круглими кнопками на відповідних межах. При натисненні на одну з них відкривається вікно зміни параметрів форми рис. А3.

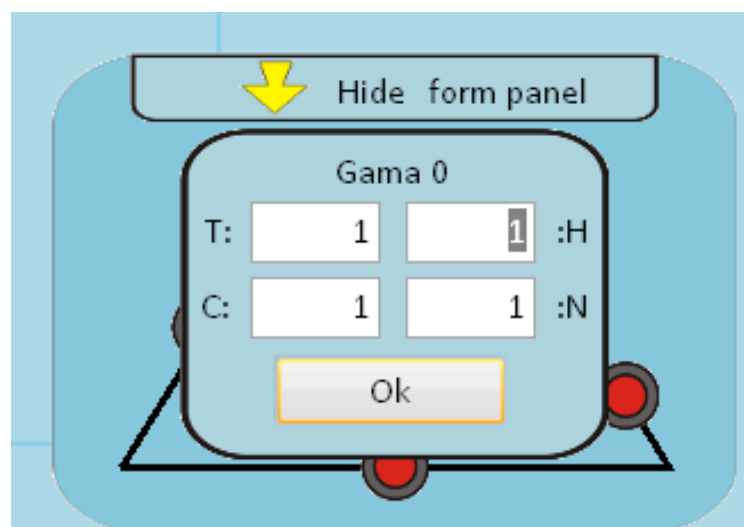


Рис.А3. Вікно зміни параметрів форми



Вікно, зображене на рис. А3, містить назву межі для якої відбувається зміна параметрів форми, а також поля для вводу параметрів. При закритті цього вікна всі параметри зберігаються на диску і відновлюються при наступному запуску програми.

Після запуску програми в користувача є два можливих алгоритми роботи з програмою.

1. Натиснути кнопку «Start», після чого програма розпочне обраховувати дані і покаже відповідні графіки. Після того, як всі обрахунки завершені, користувачеві стане доступна можливість збереження даних обчислень в файл (кнопка «Save» стане активною). При цьому ім'я файлу генерується автоматично, виходячи з вхідних даних і кількості точок (рис. А4).

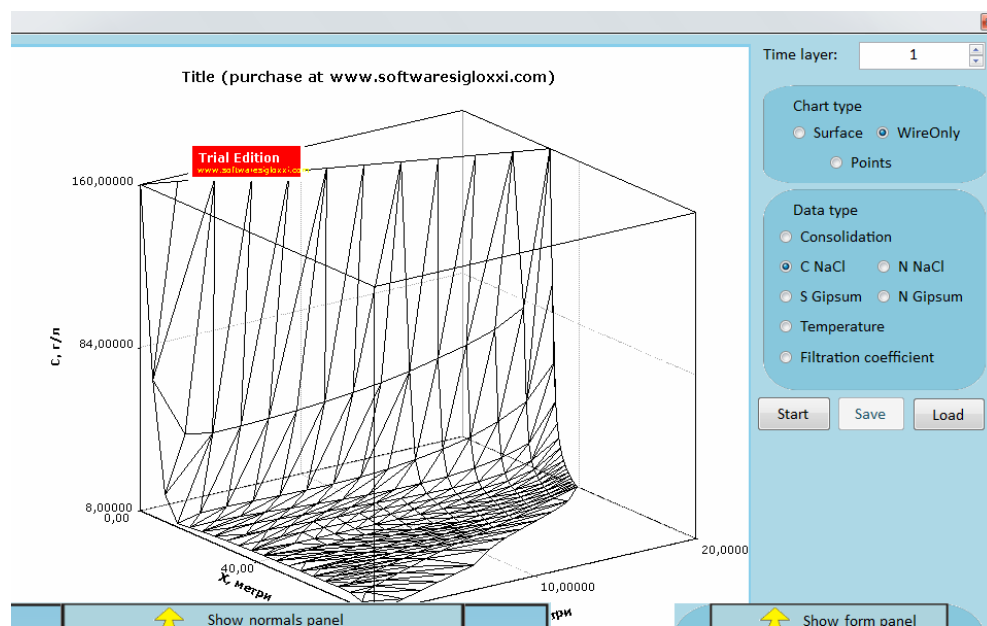


Рис. А4. Результат роботи програми при натисненні кнопки «Start»

2. Завантажити готові дані (натиснути на кнопку «Load») після чого з'явиться вікно вибору файлів для завантаження в програмний додаток рис. А5.

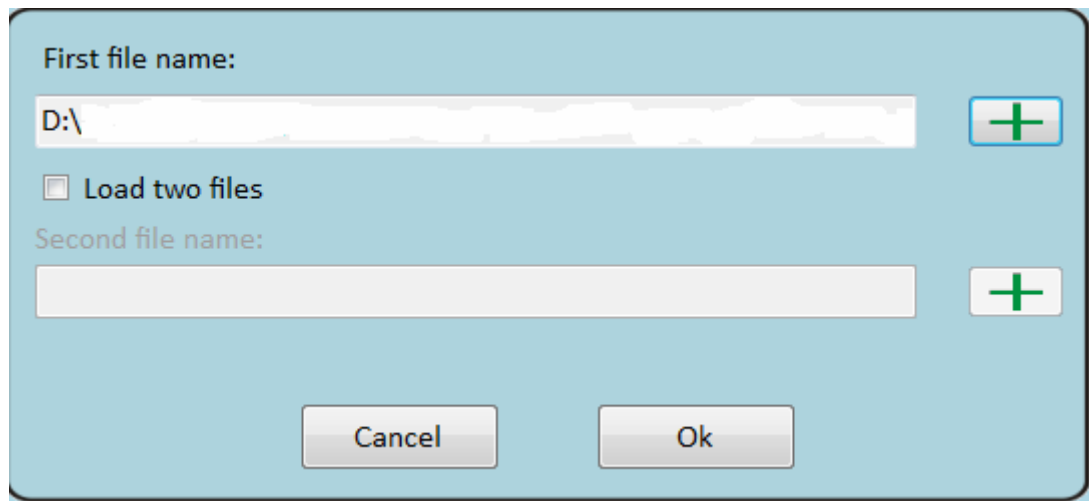


Рис. А5. Завантаження збережених даних для їх відображення.

Вікно, зображене на рис.А5., містить для текстових поля, де після вибору файлів буде відображатись їх назва. Щоб завантажити файл потрібно натиснути на відповідну кнопку з права від цього поля, після чого можна буде вказати файл на диску.

Отриманий результат відображений на рис. А6.

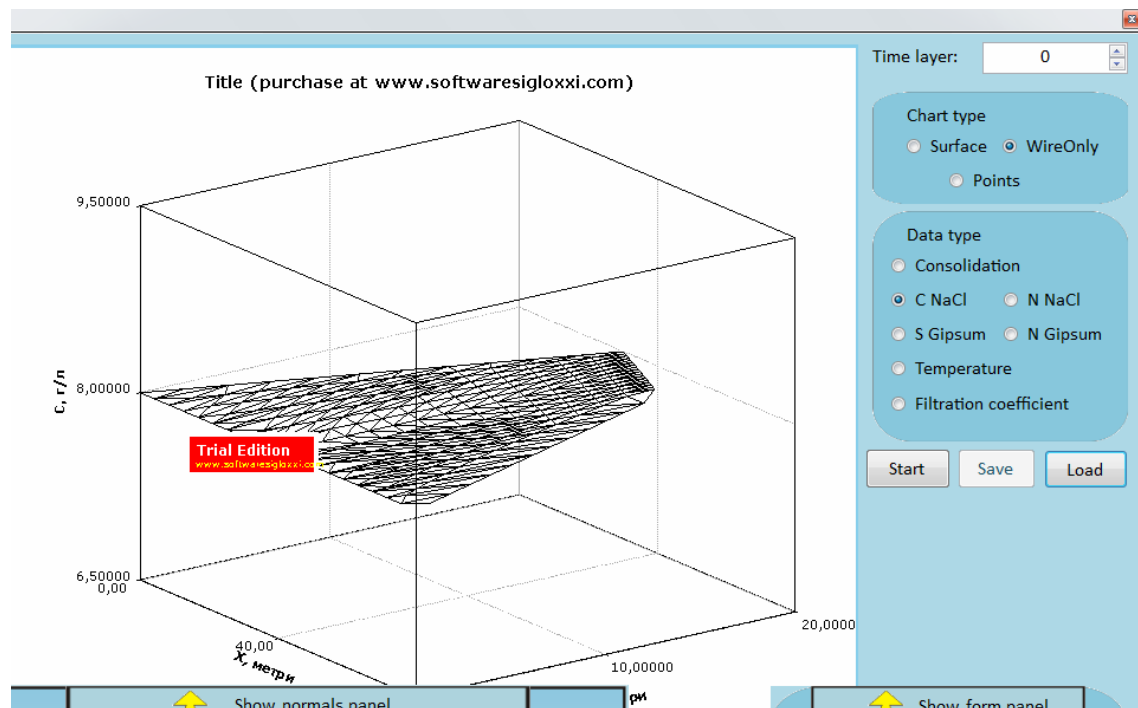


Рис. А6. Відображення збережених даних.

Зазвичай вікно дозволяє завантажити лише один файл. Проте, якщо увімкнути відповідний прапорець (Load two files) то кнопка для завантаження другого файлу стане активною (рис. А7) і в результаті програма відобразить різницю між вибраними даними (рис. А8).

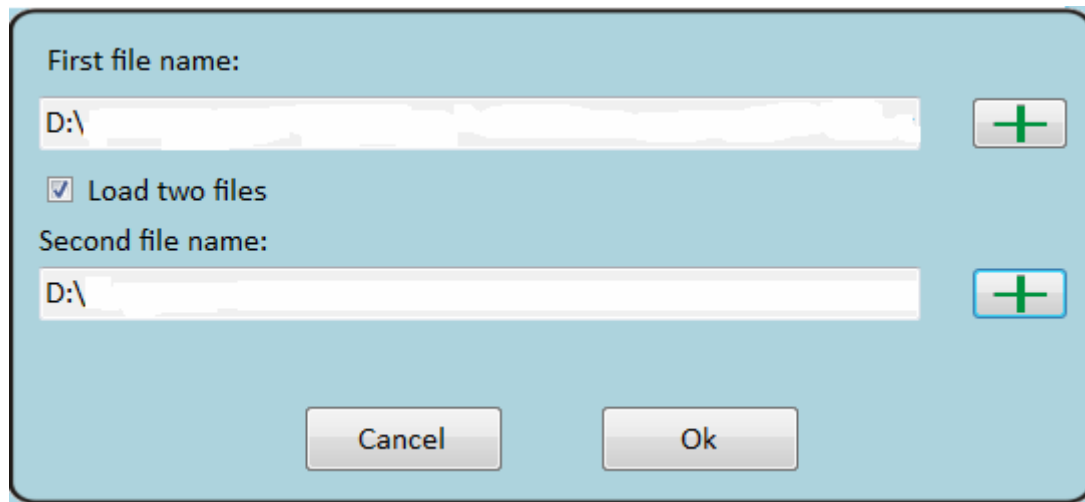


Рис. А7. Завантаження збережених даних для їх порівняння.

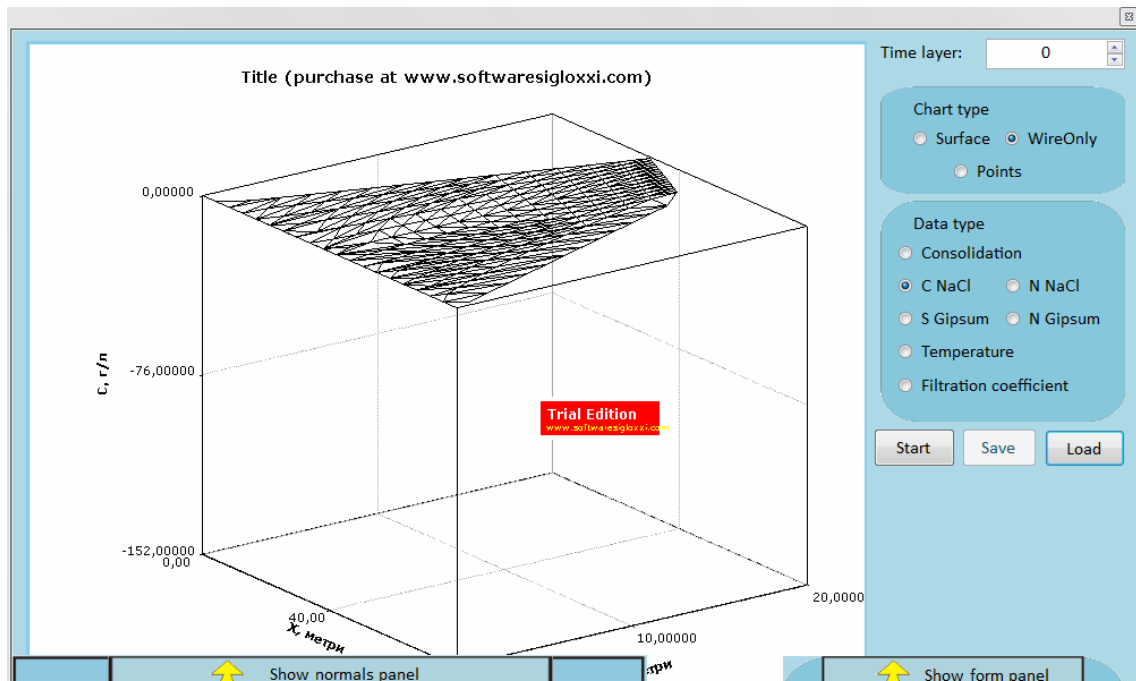


Рис. А8. Порівняння збережених даних.

## **ДОДАТОК Б**

**Акти про використання результатів  
дисертаційної роботи**





