

Міністерство освіти і науки України
УКРАЇНСЬКА АКАДЕМІЯ ДРУКАРСТВА

На правах рукопису

ГЕМБАРА
Наталія Олександрівна

УДК 517.958 : 536.12 : 620.198

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ
ПЛАСТИН І ОБОЛОНОК З БАГАТОШАРОВИМИ ПОКРИТТЯМИ**

01.05.02 - математичне моделювання та обчислювальні методи

ДИСЕРТАЦІЯ
на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук

науковий керівник
Лучко Йосип Йосипович
д.т.н., професор

Львів-2014

ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
РОЗДІЛ 1. СУЧАСНИЙ СТАН МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В ЕЛЕМЕНТАХ КОНСТРУКЦІЙ З ПОКРИТТЯМИ.....	
1.1. Постановка задачі теплопровідності.....	10
1.2. Основні методи розв’язування нестационарних рівнянь теплопровідності.....	14
1.3. Основні етапи розвитку математичного моделювання процесів теплопровідності в оболонках і пластинах.....	20
1.4. Огляд літературних даних по проблемі теплопровідності тіл з покриттями.....	27
1.5. Висновки, постановка та обґрунтування задач дослідження.....	31
РОЗДІЛ 2. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ОБОЛОНОК І ПЛАСТИН З БАГАТОШАРОВИМИ ПОКРИТТЯМИ.....	
2.1. Рівняння теплопровідності оболонок і пластин.....	35
2.2. Рівняння теплопровідності оболонок і пластин з одностороннім багатошаровим покриттям.....	35
2.2.1. Постановка задачі.....	35
2.2.2. Моделювання процесу теплообміну оболонки з навколишнім середовищем через тонке багатошарове покриття.....	38
2.2.3. Задача теплопровідності для оболонки з багатошаровим покриттям з узагальненою граничною умовою.....	43
2.3. Рівняння теплопровідності оболонок і пластин з двостороннім багатошаровим покриттям.....	50
2.3.1. Умови теплообміну оболонки з навколишнім середовищем через тонкі двосторонні багатошарові покриття.....	52

2.3.2. Задача теплопровідності для оболонки з двосторонніми багат шаровими покриттями з узагальненою граничною умовою.....	53
2.4. Висновки до розділу.....	54
РОЗДІЛ 3. ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В ПЛАСТИНАХ І ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНКАХ З БАГАТОШАРОВИМИ ПОКРИТТЯМИ.....	
56	
3.1. Стаціонарне температурне поле в круглій пластині постійної товщини з центральним вирізом та двостороннім багат шаровим покриттям.....	56
3.2. Стаціонарне температурне поле в круглій суцільній пластині постійної товщини з двостороннім багат шаровим покриттям.....	60
3.3. Нестационарне температурне поле в круглій суцільній пластині постійної товщини з двостороннім багат шаровим покриттям.....	63
3.4. Нестационарне температурне поле в нескінченній циліндричній оболонці з двостороннім багат шаровим покриттям.....	67
3.5. Нестационарне температурне поле у півобмеженій циліндричній оболонці з одностороннім багат шаровим покриттям.....	75
3.6. Нестационарне температурне поле у циліндричній оболонці з покриттям скінченних розмірів.....	79
3.7. Висновки до розділу.....	83
РОЗДІЛ 4. ВПЛИВ ЗАХИСНОГО БАГАТОШАРОВОГО ПОКРИТТЯ НА ТЕПЛОВИЙ РЕЖИМ ОБОЛОНКОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ.....	
85	
4.1. Температурне поле в корпусі реактора гідрокрекінгу нафти.....	86
4.1.1. Аналіз вихідних даних по умовах експлуатації біметалічного реактора.....	86

4.1.2. Визначення розподілу температури по товщині стінки корпусу реактора в процесі нагрівання зі сторони наплавки.....	89
4.1.3. Експериментальне визначення розподілу температури по товщині зразка в процесі нагрівання зі сторони наплавки.....	91
4.2. Вплив протикорозійного двостороннього двошарового покриття на термопружність суцільного диска газової турбіни.....	96
4.3. Вплив протикорозійного одностороннього двошарового покриття на розподіл температури в циліндричному корпусі автоклава.....	102
4.4. Висновки до розділу.....	106
ВИСНОВКИ.....	108
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	110
ДОДАТКИ.....	125

ВСТУП

Актуальність теми. Оболонки та пластини широко використовуються як конструктивні елементи в різних областях сучасної техніки (в парових і газових турбінах, у хімічних та ядерних реакторах, у реактивних двигунах тощо). З метою захисту від впливу агресивного середовища, зміцнення, теплоізоляції та ін. їх покривають тонкими шарами інших матеріалів. Зазвичай ці оболонкові елементи працюють в складних умовах нерівномірного нагрівання, яке спричиняє значні температурні напруження і, тим самим, суттєво впливає на несучу здатність конструкції в цілому та призводить до передчасного руйнування покриттів. Величина і закон розподілу температурних напружень залежить від характеру температурного поля. Тому вдосконалення методів його розрахунку у таких системах є актуальною задачею і має великий практичний інтерес.

Математичне моделювання є ефективним методом вивчення фізичних процесів, значний вклад у розвиток якого внесли: А.П. Власюк, Б.І. Гайвась, М.В. Заболоцький, Р.М. Кушнір, В.В. Маринець, М.В. Марчук, А.П. Олійник, Б.Л. Пелех, В.С. Попович, М.В. Приймак, М.М. Стадник, В.Ф. Чекурін, О.Ю. Чернуха, Б.І. Яворський.

Моделюванню процесу теплопровідності в оболонках і пластинах присвячено багато наукових праць. Проте, огляд і аналіз літератури показує, що теоретичних досліджень теплопереносу в оболонках з тонкими багатошаровими покриттями проведено недостатньо. Експериментальні ж дані свідчать про те, що змінність теплоємності та теплопровідності тонких приповерхневих шарів чи покриттів враховувати необхідно.

Таким чином, побудова та реалізація математичних моделей нестационарних процесів теплопровідності в оболонкових елементах конструкцій з багатошаровими покриттями, які дозволяють враховувати теплофізичні характеристики всіх шарів покриття, є актуальним та важливим науково-технічним завданням.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дослідження за темою дисертації виконувались відповідно до планів науково-дослідних робіт кафедри інженерної механіки Української академії друкарства, а також у межах держбюджетної науково-дослідної теми Філії Державного дорожнього інституту ім. Шульгіна «Львівського регіонального науково-технічного центру» (2007 - 2008 рр., договір №02/07-11).

Мета і завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є побудова математичних моделей нестационарних процесів теплопровідності оболонок та пластин з багат шаровими покриттями в умовах нерівномірного нагріву.

Для досягнення мети потрібно було вирішити такі основні завдання:

- моделювання впливу багат шарового покриття спеціальними крайовими умовами конвективного теплообміну оболонки з робочим середовищем;
- побудова математичних моделей теплопровідності оболонок і пластин з багат шаровими покриттями;
- розв'язання нових практично важливих задач теплопровідності пластин та циліндричних оболонок з односторонніми та двосторонніми покриттями;
- встановлення впливу багат шарового покриття на температурне поле оболонкових елементів конструкцій.

Об'єкт дослідження – процес теплопровідності в оболонках і пластинах з багат шаровими покриттями.

Предмет дослідження – математичні моделі теплопровідності оболонок і пластин з тонкими багат шаровими покриттями.

Методи дослідження. При побудові математичних моделей кількісного опису теплопровідності в оболонках та пластинах з покриттями використано відомі підходи теорії теплопровідності оболонок. Для розв'язання диференціальних рівнянь в частинних похідних 2-го порядку

застосовувалися метод інтегрального перетворення Лапласа за часом та метод Фур'є.

Наукова новизна одержаних результатів:

- отримала подальший розвиток кількісна теорія теплопровідності оболонок з урахуванням багат шарових покриттів;
- вперше сформульовано математичні моделі теплопровідності для оболонок з багат шаровими покриттями (одностороннє та двостороннє), які відрізняються від існуючих урахуванням теплофізичних характеристик усіх шарів покриття, що дозволяє підвищити точність розрахунків теплових режимів тонкостінних конструкцій з покриттями;
- на основі побудованих вихідних співвідношень уперше сформульовано відповідні крайові задачі теплопровідності для оболонок з багат шаровими покриттями, які описують конкретні процеси теплопереносу в промислових нагрівальних апаратах з плоскими (пластини) та циліндричними (циліндричні оболонки) елементами з урахуванням різних коефіцієнтів теплообміну з їх поверхонь;
- вперше отримано розв'язки стаціонарних та нестаціонарних задач теплопровідності для круглої пластини з двосторонніми тонкими багат шаровими покриттями, поверхні якої контактують з зовнішніми середовищами різних температур;
- вперше отримано розв'язки стаціонарних та нестаціонарних задач теплопровідності для циліндричної оболонки з односторонніми багат шаровими покриттями з різними теплофізичними властивостями.

Практичне значення отриманих результатів. Результати, отримані в дисертаційному дослідженні, можуть використовуватись при розв'язуванні практичних задач, які описуються рівняннями теплопровідності в оболонках та пластинах з тонкими покриттями. Зокрема, отримані прості аналітичні розв'язки дозволяють виконувати уточнений розрахунок теплових режимів тонкостінних конструкцій, що забезпечує їх надійну роботу.

Результати розрахунків використано при розробці «Рекомендацій із вимірювання характеристик напружено-деформованого стану елементів мостів при змінних температурах», виконаних на замовлення Філії Державного дорожнього інституту імені М.П. Шульгіна «Львівського регіонального науково-технічного центру» (2007 – 2008 рр., договір №02/07-11), при дослідженнях водневої стійкості корпусів реакторів гідрокрекінгу нафти, виконаних ТзОВ «Дослідний завод «Промкотлосервіс» на замовлення ВАТ «Іжорські заводи» (Росія) в рамках договору № IZ/04100/K19-01, при укладанні довідникового посібника Лучка Й.Й., Сулима Г.Т., Кир'яна В.І. «Механіка руйнування мостових конструкцій та методи їх залишкової довговічності» (за редакцією В.В. Панасюка і Й.Й. Лучка), а також стали основою науково-практичного видання «Рекомендації із визначення температури в оболонках та пластинах з багатошаровими покриттями» Й.Й. Лучка та Н.О. Гембари.

Особистий внесок здобувача. Всі наукові результати, включені в дисертацію, отримані здобувачем самостійно. У публікаціях, написаних у співавторстві дисертанту належить участь у постановці задачі, побудові моделі та проведенні математичних викладок [116, 117, 126]; у публікації [130] виписано крайові умови та знайдено розв'язок задачі; у роботах [112, 120] автором побудовано математичну модель та проведено числові дослідження.

Формулювання мети і задачі дисертації та обговорення результатів виконано разом з науковим керівником.

Апробація результатів дисертації. Матеріали роботи доповідалися та були обговорені на 6-, 7-, 11-му міжнародних симпозиумах українських інженерів-механіків у Львові (2003; 2005; 2013 рр., м.Львів); на 7-, 8-, 11-й міжнародних науково-практичних конференціях «Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій» (Ужгород, 2005; Дубляни-Львів, 2006, 2012 рр.); на науково-технічних конференціях

Української академії друкарства, на наукових семінарах кафедри інженерної механіки Української академії друкарства.

У повному обсязі дисертація доповідалася та рекомендована до захисту на міжкафедральному семінарі на базі кафедри інженерної механіки Української академії друкарства, на розширеному науковому семінарі кафедри обчислювальної математики та програмування Національного університету «Львівська політехніка» і на науковому семінарі Тернопільського національного технічного університету імені Івана Пулюя.

Публікації. Основні положення та результати дисертації достатньо висвітлені у дев'ятнадцятьох наукових публікаціях, з них – одинадцять статей у фахових виданнях України [112, 114, 116, 117, 119, 120, 124, 126, 128-130], в тому числі одна стаття у виданні, внесеному до міжнародної наукометричної бази даних Scopus [129] та у сімох виданнях матеріалів конференцій [113, 118, 121-123, 125, 127].

РОЗДІЛ 1

СУЧАСНИЙ СТАН МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В ЕЛЕМЕНТАХ КОНСТРУКЦІЙ З ПОКРИТТЯМИ

Під час теплообміну тіл з довкіллям через багат шарові покриття визначальний вплив на розподіл температури в них, а опосередковано і на напружено-деформований стан, мають величини коефіцієнтів теплопровідності і теплоємності усіх шарів. Задачі теплопровідності для тіл з покриттями, які мають різні теплофізичні властивості, давно цікавлять дослідників. Однак застосування аналітичних підходів до розв'язування таких задач пов'язано зі значними математичними труднощами.

У даному розділі наведено рівняння теплопровідності твердих тіл та методи їх розв'язування, висвітлено основні етапи розвитку математичного моделювання процесу теплопровідності в оболонках та тілах з покриттями, здійснено огляд праць за темою дисертації, окреслено коло питань і проблем, які потребують дослідження та подальшого розвитку.

1.1. Постановка задачі теплопровідності

Рівняння теплопровідності, яке застосовують для досліджень температурних полів, має вигляд [1,2]:

$$c_v \rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_v, \quad (1.1)$$

де T – температура, c_v – питома теплоємність, ρ – густина,

λ – теплопровідність, q_v – питома потужність внутрішніх джерел теплоти.

Диференціальне рівняння (1.1) зв'язує часову і просторову зміну температури у довільній точці тіла. За усталеної теплопровідності рівняння (1.1) спрощується:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{q_v}{c_v \rho}, \quad (1.2)$$

де a – температуропровідність, $\text{м}^2/\text{с}$.

Ізохорна температуропровідність, яка входить в (1.2) є теплофізичним параметром. Вона характеризує спроможність речовини вирівнювати температуру. Це значить, що тіла, які мають велику температуропровідність, нагріваються (охолоджуються) скоріше в порівнянні з тілами, що мають меншу температуропровідність.

Рівняння (1.2) є лінійним диференціальним рівнянням в частинних похідних другого порядку параболічного типу. Для анізотропних тіл, у яких теплопровідність залежить від напрямку, рівняння набуває наступного вигляду:

$$c_v \rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + q_v. \quad (1.3)$$

Диференціальне рівняння теплопровідності (1.1) має вид:

в циліндричній системі координат:

$$c_v \rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_v \quad (1.4)$$

і при $\lambda = \text{const}$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{q_v}{c_v \rho}; \quad (1.5)$$

у сферичній системі координат:

$$c_v \rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{2\lambda}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \psi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\lambda \sin \psi \frac{\partial T}{\partial \psi} \right) + q_v \quad (1.6)$$

і при $\lambda = \text{const}$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \psi} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \psi} \frac{\partial T}{\partial \psi} \left(\sin \psi \frac{\partial T}{\partial \psi} \right) \right] + \frac{q_V}{c_V \rho}. \quad (1.7)$$

Рівняння (1.1) описує множину явищ теплопровідності. Щоб із безмежної кількості цих явищ виділити одне і дати його повний математичний опис, до диференціального рівняння теплопровідності необхідно додати умови однозначності (крайові умови), які містять у собі геометричні, фізичні, часові і граничні умови.

Геометричні умови визначають форму і розміри тіла, в якому відбувається досліджуваний процес.

Фізичні умови задаються теплофізичними параметрами тіла λ , c_V і розподілом внутрішніх джерел теплоти.

Часові (початкові) умови містять розподіл температури в тілі в початковий момент часу.

Граничні умови визначають особливості проходження процесу на поверхні тіла. Граничні умови можуть задаватися декількома способами.

Граничні умови I роду. У цьому випадку задається розподіл температури на поверхні тіла для кожного моменту часу:

$$T_S = f(x_S, y_S, z_S, \tau), \quad (1.8)$$

де T_S – температура поверхні тіла; x_S, y_S, z_S – координати поверхні тіла.

В окремих випадках, коли температура на поверхні тіла не змінюється в часі $T_S = f(x_S, y_S, z_S)$, і якщо вона постійна на поверхні, то $T_S = \text{const}$.

Граничні умови II роду. У цьому випадку задається величина теплового потоку для кожної точки поверхні тіла в довільний момент часу, цебто

$$q_S = \varphi(x_S, y_S, z_S, \tau). \quad (1.9)$$

В окремих випадках, наприклад при нагріванні металевих виробів у високотемпературних печах $q_S = \text{const}$.

Граничні умови III роду. У цьому випадку задаються температури середовища T_0 і умови теплообміну цього середовища з поверхнею тіла.

Процеси теплообміну між середовищем і тілом є винятково складними і залежать від багатьох факторів. Для опису інтенсивності теплообміну між поверхнею тіла і середовищем використовується гіпотеза Ньютона-Ріхмана, згідно з якою

$$q_S = \alpha(T_S - T_0), \quad (1.10)$$

де α – коефіцієнт пропорційності, названий коефіцієнтом тепловіддачі, Вт/(м²·К).

Як видно із формули (1.10), коефіцієнт тепловіддачі чисельно рівний кількості теплоти, яка віддається (чи сприймається) одиницею поверхні тіла в одиницю часу при різниці температур між поверхнею тіла і навколишнім середовищем, рівною 1 град.

З урахуванням (1.10) гранична умова III роду записується так:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_S = -\frac{\alpha}{\lambda} (T_S - T_0). \quad (1.11)$$

У разі, коли коефіцієнт тепловіддачі має великі значення (наприклад, під час кипіння рідини на поверхні тіла), граничні умови III роду переходять в граничні умови I роду, тому що у цьому випадку температура поверхні тіла стає практично рівною температурі рідини.

Граничні умови IV роду формуються на основі рівності теплових потоків, які проходять крізь прилеглі одна до іншої поверхні тіл, тоді

$$\lambda_1 \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{S_1} = \lambda_2 \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{S_2}. \quad (1.12)$$

При досконалому тепловому контакті обидва тіла на поверхні дотику мають однакову температуру, це значить, що ізотерми безперервно переходять з одного тіла до іншого, при цьому градієнти температур у цих точках задовольняють умову (1.12)

Диференціальне рівняння (1.1) разом з умовами однозначності дають повне математичне формулювання конкретної задачі теплопровідності. Розв'язок цієї задачі може виконуватися аналітичним, чисельним чи дослідним методами. В останньому випадку використовуються методи подібності і аналогій.

1.2. Основні методи розв'язування нестационарних рівнянь теплопровідності

Диференціальне рівняння теплопровідності за відсутності внутрішніх джерел теплоти має вигляд

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = a \nabla^2 T. \quad (1.13)$$

Рівняння теплопровідності відноситься до так званих диференціальних рівнянь математичної фізики, для розв'язку яких напрацьовані як класичні методи, так і наближені [1,2]. До класичних методів відносяться, наприклад, метод розподілу змінних, метод джерел і інтегрального перетворення. Широкого застосування набули наближені методи, до яких відносяться метод кінцевих різниць (метод сіток) і метод аналогій (електроаналогія і гідроаналогія).

Метод розподілу змінних, запропонований Фур'є для застосування до задач теплопровідності і полягає в тому, що знаходиться сукупність частинних рішень рівняння (1.13), які далі додаються:

$$T = C_1 T_1 + C_2 T_2 + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} C_i T_i. \quad (1.14)$$

Метод джерел є одним із класичних методів, особливо зручний при розв'язуванні задач теплопровідності для необмеженої чи на половину обмеженої області. Прикладом такої задачі може бути розгляд нестационарного температурного поля при зміні зовнішніх умов.

Фізична сутність метода джерел полягає в тому, що процес розповсюдження теплоти в тілі теплопровідністю подається як сукупність процесів вирівнювання температури від множини елементарних джерел теплоти, які розподілені як в просторі, так і в часі.

Методи інтегрального перетворення. Для розв'язку багатьох задач теплопровідності класичні методи є недостатніми, в зв'язку з чим знаходять широке застосування різні методи інтегральних перетворень диференціальних рівнянь і граничних умов. Суть метода інтегральних перетворень полягає в тому, що вивчаються не самі функції, які визначаються постановкою задачі, а їх видозмінення – так зване зображення; сама ж функція називається оригіналом. Якщо перетворення береться за просторовою координатою x , то інтегральне перетворення функції оригіналу $f(x)$ може бути представлене в наступному вигляді:

$$F(p) = \int_0^{\infty} K(p, x) f(x) dx, \quad (1.15)$$

де $F(p)$ – зображення функції $f(x)$; $K(p, x)$ – ядро перетворення; p – комплексний параметр.

Межі інтегрування можуть бути як нескінченними, так і скінченними.

Якщо на поверхні тіла задані граничні умови I роду (задано значення функції) варто використовувати синус-перетворенням Фур'є, при граничних умовах II роду косинус-перетворенням Фур'є. При цьому ядра перетворень відповідно мають вигляд:

$$K(p, x) = \sqrt{2/\pi} \sin(px); \quad K(p, x) = \sqrt{2/\pi} \cos(px). \quad (1.16)$$

Для тіл з осьовою симетрією (наприклад, для циліндра) ядром перетворення повинна бути функція Бесселя

$$K(p, x) = rJ(pr), \quad (1.17)$$

де $J(pr)$ – функція Бесселя; r – незалежна змінна, яка змінюється від 0 до R (R – зовнішній радіус). Інтегральне перетворення в цьому випадку носить назву перетворення Ханкеля.

При вирішенні нестационарних задач теплопровідності найбільше розповсюдження отримали метод інтегрального перетворення Лапласа і операційний метод Хевісайда. У цьому методі інтегральне перетворення функції, яка залежить від часу $f(\tau)$, визначається функцією

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-p\tau} d\tau. \quad (1.18)$$

Застосування метода інтегральних перетворень до диференціальних рівнянь в частинних похідних дозволяє отримати для одновимірного випадку звичайне диференціальне рівняння відносно зображення. Застосування інтегрального перетворення до звичайних диференціальних рівнянь переводить їх в алгебраїчне відносно зображень. Перехід від зображення до оригіналу здійснюється за відповідними формулами повернення.

Теорія подібності - основний напрям узагальненого аналізу — вчення про методи універсалізації кількісного дослідження. Якщо отримано повний аналітичний розв'язок задачі в загальному вигляді, то вдається встановити кількісні закономірності процесу, які визначають взаємний зв'язок величин і дозволяють не тільки знайти значення шуканих характеристик процесу для будь-якого моменту часу в будь-якій точці простору, але контролювати вплив кожного з чинників [2].

Із-за великої складності завдань і достатньо високих вимог до точності і детальності розв'язків першочергове значення мають не аналітичні, а чисельні методи розв'язку і експеримент, які, на противагу аналітичним методам, оперують виключно конкретними числами. При цьому кожен окремий випадок стає самостійним завданням зі своїм розв'язком, застосовним тільки в умовах цього випадку. Визначення загальних закономірностей перетворюється на особливе, вкрай важке завдання, складність якого різко зростає з кількістю індивідуальних особливостей процесу. Вплив цих особливостей відбивається у рішенні за допомогою параметрів завдання, що характеризують властивості речовин, істотних для процесу, форму і розміри системи, фізичну обстановку, в якій розвивається процес. Параметри і незалежні змінні (координати і час) спільно утворюють повну сукупність аргументів завдання; всі шукані змінні – функції цих аргументів. Для сучасних складних завдань характерна численність параметрів, що створює значні труднощі.

Велике значення має проблема універсалізації, тобто розробки таких форм дослідження, яким відповідає найменше можливе число представлених в явному вигляді параметрів. Загальний принцип універсалізації — перехід до змінних, що включають параметри в прихованому вигляді. Методи теорії подібності застосовні для цілей універсалізації в тому випадку, якщо дослідження полягає в розв'язку математичної задачі, яка формулюється у вигляді системи основних рівнянь і краєвих умов, що містять додаткові відомості, необхідні для виділення окремого випадку і виражені через характерні значення змінних, що визначають конкретні особливості фізичної обстановки (геометрія системи, режимні умови). Універсалізація здійснюється на основі переходу до відносних змінних — відношення змінних до їх характерних значень. При цьому рівняння зводяться до безрозмірного вигляду: змінні під знаком диференціальних операторів замінюються відносними, а параметри об'єднуються у вирази, що є степеневими безрозмірними комплексами, які входять у рівняння у вигляді числових множників при диференціальних операторах. Всі індивідуальні особливості процесу визначаються через комплекси, які отримують сенс параметрів завдання, що розглядається у відносних змінних. Кінцевий результат у відносних змінних представляється у вигляді рівняння, яким шукана змінна визначається як функція часу, координат і комплексів. Заданим значенням всіх комплексів відповідає єдиний розв'язок, що охоплює всі можливі комбінації індивідуальних параметрів, що задовольняють цим значенням комплексів.

В абсолютних змінних, що є добутками відносних змінних на відповідні масштаби віднесення, отримують безліч розв'язок, що взаємно перетворюються за допомогою пропорційних перетворень, тобто один одному подібних. Отже, всілякі окремі випадки процесу об'єднуються по значенням комплексів в групи так, що в межах кожної з них всі випадки у відносному уявленні тотожні, а в абсолютному — подібні.

Така відповідність іменується фізичною подібністю; при цьому процеси називаються подібними, комплекси — критеріями подібності. Для критеріїв подібності прийнята спеціальна система позначень у вигляді двох перших букв прізвищ учених, що внесли істотний внесок до даної області знання, і відповідних найменувань (наприклад, Re – критерій Рейнольдса, Fo – критерій Фур'є – безрозмірний час). Рівність критеріїв – єдина кількісна умова подібності процесів; крім того, необхідна тотожність безрозмірних краєвих умов (тобто їх подібність).

Наведемо найбільш часто вживані числа і критерії подібності [2]:

Критерій Біо: $Bi = HR = aR/\lambda$.

Критерій Кірпічова: $Ki = \frac{q_c R}{\lambda(T_c - T_0)}$.

Критерій Кондратева: $Kn = \frac{mR^2}{a}$.

Критерій Померанцева: $Po = \frac{WR^2}{\lambda(T_c - T_0)}$.

Критерій Фур'є: $Fo' = \frac{aP}{2\pi R^2}$.

Число Нусельта: $Nu = \frac{al}{\lambda}$.

Число Фур'є: $Fo = \frac{a\tau}{R^2}$.

1.3. Основні етапи розвитку математичного моделювання процесів теплопровідності в оболонках і пластинах

Оболонка, що поєднує високу міцність і малу вагу, простоту і технологічність виготовлення, стала однією з найбільш поширених конструкцій у різних галузях сучасної техніки, перш за все, це корпусні

елементи в ракетній та авіаційній техніці, судно- та автомобілебудуванні, промисловому і цивільному будівництві, хімічному машинобудуванні. Це надзвичайно цікава тема, яка досить активно розвивається (наприклад, видобування нафти в морі і пов'язане з цим будівництво величезних морських бурових платформ ставить перед теорією оболонок нові цікаві задачі), та добре висвітлена в науково-технічній літературі.

Велику увагу вивченню термодинамічного стану елементів конструкцій оболонкового типу приділяв академік Я.С. Підстригач. Результати досліджень з термомеханіки тонкостінних елементів опубліковані у низці монографій Я. С. Підстригача та його учнів [4-11].

Він запропонував методику зведення тривимірної задачі теплопровідності до двовимірної, розробив загальні підходи до побудови моделей термопружності оболонок, визначив умови відсутності температурних напружень при їх нагріванні. Основні ідеї і конструктивні підходи до отримання ключових співвідношень теорії теплопровідності тонких оболонок були використані при математичному моделюванні теплообміну в системі тіл при неідеальному тепловому контакті. Узагальнені умови теплообміну дозволяють врахувати теплоємність, термоопір і теплопровідність фізичної поверхні контакту. Дальший розвиток операторного методу для зведення просторових задач до двовимірних, який не потребує попередніх гіпотез кінематичного характеру, дозволив отримати рівняння теплопровідності для однорідних і шаруватих пластин і оболонок, опромінюваних оболонок, оболонок і пластин з покриттями, рулонованих оболонок. Запропонований метод дослідження нестационарних температурних полів і напружень в тілах з тонкостінними включеннями був використаний при розв'язанні ряду технічно важливих задач, зокрема, при дослідженні термоміцності і термовтоми захисної арматури тепловимірювальних приладів.

Наукова діяльність вченого також була пов'язана з розробкою теоретичних основ і методів оптимізації режимів і схем високотемпературної

локальної обробки зварних елементів тонкостінних конструкцій. У запропонованому ним підході розв'язання проблеми зведено до визначення таких температурних полів при локальному нагріві, при яких забезпечуються оптимальні умови релаксації залишкових напружень. Отримані результати становлять наукову основу побудови режимів зміцнюючої локальної термообробки елементів тонкостінних конструкцій і приладів. Загальний підхід і методику оптимізації режимів термообробки тонкостінних елементів конструкцій було використано при математичному моделюванні і оптимізації технологічних процесів виготовлення та обробки електровакуумних приладів. На основі розробленого методу оберненої задачі термомеханіки створено основи теорії оптимального по швидкодії керування нестационарними температурними режимами при нагріванні деформівних твердих тіл з врахуванням обмежень на керування, параметри нагріву і термонапруження. У розвиток своїх ідей про неідеальний тепловий контакт різних середовищ Я. С. Підстригач розробив фізико-математичну модель тіла з врахуванням властивостей проміжкових та приповерхневих шарів, заклавши фундамент нового напрямку — механіки поверхневих явищ і покриттів. Суть такої моделі полягає в тому, що приповерхневий шар моделюється деякою поверхнею, яка наділяється властивостями шару — провідністю, проникністю, здатністю виділяти (поглинати) тепло або речовину, жорсткостями на розтяг, згин і скрут. Подальшого розвитку моделі було досягнуто при розгляді хімічних перетворень, які особливо інтенсифікуються на поверхнях розділу фаз і суттєво впливають на експлуатаційні характеристики тіл з покриттями. Я. С. Підстригач та його учні запропонували новий спосіб зведення задач пружної рівноваги непологих оболонок з розрізами до системи інтегральних рівнянь.

Розглянемо далі коротко розвиток досліджень по термопружності. Інтерес до подібних завдань виник у зв'язку з необхідністю розробки механічних конструкцій, здатних працювати в умовах нерівномірного

стаціонарного і нестаціонарного нагрівів (наприклад, в авіаційній і ракетній техніці, в системі захисту ядерних реакторів, у ряді галузей технології машинобудування і так далі). До перших досліджень термопружності в квазістатичній постановці слід віднести роботу Дж. Дюгамеля (J. Duhamel), який вперше вивів рівняння для визначення термопружного стану тіла [12]. Пізніше ці результати отримав Ф.Е. Нейман (F.E. Neumann).

Завдання теорії теплопровідності і визначення температурних напружень з достатньою повнотою висвітлені в монографіях Г. Карслоу і Д. Егера [1], А.В. Ликова [2], Р. Бермана [13], А.І. Вейника [14], П.Дж. Шнейдера [15], С.С. Кутателадзе [16], Л.А. Коздоби [17], Б. Болі і Дж. Уэйнера [18], А.Д. Коваленко [19], В. Новацького [20], Я.С. Підстригача, Ю.М. Коляно [6], Е. Мелана і Г. Паркуса [21], Г. Паркуса [22], Ф. Крейта і У. Блека [23], Р. Chadwick [24].

У 1956 р. вийшла робота Біо (M.A. Biot) [25], в якій було вперше здійснено повне обґрунтування основних співвідношень і рівнянь зв'язаної термопружності, що спираються на закони термодинаміки необоротних процесів. Цим же автором були намічені деякі методи розв'язку рівнянь термопружності і сформульовані основні варіаційні принципи.

У наступних публікаціях Я.С. Підстригача [7], В.Новацького (W. Novacki) [26], Х. Зорського (H. Zorski) [27, 28] запропоновані різні прийоми перетворення диференціальних рівнянь термопружності з метою спрощення задач. У роботі В. Іонеску-Каземіра (V. Ionescu-Cazimir) [29] дано повне формулювання розширеної теореми взаємності для задач термопружності.

Дослідження лінійних зв'язаних задач термопружності висвітлені в оглядах В. Новацького [30]. З ранніх робіт в області зв'язаної термопружності тонкостінних елементів конструкцій відзначимо роботу Р.Н. Швеця [31], де отримані взаємозв'язані лінійні рівняння термопружності для тонких пластин.

Низка дослідників з метою пониження порядку рівняння теплопровідності, використовували в своїх роботах припущення про поліноміальний закон розподілу температури по товщині оболонки або пластини. У роботі Я.Ф. Малкіна [32] вперше запропоновано представлення температури у вигляді нескінченного ряду. У роботі Я.С. Підстригача [5] в припущенні про лінійний закон розподілу температури по товщині пластинки отримані рівняння нестационарного теплового режиму для тонких оболонок без урахування кривизни. В.В. Болотіним [33] в тих же припущеннях про розподіл температури по товщині аналогічні рівняння отримані на основі варіаційного принципу. У роботі В.І. Даниловської [34] при виведенні рівнянь теплопровідності для тонких оболонок температура передбачалася розподіленою по квадратичному закону. У ряді публікацій Р.Сукіс'а [35-37] на базі гіпотез про лінійний розподіл температурного поля по товщині розв'язані різні зв'язані задачі про коливання тонких пластин і оболонок обертання, при цьому як метод розв'язку використано перетворення Фур'є. Припущення про лінійний закон розподілу температури по товщині оболонки використовували: Р.Н. Швець і Е.І. Лунь [38] при виведенні рівнянь зв'язаної лінійної задачі термопружності для ортотропних оболонок; Р.Н. Швець, В.М. Флячок [39-41] при отриманні загальних варіаційних принципів для динамічних зв'язаних задач ізотропних і анізотропних оболонок, а також ряд інших авторів. У публікації [42] Р.Н. Швець та В.М. Флячок встановили для зв'язаних лінійних рівнянь анізотропних оболонок, з урахуванням кубічного розподілу температури по товщині, теореми єдності, взаємності і варіаційний принцип. У роботах тих же авторів [39], [41] вказані результати поширені на випадок рівнянь механотермодифузії, при цьому також ухвалений кубічний закон розподілу температури по товщині оболонки.

Різні варіанти поліноміального закону розподілу температури по товщині оболонки представлені в монографії І.А. Мотовиловця і В.І.

Козлова [43]. Короткий аналіз методів зведення тривимірного рівняння теплопровідності для тонкостінних елементів конструкцій до системи двомірних рівнянь поданий в роботі Я.С. Підстригача і Ю.А. Чернухи [44]. Одним з можливих підходів в цьому напрямі є операторний метод, що порівняно легко реалізовується для певного класу лінійних задач.

Велика роль в розвитку термопружності належить дослідникам української школи механіків. Фундаментальні праці по термопружності належать А.Д. Коваленко [19], Я.С. Підстригачу [4], В.А. Ломакіну [11], Ю.М. Коляно [7], І.А. Мотовиловцю і В.І. Козлову [43], Р.Н. Швецю [9], де з вичерпною повнотою викладені фізичні основи лінійних завдань термопружності, зокрема для тонкостінних елементів конструкцій, описані основні методи вирішення вказаних завдань і представлена обширна бібліографія. Зв'язаним задачам термов'язкопружності присвячена монографія В.Г.Карнаухова [45]. Розвиток термов'язкопружності для пластин і оболонок представлений в монографії В.Г. Карнаухова і І.Ф. Кирічка [46]. Дослідження по термомеханиці добре представлені в міжвідомчому збірнику [47]. Збірник висвітлює питання теорії і методів розв'язання квазістатичних і динамічних задач термопружності, термопластичності і термов'язкопружності для пластин і оболонок.

У роботах, присвячених динамічним завданням термопружності, окремо виділяються завдання про тепловий удар (thermal shock problem). А.Д. Коваленком [19] отримано розв'язок про тепловий удар по круглій пластинці. Допущення про теплоізоляцію пластинки дозволило отримати динамічні розв'язки. Результат був узагальнений В.І. Козловим [48] на випадок прямокутної пластинки, але для зв'язаної задачі. При деяких спрощеннях розв'язок задачі отримано аналітично у вигляді ряду Фур'є. Результатом роботи з'явилося підтвердження загасання коливань пластини як одного з проявів ефекту зв'язаності полів деформації і температури. Відзначимо відсутність в роботі яких-небудь спрощуючих гіпотез про характер розподілу

температурного поля по товщині пластини. Розв'язок для циліндричної прямокутної в плані панелі отримано Я.С. Підстригачем, Р.Н.Швецьом [9]. Для задачі теплопровідності пластин при локальному тепловому ударі Ю.П. Жигалко [49], Ю.П. Жигалко і А.В. Конюховим [50] використовувалася гіпотеза про квадратичність температурного поля по товщині. Для випадку підкріпленої циліндрової оболонки ряд асимптотичних розв'язків були отримані А.Г. Горшковим, А.В. Горюновим [51]. Ними використовувалися рівняння теплопровідності тонкої оболонки, отримані на основі гіпотези лінійності температури по товщині оболонки. Дослідженням про тепловий удар присвячені також роботи низки зарубіжних авторів E. Stenberg, J.G. Chakravorty [52, 53], T.A. Zaker [54], в роботах H.U. Wenk [55], E.V. Wilms [56, 57] досліджуються ефекти зв'язаності при тепловому і механічному ударах.

Велика кількість аналітичних розв'язків для тонкостінних елементів, а також масивних тіл, що нагріваються точковими об'ємними джерелами, представлено в роботі Ю.М. Коляно і А.Н. Кулика [58]. Для отримання розв'язків використано апарат узагальнених функцій і інтегральних перетворень. У роботах Я.С. Підстригача [59], Я.С. Підстригача, Ю.М. Коляно, М.М. Семерака [60] цей апарат використано для дослідження задач для тонкостінних елементів з джерелами, розподіленими по деякій смузі і ряду інших. Основними гіпотезами в цих роботах є гіпотези про лінійний розподіл температури по товщині тонкостінного елемента. У роботі Б.В. Нерубайло [61] розглянуті задачі термопружності оболонок на основі гіпотези про лінійність температурного поля по товщині при стаціонарних локалізованих температурних полях. У цій роботі показаний вплив постійної і лінійної складових температури по товщині на напружений стан оболонки. Різні завдання з точковим джерелом тепла як нерухомим, так і рухомим, вирішені Г. Ізоном (G. Eason) і І.Н. Снеддоном (I.N. Sneddon) [62] за допомогою інтегральних перетворень Фур'є і Ханкеля-Фур'є.

При розрахунку багат шарових конструкцій на міцність при термосилових впливах звичайними гіпотезами є гіпотези ідеального теплового і механічного контактів між шарами. Дослідженню температурних полів в багат шарових оболонках присвячена робота Е.І. Григолюка і П. Чулкова [63], де при виведенні системи рівнянь теплопровідності для тришарових оболонок використовується гіпотеза про лінійний розподіл температури по товщині кожного шару, при цьому наголошується, що закон розподілу температури може бути записаний і у вигляді степеневого ряду. Загальний поліноміальний закон розподілу температури по товщині оболонки розглянутий в роботі А.І. Борисюка і А.І. Мотовиловця [64]. У роботі А.І. Мотовиловця В.І. Козлова [65] наголошується, що більш загальним випадком рівнянь теплопровідності багат шарових оболонок будуть рівняння, що враховують неідеальний тепловий контакт. А.І. Мотовиловцем, А.М. Новиковим і С.І. Шевченко [66] розглянуті задачі про визначення температурного поля в багат шаровому циліндрі з умовою неідеального теплового контакту між шарами. Локалізований в якій-небудь області цей неідеальний тепловий контакт є концентратором напружень і може сильно впливати на розподіл напружень в конструкції. Можна відзначити роботи про термопружність пластин з розрізом. Так, в роботі А.В. Гольцева і В.П. Шевченко [67] отримане узагальнення на випадок оболонки з розрізом за наявності конвективного теплообміну. У роботі В.А. Осадчука, Я.С. Підстригача [68] розглянуте визначення напруженого поля в оболонці з тріщиною.

У зв'язку з розвитком обчислювальної техніки при вирішенні завдань механіки твердого тіла, що деформується, велике значення придбали чисельні методи, засновані на варіаційних постановках. Їх використання приводить до простішого отримання рішення внаслідок того, що порядок похідних шуканих функцій у функціоналах нижчий, ніж у відповідних диференціальних рівняннях, до автоматичного виконання природних

граничних умов і до можливості конструювання наближених рішень на класі кусочно-гладких функцій.

Найбільшого поширення серед чисельних методів набув метод скінченних елементів (МСЕ). В даний час він є найбільш ефективним методом розрахунку конструкцій будь-якої геометрії і є основою багатьох розрахункових програмних комплексів. Найбільш могутніми з них є скінченноелементний пакет ANSYS і MARC.

1.4. Огляд літературних даних по проблемі теплопровідності тіл з покриттями

Моделюванню і дослідженню процесів теплопровідності і дифузії в тілах з покриттями присвячено багато праць [69-81, 83-87, 89-111].

Нестаціонарні крайові задачі теплопровідності у точній постановці для покриттів довільної товщини розв'язувались або аналітично [69, 70, 82, 83, 90, 105], або на основі чисельних підходів [74, 95, 97, 100]. Так, у роботах [69, 70] розроблено аналітичний метод розв'язування задачі теплопровідності для необмеженого твердого ізотропного тіла з циліндричним каналом, всередині якого нанесене багат шарове покриття і заповнений високотемпературним газом при нестаціонарних режимах теплообміну. В основі методу лежить ідея розщеплення ядра узагальненого інтегрального перетворення Вебера, застосованого по просторовій змінній.

У роботі [84] досліджено тепловий режим циліндричної і сферичної оболонок з захисним покриттям під дією зовнішніх сталих температурних полів. Розглянуто випадки умов ідеального теплового контакту основного і захисного шарів та з урахуванням ефекту термічного опору поверхні контакту. Визначено критичну товщину захисного покриття, за якого передавання тепла всередину об'єму максимальне. Встановлено, що критичне значення радіуса, за якого досягається максимум теплового потоку

від зовнішнього теплового поля, для сферичного об'єкта удвічі більше, ніж для циліндричного; тепловий режим обмежених об'ємів із захисним покриттям за ідеального теплового контакту отримується як частковий випадок зі знайдених залежностей, коли враховувати термічний опір контактної поверхні.

У [87] запропоновано підхід до розв'язку нестационарної задачі теплопровідності для кусково-однорідного тіла при наявності конвективного теплообміну на його поверхні, який проілюстровано на прикладі циліндричного тіла з покриттям.

У працях [107-109] висвітлено сучасний стан досліджень температурних полів і викликаних ними напружень в термочутливих тілах, тобто тілах, теплофізичні характеристики яких змінюються із зміною температури. При розгляді таких задач значна складність полягає у розв'язанні відповідної нелінійної крайової задачі теплопровідності. Аналіз літератури показує, що у більшій мірі розроблені методи розв'язання таких задач для однорідних термочутливих тіл і вони майже відсутні для тіл кусково-однорідної структури. В роботах [110, 111] наведені методики розв'язання стаціонарних задач теплопровідності кусково-однорідних тіл, які використані до розв'язування відповідних задач для порожнистого циліндра скінченої довжини та багатошарової труби.

Було запропоновано й наближені підходи. У роботі [72] при дослідженні теплоперенесення у скляних покриттях на металевих підкладках враховується лише градієнт температури вздовж товщини покриття, а в роботах [69, 71], в яких реалізується схема «зосередженої ємності» [88], навпаки - лише її градієнт уздовж товщини підкладки. У [99] використовується припущення про постійний градієнт концентрації в покритті. У [43] вважається достатнім враховувати вплив покриття через ефективний коефіцієнт тепловіддачі у граничній умові. У працях [96, 98] спрощення відбувається на етапі аналітичного розв'язування задачі, коли

береться до уваги малість товщини покриття. У [77] розроблено асимптотичну математичну модель на основі застосування методу малого параметра. У [106] для випадку неоднорідних покриттів отримано асимптотичні формули для малих часів. У [76, 101] при побудові загальної числової схеми розв'язування методом скінченних елементів використовується неklasична комбінована модель теплопровідності, яка описується системою диференціальних рівнянь різної вимірності за просторовими змінними. Зокрема, у [76] з використанням варіаційного підходу побудовано математичну модель нестационарного процесу дифузії у середовищах з тонкими покриттями та включеннями. Для врахування малих товщин окремих шарів застосовано гетерогенний підхід, який передбачає зниження вимірності ключових рівнянь математичної моделі в областях тонких включень. Сформульовано варіаційну задачу та досліджено питання коректності її розв'язку. Розроблено числову схему дослідження описаних задач, яка базується на застосуванні напіваналітичного методу скінченних елементів для дискретизації варіаційної задачі стосовно просторових змінних та різницевої схеми Кранка - Ніколсона для дискретизації за часом. У [104] при застосуванні методу граничних елементів проводиться регуляризація обчислення граничних інтегралів. В [79] використовується підхід, пов'язаний з поданням теплофізичних характеристик через асиметричні функції, що приводить до розв'язування рівнянь з коефіцієнтами типу дельта-функцій Дірака.

Багато авторів використовують концепцію узагальнених граничних умов, які описують вплив покриття на теплоперенесення у тілі [69, 71, 75, 78, 80, 81, 85, 86, 89, 91-95, 102, 103]. Можна зауважити, що підхід, який ґрунтується на моделюванні покриттів тонкими оболонками [86], на відміну від моделей [69, 71, 72], дозволяє одночасно враховувати градієнти температурного поля як у покритті, так і в підкладці. У роботах [92, 102, 103] отримано узагальнені граничні умови теплообміну тіла із середовищем через тонке багат шарове покриття.

У роботі [75] з використанням операторного методу отримано узагальнену нелінійну граничну умову радіаційно-конвективної взаємодії основи з робочим середовищем через багат шарове тонке покриття. Подано розрахункові варіанти таких граничних умов для випадку плоскої системи підкладка - багат шарове покриття. Сформульовано відповідну нелінійну крайову задачу теплопровідності для визначення температурного поля в системі тіло - покриття. Отримані результати надалі можуть бути використані для розрахунку й дослідження залишкового термонапруженого стану елементів конструкцій, деталей машин та обладнання з багат шаровими покриттями, що функціонують у різноманітних умовах експлуатації (підвищені температурні та механічні навантаження, агресивні середовища тощо).

У роботі [78] на основі аналітичного розв'язку нестационарної задачі теплопровідності для циліндра з тонким багат шаровим покриттям, отриманого із застосуванням узагальнених граничних умов, проаналізовано вплив геометричних і теплофізичних характеристик покриття та умов теплообміну із зовнішнім середовищем на процес теплоперенесення у системі тіло-багат шарове покриття. У результаті проведеного дослідження виявлено, що визначальними параметрами впливу на контактну температуру є ефективні теплофізичні характеристики покриття – зведені термоопір і теплоємність, а також інтенсивність тепловіддачі з поверхні покриття. Зауважимо, що отриманий замкнутий аналітичний розв'язок є відносно простим і зручним для практичного використання та враховує перепад температури за товщиною покриття, що є суттєвим для подальшого розрахунку термонапруженого стану в циліндричних тілах з багат шаровими покриттями.

При дослідженнях тіл з покриттями практично поза увагою залишилися такі явища, як оболонки з багат шаровими покриттями. Як бачимо, існують тільки розв'язки часткових задач. Проте немає загальної теорії, яка б дала

можливість отримати аналітичний розв'язок для визначення температурного поля у довільній оболонці з багатошаровим покриттям при нерівномірному її нагріві.

1.5. Висновки, постановка та обґрунтування задач дослідження

Тонкостінні елементи конструкцій з покриттями є складовими машин і апаратів, теплоенергетичного обладнання, інженерних теплових мереж, пожежної техніки тощо. Переважно такі елементи працюють в умовах інтенсивного нагрівання і нанесені на них захисні покриття суттєво впливають на їхні температурні поля. Це, своєю чергою, дає можливість оптимізувати режими нагрівання, що веде до підвищення термінів експлуатації конструкції. Складність дослідження подібних задач вимагає залучення уточнених теорій пластин і оболонок, а також ускладнених теорій процесів (наприклад, термодинаміки незворотних процесів).

Розвиток фізики також постійно вимагає розв'язання нових задач теорії оболонок. Поява високотемпературних надпровідних матеріалів зробила актуальним задачу магнітопружності тонких надпровідних оболонок. Доводиться розглядати оболонку, обидві лицьові поверхні якої, а також її торці покриті тонким шаром надпровідного матеріалу, причому оболонка деформується в зовнішньому магнітному полі. Практичне застосування недавно відкритих низькотемпературних провідників багато в чому залежить від вирішення вказаної задачі. При цьому, спочатку повинна розв'язуватися задача теплопровідності, потім – термопружності. Таким чином, наукові результати отримані в теорії пластин і оболонок дадуть можливість не тільки вдосконалити методи досліджень та оптимізації пластинчатих і оболонкових

конструкцій, а й стати потужним фундаментом для інтенсивного розвитку цілого ряду нових наукових напрямів та прикладних досліджень.

Проведений огляд і аналіз літератури показує, що точні аналітичні розв'язки нестационарних крайових задач теплопровідності можна отримати у випадку, коли на поверхні тіла задана температура або тепловий потік. У випадках, коли враховується конвективний теплообмін з поверхонь тіл, переважно використовують чисельні методи.

Задача суттєво ускладнюється за наявності тонких шарів покриття, що зумовлює труднощі для математичного моделювання, які пов'язані, перш за все з урахуванням геометричних та теплофізичних властивостей кожного шару покриття. Як бачимо з аналізу літератури, що теоретичні дослідження теплопровідності в оболонках з тонкими багат шаровими покриттями практично відсутні. Експериментальні ж дані свідчать про те, що змінність теплоємності та теплопровідності тонких приповерхневих шарів чи покриттів враховувати необхідно.

Особливо цінними є аналітичні розв'язки таких задач, які побудовані у вигляді явних формул, що містять елементарні чи спеціальні функції. Такі розв'язки є зручними для якісного аналізу теплових режимів, оскільки явно відображають вплив на розподіл температури визначальних чинників, дозволяють оцінити їх значення і виділити головні з них. Вони також можуть слугувати критерієм оцінки достовірності чисельних розв'язків.

Тому побудова та дослідження математичних моделей для нестационарних процесів теплопровідності оболонок та пластин з багат шаровими покриттями є актуальною і важливою науково-технічною проблемою. Аналіз сучасних вітчизняних та зарубіжних літературних джерел дозволив намітити наступні напрямки досліджень для її вирішення:

- моделювання впливу багат шарового покриття спеціальними крайовими умовами конвективного теплообміну оболонки з робочим середовищем;
- побудова математичних моделей теплопровідності оболонок і пластин з багат шаровими покриттями;

- розв'язання нових практично важливих задач теплопровідності пластин та циліндричних оболонок з односторонніми та двосторонніми покриттями;
- встановлення впливу багат шарового покриття на температурне поле оболонкових елементів конструкцій.

РОЗДІЛ 2

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ОБОЛОНОК І ПЛАСТИН З БАГАТОШАРОВИМИ ПОКРИТТЯМИ

Визначений з високою вірогідністю тепловий стан оболонкових елементів конструкцій з покриттями, які працюють за умов нерівномірного нагрівання, є основою наступних якісних розрахунків таких елементів на міцність та надійність. При дослідженні температурних полів оболонок з покриттями, дуже важливо враховувати теплофізичні характеристики покриття.

У даному розділі дисертації розроблені математичні моделі процесу теплопровідності в оболонках з односторонніми та двосторонніми багат шаровими покриттями за умов конвективного теплообміну із зовнішніми середовищами, які враховують вплив геометричних та теплофізичних властивостей кожного шару покриття.

Постановка проблемної задачі для оболонок вперше розглядалася академіком Я.С. Підстригачем та його учнями [4-11]. При виведенні рівнянь теплопровідності пластин і оболонок вони використовували операторний метод в комплексі з методом усереднення температури по товщині стінки. В результаті тривимірна нестационарна задача теплопровідності залежно від виду теплового контакту оболонки з зовнішнім середовищем зведена до інтегрування системи рівнянь в частинних похідних по двох координатах і часу.

У даній дисертаційній роботі застосовано аналогічний підхід. Крім того, з метою спрощення задачі про визначення температурних полів і напруженого стану в таких тілах, шар покриття розглядаємо як тонку оболонку з відповідними термомеханічними характеристиками. Приймаючи ці характеристики незмінними при безмежному зменшенні товщини оболонки, шар покриття моделюємо деякою фізичною поверхнею, що має термопружні характеристики покриття. Вздовж цієї поверхні величини, які характеризують термомеханічний стан тіла, повинні відповідати певним умовам термомеханічної взаємодії тіла з середовищем.

2.1. Рівняння теплопровідності оболонок і пластин

Процес теплопровідності в оболонці, віднесеної до змішаної системи координат (α, β, γ) описується рівнянням [9]:

$$p^2 t + \frac{\partial^2 t}{\partial \gamma^2} = 0, \quad (2.1)$$

де

$$p^2 = \Delta - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \Delta = \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \right], \quad (2.2)$$

Δ – оператор Лапласа в ортогональних координатах A, B – коефіцієнти першої квадратичної форми середньої поверхні оболонки; τ – час; $a = \frac{\lambda}{c}$ – коефіцієнт теплопровідності.

2.2. Рівняння теплопровідності оболонок і пластин з одностороннім багат шаровим покриттям

2.2.1. Постановка задачі. Розглянемо (рис. 2.1) оболонку товщиною $2h_0$ в ортогональній системі координат $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$. На поверхню $\gamma_0 = h_0$ оболонки нанесено багат шарове покриття з товщинами $2h_1, 2h_2, \dots, 2h_n$ і різними теплофізичними характеристиками. Кожний шар покриття вважаємо тонкою оболонкою в ортогональній системі координат $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) відповідної товщини. З поверхонь $\gamma_n = h_n$ і $\gamma_0 = -h_0$ відбувається теплообмін з оточуючим середовищем за законом Ньютона.

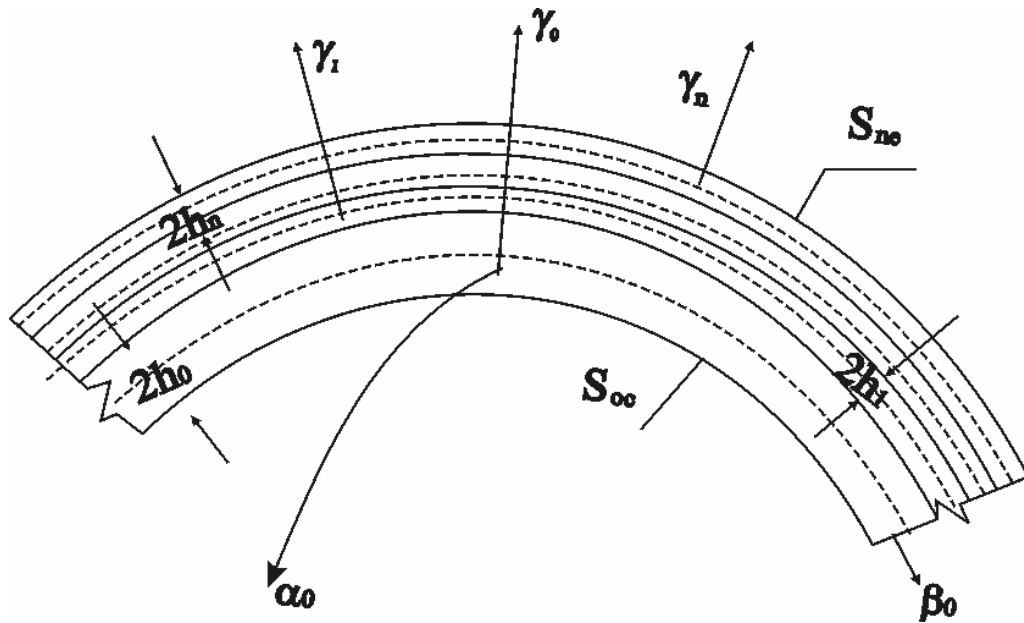


Рис. 2.1. Розрахункова схема оболонки з одностороннім багат шаровим покриттям.

Приймаємо, що на контактних поверхнях оболонки і шару “1” та між шарами виконуються умови ідеального теплового контакту.

Граничні умови на торцевих поверхнях, що обмежують оболонку і покриття, приймаємо першого-третього роду.

Для нестационарної задачі теплопровідності задаємо початковий розподіл температури.

Таким чином задача теплопровідності для оболонки і шарів покриття зведена до розв’язання системи диференціальних рівнянь [112-116]:

$$p_i^2 t_i + \frac{\partial^2 t_i}{\partial \gamma_i^2} = 0, \quad (2.3)$$

де $p_i^2 = \Delta_i - \frac{1}{a_i} \frac{\partial}{\partial \tau}$; Δ_i - оператор Лапласа в ортогональних координатах (α_i, β_i) ; $a_i = \frac{\lambda_i}{c_i}$ - коефіцієнт теплопровідності, c_i - теплоємність, λ_i - коефіцієнти теплопровідності оболонки і шарів покриття, τ - час, $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Приймаємо, що на контактних поверхнях $S_{01}, S_{12}, \dots, S_{n-1,n}$ оболонки і шару „1” та між шарами виконуються умови ідеального теплового контакту:

$$t_i = t_{i+1}, \quad \frac{\partial t_{i+1}}{\partial \gamma_{i+1}} = \frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}} \frac{\partial t_i}{\partial \gamma_i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (2.4)$$

На поверхнях S_{oc} контакту оболонки із зовнішнім середовищем і S_{nc} контакту n -го шару покриття із зовнішнім середовищем відбувається теплообмін за законом Ньютона

$$\frac{\partial t_0}{\partial \gamma_0} - \frac{\alpha_0}{\lambda_0} (t_0 - t_0^c) = 0 \quad \text{при} \quad \gamma_0 = -h_0, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial t_n}{\partial \gamma_n} + \frac{\alpha_n}{\lambda_n} (t_n - t_n^c) = 0 \quad \text{при} \quad \gamma_n = h_n, \quad (2.6)$$

де α_n і α_0 - коефіцієнти тепловіддачі з поверхонь S_{nc} і S_{oc} ,

t_n^c і t_0^c - температури середовищ біля поверхонь S_{nc} і S_{oc} .

Граничні умови на торцевих поверхнях Γ_i , що обмежують оболонку і покриття, приймаємо першого-третього роду.

Для нестационарної задачі теплопровідності задаємо початкову умову

$$t_i = t_i(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) \quad \text{при} \quad \tau = 0. \quad (2.7)$$

Таким чином, поставлена задача зводиться до знаходження розв'язків системи диференціальних рівнянь (2.3) за умов (2.4) – (2.7) і умов на торцевих поверхнях.

2.2.2. Моделювання процесу теплообміну оболонки з навколишнім середовищем через тонке багат шарове покриття. Використовуючи символічний метод [9], подамо розв'язок диференціального рівняння (2.3) у вигляді

$$t_i = \cos p_i \gamma_i \cdot A_i(\alpha_i, \beta_i, \tau) + \sin p_i \gamma_i \cdot B_i(\alpha_i, \beta_i, \tau). \quad (2.8)$$

Тоді градієнт температури по товщині оболонки і покриття

$$\frac{\partial t_i}{\partial \gamma_i} = -p_i \sin p_i \gamma_i \cdot A_i(\alpha_i, \beta_i, \tau) + p_i \cos p_i \gamma_i \cdot B_i(\alpha_i, \beta_i, \tau) \quad (2.9)$$

Визначимо коефіцієнти A_i і B_i через t_0 і $\lambda_0 \frac{\partial t_0}{\partial \gamma}$. Для цього розглянемо спочатку оболонку товщиною $2h_0$ з одношаровим покриттям. Віднесемо її до єдиної системи координат (α, β, γ) з початком на серединній поверхні оболонки. Тоді, підставляючи (2.8) і (2.9) в умови (2.4)

$$t_0|_{\gamma=h_0} = t_1|_{\gamma=h_0}; \quad (2.10)$$

$$\lambda_0 \frac{\partial t_0}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=h_0} = \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=h_0} \quad (2.11)$$

отримуємо систему рівнянь для визначення A_i та B_i :

$$t_0|_{\gamma=h_0} = A_0 \cdot \cos p_0 h_0 + B_0 \cdot \sin p_0 h_0 \quad (2.12)$$

$$t_1|_{\gamma=h_0} = A_1 \cdot \cos p_1 h_0 + B_1 \cdot \sin p_1 h_0 \quad (2.13)$$

Згідно (2.10) – (2.13) отримали, що:

$$t_0 = A_1 \cdot \cos p_1 h_0 + B_1 \cdot \sin p_1 h_0. \quad (2.14)$$

Аналогічно, використовуючи умову (2.11) і співвідношення (2.9) маємо:

$$\lambda_0 \frac{\partial t_0}{\partial \gamma} = \lambda_1 p_1 (-A_1 \cdot \sin p_1 h_0 + B_1 \cdot \cos p_1 h_0) \quad (2.15)$$

Підставляючи (2.8) і (2.9) в умову (2.5), для одношарового покриття отримали:

$$\begin{aligned} & \lambda_1 p_1 (-A_1 \cdot \sin p_1 (h_0 + 2h_1) + B_1 \cdot \cos p_1 (h_0 + 2h_1)) + \\ & + \alpha_1 (A_1 \cdot \cos p_1 (h_0 + 2h_1) + B_1 \cdot \sin p_1 (h_0 + 2h_1)) = \alpha_1 t_1^c. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (2.14) і (2.15), визначимо коефіцієнти A_1 і B_1 через t_0 і $\lambda_0 \frac{\partial t_0}{\partial \gamma}$:

$$A_1 = t_0 \cos p_1 h_0 - \frac{\lambda_0}{\lambda_1 p_1} \frac{\partial t_0}{\partial \gamma} \sin p_1 h_0; \quad (2.17)$$

$$B_1 = \frac{\lambda_0}{\lambda_1 p_1} \frac{\partial t_0}{\partial \gamma} \cos p_1 h_0 + t_0 \sin p_1 h_0. \quad (2.18)$$

Підставимо A_1 і B_1 згідно (2.17) і (2.18) в умову (2.16):

$$\begin{aligned}
& A_1[\alpha_1 \cdot \cos p_1(h_0 + 2h_1) - \lambda_1 p_1 \cdot \sin p_1(h_0 + 2h_1)] + \\
& + B_1[\alpha_1 \cdot \sin p_1(h_0 + 2h_1) + \lambda_1 p_1 \cdot \cos p_1(h_0 + 2h_1)] = \alpha_1 t_1^c \\
& \left(t_0 \cos p_1 h_0 - \frac{\lambda_0}{\lambda_1 p_1} \frac{\partial t_0}{\partial \gamma} \sin p_1 h_0 \right) [\alpha_1 \cdot \cos p_1(h_0 + 2h_1) - \lambda_1 p_1 \cdot \sin p_1(h_0 + 2h_1)] + \\
& + \left(t_0 \sin p_1 h_0 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1 p_1} \frac{\partial t_0}{\partial \gamma} \cos p_1 h_0 \right) [\alpha_1 \cdot \sin p_1(h_0 + 2h_1) + \lambda_1 p_1 \cdot \cos p_1(h_0 + 2h_1)] = \alpha_1 t_1^c.
\end{aligned}$$

Зробивши відповідні математичні перетворення і згрупувавши члени при t_0 і $\lambda_0 \frac{\partial t_0}{\partial \gamma}$ отримали:

$$\lambda_0 \frac{\partial t_0}{\partial \gamma} \left[\cos 2p_1 h_1 + \frac{\alpha_1}{\lambda_1 p_1} \cdot \sin 2p_1 h_1 \right] + [\alpha_1 \cdot \cos 2p_1 h_1 - \lambda_1 p_1 \cdot \sin 2p_1 h_1] \cdot t_0 = \alpha_1 t_1^c. \quad (2.19)$$

Отже, для оболонки з одношаровим покриттям отримали наступну узагальнену умову теплообміну із зовнішнім середовищем:

$$\lambda_{01} \frac{\partial t_0}{\partial \gamma_0} + \alpha_{01} t_0 = \alpha_1 t_1^c, \quad (2.20)$$

де

$$\lambda_{01} = \lambda_0 \left(\cos 2p_1 h_1 + \frac{\alpha_1}{\lambda_1 p_1} \cdot \sin 2p_1 h_1 \right), \quad (2.21)$$

$$\alpha_{01} = \alpha_1 \cdot \cos 2p_1 h_1 - \lambda_1 p_1 \cdot \sin 2p_1 h_1. \quad (2.22)$$

Розглянемо далі оболонку з двошаровим покриттям. Умови (2.4) запишуться у вигляді:

$$t_0 \Big|_{\gamma=h_0} = t_1 \Big|_{\gamma=h_0}; \quad \lambda_0 \frac{\partial t_0}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=h_0} = \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=h_0} \quad (2.23)$$

$$t_1 \Big|_{\gamma=h_0+2h_1} = t_2 \Big|_{\gamma=h_0+2h_1}; \quad \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=h_0+2h_1} = \lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=h_0+2h_1} \quad (2.24)$$

Підставляючи (2.8) і (2.9) в умови (2.23) і (2.24), отримали систему рівнянь для визначення коефіцієнтів A_1, B_1, A_2, B_2 :

$$\begin{aligned}
 t_0 &= A_1 \cdot \cos p_1 h_0 + B_1 \cdot \sin p_1 h_0; \\
 \lambda_0 \frac{\partial t_0}{\partial \gamma} &= \lambda_1 p_1 (-A_1 \cdot \sin p_1 h_0 + B_1 \cdot \cos p_1 h_0); \\
 A_1 \cos p_1 (h_0 + 2h_1) + B_1 \sin p_1 (h_0 + 2h_1) &= A_2 \cos p_2 (h_0 + 2h_1) + B_2 \sin p_2 (h_0 + 2h_1); \\
 \lambda_1 p_1 (-A_1 \cdot \sin p_1 (h_0 + 2h_1) + B_1 \cdot \cos p_1 (h_0 + 2h_1)) &= \\
 = \lambda_2 p_2 (-A_2 \cdot \sin p_2 (h_0 + 2h_1) + B_2 \cdot \cos p_2 (h_0 + 2h_1)). & \quad (2.25)
 \end{aligned}$$

Умова теплообміну (2.6) для двошарового покриття набере вигляду:

$$\lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial \gamma} + \alpha_2 (t_2 - t_2^c) = 0 \quad \text{при } \gamma = h_0 + 2h_1 + 2h_2 \quad (2.26)$$

Підставимо (2.8) і (2.9) в умови (2.26):

$$\begin{aligned}
 &\lambda_2 p_2 (-A_2 \cdot \sin p_2 (h_0 + 2(h_1 + h_2)) + B_2 \cdot \cos p_2 (h_0 + 2(h_1 + h_2))) + \\
 &+ \alpha_2 (A_2 \cdot \cos p_2 (h_0 + 2(h_1 + h_2)) + B_2 \cdot \sin p_2 (h_0 + 2(h_1 + h_2))) = \alpha_2 t_2^c. \quad (2.27)
 \end{aligned}$$

Розв'язавши систему рівнянь (2.25), виразимо коефіцієнти A_1, B_1, A_2, B_2 через t_0 і $\lambda_0 \frac{\partial t_0}{\partial \gamma}$. Підставивши їх в умову (2.27) і зробивши як і в попередньому випадку відповідні математичні перетворення, отримали для оболонки з двошаровим покриттям узагальнену умову теплообміну із зовнішнім середовищем:

$$\lambda_{02} \frac{\partial t_0}{\partial \gamma} + \alpha_{02} t_0 = \alpha_2 t_2^c, \quad (2.28)$$

де

$$\lambda_{02} = \lambda_0 \left[\cos 2p_1 h_1 \left(\cos 2p_2 h_2 + \frac{\alpha_2}{\lambda_2 p_2} \cdot \sin 2p_2 h_2 \right) + \frac{1}{\lambda_1 p_1} \cdot \sin 2p_1 h_1 (\alpha_2 \cos 2p_2 h_2 - \lambda_2 p_2 \sin 2p_2 h_2) \right], \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{02} = & \cos 2p_1 h_1 \cdot (\alpha_2 \cos 2p_2 h_2 - \lambda_2 p_2 \sin 2p_2 h_2) - \\ & - \lambda_1 p_1 \sin 2p_1 h_1 \cdot \left(\cos 2p_2 h_2 + \frac{\alpha_2}{\lambda_2 p_2} \sin 2p_2 h_2 \right). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Зробивши узагальнення для оболонки з багатошаровим покриттям, узагальнену умову теплообміну запишемо у наступному вигляді:

$$\lambda_{0n} \frac{\partial t_0}{\partial \gamma} + \alpha_{0n} t_0 = \alpha_n t_n^c, \quad (2.31)$$

де $\lambda_{0n}, \alpha_{0n}$ – узагальнені операторні коефіцієнти теплопровідності і тепловіддачі відповідно на поверхні оболонки. Шляхом граничного переходу при $h_i \rightarrow 0 (i = 1, \dots, n)$ та введенням приведених теплопровідностей $\lambda_i^* = \lambda_i \cdot 2h_i$ і термоопору $r_i = \frac{2h_i}{\lambda_i}$ шарів покриття, замість (2.29), (2.30) отримали наближені формули:

$$\begin{aligned} \lambda_{01} = \lambda_0 (1 + \alpha_1 r_1); & \quad \alpha_{01} = \alpha_1 - \lambda_1^*; \\ \lambda_{02} = \lambda_0 (1 + \alpha_2 (r_1 + r_2)); & \quad \alpha_{02} = \alpha_2 - \lambda_1^* - \lambda_2^* \end{aligned} \quad (2.32)$$

Для оболонки з n -шаровим покриттям:

$$\lambda_{0n} = \lambda_0 (1 + \alpha_n (r_1 + r_2 + \dots + r_n)) = \lambda_0 \left(1 + \alpha_n \sum_{i=1}^n r_i \right);$$

$$\alpha_{0n} = \alpha_n - \sum_{i=1}^n \lambda_i^* . \quad (2.33)$$

2.2.3. Задача теплопровідності для оболонки з багат шаровим покриттям з узагальненою граничною умовою. Отже, задача теплопровідності для оболонки з одностороннім покриттям зводиться до розв'язання диференціального рівняння

$$p_0^2 t_0 + \frac{\partial^2 t_0}{\partial \gamma^2} = 0 , \quad (2.34)$$

де $p_0^2 = \Delta_0 - \frac{1}{a_0} \frac{\partial}{\partial \tau}$, Δ_0 – оператор Лапласа в ортогональних координатах (α, β) , $a_0 = \frac{\lambda_0}{c_0}$ – коефіцієнт температуропровідності, c_0 – теплоємність,

λ_0 – коефіцієнт теплопровідності оболонки, τ – час.

Узагальнена гранична умова задається у вигляді (2.31), як умова теплообміну оболонки з навколишнім середовищем через багат шарове покриття. Для нестационарної задачі задається ще початкова умова у вигляді (2.7). Розв'язок рівняння (2.34) згідно (2.8) запишемо у вигляді:

$$t_0 = \cos p_0 \gamma \cdot A_1(\alpha, \beta, \tau) + \sin p_0 \gamma \cdot B_1(\alpha, \beta, \tau). \quad (2.35)$$

Введемо інтегральні характеристики температури, через які виражається напружено-деформований стан оболонки [5-7]:

$$T_1 = \frac{1}{2h_0} \int_{-h_0}^{h_0} t_0 d\gamma ; \quad T_2 = \frac{3}{2h_0^2} \int_{-h_0}^{h_0} \gamma t_0 d\gamma . \quad (2.36)$$

Інтегруючи (2.35) по γ у відповідності до (2.36), отримали:

$$T_1 = \frac{\sin p_0 h_0}{p_0 h_0} \cdot A_1; \quad T_2 = \frac{3}{p_0^2 h_0^2} (\sin p_0 h_0 - p_0 h_0 \cos p_0 h_0) \cdot B_1. \quad (2.37)$$

Виключаючи з (2.35) і (2.37) невідомі A_1, B_1 , виразимо температуру t_0 через інтегральні характеристики T_1 і T_2 . З (2.37) отримуємо, що

$$A_1 = \frac{p_0 h_0}{\sin p_0 h_0} \cdot T_1; \quad B_1 = \frac{p_0^2 h_0^2}{3(\sin p_0 h_0 - p_0 h_0 \cos p_0 h_0)} \cdot T_2. \quad (2.38)$$

Тоді:

$$t_0 = \frac{p_0 h_0 \cos p_0 \gamma}{\sin p_0 h_0} \cdot T_1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{(p_0 h_0)^2 \sin p_0 \gamma}{\sin p_0 h_0 - p_0 h_0 \cos p_0 h_0} \cdot T_2. \quad (2.39)$$

Прямою підстановкою неважко переконатися, що (2.39) задовольняє рівняння (2.34) за довільних значень T_1 і T_2 . Таким чином, температура в будь-якій точці оболонки виражається через усереднені значення T_1 і T_2 , які залишаються поки що невідомими. Щоб отримати диференціальні рівняння для величин T_1 і T_2 , використовуємо граничні умови (2.5) і (2.31) на поверхнях оболонки. Підставляючи (2.39) у граничні умови (2.5) і (2.31) отримали наступну зв'язану систему рівнянь для визначення шуканих величин T_1 і T_2 :

$$p_0^2 h_0^2 T_1 - \varepsilon_0 p_0 h_0 \cdot \operatorname{ctg} p_0 h_0 \cdot T_1 - \frac{\varepsilon_1}{3} \cdot \frac{p_0^2 h_0^2}{1 - p_0 h_0 \cdot \operatorname{ctg} p_0 h_0} \cdot T_2 = -(\varepsilon_0 t_c + \varepsilon_0^* t_c^*), \quad (2.40)$$

$$p_0^2 h_0^2 T_2 - (1 + \varepsilon_0) \frac{p_0^2 h_0^2}{1 - p_0 h_0 \cdot \operatorname{ctg} p_0 h_0} \cdot T_2 - 3\varepsilon_1 p_0 h_0 \cdot \operatorname{ctg} p_0 h_0 \cdot T_1 = -3(\varepsilon_0 t_c^* + \varepsilon_0^* t_c),$$

де

$$\varepsilon_0 = \frac{h_0}{2} \left(\frac{\alpha_0}{\lambda_0} + \frac{\alpha_{0n}}{\lambda_{0n}} \right); \quad \varepsilon_0^* = \frac{h_0}{2} \left(\frac{\alpha_0}{\lambda_0} - \frac{\alpha_{0n}}{\lambda_{0n}} \right); \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_0^* - k \cdot h_0; \quad (2.41)$$

$$k = \frac{1}{2}(k_1 + k_2); \quad t_c = \frac{1}{2}(t_0^c + t_n^c); \quad t_c^* = \frac{1}{2}(t_0^c - t_n^c);$$

k – середня кривизна серединної поверхні оболонки.

Таким чином, трьохмірна нестационарна задача теплопровідності зведена до інтегрування системи (2.40) на серединній поверхні оболонки. У загальному випадку точне визначення температури в тонкостінній оболонці з покриттям є досить складним у математичному відношенні завданням. Для практичних цілей достатньо мати наближену теорію теплопровідності, тобто в рівняннях (2.40) можна обмежитись скінченною кількістю членів розкладу в ряд диференціальних операторів, що входять в ці рівняння.

Необхідно зауважити, що у випадку відсутності покриття формули (2.40) – (2.41) співпадають із відповідними співвідношеннями для задачі теплопровідності оболонки без покриття. Так у роботі [9] отримано наступну систему рівнянь для визначення шуканих функцій T_1 і T_2 для оболонки:

$$p^2 h^2 T_1 - \mu_1 ph \cdot ctg ph \cdot T_1 - \frac{\mu_2}{3} \cdot \frac{p^2 h^2}{1 - ph \cdot ctg ph} \cdot T_2 = -(\mu_1 t_c + \mu_2 t_c^*),$$

$$p^2 h^2 T_2 - (1 + \mu_1) \frac{p^2 h^2}{1 - ph \cdot ctg ph} \cdot T_2 - 3\mu_2 ph \cdot ctg ph \cdot T_1 = -3(\mu_1 t_c^* + \mu_2 t_c),$$

де

$$\mu_1 = \frac{h}{2} \left(\frac{\alpha_+}{\lambda} + \frac{\alpha_-}{\lambda} \right); \quad \mu_2 = \frac{h}{2} \left(\frac{\alpha_+}{\lambda} - \frac{\alpha_-}{\lambda} \right); \quad t_c = \frac{1}{2}(t_+^c + t_-^c); \quad t_c^* = \frac{1}{2}(t_+^c - t_-^c).$$

Як бачимо ці рівняння по формальній ознаці співпадають з рівняннями (2.40), тільки фізичний зміст коефіцієнтів різний. Що і підтверджує коректність запропонованого нами підходу.

Якщо в (2.40) обмежитись першими членами розкладу операторів $ctg p_0 h_0$ і $(1 - p_0 h_0 ctg p_0 h_0)^{-1}$, то матимемо наближену систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} p_0^2 h_0^2 \cdot T_1 - \varepsilon_0 T_1 - \varepsilon_1 T_2 &= -(\varepsilon_0 t_c + \varepsilon_0^* t_c^*), \\ p_0^2 h_0^2 \cdot T_2 - 3(1 + \varepsilon_0) \cdot T_2 - 3\varepsilon_1 T_1 &= -3(\varepsilon_0 t_c^* + \varepsilon_0^* t_c). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Підставляючи (2.33) у (2.41) і потім (2.41) у (2.42), отримаємо таку наближену систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} h_0^2 p_0^2 T_1 + \frac{r_0}{4 \left(1 + \alpha_n \sum_{i=1}^n r_i \right)} \sum_{i=1}^n \lambda_i^* p_i^2 (T_1 + T_2) - \frac{r_0}{4} \left(\frac{\alpha_n}{\left(1 + \alpha_n \sum_{i=1}^n r_i \right)} + \alpha_0 \right) \cdot T_1 - \\ - \frac{r_0}{4} \left(\frac{\alpha_n}{\left(1 + \alpha_n \sum_{i=1}^n r_i \right)} - \alpha_0 \right) \cdot T_2 = -(\varepsilon_0 t_c + \varepsilon_0^* t_c^*), \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} h_0^2 p_0^2 T_2 + \frac{3r_0}{4 \left(1 + \alpha_n \sum_{i=1}^n r_i \right)} \sum_{i=1}^n \lambda_i^* p_i^2 (T_1 + T_2) - 3 \left(1 + \frac{r_0}{4} \left(\frac{\alpha_n}{\left(1 + \alpha_n \sum_{i=1}^n r_i \right)} + \alpha_0 \right) \right) \cdot T_2 - \\ - \frac{3r_0}{4} \left(\frac{\alpha_n}{\left(1 + \alpha_n \sum_{i=1}^n r_i \right)} - \alpha_0 \right) \cdot T_1 = -3(\varepsilon_0 t_c^* + \varepsilon_0^* t_c). \end{aligned}$$

Для покритть малої товщини прийемо:

$$\Delta_i = \Delta_0 = \frac{1}{A_0 B_0} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{B_0}{A_0} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) - \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{A_0}{B_0} \frac{\partial}{\partial \beta} \right) \right]$$

Тоді :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^* p_i^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^* \Delta_0 - \sum_{i=1}^n c_i^* \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad (2.44)$$

де $c_i^* = 2h_i \cdot c_i$ - приведена теплоємність i -го шару.

Підставляючи (2.44) в (2.43), одержимо систему диференціальних рівнянь у вигляді:

$$\begin{aligned} & \left(h_0^2 + \frac{r_0 \sum_{i=1}^n \lambda_i^*}{4 \left(1 + \alpha_n \sum_{i=1}^n r_i \right)} \right) \Delta_0 T_1 + \frac{r_0 \sum_{i=1}^n \lambda_i^*}{4 \left(1 + \alpha_n \sum_{i=1}^n r_i \right)} \Delta_0 T_2 - \frac{r_0}{4} \left(\frac{\alpha_n}{\left(1 + \alpha_n \sum_{i=1}^n r_i \right)} - \alpha_0 \right) T_1 - \\ & - \frac{r_0}{4} \left(\frac{\alpha_n}{\left(1 + \alpha_n \sum_{i=1}^n r_i \right)} - \alpha_0 \right) T_2 = \left(h_0^2 + \frac{r_0 \sum_{i=1}^n c_i^*}{4 \left(1 + \alpha_n \sum_{i=1}^n r_i \right)} \right) \frac{\partial T_1}{\partial \tau} + \frac{r_0 \sum_{i=1}^n c_i^*}{4 \left(1 + \alpha_n \sum_{i=1}^n r_i \right)} \frac{\partial T_2}{\partial \tau} - (\varepsilon_0 t_c + \varepsilon_0^* t_c^*), \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} & \left(h_0^2 + \frac{3r_0 \sum_{i=1}^n \lambda_i^*}{4 \left(1 + \alpha_n \sum_{i=1}^n r_i \right)} \right) \Delta_0 T_2 + \frac{3r_0 \sum_{i=1}^n \lambda_i^*}{4 \left(1 + \alpha_n \sum_{i=1}^n r_i \right)} \Delta_0 T_1 - 3 \left(1 + \frac{r_0}{4} \left(\frac{\alpha_n}{\left(1 + \alpha_n \sum_{i=1}^n r_i \right)} + \alpha_0 \right) \right) T_2 - \\ & - \frac{3r_0}{4} \left(\frac{\alpha_n}{\left(1 + \alpha_n \sum_{i=1}^n r_i \right)} - \alpha_0 \right) T_1 = \left(h_0^2 + \frac{3r_0 \sum_{i=1}^n c_i^*}{4 \left(1 + \alpha_n \sum_{i=1}^n r_i \right)} \right) \frac{\partial T_2}{\partial \tau} + \frac{3r_0 \sum_{i=1}^n c_i^*}{4 \left(1 + \alpha_n \sum_{i=1}^n r_i \right)} \frac{\partial T_1}{\partial \tau} - 3(\varepsilon_0 t_c^* + \varepsilon_0^* t_c) \end{aligned}$$

Для визначення часткового розв'язку задачі за рівняннями (2.45) необхідно в початковій умові і в граничних умовах на контурній поверхні,

що обмежує оболонку і покриття, перейти до інтегральних характеристик температури T_1 і T_2 :

$$\frac{\partial T_1}{\partial \gamma} - \frac{\alpha_0}{\lambda_0}(T_1 - T_0^c) = 0, \quad \frac{\partial T_2}{\partial \gamma} - \frac{\alpha_0}{\lambda_0}(T_2 - T_0^{c*}) = 0, \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial \gamma} - \frac{\alpha_{0n}}{\lambda_{0n}}(T_1 - T_n^c) = 0, \quad \frac{\partial T_2}{\partial \gamma} - \frac{\alpha_{0n}}{\lambda_{0n}}(T_2 - T_n^{c*}) = 0, \quad (2.47)$$

$$T_j^c = \frac{1}{2h_0} \int_{-h_0}^{h_0} t_j^c d\gamma, \quad T_j^{c*} = \frac{3}{2h_0^2} \int_{-h_0}^{h_0} \gamma t_j^c d\gamma, \quad j = 0, n. \quad (2.48)$$

У випадку нестационарної задачі теплопровідності тонких оболонок з покриттями до цих граничних умов необхідно додати початкову умову (2.7), яка після усереднення набуде вигляду:

$$T_1 = T_0, \quad T_2 = T_0^* \quad \text{при} \quad \tau = 0, \quad (2.49)$$

$$T_0 = \frac{1}{2h_0} \int_{-h_0}^{h_0} t_0 d\gamma, \quad T_0^* = \frac{3}{2h_0^2} \int_{-h_0}^{h_0} \gamma t_0 d\gamma.$$

Якщо в (2.40) залишити перші і другі члени розкладу операторів $ctg p_0 h_0$ і $(1 - p_0 h_0 ctg p_0 h_0)^{-1}$, то матимемо наступну наближену систему диференціальних рівнянь:

$$\left(1 + \frac{\varepsilon_0}{3}\right) p_0^2 h_0^2 T_1 - \frac{\varepsilon_1}{15} p_0^2 h_0^2 T_2 - \varepsilon_0 T_1 - \varepsilon_1 T_2 = -(\varepsilon_0 t_c + \varepsilon_0^* t_c^*), \quad (2.50)$$

$$\frac{1}{5} (6 + \varepsilon_0) p_0^2 h_0^2 T_2 + \varepsilon_1 p_0^2 h_0^2 T_1 - 3(1 + \varepsilon_0) T_2 - 3\varepsilon_1 T_1 = -3(\varepsilon_0 t_c^* + \varepsilon_0^* t_c).$$

У випадку, коли коефіцієнти теплообміну на поверхні оболонки і покриття рівні між собою, тобто $\alpha_0 = \alpha_{0n}$, система рівнянь (2.42) розпадається на два незалежні рівняння:

$$p_0^2 h_0^2 \cdot T_1 - \varepsilon_0 T_1 = -(\varepsilon_0 t_c + \varepsilon_0^* t_c^*), \quad (2.51)$$

$$p_0^2 h_0^2 \cdot T_2 - 3(1 + \varepsilon_0) \cdot T_2 = -3(\varepsilon_0 t_c^* + \varepsilon_0^* t_c),$$

для визначення функцій T_1 і T_2 відповідно.

У загальному випадку, коли система рівнянь взаємозв'язана, то T_1 і T_2 можна шукати у вигляді [9]:

$$T_1 = \frac{\delta_2(F_1 - \delta_1 F_2)}{\delta_2 - \delta_1}; \quad T_2 = \frac{\delta_2 F_2 - F_1}{\delta_2 - \delta_1}, \quad (2.52)$$

де F_i – функції, які необхідно визначити. Підставляючи співвідношення (2.52) в рівняння (2.42), отримали два незалежних диференціальних рівняння для визначення функцій F_i :

$$\begin{aligned} \Delta F_1 - \eta_1^2 F_1 - \frac{1}{a} \frac{\partial F_1}{\partial \tau} &= -f_1, \\ \Delta F_2 - \eta_2^2 F_2 - \frac{1}{a} \frac{\partial F_2}{\partial \tau} &= -\frac{1}{\delta_2} f_2, \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\text{де} \quad \delta_{1,2} = \frac{1}{6\varepsilon_1} \left[(2\varepsilon_0 + 3) \mp \sqrt{(2\varepsilon_0 + 3)^2 + 12\varepsilon_1^2} \right],$$

$$\eta_i^2 = (\varepsilon_0 + 3\delta_i \varepsilon_1), \quad (2.54)$$

$$f_i = [\varepsilon_0 t_c + \varepsilon_1 t_c^* + 3\delta_i (\varepsilon_0 t_c^* + \varepsilon_0^* t)], \quad i = 1, 2.$$

Підставляючи (2.52) у граничні умови конвективного теплообміну (2.46), (2.47), отримали крайові умови для F_i :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial \eta} + \frac{\alpha_0}{\lambda_0} (F_1 - F_0^c) &= 0, & \frac{\partial F_2}{\partial \eta} + \frac{\alpha_0}{\lambda_0} (F_2 - F_0^{c*}) &= 0, \\ \frac{\partial F_1}{\partial \eta} + \frac{\alpha_{0n}}{\lambda_{0n}} (F_1 - F_n^c) &= 0, & \frac{\partial F_2}{\partial \eta} + \frac{\alpha_{0n}}{\lambda_{0n}} (F_2 - F_n^{c*}) &= 0, \end{aligned} \quad (2.55)$$

де

$$\begin{aligned} F_0^c &= T_0^c + \delta_1 T_0^{c*}, & F_0^{c*} &= T_0^{c*} + \frac{1}{\delta_2} T_0^c, \\ F_n^c &= T_n^c + \delta_1 T_n^{c*}, & F_n^{c*} &= T_n^{c*} + \frac{1}{\delta_2} T_n^c. \end{aligned}$$

Початкові умови запишуться так:

$$F_1 = T_0 + \delta_1 T_0^*, \quad F_2 = T_0^c + \frac{1}{\delta_2} T \quad \text{для } \tau=0. \quad (2.56)$$

Отже, розв'язок взаємозв'язаних рівнянь (2.42) зведено до розв'язування двох незалежних рівнянь (2.53) того ж порядку відносно функцій F_1 і F_2 за незалежних крайових умов (2.55) і (2.56).

2.3. Рівняння теплопровідності оболонок і пластин з двостороннім багат шаровим покриттям

Розглянемо (рис.2.2) тонку оболонку товщиною $2h_0$ в ортогональній системі координат $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ з двостороннім покриттям. На поверхню $\gamma_0 = h_0$ оболонки нанесено багат шарове покриття з товщинами $2h_1^+, 2h_2^+, \dots, 2h_n^+$, а на поверхню $\gamma_0 = -h_0$ оболонки нанесено багат шарове покриття з товщинами

$2h_1^-, 2h_2^-, \dots, 2h_m^-$ і різними теплофізичними характеристиками. Кожний шар покриття вважаємо тонкою оболонкою відповідної товщини.

З поверхонь $\gamma_n^+ = h_n^+$ і $\gamma_m^- = -h_m^-$ відбувається теплообмін з оточуючим середовищем за законом Ньютона.

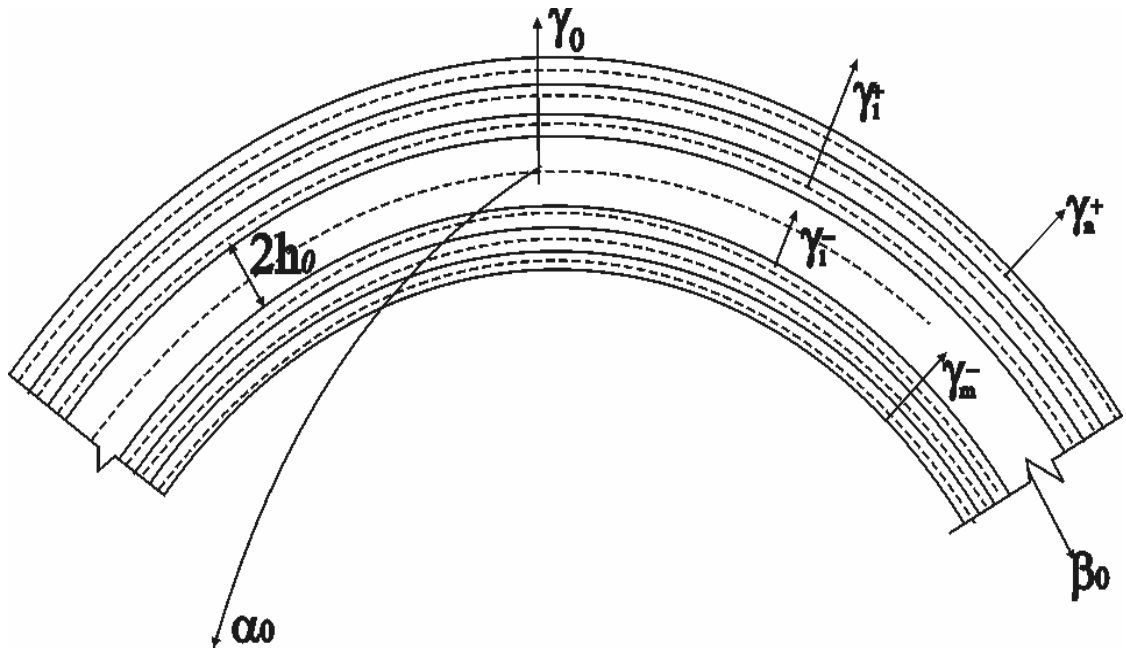


Рис. 2.2. Розрахункова схема оболонки з двостороннім багатошаровим покриттям.

Аналогічно попередньому приймаємо, що на контактних поверхнях оболонки і шарів та між шарами виконуються умови ідеального теплового контакту:

$$t_i = t_{i+1}, \quad \frac{\partial t_{i+1}}{\partial \gamma_{i+1}} = \frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}} \frac{\partial t_i}{\partial \gamma_i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (2.57)$$

Граничні умови на торцевих поверхнях, що обмежують оболонку і покриття, приймаємо першого-третього роду. Для нестационарної задачі теплопровідності задаємо початковий розподіл температури.

Таким чином задача теплопровідності оболонки з двостороннім покриттям зводиться до розв'язання системи $n+m+1$ диференціальних рівнянь

$$p_0^2 t_0 + \frac{\partial^2 t_0}{\partial \gamma_0^2} = 0, \quad (2.58)$$

$$p_i^2 t_i + \frac{\partial^2 t_i}{\partial \gamma_i^2} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.59)$$

$$p_j^2 t_j + \frac{\partial^2 t_j}{\partial \gamma_j^2} = 0, \quad j = 1, \dots, m \quad (2.60)$$

$$\text{Тут} \quad p_0^2 = \Delta_0 - \frac{1}{a_0} \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad p_i^2 = \Delta_i - \frac{1}{a_i} \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad p_j^2 = \Delta_j - \frac{1}{a_j} \frac{\partial}{\partial \tau}.$$

На поверхнях контакту m -го шару покриття із зовнішнім середовищем і контакту n -го шару покриття із зовнішнім середовищем відбувається теплообмін за законом Ньютона:

$$\frac{\partial t_m}{\partial \gamma_m} - \frac{\alpha_m}{\lambda_m} (t_m - t_m^c) = 0 \quad \text{при} \quad \gamma_m = -h_m, \quad (2.61)$$

$$\frac{\partial t_n}{\partial \gamma_n} + \frac{\alpha_n}{\lambda_n} (t_n - t_n^c) = 0 \quad \text{при} \quad \gamma_n = h_n. \quad (2.62)$$

Таким чином, поставлена задача зводиться до знаходження розв'язків системи диференціальних рівнянь (2.58) – (2.60) за умов (2.57), (2.61) – (2.62) і умов на торцевих поверхнях.

2.3.1. Умови теплообміну оболонки з навколишнім середовищем через тонкі двосторонні багат шарові покриття. Вважаючи, як і в

попередньому випадку, товщини покриття малими порівняно з товщиною оболонки, шляхом граничного переходу при $h_i^+ \rightarrow 0$ ($i=1,2,\dots,n$), $h_j^- \rightarrow 0$ ($j=1,2,\dots,m$) і введенням приведених теплопровідностей $\lambda_{i+}^* = \lambda_{i+} \cdot 2h_i^+$, $\lambda_{j-}^* = \lambda_{j-} \cdot 2h_j^-$ і термоопорів $r_{i+} = \frac{2h_i^+}{\lambda_{i+}}$, $r_{j-} = \frac{2h_j^-}{\lambda_{j-}}$ шарів покриття, отримуємо умови теплообміну із зовнішніми середовищами на поверхні оболонки через багат шарові покриття в такому вигляді:

$$\lambda_{0n} \frac{\partial t_0}{\partial \gamma} + \alpha_{0n} t_0 = \alpha_n t_n^c \quad \text{при } \gamma = h_0, \quad (2.63)$$

$$\lambda_{0m} \frac{\partial t_0}{\partial \gamma} - \alpha_{0m} t_0 = \alpha_m t_m^c \quad \text{при } \gamma = -h_0. \quad (2.64)$$

Тут

$$\lambda_{0n} = \lambda_0 \left(1 + \alpha_n \sum_{i=1}^n r_i \right), \quad (2.65)$$

$$\alpha_{0n} = \alpha_n - \sum_{i=1}^n \lambda_i^*, \quad (2.66)$$

$$\lambda_{0m} = \lambda_0 \left(1 + \alpha_m \sum_{j=1}^m r_j \right), \quad (2.67)$$

$$\alpha_{0m} = \alpha_m - \sum_{j=1}^m \lambda_j^*. \quad (2.68)$$

2.3.2. Задача теплопровідності для оболонки з двосторонніми багат шаровими покриттями з узагальненою граничною умовою. Отже, задача теплопровідності для оболонки з двосторонніми покриттями зведена до розв'язування диференціального рівняння (2.34) при граничних умовах (2.63) і (2.64).

Підставляючи розв'язок (2.35) в умови (2.63) і (2.64), після відповідних математичних перетворень одержано систему диференціальних рівнянь для визначення інтегральних характеристик T_1 і T_2 :

$$p_0^2 h_0^2 T_1 - \varepsilon_0 p_0 h_0 \cdot \operatorname{ctg} p_0 h_0 \cdot T_1 - \frac{\varepsilon_1}{3} \cdot \frac{p_0^2 h_0^2}{1 - p_0 h_0 \cdot \operatorname{ctg} p_0 h_0} \cdot T_2 = -(\varepsilon_0 t_c + \varepsilon_0^* t_c^*),$$

$$p_0^2 h_0^2 T_2 - (1 + \varepsilon_0) \frac{p_0^2 h_0^2}{1 - p_0 h_0 \cdot \operatorname{ctg} p_0 h_0} \cdot T_2 - 3\varepsilon_1 p_0 h_0 \cdot \operatorname{ctg} p_0 h_0 \cdot T_1 = -3(\varepsilon_0 t_c + \varepsilon_0^* t_c^*), \quad (2.69)$$

де

$$\varepsilon_0 = \frac{h_0}{2} \left(\frac{\alpha_{0m}}{\lambda_{0m}} + \frac{\alpha_{0n}}{\lambda_{0n}} \right); \quad \varepsilon_0^* = \frac{h_0}{2} \left(\frac{\alpha_{0m}}{\lambda_{0m}} - \frac{\alpha_{0n}}{\lambda_{0n}} \right); \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_0^* - k \cdot h_0;$$

(2.70)

$$k = \frac{1}{2}(k_1 + k_2); \quad t_c = \frac{1}{2}(t_m^c + t_n^c); \quad t_c^* = \frac{1}{2}(t_m^c - t_n^c).$$

Якщо в (2.69) обмежитись першими членами розкладу операторів $\operatorname{ctg} p_0 h_0$ і $(1 - p_0 h_0 \operatorname{ctg} p_0 h_0)^{-1}$, то матимемо наближену систему диференціальних рівнянь:

$$p_0^2 h_0^2 \cdot T_1 - \varepsilon_0 T_1 - \varepsilon_1 T_2 = -(\varepsilon_0 t_c + \varepsilon_0^* t_c^*),$$

$$p_0^2 h_0^2 \cdot T_2 - 3(1 + \varepsilon_0) \cdot T_2 - 3\varepsilon_1 T_1 = -3(\varepsilon_0 t_c^* + \varepsilon_0^* t_c). \quad (2.71)$$

2.4. Висновки до розділу

1. Побудовано узагальнені математичні моделі теплопровідності для оболонок з односторонніми та двосторонніми багатошаровими тонкими покриттями за умов конвективного теплообміну з їх поверхонь.
2. Отримано узагальнені граничні умови конвективного теплообміну оболонок через покриття з зовнішніми середовищами, які враховують вплив геометричних та теплофізичних властивостей кожного шару покриття на розподіл температури в оболонці.
3. За допомогою операторного методу розв'язок тривимірного рівняння теплопровідності для оболонки з багатошаровими покриттями записано через інтегральні характеристики температури, які визначаються із системи двох диференціальних рівнянь.
4. Показано, що у випадку відсутності покриття, отриманий нами розв'язок зводиться до відомого у літературі для задачі теплопровідності оболонки без покриття.

Основні результати даного розділу опубліковано у роботах [112-121, 123-125].

РОЗДІЛ 3

ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В ПЛАСТИНАХ І ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНКАХ З БАГАТОШАРОВИМИ ПОКРИТТЯМИ

Пластини й циліндричні оболонки є основним несучим елементом конструкцій у багатьох галузях сучасної промисловості. Це авіабудування, суднобудування, нафтова, газова і хімічна промисловість, промислове та цивільне будівництво і т.д. Для оцінки несучої здатності конструкцій, до складу яких входять тонкостінні елементи, необхідно мати точні і надійні методи розрахунку цих елементів під дією навантажень різного виду.

Основним видом навантаження, якому піддаються об'єкти і виробниці сучасної промисловості, є нерівномірні температурні впливи, які викликають температурні напруження, що суттєво впливають на несучу здатність конструкції в цілому. Очевидно, що величина і закон розподілу температурних напружень залежить від характеру температурного поля. Тому в даному розділі на основі розробленого підходу розв'язано низку температурних задач для круглих пластин (днища, покриття і т.п.) та циліндричних оболонок (резервуари, трубопроводи) з покриттями, які найбільш широко застосовуються в промисловості.

3.1. Стаціонарне температурне поле в круглій пластині постійної товщини з центральним вирізом та двостороннім багат шаровим покриттям

Визначимо стаціонарне плоске температурне поле диска постійної товщини з багат шаровим покриттям (рис. 3.1). Позначимо радіус зовнішнього контуру диска через r_2 , а радіус його внутрішнього контуру через r_1 . Вважаємо, що між поверхнями диска $z=h_n$ і $z=-h_m$ відбувається конвективний теплообмін із зовнішніми середовищами за однакових коефіцієнтів теплообміну $\alpha = \alpha_m = \alpha_n$. Температура середовища при $z=h_n$

дорівнює t_n^c і t_m^c при $z=-h_m$. Приймаємо, що температура по товщині пластини змінюється за лінійним законом:

$$t = T_1 + zT_2 \quad (3.1)$$

Для розв'язування цієї задачі використовуємо систему рівнянь (2.42) за граничних умов (2.46) – (2.49).

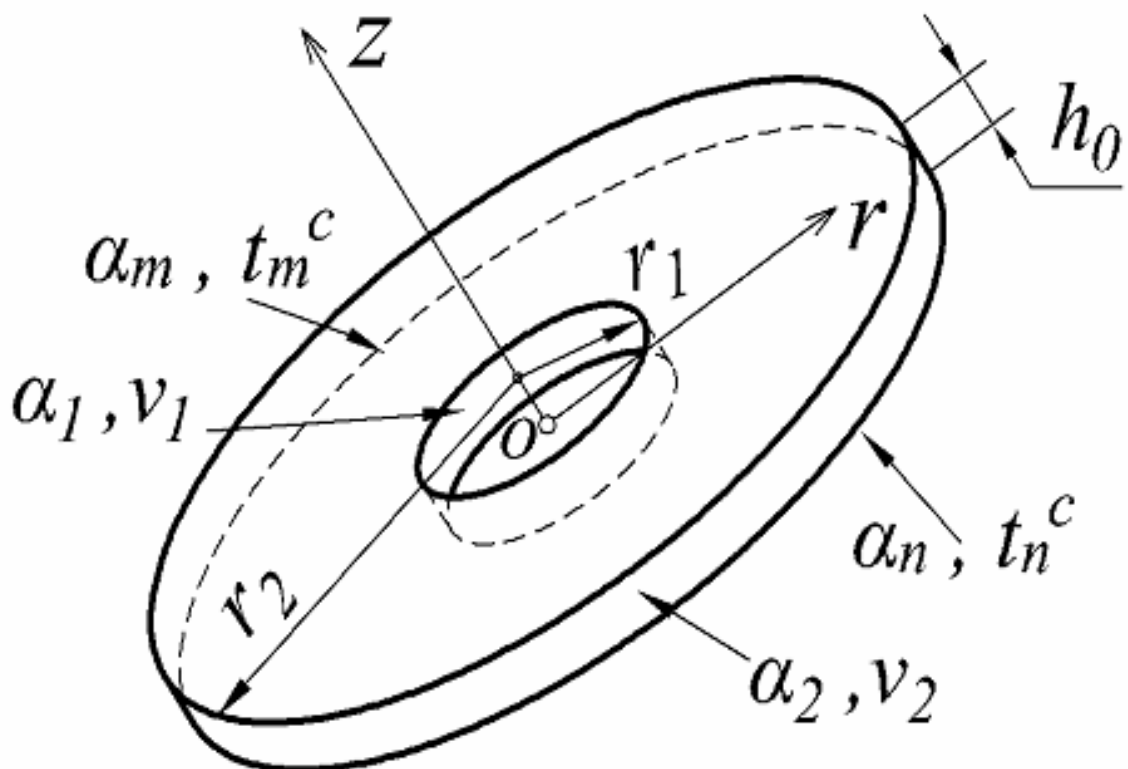


Рис. 3.1. Розрахункова схема диска постійної товщини з центральним вирізом та двостороннім багат шаровим покриттям

У даному випадку, ввівши безрозмірну змінну $\rho = \frac{r}{r_2}$ і врахувавши, що

$\varepsilon_0^* = 0$, вона набуде вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T_1}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dT_1}{d\rho} - \varepsilon_0 (T_1 - t_c) &= 0, \\ \frac{d^2 T_2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dT_2}{d\rho} - \varepsilon_1 (T_2 - t_c^*) &= 0; \end{aligned} \quad (3.2)$$

за граничних умов:

$$\begin{aligned} \frac{dT_1}{d\rho} - \frac{\alpha_1 r_2}{\lambda} (T_1 - v_1) &= 0 \text{ при } \rho = \rho_1, \\ \frac{dT_1}{d\rho} + \frac{\alpha_2 r_2}{\lambda} (T_1 - v_2) &= 0 \text{ при } \rho = 1, \\ \frac{dT_2}{d\rho} - \frac{\alpha_1 r_2}{\lambda} T_2 &= 0 \text{ при } \rho = \rho_1, \\ \frac{dT_2}{d\rho} + \frac{\alpha_2 r_2}{\lambda} T_2 &= 0 \text{ при } \rho = 1, \end{aligned} \quad (3.3)$$

де $\varepsilon_1 = 3(1 + \varepsilon_0)$; v_1 і α_1 – температура середовища і коефіцієнт теплообміну на внутрішньому контурі диска ($r=r_1$ або $\rho=\rho_1$), v_2 і α_2 – відповідно на зовнішньому контурі диска ($r=r_2$ або $\rho=1$).

Рівняння системи (3.2) є модифікованими рівняннями Бесселя. Розв'язок такого рівняння складається із суми двох часткових розв'язків [1,2].

Перший розв'язок відображається модифікованою функцією Бесселя першого роду нульового порядку

$$I_0(z) = 1 + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^4}{2^2 4^2} + \frac{z^6}{2^2 4^2 6^2} + \dots$$

Другий розв'язок відображається модифікованою функцією Бесселя другого роду нульового порядку

$$K_0(z) = -\left[\log\left(\frac{z}{2}\right) + 0,5772 \right] I_0(z) + \frac{z^2}{2^2} + \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{(z/2)^4}{(2!)^2} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \frac{(z/2)^6}{(3!)^2} + \dots$$

Таким чином, загальний розв'язок даної системи можна записати у вигляді [1, 2, 19]:

$$\begin{aligned} T_1 &= t_c + C_1 I_0(\sqrt{\varepsilon_0} \rho) + C_2 K_0(\sqrt{\varepsilon_0} \rho), \\ T_2 &= t_c^* + C_1' I_0(\sqrt{\varepsilon_1} \rho) + C_2' K_0(\sqrt{\varepsilon_1} \rho). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Тоді для температурного поля диску отримуємо наступний розв'язок:

$$t = t_c + C_1 I_0(\sqrt{\varepsilon_0} \rho) + C_2 K_0(\sqrt{\varepsilon_0} \rho) + z \left[t_c^* + C_1' I_0(\sqrt{\varepsilon_1} \rho) + C_2' K_0(\sqrt{\varepsilon_1} \rho) \right] \quad (3.5)$$

Постійні інтегрування шукаємо з граничних умов (3.3), враховуючи відомі формули [1,2]:

$$\frac{d}{dx} I_0(x) = I_1(x); \quad \frac{d}{dx} K_0(x) = -K_1(x), \quad (3.6)$$

де $I_1(x)$, $K_1(x)$ - модифіковані функції Бесселя першого порядку відповідно першого і другого роду.

Знаходимо, що:

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{\Delta} [\gamma_1 (\nu_1 - t_c) \nu_1(\delta) + \gamma_2 (\nu_2 - t_c) \nu_2(\delta \rho_1)] \\ C_2 &= \frac{1}{\Delta} [\gamma_1 (\nu_1 - t_c) u_1(\delta) + \gamma_2 (\nu_2 - t_c) u_2(\delta \rho_1)] \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$C_1' = -\frac{t_c^*}{\Delta_1} [\gamma_1 \nu_1(\delta_1) + \gamma_2 \nu_2(\delta_1 \rho_1)] \quad (3.8)$$

$$C_2' = -\frac{t_c^*}{\Delta_1} [\gamma_1 u_1(\delta_1) + \gamma_2 u_2(\delta_1 \rho_1)],$$

де

$$u_1(\delta) = I_1(\delta) + \frac{\gamma_2}{\delta} I_0(\delta);$$

$$u_2(\delta\rho_1) = I_1(\delta\rho_1) - \frac{\gamma_1}{\delta} I_0(\delta\rho_1);$$

$$v_1(\delta) = K_1(\delta) - \frac{\gamma_2}{\delta} K_0(\delta);$$

$$v_2(\delta\rho_1) = K_1(\delta\rho_1) + \frac{\gamma_1}{\delta} K_0(\delta\rho_1); \quad (3.9)$$

$$\Delta = u_2(\delta\rho_1)[\gamma_2 K_0(\delta) - \delta K_1(\delta)] + v_2(\delta\rho_1)[\gamma_2 I_0(\delta) + \delta I_1(\delta)];$$

$$\delta^2 = \varepsilon_0 r_1^2 / h_0^2; \quad \delta_1^2 = \varepsilon_1 r_1^2 / h_0^2; \quad \varepsilon_1 = 3(1 + \varepsilon_0); \quad \gamma_1 = \frac{\alpha_1 r_2}{\lambda}; \quad \gamma_2 = \frac{\alpha_2 r_2}{\lambda};$$

величини $u_1(\delta_1)$, $u_2(\delta_1\rho_1)$, $v_1(\delta_1)$, $v_2(\delta_1\rho_1)$, Δ_1 - визначаються виразами (3.8) після заміни в них δ на δ_1 .

3.2. Стаціонарне температурне поле в круглій суцільній пластині постійної товщини з двостороннім багат шаровим покриттям

Розглянемо круглу суцільну пластину постійної товщини з двостороннім багат шаровим покриттям (рис. 3.2). Між зовнішнім контуром пластини $r=r_1$, її поверхнями $z=-h_m$, $z=h_n$ і навколишнім середовищем відбувається стаціонарний конвективний теплообмін. Причём, температура середовища t_m^c , що оточує поверхню пластини $z=-h_m$ суттєво відрізняється від температури середовища t_n^c , що оточує поверхню покриття $z=h_n$. Вважаємо, що між поверхнями диска $z=h_n$ і $z=-h_m$ відбувається конвективний теплообмін із зовнішніми середовищами за однакових коефіцієнтів теплообміну $\alpha = \alpha_m = \alpha_n$. За таких умов температурне поле змінюється як вздовж радіуса, так і за товщиною пластини.

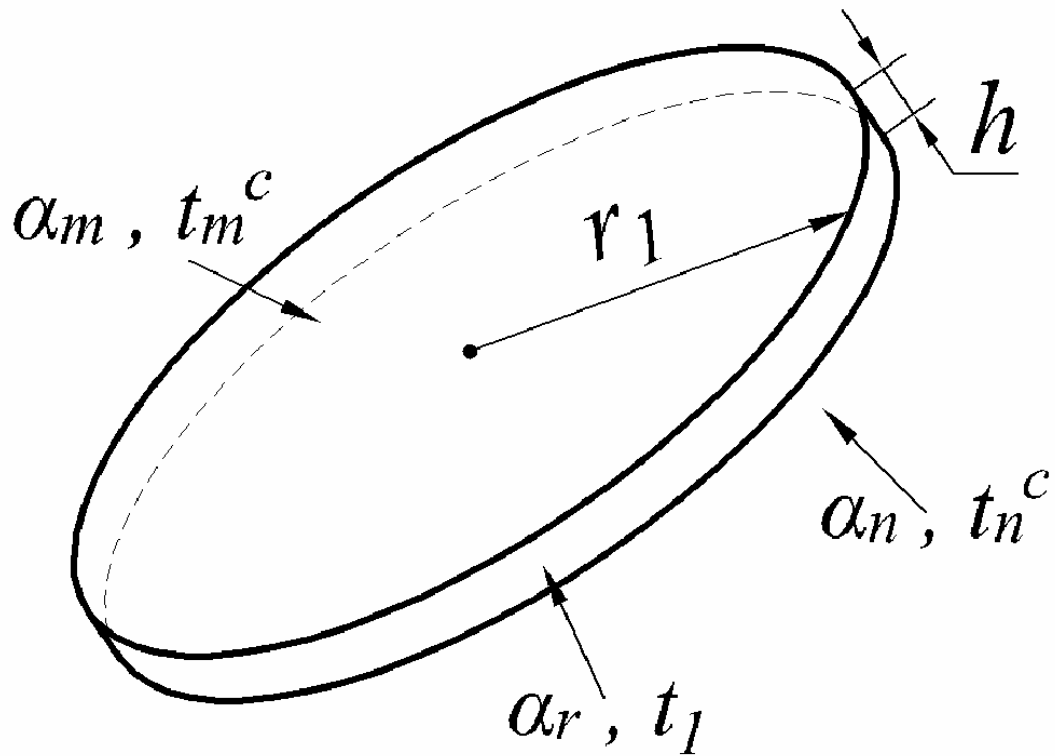


Рис. 3.2. Розрахункова схема суцільної пластини постійної товщини з двостороннім багатoshаровим покриттям

Приймаємо, що температура по товщині пластини змінюється за лінійним законом:

$$t(r, z) = T_1(r) + zT_2(r). \quad (3.10)$$

Для розв'язування цієї задачі використовуємо систему рівнянь (2.42). У даному випадку, ввівши безрозмірну змінну $\rho = r/r_1$ і врахувавши, що $\varepsilon_0^* = 0$, вона набуде вигляду:

$$\frac{d^2 T_1}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dT_1}{d\rho} - \delta^2 (T_1 - t_c) = 0,$$

$$\frac{d^2 T_2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dT_2}{d\rho} - \delta_1^2 (T_2 - t_c^*) = 0. \quad (3.11)$$

Розв'язок цих рівнянь повинен задовільняти граничним умовам

$$\begin{aligned} \frac{dT_1}{d\rho} + \frac{\alpha_r r_1}{\lambda} (T_1 - t_1) &= 0 \text{ при } \rho = 1, \\ \frac{dT_2}{d\rho} + \frac{\alpha_r r_1}{\lambda} T_2 &= 0 \text{ при } \rho = 1, \end{aligned} \quad (3.12)$$

де $\delta^2 = \varepsilon_0 r_1^2 / h_0^2$; $\delta_1^2 = \varepsilon_1 r_1^2 / h_0^2$; $\varepsilon_1 = 3(1 + \varepsilon_0)$; t_1 і α_r - температура середовища і коефіцієнт теплообміну на зовнішньому контурі диска ($r=r_1$ або $\rho=1$).

Аналогічно як і у попередньому випадку розв'язок даної системи можна записати у вигляді (3.4). Але враховуючи, що температура в центрі пластини не може дорівнювати нескінченності, то постійні C_2 і C_2' повинні дорівнювати нулеві, оскільки при $r \rightarrow 0$ $K_0(r) \rightarrow -\infty$. Тому розв'язком даної системи буде [1, 2, 19]:

$$\begin{aligned} T_1 &= t_c + C_1 I_0(\delta \rho), \\ T_2 &= t_c^* + C_2 I_0(\delta_1 \rho), \end{aligned} \quad (3.13)$$

де $I_0(x)$ – модифікована функція Бесселя нульового порядку першого роду [1, 2].

Тоді для температурного поля диску, згідно (3.5) отримуємо наступний розв'язок:

$$t = t_c + C_1 I_0(\delta \rho) + z [t_c^* + C_2 I_0(\delta_1 \rho)]. \quad (3.14)$$

Постійні інтегрування C_1 і C_2 шукаємо з граничних умов (3.12), враховуючи [1, 2], що:

$$\frac{d}{dx} I_0(x) = I_1(x), \quad (3.15)$$

де $I_1(x)$ - модифікована функція Бесселя першого порядку першого роду.

Знаходимо, що:

$$C_1 = \frac{\chi(t_1 - t_c)}{\delta I_1(\delta) + \chi I_0(\delta)}; \quad C_2 = \frac{-\chi t_c^*}{\delta I_1(\delta_1) + \chi I_0(\delta_1)}, \quad (3.16)$$

де $\chi = \alpha_r r_1 / \lambda$.

3.3. Нестационарне температурне поле в круглій суцільній пластині постійної товщини з двостороннім багат шаровим покриттям

Розглянемо круглу суцільну пластину постійної товщини h_0 з двостороннім багат шаровим покриттям. Вважаємо, що на поверхнях диска $z=h_n$ і $z=-h_m$ відбувається однаковий конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем. Тоді температура по товщині пластини буде постійною.

Ввівши безрозмірну змінну $\rho = \frac{r}{r_1}$ і безрозмірний час $\tau = \frac{\tau_1 a}{r_1^2}$,

отримали для нашої задачі рівняння:

$$\frac{d^2 T_1}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dT_1}{d\rho} - \delta^2 (T_1 - t_c) = \frac{\partial T_1}{\partial \tau}, \quad (3.17)$$

за умов

$$T_1 = T_0 \text{ при } \tau = 0,$$

$$\frac{dT_1}{d\rho} + \frac{\alpha_r r_1}{\lambda} (T_1 - \nu_2) = 0 \text{ при } \rho = 1. \quad (3.18)$$

де ν_2 і α_r - температура середовища і коефіцієнт теплообміну відповідно на зовнішньому контурі диска ($r=r_1$ або $\rho=1$).

Для розв'язування рівняння теплопровідності (3.17) використаємо інтегральне перетворення Лапласа [1, 2], яке полягає у помноженні шуканої функції $f(\tau)$ на експоненціальну функцію $e^{-s\tau}$, де s - деяка комплексна величина, і подальшому інтегруванні в межах від 0 до ∞ . Отримуємо деяку нову функцію

$$f_L(s) = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-s\tau} d\tau = L[f(\tau)], \quad (3.19)$$

яка називається зображенням.

Застосуємо таке перетворення Лапласа до рівняння (3.17):

$$L\left[\frac{d^2 T_1}{d\rho^2}\right] + L\left[\frac{1}{\rho} \frac{dT_1}{d\rho}\right] - L[\delta^2 (T_1 - t_c)] = L\left[\frac{\partial T_1}{\partial \tau}\right].$$

У правій частині рівняння (3.17) необхідно взяти перетворення Лапласа від першої похідної по часу. Згідно основної теореми операційного методу, вона дорівнює добутку зображення на оператор s мінус значення функції в початковий момент часу, тобто

$$L\left[\frac{\partial T_1}{\partial \tau}\right] = sT_{1L}(\rho, s) - T_0.$$

Враховуючи це та властивості лінійності перетворення Лапласа, отримали замість диференціального рівняння в частинних похідних для невідомої функції T_1 , звичайне диференціальне рівняння для її зображення T_L :

$$\frac{d^2 T_{1L}}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dT_{1L}}{d\rho} - \varepsilon \left(T_{1L} - \frac{\Theta}{s\varepsilon^2} \right) = 0 \quad (3.20)$$

за умови

$$\frac{dT_{1L}}{d\rho} + \frac{\alpha_2 r_1}{\lambda} (T_{1L} - v_{2L}) = 0 \quad \text{при } \rho = 1, \quad (3.21)$$

де

$$T_{1L}(s) = \int_0^{\infty} T_1 e^{-s\tau} d\tau; \quad v_{2L}(s) = \int_0^{\infty} v_2 e^{-s\tau} d\tau;$$

$$\Theta = \delta^2 t_c + sT_0; \quad \varepsilon^2 = \delta^2 + s.$$

Рівняння (3.20) по формі співпадає з рівнянням (3.11). Тому по аналогії знаходимо розв'язок рівняння (3.20) за граничної умови (3.21) у вигляді:

$$T_{1L} = \frac{\Theta}{s\varepsilon^2} + C_1 I_0(\varepsilon\rho), \quad (3.22)$$

де

$$C_1 = \frac{\chi(s\varepsilon^2 v_{2L} - \Theta)}{s\varepsilon^2 [\varepsilon I_1(\varepsilon) + \chi I_0(\varepsilon)]}; \quad \chi = \alpha_r r_1 / \lambda.$$

Знаючи зображення, необхідно перейти до оригіналу. Цей перехід виконували за допомогою відомої в теорії операційного числення теореми розкладу [1, 2].

За узагальненою теоремою розкладу, якщо зображення $f_L(s)$ є відношенням трансцендентних функцій $\Phi(s)$ і $\Psi(s)$

$$f_L(s) = \frac{\Phi(s)}{\Psi(s)},$$

де функція $\Psi(s)$ має тільки прості корні s_n ($n=1,2,\dots$), то шукана функція

$$f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi(s_n)}{\Psi'(s_n)} e^{s_n \tau}, \quad (3.23)$$

де

$$\Psi'(s_n) = \frac{\partial \Psi(s_n)}{\partial s}.$$

Для використання формули (3.23) до розглядуваного випадку визначимо корені рівняння

$$\Psi(s) = s\varepsilon^2 [\mathcal{E}I_1(\varepsilon) + \chi I_0(\varepsilon)] = s\varphi(s) = 0, \quad (3.24)$$

де вираз в квадратних дужках позначили через $\varphi(s)$. Із рівності (3.24) знаходимо корені:

- 1) $s_0 = 0$,
- 2) $\varphi(s) = 0$.

Звідки корені β_n знаходимо з рівняння

$$\varepsilon I_1(\varepsilon) + \chi I_0(\varepsilon) = -\beta J_1(\beta) + \chi J_0(\beta) = 0,$$

де $\beta = i\varepsilon$.

Далі знаходимо допоміжні величини:

$$\Psi'(s_n) = \varphi(s) + s\varphi'(s) = \varphi(s) + s\varepsilon^2[\varepsilon I_1'(\varepsilon) + \chi I_0'(\varepsilon)].$$

Враховуючи, що

$$I_1'(z) = J_1'(iz)$$

і виконуючи перехід від зображення (3.22) до оригіналу за допомогою формули (3.23), після проведення необхідних перетворень отримали наступний вираз для температури суцільної пластини:

$$T_1 = t_c + \frac{\chi(v_2 - t_c)I_0(\delta\rho)}{\delta I_1(\delta) + \chi I_0(\delta)} - \sum_{n=1}^{\infty} A_n B_n J_0(\beta_n \rho) e^{-(\delta^2 + \beta_n^2)\tau}, \quad (3.25)$$

де

$$A_n = \frac{2\chi}{(\chi^2 + \beta_n^2)J_0(\beta_n)}, \quad B_n = \frac{\beta_n^2 v_2 + \delta^2 t_c}{(\delta^2 + \beta_n^2)} - T_0.$$

3.4. Нестационарне температурне поле в нескінченній циліндричній оболонці з двостороннім багат шаровим покриттям

Розглянемо осесиметричне температурне поле в тонкостінній циліндричній оболонці з однаковими двосторонніми покриттями з початковою нульовою температурою, яка ззовні і всередині нагрівається

шляхом конвективного теплообміну із середовищем. Температуру зовнішнього і внутрішнього середовищ, що оточують оболонку, вважаємо функцією осьової координати $x = z/h_0$ і часу $f = \frac{\lambda_0}{h_0^2 c_0} \cdot \tau$:

$$t_c = \varphi(x, f). \quad (3.26)$$

Розв'язок відповідного рівняння теплопровідності (2.42) отримуємо використовуючи перетворення Фур'є. Для безмежно довгої циліндричної оболонки маємо

$$T_1(x, f) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta \int_0^f \varphi(\zeta, \tau) e^{-(\zeta^2 + \varepsilon)(f - \tau)} e^{-i\zeta x} d\tau. \quad (3.27)$$

У випадку, коли функція φ не залежить від часу,

$$T_1(x, f) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^2 + \varepsilon} (1 - e^{-(\zeta^2 + \varepsilon)f}) e^{-i\zeta x} d\zeta. \quad (3.28)$$

Для стаціонарного поля

$$T_1 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^2 + \varepsilon} e^{-i\zeta x} d\zeta. \quad (3.29)$$

При $\varphi(x, f) = \delta(x)$ маємо $\varphi(\zeta, f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$,

$$T_1(x, f) = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\zeta^2 + \varepsilon} (1 - e^{-(\zeta^2 + \varepsilon)f}) e^{-i\zeta x} d\zeta. \quad (3.30)$$

Після відповідних обчислень формула (3.30) набирає вигляду:

$$T_1 = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{4} (e^{|x|\sqrt{\varepsilon}} (\operatorname{erf}x_1 - 1) + e^{-|x|\sqrt{\varepsilon}} (\operatorname{erf}x_2 + 1)), \quad (3.31)$$

де

$$x_1 = \sqrt{\varepsilon f} \left(1 + \frac{|x|}{2\sqrt{\varepsilon f}} \right), \quad x_2 = \sqrt{\varepsilon f} \left(1 - \frac{|x|}{2\sqrt{\varepsilon f}} \right).$$

При великих значеннях $f \gg \frac{1}{\varepsilon}$ в околі прикладання збурення $\delta(x) (|x| < 2\sqrt{\varepsilon})$ замість (3.31) маємо

$$T_1 = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} e^{-|x|\sqrt{\varepsilon}}. \quad (3.32)$$

Визначимо температурне поле в оболонці у випадку, коли температура зовнішнього середовища задається у вигляді

$$\varphi(x, f) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

В результаті обчислень та перетворень отримаємо

при $x < 0$:

$$T_1(x, f) = \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{1 - e^{-\varepsilon f}}{\varepsilon} + \frac{1}{4} e^{-\sqrt{\varepsilon}|x|} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2} \frac{|x|}{\sqrt{f}} - \sqrt{\varepsilon f} \right) + \frac{1}{4} e^{\sqrt{\varepsilon}|x|} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2} \frac{|x|}{\sqrt{f}} + \sqrt{\varepsilon f} \right) \right),$$

при

$x > 0$:

(3.33)

$$T_1(x, f) = \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{1 - e^{-\varepsilon f}}{\varepsilon} - \frac{1}{4} e^{-\sqrt{\varepsilon}|x|} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2} \frac{|x|}{\sqrt{f}} - \sqrt{\varepsilon f} \right) - \frac{1}{4} e^{\sqrt{\varepsilon}|x|} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2} \frac{|x|}{\sqrt{f}} + \sqrt{\varepsilon f} \right) \right).$$

Підставляючи в останніх двох формулах $f \rightarrow \infty$, для усталеного режиму будемо мати:

$$T_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\sqrt{\varepsilon}|x|} & x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-\sqrt{\varepsilon}|x|}, & x > 0. \end{cases} \quad (3.34)$$

На основі отриманого розв'язку (3.33) проведено дослідження закономірностей процесу теплопровідності у системі оболонка – двостороннє багат шарове покриття.

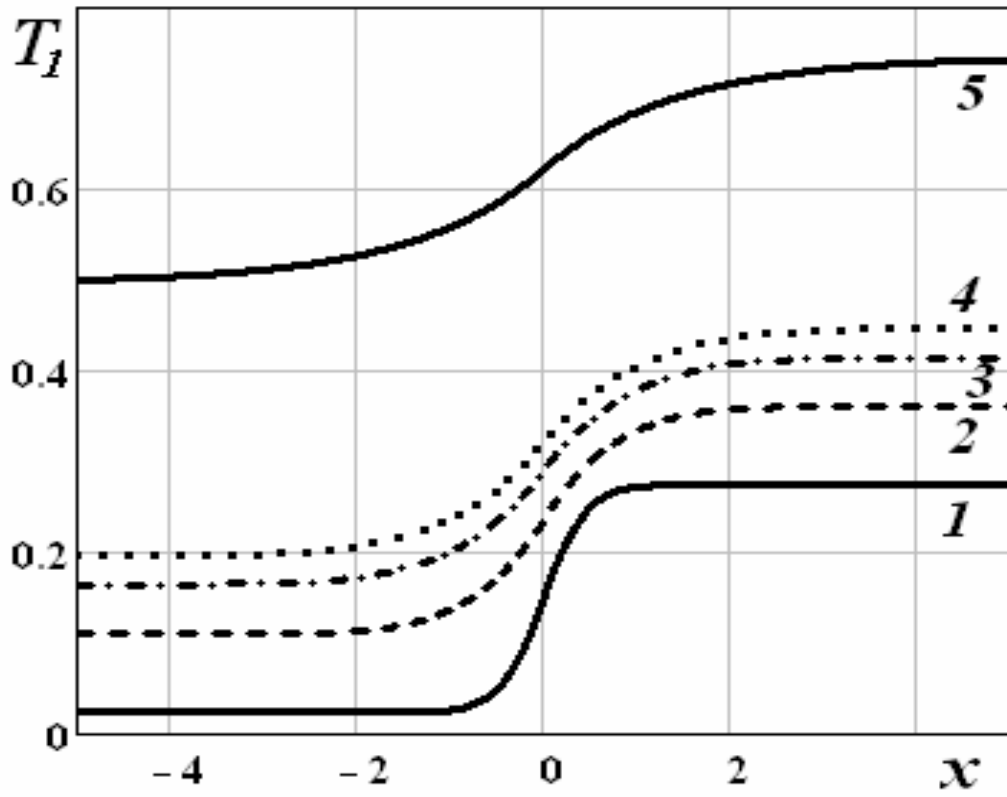
На рис. 3.3 показано розподіл температури вздовж циліндричної оболонки для моментів часу $f=0, 1; 0,5; 0,8; 1; 10$ за значень $\varepsilon=0,5; 1; 3; 5$.

Як бачимо з рис. 3.3, за більших значень параметра ε розподіл температури вздовж оболонки більше відхиляється від рівномірного, тобто збільшується градієнт температури вздовж осової координати. Причём цей процес відбувається набагато швидше, ніж за меншого ε . Враховуючи, що згідно (2.41), параметр

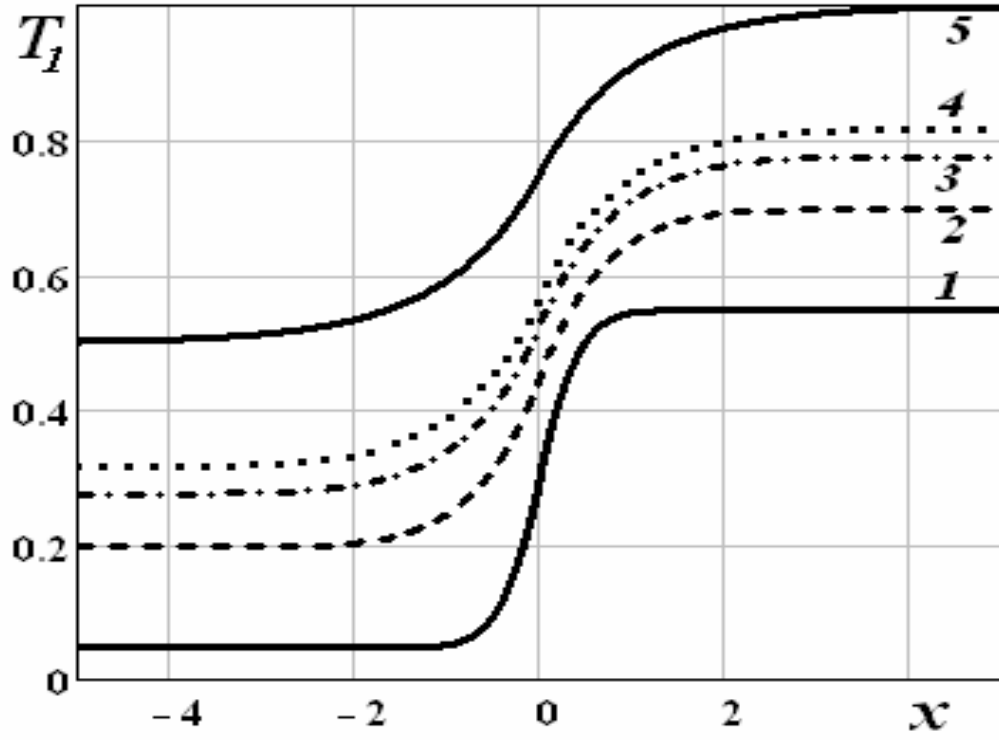
$$\varepsilon = \frac{h_0}{2} \left(\frac{\alpha_0}{\lambda_0} + \frac{\alpha_{0n}}{\lambda_{0n}} \right)$$

ε прямо пропорційний до товщини оболонки і коефіцієнтів теплообміну з навколишнім середовищем, а обернено пропорційний до коефіцієнтів теплопровідності покриттів, то зі збільшенням товщини оболонки та зі зменшенням теплопровідності покриття збільшується нерівномірність температурного поля вздовж циліндричної оболонки. Збільшення коефіцієнтів теплообміну з поверхні покриттів приводить також до збільшення градієнту температури вздовж поверхні циліндра.

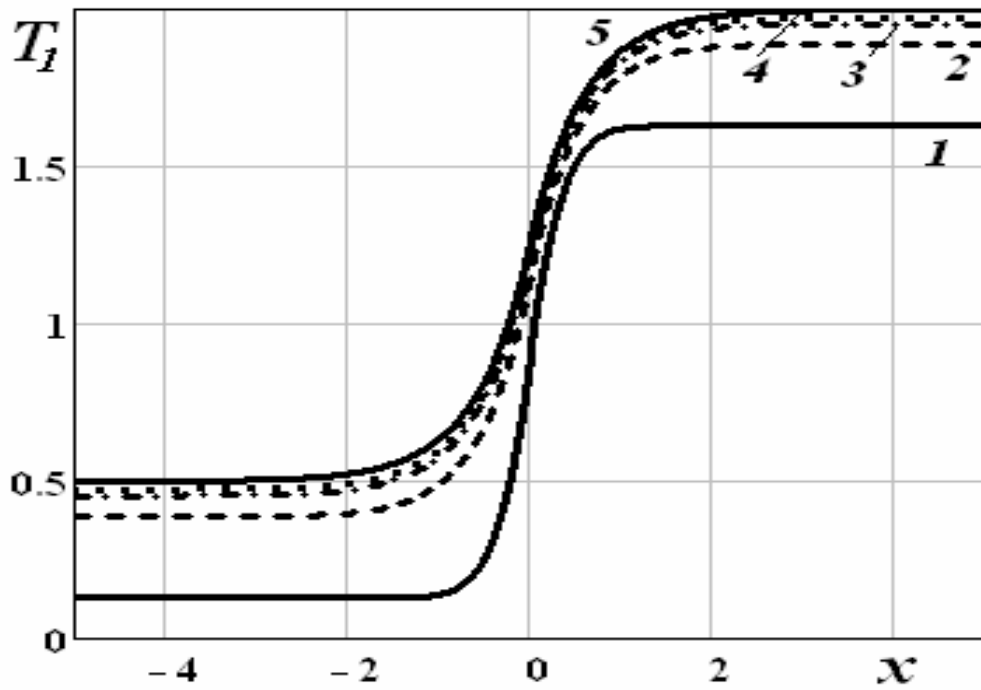
Дані результати мають велике практичне значення, адже великі перепади температури спричиняють значні температурні напруження, що призводить до передчасного руйнування покриттів.



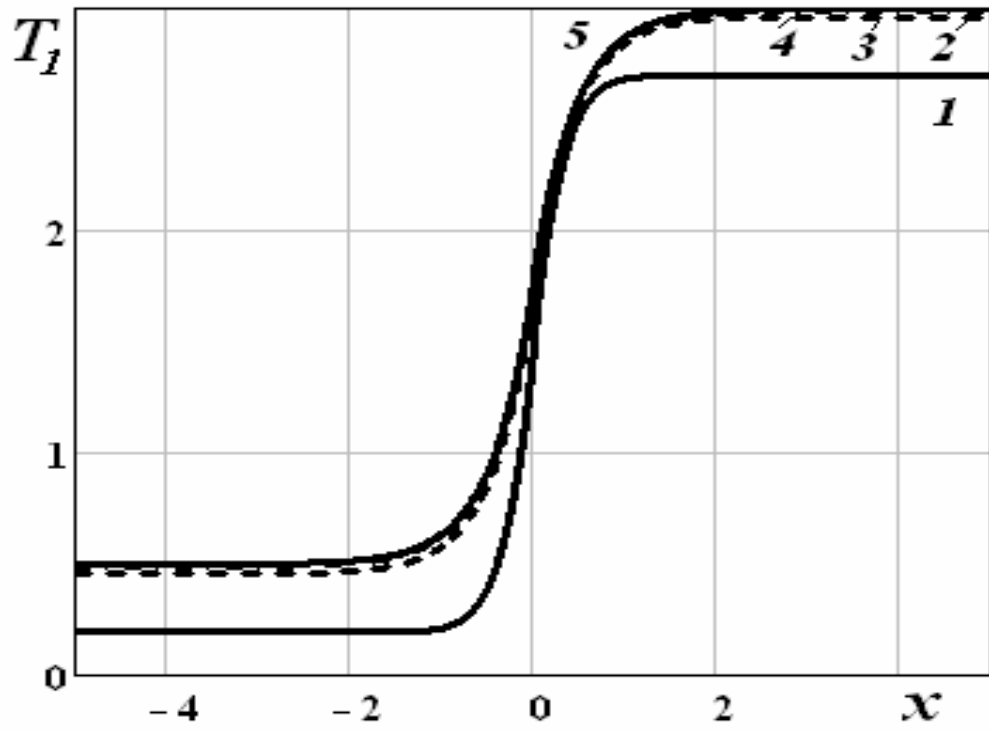
a)



6)



B)



г)

Рис. 3.3. Зміна температурного поля вздовж циліндричної оболонки в різні моменти часу ($1 - f=0,1$; $2 - f=0,5$; $3 - f=0,8$; $4 - f=1$; $5 - f=10$) залежно від параметра ε ((а) – $\varepsilon=0,5$; (б) – $\varepsilon=1$; (в) – $\varepsilon=3$; (г) – $\varepsilon=5$)

На рис. 3.4 подано стаціонарний розподіл температури згідно (3.34).

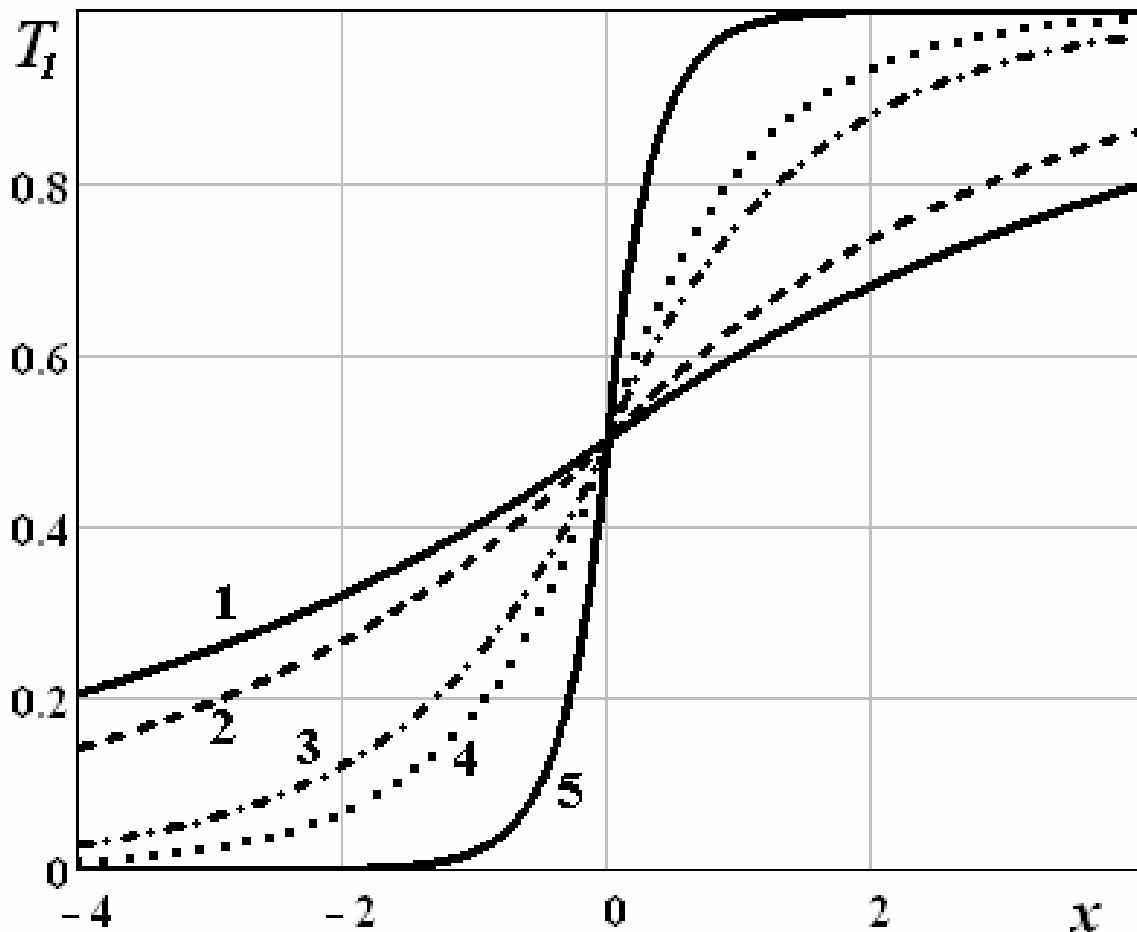


Рис. 3.4. Стаціонарний розподіл температури вздовж циліндричної оболонки залежно від параметра ε (1 – $\varepsilon=0,5$; 2 – $\varepsilon=1$; 3 – $\varepsilon=3$; 4 – $\varepsilon=4$; 5 – $\varepsilon=5$)

На рис. 3.5 подано зміну в часі температури в різних місцях вздовж поверхні циліндричної оболонки для випадку $\varepsilon=1$.

Ці графіки дозволяють оцінити величину максимально можливої температури циліндричної оболонки при високотемпературному нагріві зовнішнім середовищем її частини.

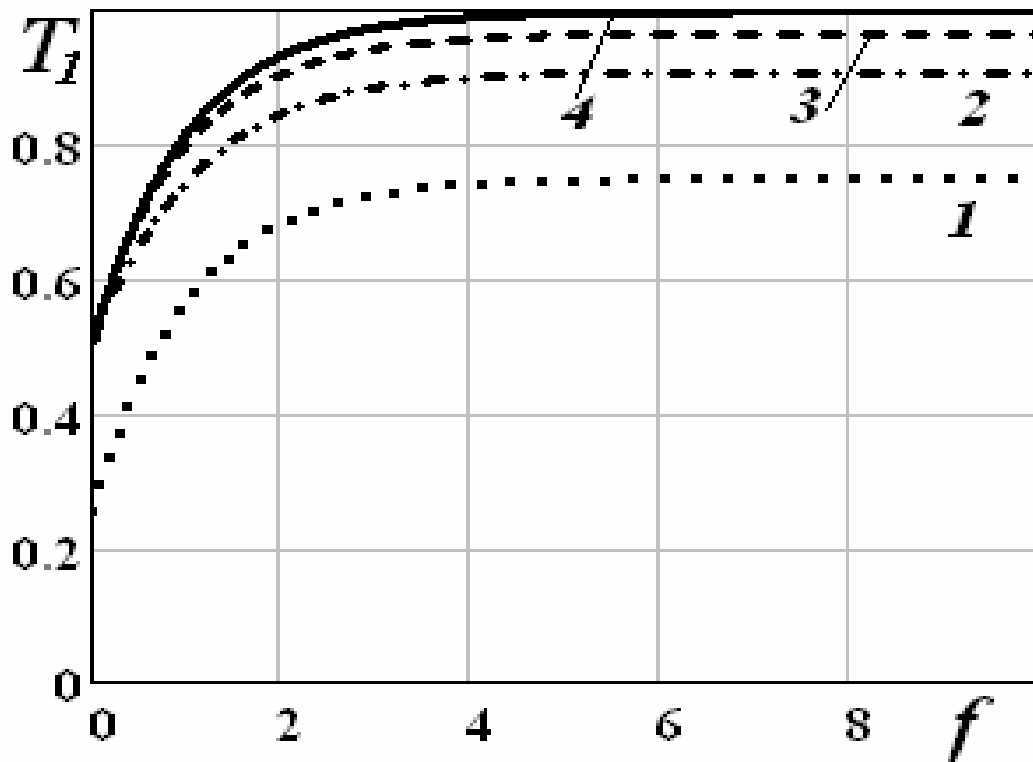
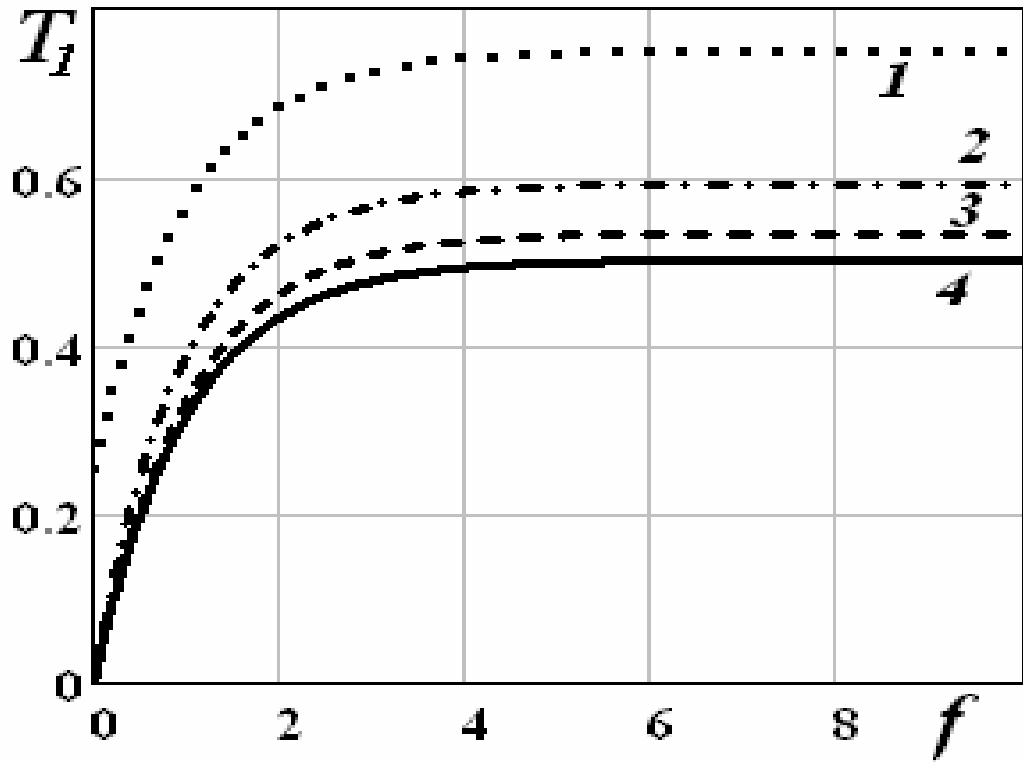


Рис.3.5. Зміна температури з часом в різних точках вздовж циліндричної оболонки (1 – $|x|=0$; 2 – $|x|=1$; 3 – $|x|=2$; 4 – $|x|=5$) для $\varepsilon=1$.

3.5. Нестационарне температурне поле у півобмеженій циліндричній оболонці з одностороннім багат шаровим покриттям

Розглянемо півобмежену циліндричну оболонку з одностороннім багат шаровим покриттям (рис. 3.6). Між боковою поверхнею оболонки і навколишніми зовнішнім та внутрішнім середовищами відбувається конвективний теплообмін за законом Ньютона. Причём, $\alpha_0 \neq \alpha_n$. Температура зовнішнього середовища приймається постійною і рівною початковій температурі t_0^c оболонки. Температура внутрішнього середовища t_n^c . На торці оболонки підтримується постійна температура t_1 .

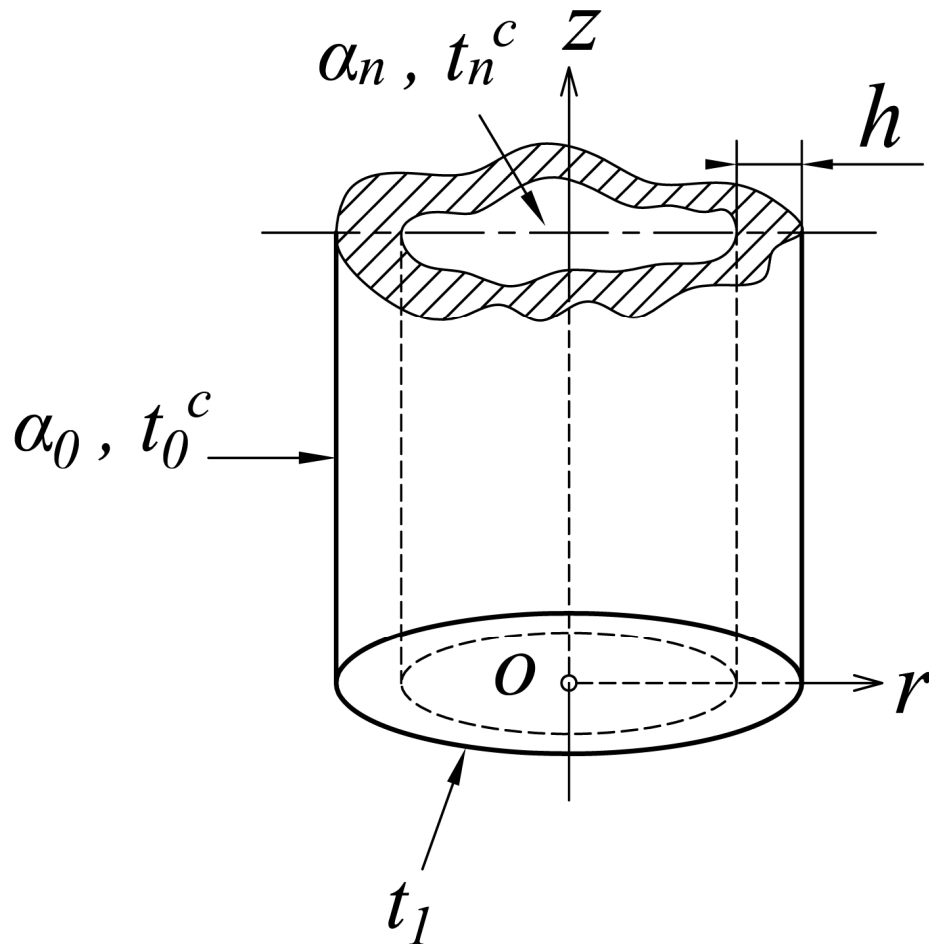


Рис. 3.6. Розрахункова схема напівобмеженої циліндричної оболонки з одностороннім багат шаровим покриттям.

Початкова і граничні умови запишуться:

$$\begin{aligned}
 t(r, z, \tau = 0) &= t_n^c, & t(r, z = 0, \tau) &= t_1, \\
 \left. \frac{\partial t}{\partial r} \right|_{r=h_n} &= \frac{\alpha_n}{\lambda_n} (t - t_n^c), & \left. \frac{\partial t}{\partial r} \right|_{r=h_0} &= \frac{\alpha_0}{\lambda_0} (t - t_0^c), \\
 t(r, z = \infty, \tau) &= t_n^c, & \frac{\partial t}{\partial z}(r, \infty, \tau) &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Оскільки, коефіцієнти теплообміну на поверхнях різні $\alpha_0 \neq \alpha_n$, то задача про визначення температурного поля в оболонці з покриттям зводиться до розв'язування незалежних рівнянь (2.53), які у даному випадку наберуть вигляду:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{a_0} \frac{\partial F_1(z, \tau)}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 F_1(z, \tau)}{\partial z^2} - \eta_1^2 \left(F_1 - \frac{f_1}{\eta_1^2} \right), \\
 \frac{1}{a_0} \frac{\partial F_2(z, \tau)}{\partial \tau} &= \frac{\partial^2 F_2(z, \tau)}{\partial z^2} - \eta_2^2 \left(F_2 - \frac{f_2}{\eta_2^2} \right),
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

за крайових умов:

$$F_{10}(z, \tau = 0) = T_0 + \delta_1 T_0^*; \quad F_{20}(z, \tau = 0) = \frac{1}{\delta_2} \cdot T_0 + T_0^*, \tag{3.37}$$

$$F_1(z = 0, \tau) = F_1^c; \quad F_2(z = 0, \tau) = F_2^c, \tag{3.38}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z}(\infty, \tau) = 0; \quad \frac{\partial F_2}{\partial z}(\infty, \tau) = 0, \tag{3.39}$$

де

$$T_0 = \frac{1}{2h_0} \int_{-h_0}^{h_0} t_n^c dr, \quad T_0^* = \frac{3}{2h_0^2} \int_{-h_0}^{h_0} t_n^c r dr.$$

$$F_1^c = T_c + \delta_1 T_c^*; \quad F_2^c = T_c^* + \frac{1}{\delta_2} \cdot T_c,$$

$$T_c = \frac{1}{2h_0} \int_{-h_0}^{h_0} t_1 dr; \quad T_c^* = \frac{3}{2h_0^2} \int_{-h_0}^{h_0} t_1 r dr.$$

Застосуємо інтегральне перетворення Лапласа (3.19) до рівнянь (3.36). Отримаємо диференціальні рівняння для зображень $F_{1L}(z,s)$ і $F_{2L}(z,s)$:

$$F_{1L}''(z,s) - \frac{s}{a_0} F_{1L}(z,s) + \frac{F_{10}}{a_0} - \eta_1^2 F_{1L}(z,s) + \eta_1^2 \frac{g_1}{s} = 0, \quad (3.40)$$

$$F_{2L}''(z,s) - \frac{s}{a_0} F_{2L}(z,s) + \frac{F_{20}}{a_0} - \eta_2^2 F_{2L}(z,s) + \eta_2^2 \frac{g_2}{s} = 0, \quad (3.41)$$

де $g_i = \frac{f_i}{\eta_i^2}$.

Граничні умови для зображення:

$$F_{1L}(0,s) = \frac{F_1^c}{s}; \quad F_{2L}(0,s) = \frac{F_2^c}{s} \quad (3.42)$$

$$F_{1L}'(\infty, s) = 0; \quad F_{2L}'(\infty, s) = 0. \quad (3.43)$$

Рівняння (3.40) – (3.41) можна переписати у вигляді:

$$F_{iL}''(z,s) - \left(\frac{s}{a_0} + \eta_i^2 \right) \left[F_{iL}(z,s) - \frac{F_{i0}}{s} \right] = 0, \quad (3.44)$$

якщо припустити для спрощення, що $F_{i0} = g_i$. Тоді розв'язок рівняння (3.44) за умови (3.43) буде мати вигляд [1, 2]:

$$F_{iL}(z, s) - \frac{F_{i0}}{s} = B_{1i} \exp\left(-\sqrt{\frac{s}{a_0} + \eta_i^2} \cdot z\right). \quad (3.45)$$

Постійну B_{1i} визначаємо з граничних умов (3.42):

$$B_{1i} = \frac{F_i^c - F_{i0}}{s}. \quad (3.46)$$

Отже, розв'язок для зображення буде мати вигляд:

$$F_{iL}(z, s) - \frac{F_{i0}}{s} = \frac{F_i^c - F_{i0}}{s} \exp\left(-\sqrt{\frac{s}{a_0} + \eta_i^2} \cdot z\right). \quad (3.47)$$

Для переходу від зображення F_{iL} до оригіналу F_i скористаємося таблицею зображень [1, 2].

Відомо, що

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s} \exp(-k\sqrt{s+b})\right] = \frac{1}{2} \left[e^{-k\sqrt{b}} \operatorname{erfc}\left(\frac{k}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{b\tau}\right) + e^{k\sqrt{b}} \operatorname{erfc}\left(\frac{k}{\sqrt{\tau}} + \sqrt{b\tau}\right) \right].$$

Отже, розв'язок нестационарної задачі теплопровідності для напівобмеженої циліндричної оболонки буде мати вигляд:

$$\theta_i = \frac{F_i(z, \tau) - F_{i0}}{F_i^c - F_{i0}} = \frac{1}{2} \left[e^{-\eta_i z} \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{a_0\tau}} - \eta_i \sqrt{\tau}\right) + e^{\eta_i z} \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{a_0\tau}} + \eta_i \sqrt{\tau}\right) \right]. \quad (3.48)$$

3.6. Нестационарне температурне поле у циліндричній оболонці з покриттям скінченних розмірів

Розглянемо обмежену циліндричну оболонку з багатошаровим покриттям довжиною $2L$ (рис. 3.7). Початок координат розмістимо в центрі оболонки. На торцях оболонки відбувається конвективний теплообмін за законом Ньютона з однаковим коефіцієнтом теплообміну α_z , але відмінним від коефіцієнтів теплообміну через бокові поверхні: $\alpha_z \neq \alpha_0 \neq \alpha_n$.

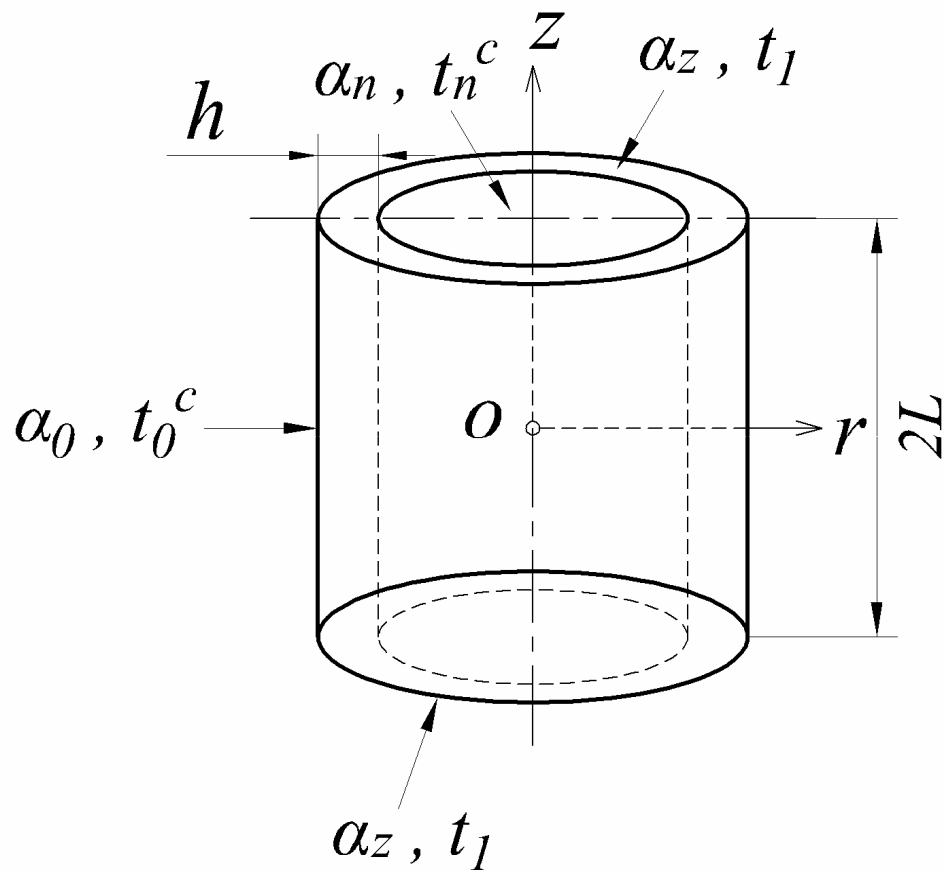


Рис. 3.7. Розрахункова схема обмеженої циліндричної оболонки з одностороннім багатошаровим покриттям.

Крайові умови запишуться у вигляді:

$$\begin{aligned}
t(r, z, \tau = 0) &= t_n^c, \\
\left. \frac{\partial t}{\partial r} \right|_{r=h_n} &= \frac{\alpha_n}{\lambda_n} (t - t_n^c), & \left. \frac{\partial t}{\partial r} \right|_{r=h_0} &= \frac{\alpha_0}{\lambda_0} (t - t_0^c), \\
\left. \frac{\partial t}{\partial z} \right|_{z=-L} &= \frac{\alpha_z}{\lambda_0} (t - t_1), & \left. \frac{\partial t}{\partial z} \right|_{z=L} &= \frac{\alpha_z}{\lambda_0} (t - t_1), \\
\frac{\partial t}{\partial z}(0, \tau) &= 0.
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Розв'язок рівняння (3.44) буде мати вигляд [1, 2]:

$$F_{iL}(z, s) - \frac{F_{i0}}{s} = A \cdot ch \left(\sqrt{\frac{s}{a_0} + \eta_i^2} \cdot z \right) + B \cdot sh \left(\sqrt{\frac{s}{a_0} + \eta_i^2} \cdot z \right). \tag{3.50}$$

Граничні умови для зображення:

$$-F_{iL}'(L, s) + \frac{\alpha_1}{\lambda_0} \left[\frac{F_i^c}{s} - F_{iL}(L, s) \right] = 0, \tag{3.51}$$

$$F_{iL}'(0, s) = 0. \tag{3.52}$$

З умови симетрії (3.52) випливає, що $B=0$.

Сталу A знаходимо з умови (3.51):

$$-\left(\frac{s}{a_0} + \eta_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot A \cdot sh \left(\frac{s}{a_0} + \eta_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot L + \frac{\alpha_z}{\lambda_0} \frac{F_i^c}{s} - A \frac{\alpha_1}{\lambda_0} \cdot ch \left(\frac{s}{a_0} + \eta_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot L - \frac{\alpha_z}{\lambda_0} \frac{F_{i0}}{s} = 0$$

Звідси:

$$A = \frac{F_i^c - F_{i0}}{s} \cdot \frac{1}{ch\left(\frac{s}{a_0} + \eta_i^2\right)^{1/2} \cdot L + \frac{\alpha_z}{\lambda_0} \left(\frac{s}{a_0} + \eta_i^2\right)^{1/2} \cdot sh\left(\frac{s}{a_0} + \eta_i^2\right)^{1/2} \cdot L}.$$

(3.53)

Отже, розв'язок для зображення буде мати вигляд:

$$F_{iL}(z, s) - \frac{F_{i0}}{s} = \frac{(F_i^c - F_{i0}) ch\left(\sqrt{\frac{s}{a_0} + \eta_i^2} \cdot z\right)}{s \left[ch\left(\sqrt{\frac{s}{a_0} + \eta_i^2} \cdot L\right) + \frac{\alpha_z}{\lambda_0} \sqrt{\frac{s}{a_0} + \eta_i^2} \cdot sh\left(\sqrt{\frac{s}{a_0} + \eta_i^2} \cdot L\right) \right]}.$$

(3.54)

Перш, ніж перейти до оригіналу, розглянемо більш просту задачу.

Вважаємо, що $\frac{\alpha_z}{\lambda_0} \rightarrow \infty$, тоді граничні умови на торцях будуть:

$$t(\pm L, \tau) = t_1.$$

(3.55)

За таких умов розв'язок для зображення буде:

$$F_{iL}(z, s) - \frac{F_{i0}}{s} = \frac{(F_i^c - F_{i0}) ch\left(\sqrt{\frac{s}{a_0} + \eta_i^2} \cdot z\right)}{s \cdot ch\left(\sqrt{\frac{s}{a_0} + \eta_i^2} \cdot L\right)} = \frac{\Phi_i(s)}{\Psi_i(s)}.$$

(3.56)

Тут $\Phi_i(s)$ і $\Psi_i(s)$ - узагальнені поліноми відносно s . Використовуючи теорему розкладу [1,2] знаходимо, що

$$\Psi_i(s) = s \cdot ch\left(\sqrt{\frac{s}{a_0} + \eta_i^2} \cdot L\right) = 0.$$

1) $s=0$ (нульовий корінь);

$$2) i \sqrt{\frac{s}{a_0} + \eta_i^2} \cdot L = \mu_n = (2n-1) \frac{\pi}{2},$$

$$s_n = -\left(\frac{a_0 \mu_n^2}{L^2} + \eta_i^2 a_0\right).$$

Звідси

$$\Psi_i'(s) = ch\left(\frac{s}{a_0} + \eta_i^2\right)^{1/2} \cdot L + \frac{sL}{2a_0} \left(\frac{s}{a_0} + \eta_i^2\right)^{-1/2} \cdot sh\left(\frac{s}{a_0} + \eta_i^2\right)^{1/2} \cdot L,$$

$$\Psi_i'(s_n) = \frac{1}{2\mu_n} \sin \mu_n [\mu_n^2 + \eta_i^2 L^2].$$

Отже, розв'язок спрощеної задачі має вигляд:

$$\theta_i = \frac{F_i(z, \tau) - F_{i0}}{F_i^c - F_{i0}} = \frac{ch\left(\sqrt{Bi_j} \frac{z}{h_0}\right)}{ch\left(\sqrt{Bi_j} \frac{L}{h_0}\right)} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2\mu_n}{\mu_n^2 + Bi_j \left(\frac{L}{h_0}\right)^2} \cdot \cos \mu_n \frac{z}{L} \cdot \exp\left[-\left(\mu_n^2 + Bi_j \frac{L^2}{h_0^2}\right) Fo\right], \quad (3.57)$$

де $Bi_j = \frac{\alpha_j h_0}{\lambda_0}$ – критерій Біо ($\alpha_1 = \alpha_0$, $\alpha_1 = \alpha_{0n}$); $Fo = \frac{a\tau}{L^2}$ – критерій

Фур'є.

Далі повернемося до розгляду поставленої задачі. Можна довести, що розв'язок (3.56) для зображення задовольняє умовам теореми розкладу, тобто чисельник і знаменник – узагальнені поліноми відносно s , причім поліном знаменника не містить сталої завдяки наявності множника s .

Застосовуючи теорему розкладу і роблячи аналогічні перетворення, отримали розв'язок задачі у вигляді:

$$\theta_i = \frac{F_i(z, \tau) - F_{i0}}{F_i^c - F_{i0}} = \frac{ch\left(\sqrt{Bi_j} \frac{z}{h}\right)}{ch\left(\sqrt{Bi_j} \frac{L}{h}\right) + \frac{L\sqrt{Bi_j}}{hBi_L} sh\left(\sqrt{Bi_j} \frac{L}{h}\right)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^2}{\mu_n^2 + Bi_j \frac{L^2}{h^2}} \cdot A_n \cos \mu_n \frac{z}{L} \exp\left[-\left(\mu_n^2 + Bi_j \frac{L^2}{h^2}\right) F_0\right], \quad (3.58)$$

де $A_n = \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n}$ – початкові теплові амплітуди; μ_n –

характеристичні числа, які визначаються з рівняння $ctg \mu = \frac{1}{Bi_L} \mu$; $Bi_L = \frac{\alpha_z L}{\lambda_0}$.

3.7. Висновки до розділу

1. На основі побудованих вихідних співвідношень сформульовано відповідні крайові задачі теплопровідності для плоских та циліндричних оболонок із одно- та двосторонніми захисними покриттями.
2. З використанням методу розділення змінних та інтегрального перетворення Лапласа одержано у замкнутому вигляді аналітичні розв'язки модельних задач стаціонарного та нестаціонарного процесів теплопровідності для пластин різної конструкції з двосторонніми покриттями (суцільна кругла пластина, суцільна кругла пластина з центральним вирізом).

3. Застосовуючи інтегральні перетворення Фур'є та Лапласа одержано у замкнутому вигляді аналітичні розв'язки модельних задач нестационарного процесу теплопровідності для циліндричних оболонок з односторонніми та двосторонніми покриттями (нескінченна циліндрична оболонка з двосторонніми покриттями, напівобмежена циліндрична оболонка з одностороннім багат шаровим покриттям, циліндрична оболонка скінченних розмірів з одностороннім багат шаровим покриттям).

Основні результати розділу опубліковано у працях [122, 126, 127, 130].

РОЗДІЛ 4

ВПЛИВ ЗАХИСНОГО БАГАТОШАРОВОГО ПОКРИТТЯ НА ТЕПЛОВИЙ РЕЖИМ ОБОЛОНКОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ

На даний час у хімічній, нафтопереробній промисловості і енергетиці широко використовують елементи сталевих конструкцій, виготовлених у вигляді циліндричних оболонок та пластин. Оболонки призначаються для збереження газоподібних, рідких та сипучих тіл або їхньої технологічної переробки. У зв'язку з цим розрізняють наступні види оболонок:

- 1) газгольдери – для збереження і розподілу газів;
- 2) резервуари – для збереження води, нафтопродуктів та іншої рідини;
- 3) спеціальні конструкції металургійної, хімічної та інших галузей промисловості (домни, повітрянагрівачі, автоклави, різні великі хімічні апарати і т.п.);
- 4) труби і трубопроводи великих діаметрів, що використовуються на металургійних, хімічних та інших заводах, гідроелектростанціях, а також у якості магістральних нафто- і газопроводів та інше.

Такі конструкції в процесі експлуатації можуть піддаватися впливу силових і теплових навантажень, а також різних агресивних середовищ, які викликають корозію матеріалу. Для захисту від високотемпературної корозії і з метою термозахисту на них наносять багат шарові покриття.

Відмінність коефіцієнтів лінійного розширення в діапазоні температур 20...900°C біля зовнішнього і внутрішніх шарів створює складну картину напруженого стану покриття при зміні температури.

Тому важливим для отримання даних про роботоздатність таких конструкцій з покриттями є дослідження температурного поля в них.

4.1. Температурне поле в корпусі реактора гідрокрекінгу нафти

Плакування сталей антикорозійними покриттями широко використовують в нафтохімічній промисловості при виготовленні корпусів реакторів, які експлуатуються за дії агресивних корозійних середовищ і високої температури. При цьому завдяки конструктивному виконанню стінка корпусу реактора складається з корпусного (несучого) металу, котрий забезпечує міцність апарату, і тонкого шару наплавленого металу, котрий безпосередньо контактує з агресивним середовищем, і захищає реактор від корозії. За несучий метал при виготовленні таких апаратів, як правило, використовують низьколеговані теплостійкі сталі, котрі зберігають достатньо високу міцність за високої температури. Для наплавленого металу використовують нержавні аустенітні або феритні сталі, котрі характеризуються високим опором корозії в агресивному технологічному середовищі.

4.1.1. Аналіз вихідних даних по умовах експлуатації біметалічного реактора. Реактор представляє собою посудину тиску, виготовлену з середньолегованої сталі (рис. 4.1). Його внутрішня поверхня захищена антикорозійною наплавкою з нержавіючої аустенітної сталі. Товщина основного металу як правило складає 0,15...0,3 м, наплавки (одно- чи двошарової) – порядку 0,005...0,01 м.

Умови роботи реактора включають наступні цикли, що представляють інтерес з точки зору оцінки його водневої стійкості (рис. 4.2):

Ц1) цикл опресування воднем за тиску $P_1 = 16 \text{ МПа}$ і температури $T_1 = 723 \text{ К}$ тривалістю $t_{\text{Ц1}} = 3 \text{ доби}$ з наступним охолодженням зі швидкістю T_1 при скиданні тиску зі швидкістю P_1 і подальшим перебуванням за температури доквілля T_{0_1} протягом періоду часу t_{0_1} ;



Рис. 4.1. Реактор гідрокрекінгу нафти

Ц2) цикл сіркування каталізатора за $P_2 = 15 \text{ МПа}$, $T_2 = 573 \text{ К}$ протягом періоду $t_{ц2} = 7$ діб з наступним охолодженням і скиданням тиску зі швидкостями \dot{T}_2 і \dot{P}_2 відповідно і з подальшим перебуванням в неробочому стані за температури T_{02} протягом періоду часу t_{02} ;

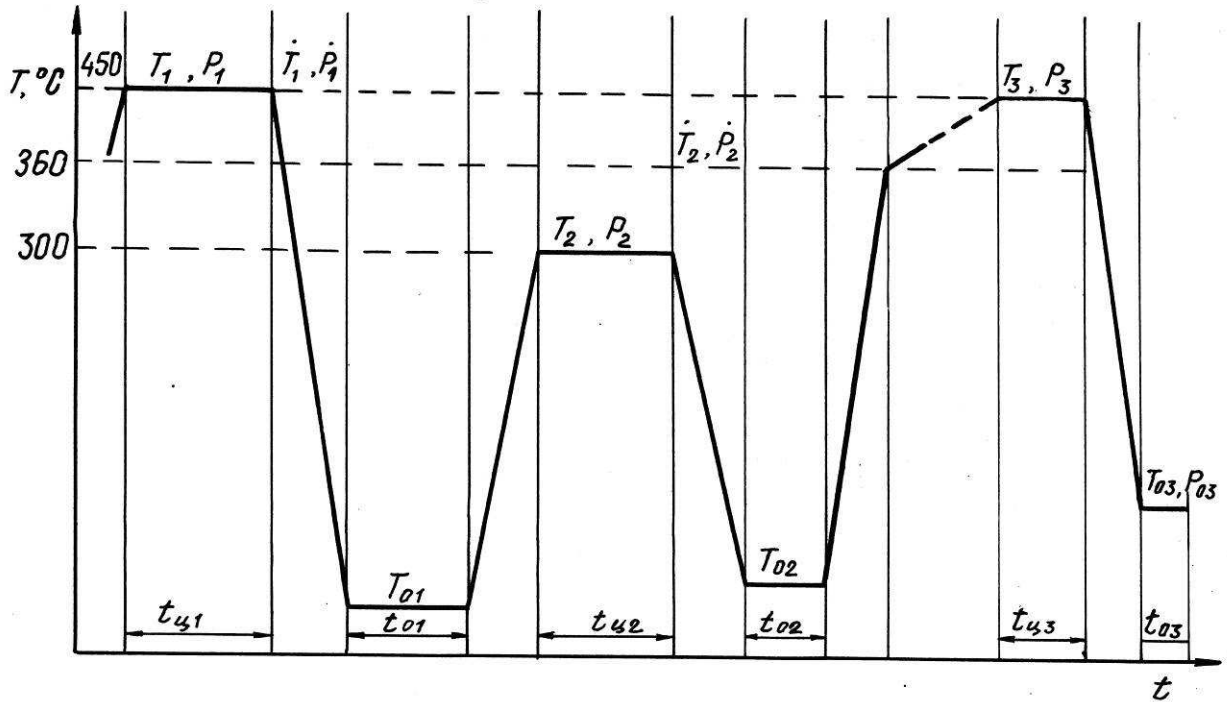


Рис. 4.2 – Експлуатаційна схема реактора гідрокрекінгу нафти

Ц3) робочий цикл, на кінцевій стадії якого протягом періоду $t_{ц3} = 3$ місяці має місце $P'_3 = 16 \text{ МПа}$ і $T'_3 = 723 \text{ К}$, потім проходить охолодження і скидання тиску зі швидкостями \dot{T}'_3 і \dot{P}'_3 до величин $T'_3 = 633 \text{ К}$ і $P'_3 = 15 \text{ МПа}$ і перебування за таких параметрів протягом проміжку часу t'_{03} (продування воднем); після цього проходить охолодження зі швидкістю \dot{T}''_3 до температури $T_{03} = 323 \text{ К}$ і скидання тиску зі швидкістю \dot{P}''_3 до величини $P_{03} = 1 \text{ МПа}$; за таких умов проводиться заміна водню азотом, цей етап

триває протягом часу t''_{03} ;

Ц4) ймовірні аварійні ситуації, коли протягом робочого циклу температуру знижують зі швидкістю \dot{T}_4 до величини 523K .

4.1.2. Визначення розподілу температури по товщині стінки корпусу реактора в процесі нагрівання зі сторони наплавки. Розв'язувалась задача про розподіл температури у стінці корпусу реактора гідрокрекінгу нафти (РГК), яка представлена в роботі [132]. А саме: розглядався циліндричний корпус реактора, виготовлений зі сталі 15Х2МФА - А товщиною $x_\alpha = 0.2\text{м}$ і захищений двошаровою напавкою з нержавіючих аустенітних сталей 07Х25Н13 і 04Х20М10Г2Б зі сумарною товщиною $x_\gamma = 0.006\text{м}$ (рис. 4.3).

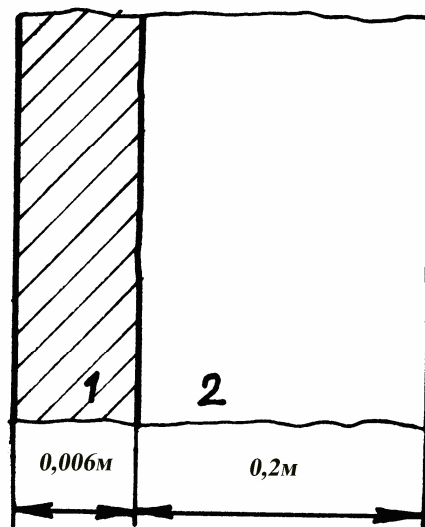


Рис. 4.3. Схема біметалевої стінки корпусу реактора

Даний реактор підданий наводнюванню внаслідок його контакту зі сторони наплавки з воднем за тиску $P = 150\text{ МПа}$ і температури $T = 450^\circ\text{C}$ ($723\text{ }^\circ\text{K}$), протилежна сторона стінки корпусу РГК контактує з навколишнім середовищем з температурою 20°C . У результаті контакту з водневмісним середовищем високої температури стінка корпусу нерівномірно нагрівається.

При розрахунку температурного поля корпус реактора моделювався циліндричною оболонкою з одностороннім двошаровим покриттям.

У роботах [132-134] отримано розв'язок відповідної задачі теплопровідності методом скінченних елементів (МСЕ). Розглянений інтервал $-0.006 \leq x \leq 0.2$ по товщині стінки корпусу розбивався на скінченні елементи нерівномірною сіткою, в якій подрібнювалися елементи в околі границі матеріалів $x=0$. А саме, наплавка розбивалася на 29 СЕ, серед яких найменший прилягав до границі розділу $x=0$ і мав довжину 0,5 мкм. Інтервал, який займав основний метал товщиною x_2 , розбивався на 60 елементів, з яких найменший також прилягав до границі розділу матеріалів $x=0$ і мав довжину 5 мкм.

Аналогічну задачу розв'язали застосувавши наш підхід. Приймали наступні граничні умови. Через циліндричні поверхні відбувається теплопередача у внутрішнє ($\alpha_2 = 1000 \text{ Вм/м}^2 \cdot \text{C}$, $t_n^c = 450^\circ \text{C}$) і зовнішнє ($\alpha_0 = 45 \text{ Вм/м}^2 \cdot \text{C}$, $t_0^c = 20^\circ \text{C}$) середовища. На торцевій поверхні знизу задана температура $t_1 = 450^\circ \text{C}$ [133]. Коефіцієнти теплопровідності приймалися: $\lambda_0 = 46,5 \text{ Вм/м} \cdot \text{C}$; $\lambda_1 = 23 \text{ Вм/м} \cdot \text{C}$; $\lambda_2 = 18 \text{ Вм/м} \cdot \text{C}$; $h_1 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}$; $h_2 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}$.

На рис 4.4 подано порівняння розподілу температури по товщині корпусу, розрахованого МСЕ [132-134] (штрихові лінії) і обчисленого нами, використовуючи лінійне наближення температури по товщині (суцільні лінії). Як бачимо суттєве відхилення результатів спостерігається тільки при малих часах $\tau < 0,2 \text{ год}$. З часом відхилення зменшується, і при часах $\tau > 3 \text{ год}$ результати практично співпадають.

Це дає нам підстави вважати, що отримані нами в першому наближенні співвідношення для визначення температурного поля задовільно описують зміну температури в оболонках з багатошаровими покриттями і можуть застосовуватися інженерами-експлуатаційниками.

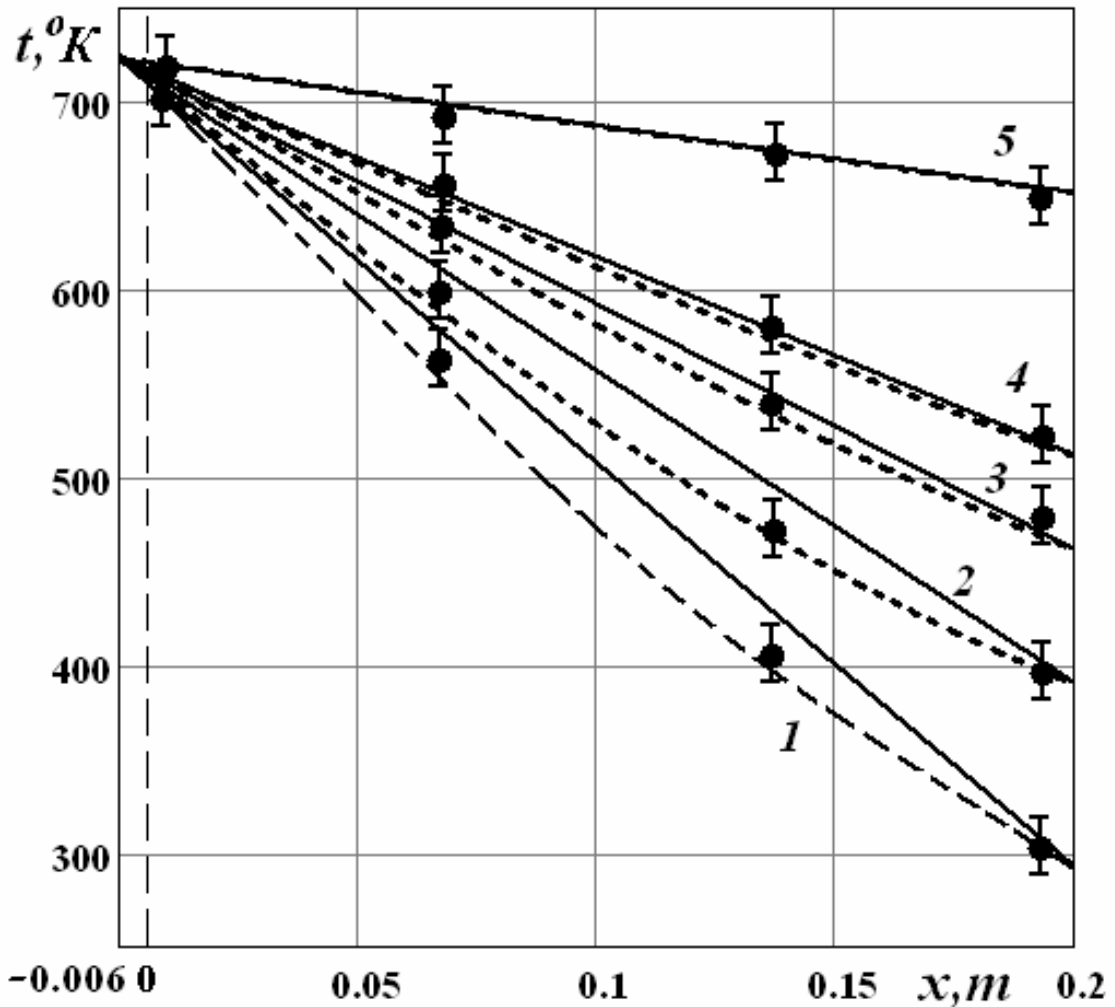


Рис. 4.4. Розподіл температури по товщині стінки у різні моменти часу:

1 – $\tau = 0,14 \text{ год}$; 2 – $\tau = 0,6 \text{ год}$; 3 – $\tau = 1,5 \text{ год}$; 4 – $\tau = 3 \text{ год}$;

5 – $\tau = 30 \text{ год}$ (штрихові лінії – МСЕ, суцільні – наші результати, точки – експериментальні дані)

4.1.3. Експериментальне визначення розподілу температури по товщині зразка в процесі нагрівання зі сторони наплавки. Для перевірки створеної моделі проводились експериментальні дослідження з визначення розподілу температури по товщині зразків з антикорозійними наплавками. Роботи проводились в рамках договору № IZ/04100/K19-01 між ВАТ «Іжорські заводи» (Росія) та ТзОВ «Дослідний завод «Промкотлосервіс» стосовно виготовлення сучасних реакторів гідрокрекінгу з переробки

нафтопродуктів. Для проведення випробувань на ТЗОВ «Дослідний завод «Промкотлосервіс» було виготовлено серію із 4 тришарових зразків. Циліндричні зразки діаметром 72 mm і висотою 66 mm з наплавленнями загальною товщиною 6 mm виготовляли відповідно до стандарту ASTM G146-01 (рис. 4.5).



Рис. 4.5. Загальний вигляд експериментальних зразків

У якості основного металу використовували сталь 15X2МФА-А. Перший захисний антикорозійний шар із нержавіючої аустенітної сталі 07X25Н13, а другий - 04X20М10Г2Б наносили одношаровим електрошлаковим наплавленням. Хімічний склад та механічні властивості сталей подано у табл. 4.1 і 4.2 [134].

Після нанесення наплавлення зразки пройшли відпуск за температури $700\div 715^{\circ}\text{C}$ протягом 7 год.

Табл. 4.1. Хімічний склад основного і наплавлених металів (%)

Марка сталі	C	Si	Mn	Cr	Mo	V	Ni	S	P
15X2M ФА-А	0.15	0.3	0.5	2.85	0.7	0.27	0.4	0.015	0.012
07X25 Н13	0.083	0.91	1.22	25	-	-	13	0.02	0.03
04X20 М10Г2Б	0.063	0.68	1.03	13.8	-	11	7.2	0.005	0.007

Табл. 4.2. Механічні властивості матеріалів

Марка сталі	σ_b , <i>МПа</i>	$\sigma_{0.2}$, <i>МПа</i>	δ , %	ψ , %	T , K
15X2M ФА-А	679	564	22	77	293
	540	470	17	75	723
	490	440	19	80	813
07X25H 13	560	310	-	25	293
	412	207	-	40	623
04X20M 10Г2Б					

Для контролю температури по товщині зразка, зі сторони основного металу по центру висверлювали отвір діаметром 4 mm (рис. 4.6).

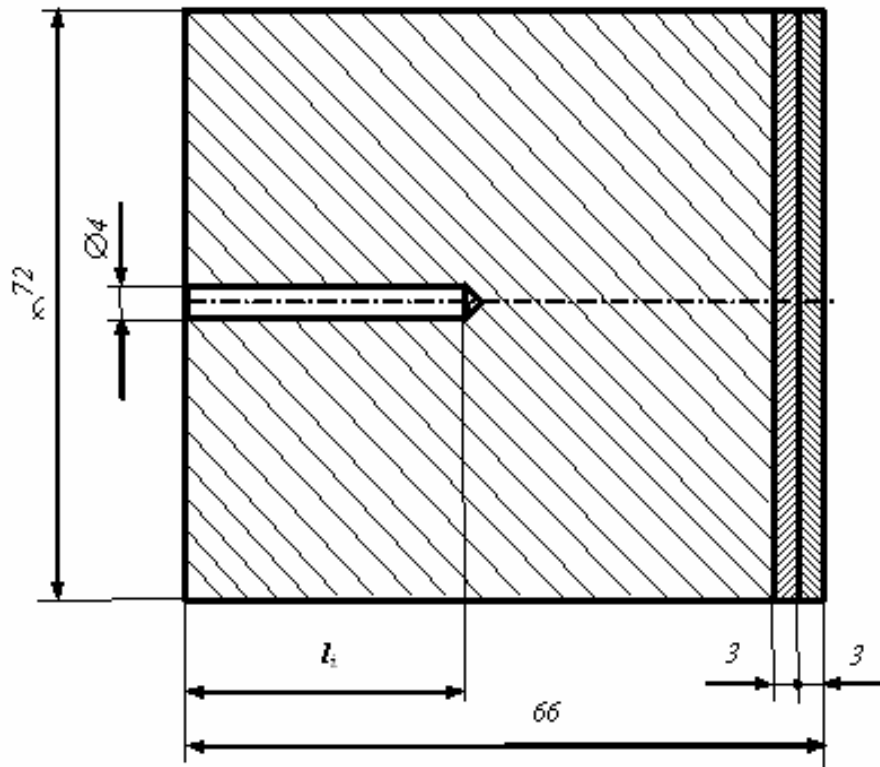


Рис. 4.6. Схема зразка з центральним отвором для термопар

Глибина отвору l_i для кожного зразка була різною: $l_1 = 60$ мм; $l_2 = 40$ мм; $l_3 = 20$ мм; $l_4 = 2$ мм.

Нагрівання зразка з можливістю контролю і реєстрації робочих параметрів проводили у спеціальній камері у вигляді товстостінної керамічної труби з відкритими торцями, яку вставляли в електропічку СНОЛ-1, 6.2,5/9 – ИЗ УХЛ4.2 через отвір у термоізолюючій кришці (рис. 4.7). Швидкість нагріву зразка становила $80 \dots 100$ °C/год, температура витримки 450 °C, час витримки 30 ± 1 год. Контроль температури нагріву здійснювали за допомогою регулятора РТ-0102 з подальшим записом діаграми температурного впливу на комп'ютері.



Рис. 4.7. Загальний вигляд установки для нагріву зразків

Графік контролю у реальному часі параметрів нагріву і витримки досліджуваних зразків подано на рис. 4.8.

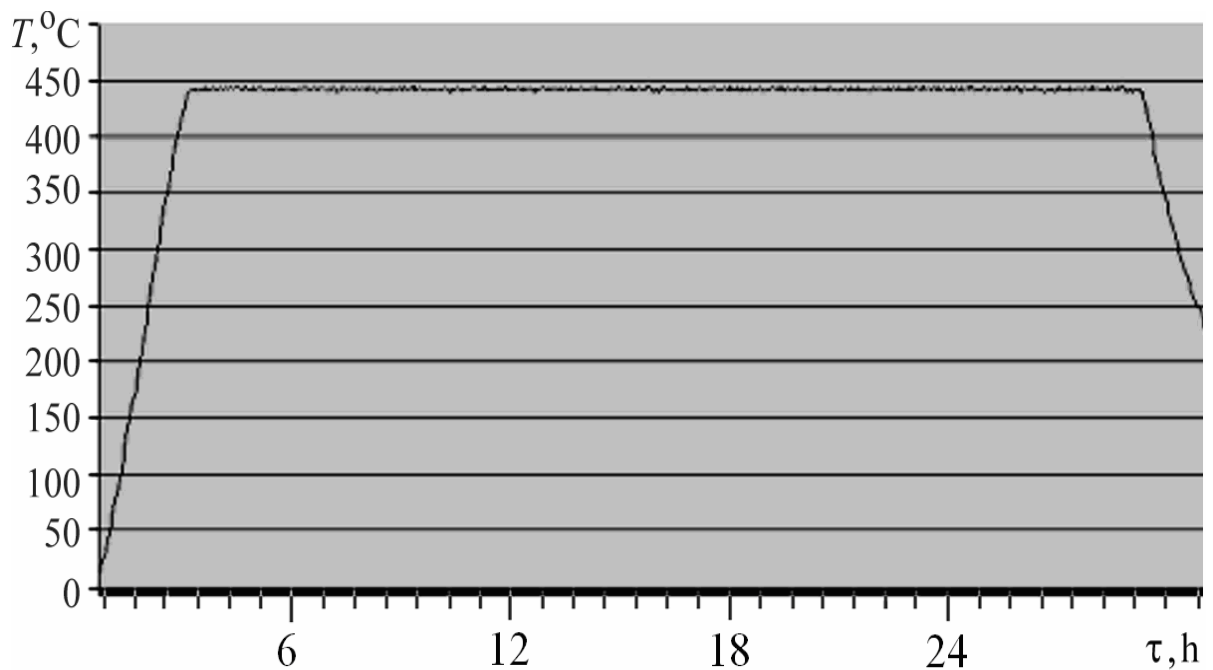


Рис. 4.8. Контроль температури при нагріванні зразків

Сигнал від термопари поступав на регулятор-вимірювач РТ-0102, який дає можливість візуального контролю температури на цифровому індикаторі, а також запису на комп'ютері. Загальний вигляд блоку вимірювання представлено на рис. 4.9.



Рис. 4.9. Загальний вигляд блоку вимірювання температури

Вимірювання температури по товщині зразка залежно від часу витримки проводили за допомогою термоелектричного перетворювача типу ТХА-1007, який поміщали у центральний отвір.

Щоб перенести результати експериментальних вимірювань температури у зразках товщиною 66 мм на реальний корпус реактора, стінка якого має товщину 206 мм, використали критерій подібності Фур'є: $F_0 = \frac{a\tau}{h^2}$, де h – характерний лінійний розмір. У результаті отримали, що для глибини отвору $l_1 = 60$ мм відповідає точка на графіку $x = 0,001$ м; для $l_2 = 40$ мм – $x = 0,07$ м; для $l_3 = 20$ мм – $x = 0,13$ м; для $l_4 = 2$ мм – $x = 0,19$ м. Результати подано на рис.4.4 точками. Відносна похибка теоретичних розрахунків від експериментальних даних становить не більше 5%.

4.2. Вплив протикорозійного двостороннього двошарового покриття на термопружність суцільного диска газової турбіни

Довготривала безаварійна експлуатація газових турбін суттєво залежить від здатності матеріалу до роботи при високих температурах і дії на них агресивного попелу та продуктів спалювання. Величина цієї температури залежно від типу турбіни знаходиться в діапазоні 960-1300 °С, а в деяких видах турбін буває навіть вищою. З цією метою проводяться розробки нових сплавів, композитних та інших матеріалів, а також технологій підвищення жаростійкості та жароміцності деталей газових турбін шляхом формування поверхневих шарів з відповідними фізичними та механічними властивостями.

Проте найефективнішими і найбільш широкоживаними способами забезпечення жароміцності та корозійної стійкості конструкційних елементів гарячого тракту газотурбінних двигунів, є нанесення поверхневих покриттів. У даний час до 70% деталей газотурбінних двигунів піддаються нанесенню різного виду покриттів, а кількість деталей, що покриваються, досягає кілька тисяч на один мотокомплект [135]. Зовнішній шар покриття представляє собою кераміку звичайного складу $ZrO_2+8\% Y_2O_3$. Внутрішні шари покриття є металевими: вони забезпечують адгезію керамічного шару і додатковий захист від високотемпературної корозії у випадку проникнення агресивного середовища через керамічний шар або його розшарування [136].

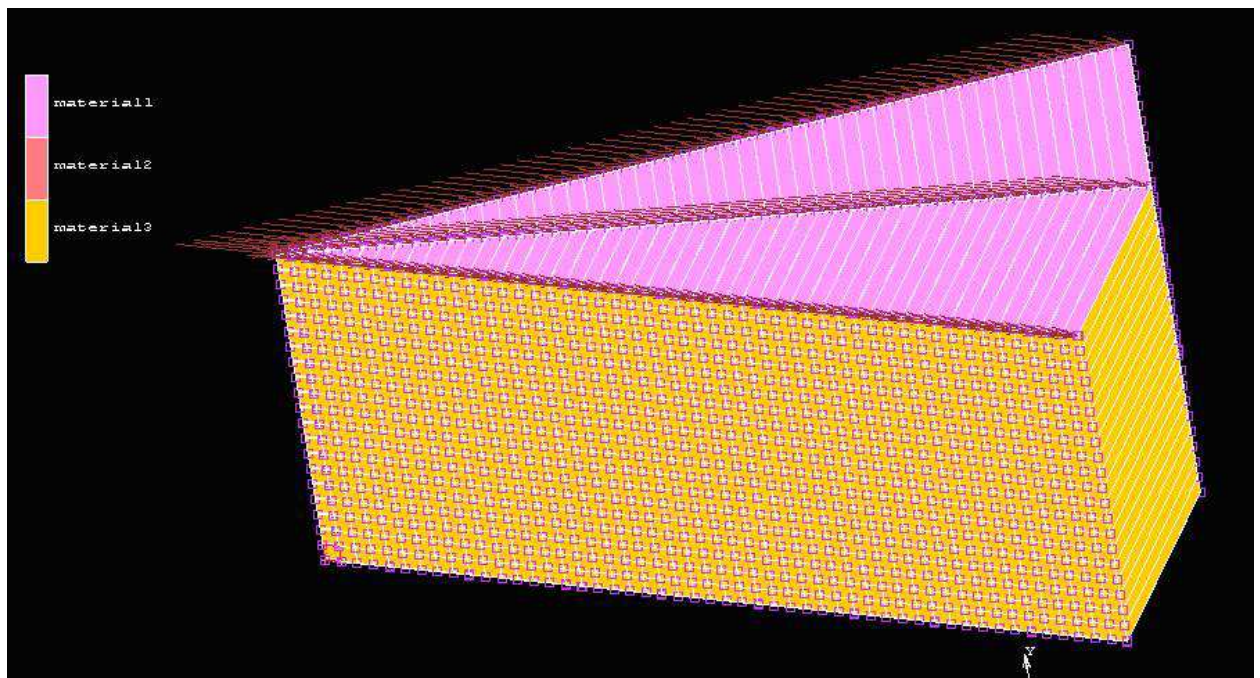
Відмінність коефіцієнтів лінійного розширення в діапазоні температур 20...900°С у зовнішньому ($\alpha = 9...9,5 \cdot 10^{-6}$) і внутрішніх ($\alpha = 15...17 \cdot 10^{-6}$) шарах створює складну картину напруженого стану при зміні температури. Тому для оцінки роботоздатності таких конструкційних елементів з багатошаровими покриттями важливим є дослідження зміни їх температурного поля і напружено-деформованого стану.

Розрахунки проводили для суцільної круглій пластини товщиною $h_0 = 0,1\text{м}$ і радіуса $r_1 = 0,5\text{м}$, яка виготовлена із жароміцного сплаву EI 893

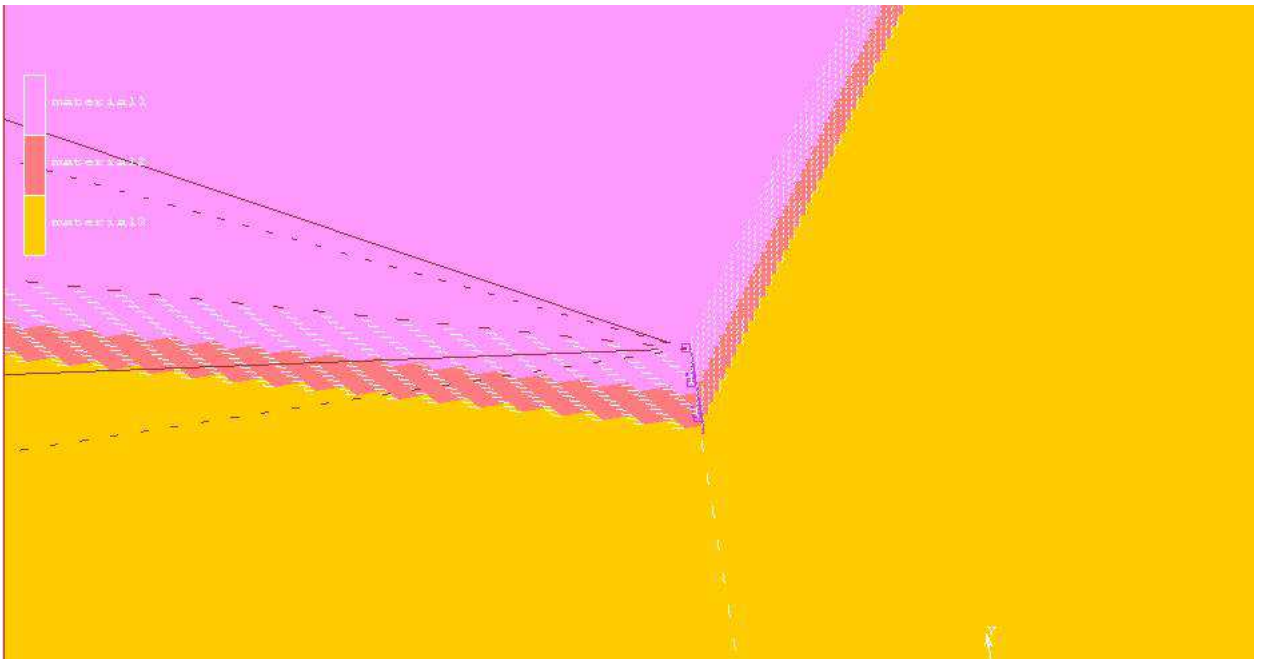
(див. рис. 3.2). На поверхні пластини нанесено двошарове протикорозійне покриття КДП-1/СДП-8 [136], де КДП-1 (діоксид цирконію, стабілізований 8% Y_2O_3) – зовнішній шар товщиною $h_2 = 95\text{мкм}$; СДП-8 (сплав системи $CoCrAlY$ з 24% Cr і 11% Al) – внутрішній шар товщиною $h_1 = 65\text{мкм}$. Для розрахунків використовували такі дані: $\lambda_0 = 24\text{Вт/м}\cdot\text{С}$; $\lambda_1 = 10\text{Вт/м}\cdot\text{С}$; $\lambda_2 = 2,5\text{Вт/м}\cdot\text{С}$; $\alpha_0 = 150\text{Вт/м}^2\cdot\text{С}$; $\alpha_1 = 80\text{Вт/м}^2\cdot\text{С}$; $\alpha_2 = 15\text{Вт/м}^2\cdot\text{С}$; $\alpha_r = 100\text{Вт/м}^2\cdot\text{С}$; $t_m^c = 500^\circ\text{С}$; $t_n^c = 20^\circ\text{С}$; $t_1 = 800^\circ\text{С}$.

Температуру пластини розраховували для двох випадків: 1) для пластини без покриття з теплофізичними характеристиками α_0 і λ_0 ; 2) з урахуванням покриття (α_{0m} , α_{0n} , λ_{0m} , λ_{0n}).

З метою апробації проведено порівняльний аналіз розв'язків, отриманих автором та порохованих методом скінченних елементів (МСЕ). Для розрахунків використовували програму MARC. Для цього пластину розбивали на 5600 восьмикутних елементів кубічної форми (рис. 4.10).



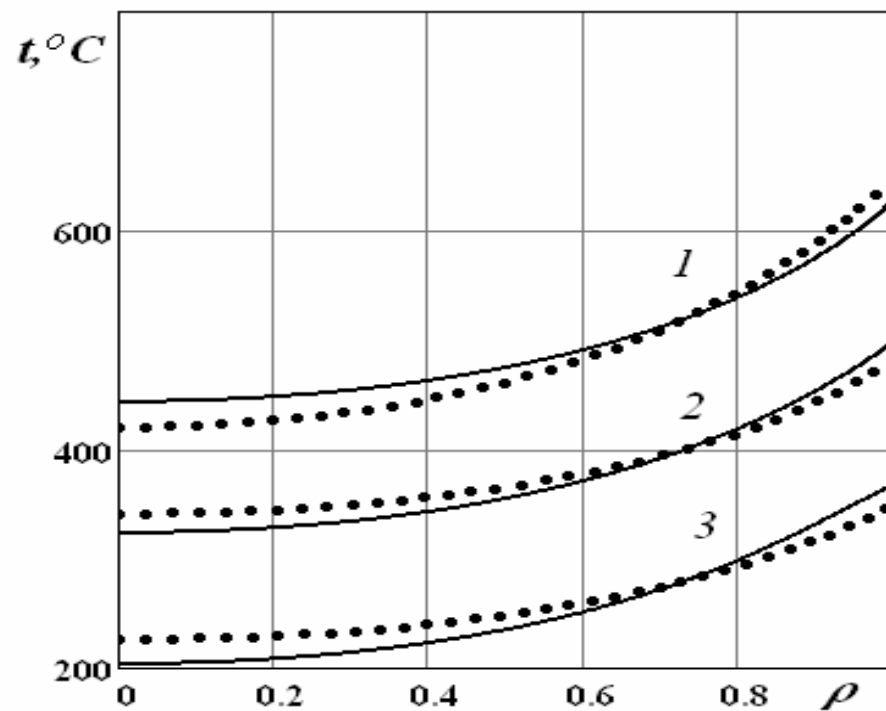
(a)



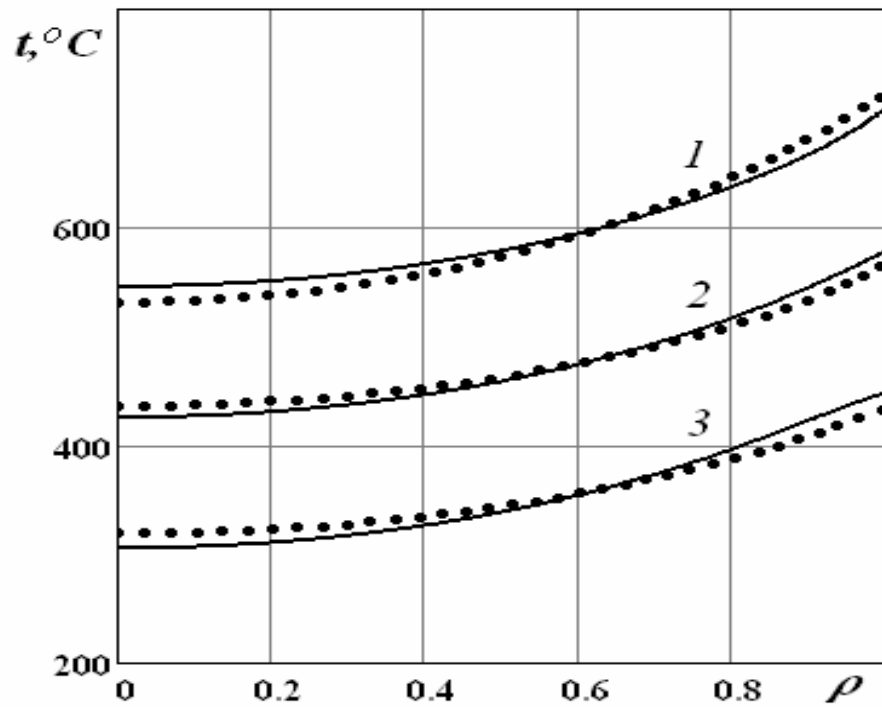
(б)

Рис. 4.10. Розбиття сегменту пластини на скінченні елементи (а)
та збільшене зображення місця з'єднання основного матеріалу
пластини з шарами покриття (б)

На рис. 4.11 подані результати порівняння.



(а)



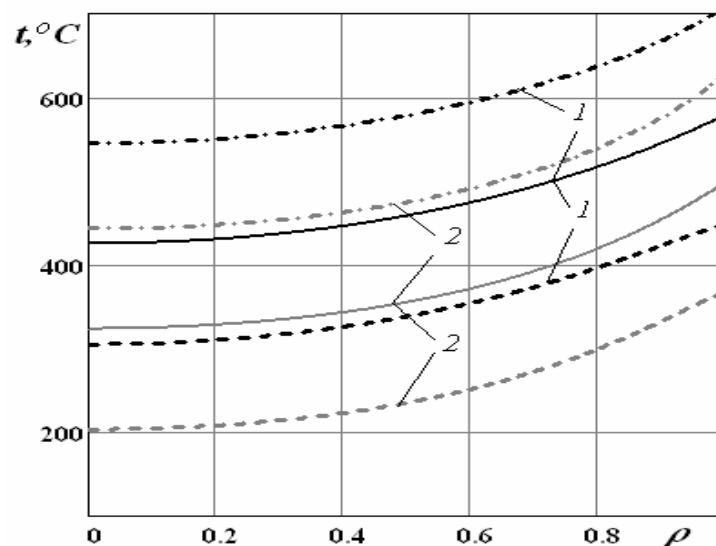
(б)

Рис. 4.11. Розподіл температури вздовж радіуса пластини з урахуванням покриття (а) і без урахування (б) (1 – $z=h_0/2$; 2 – $z=0$; 3 – $z=-h_0/2$):

суцільна лінія – формула автора, крапки – МСЕ

Графіки свідчать про коректність запропонованих розв'язків та правомірність їх застосування для досліджень розподілу температурного поля в пластинах з покриттями.

На рис. 4.12 подано результати розрахунків температури пластини за формулою (3.14).



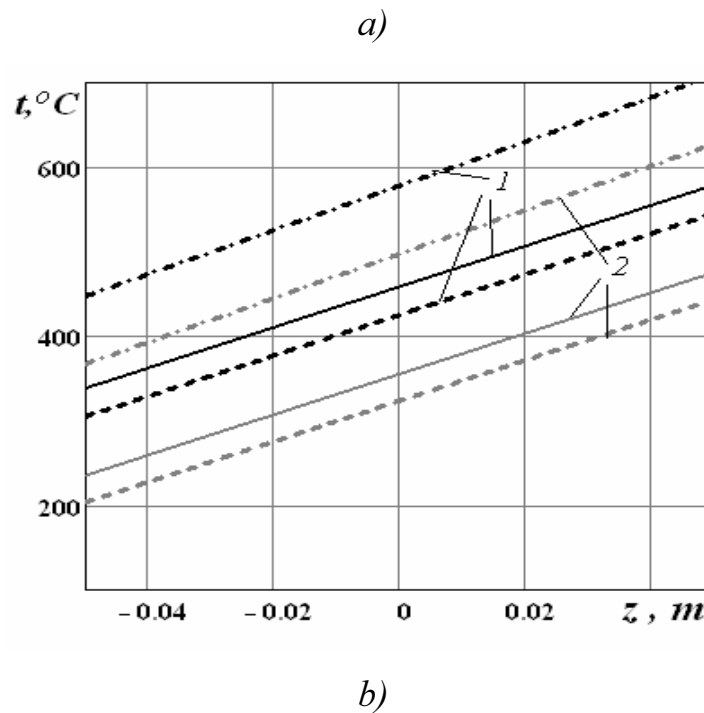


Рис. 4.12. Розподіл температури вздовж радіуса (а) (суцільна лінія – $z = 0$; штрихова – $z = -h_0 / 2$; штрих-пунктирна – $z = h_0 / 2$) і по товщині пластини (b) (штрихова – $\rho = 0$; суцільна лінія – $\rho = 0,25$; штрих-пунктирна – $\rho = 0,5$):

1 – для пластини без урахування покриття; 2 – з урахуванням покриття

З графіків видно, що нехтування покриттям при розрахунках, дає завищену температуру приблизно на $100\text{ }^\circ\text{C}$.

Для оцінки впливу покриття на термічні напруження σ_r і σ_θ використали розв'язок відповідної термопружної задачі, поданий у [19]:

$$\sigma_r = N_r / h + 12M_r z / h^3, \quad \sigma_\theta = N_\theta / h + 12M_\theta z / h^3, \quad (4.1)$$

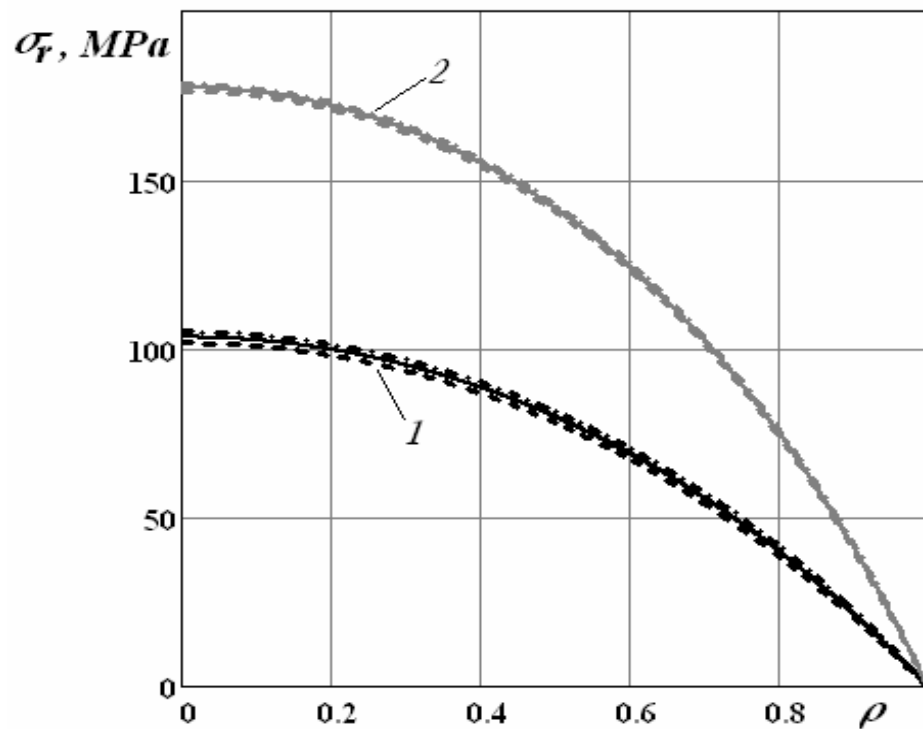
$$N_r = \alpha_T E h C_1 [I_1(\delta) - I_1(\delta\rho) / \rho] / \delta;$$

$$N_\theta = \alpha_T E h C_1 [I_1(\delta) + I_1(\delta\rho) / \rho - \delta I_0(\delta\rho)] / \delta;$$

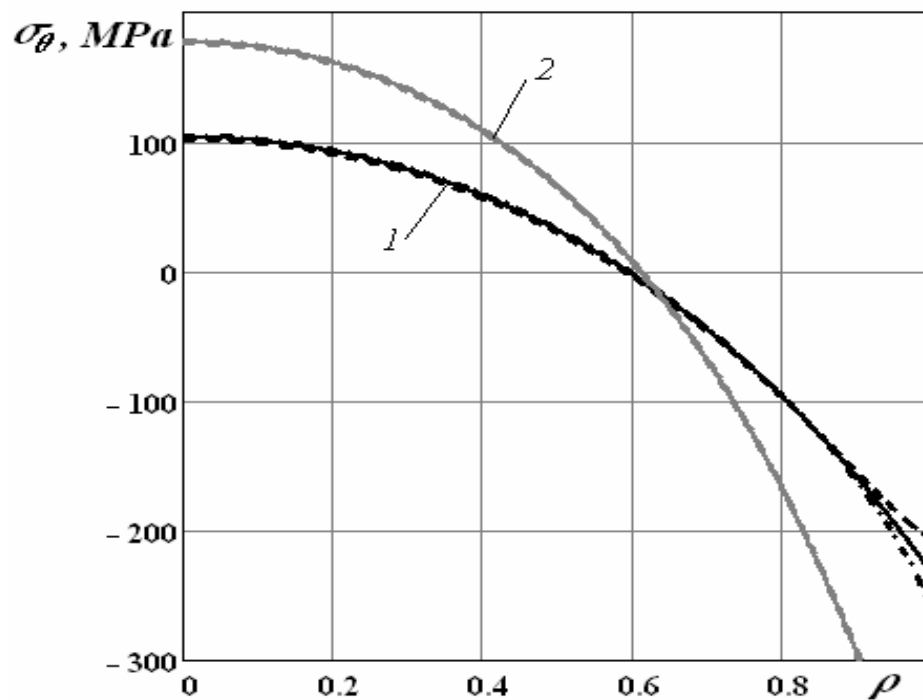
$$M_r = \alpha_T E h^3 C_2 [I_1(\delta_1) - I_1(\delta_1\rho) / \rho] / 12\delta_1;$$

$$M_\theta = \alpha_T E h^3 C_2 [I_1(\delta_1) + I_1(\delta_1\rho) / \rho - \delta_1 I_0(\delta_1\rho)] / 12\delta_1.$$

На рис. 4.13 подано розподіл термічних напружень σ_r і σ_θ вздовж радіуса пластини.



a)



б)

Рис. 4.13. Розподіл напружень σ_r (а) і σ_θ (б) вздовж радіуса (суцільна

лінія – $z = 0$; штрихова – $z = -h_0 / 2$; штрих-пунктирна – $z = h_0 / 2$):
 1 – для пластини без урахування покриття; 2 – з урахуванням покриття

На графіках бачимо суттєві відмінності розподілу напружень при розрахунках пластини без покриття і з урахуванням його впливу.

4.3. Вплив протикорозійного одностороннього двошарового покриття на розподіл температури в циліндричному корпусі автоклава

У хімічних і нафтохімічних виробництвах (аміака, метанола, синтетичних жирних спиртів, при переробці нафтопродуктів та інше) широко застосовують посудини високого тиску. Велика корозійна активність внутрішнього середовища зумовлює використання захисних покриттів. У товстостінних елементах посудин тиску за підвищених температур внутрішнього середовища виникають значні температурні перепади. Це викликає появу високих температурних напружень, які неможна не враховувати при оцінці напруженого стану таких деталей [137, 138].

Обчислимо температурне поле в циліндричному корпусі промислового автоклава з внутрішнім діаметром 3 м і товщиною стінки 0,3 м. Внутрішня стінка резервуара захищена двошаровою наплавкою з нержавіючої сталі. При розрахунку температурного поля корпус автоклава розглядали як циліндричну оболонку з одностороннім двошаровим покриттям.

Приймали наступні граничні умови. Через циліндричні поверхні відбувається теплопередача у внутрішнє ($\alpha_2 = 1123 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{°C}$, $t_n^c = 314 \text{ °C}$) і зовнішнє ($\alpha_0 = 35 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{°C}$, $t_0^c = 25 \text{ °C}$) середовища. На торцевій поверхні знизу задана температура $t_1 = 100 \text{ °C}$ [137]. Коефіцієнти теплопровідності приймалися: $\lambda_0 = 46,5 \text{ Вт/м} \cdot \text{°C}$; $\lambda_1 = 23 \text{ Вт/м} \cdot \text{°C}$; $\lambda_2 = 17 \text{ Вт/м} \cdot \text{°C}$; $h_1 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}$; $h_2 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}$.

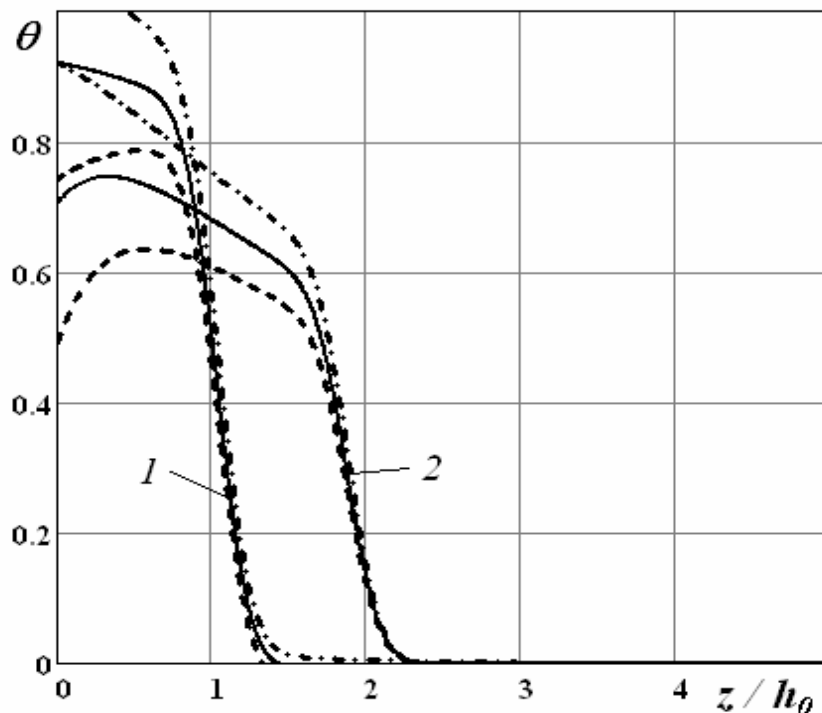
Температуру корпуса розраховували для двох випадків:

1) для стінки корпусу без покриття з теплофізичними характеристиками оболонки – α_0 і λ_0 ;

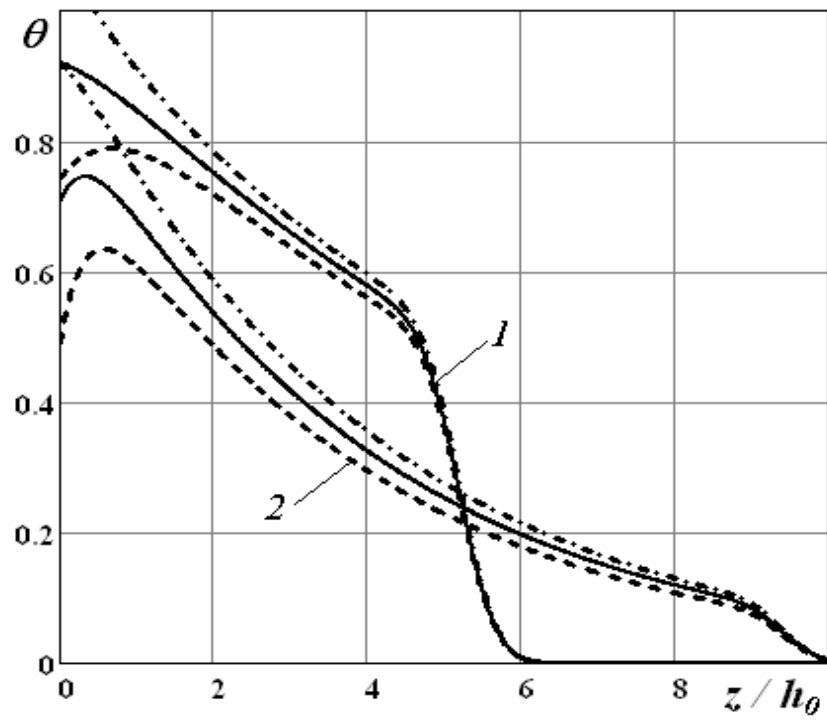
2) з урахуванням покриття, тобто з узагальненими теплофізичними характеристиками – α_{0n} , λ_{0n} .

На рис. 4.14 – 4.16 подано результати розрахунків розподілу температури корпусу автоклава за формулою (3.48). Отже, отриманий розв'язок дає можливість встановити температуру у будь-якій точці циліндричної оболонки.

З рисунків видно, що найбільший градієнт температури виникає на торцевій поверхні у зоні нагрівання. По мірі віддалення від торця температура вирівнюється. При цьому нехтування покриттям при розрахунках, завищує розрахункову температуру приблизно на 25%.



а)



б)

Рис. 4.14. Розподіл температури вздовж твірної циліндричної оболонки після 100с (а) і 500с (б) від початку нагрівання (суцільна лінія – $r = 0$; штрихова – $r = -h_0 / 2$; штрих-пунктирна – $r = h_0 / 2$):

1 – для пластини без урахування покриття; 2 – з урахуванням покриття

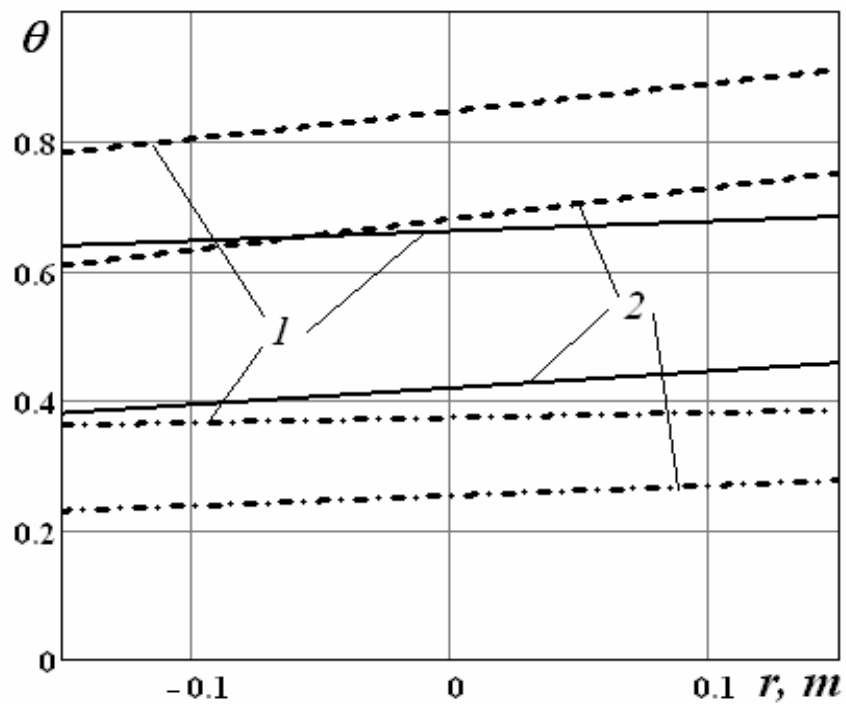
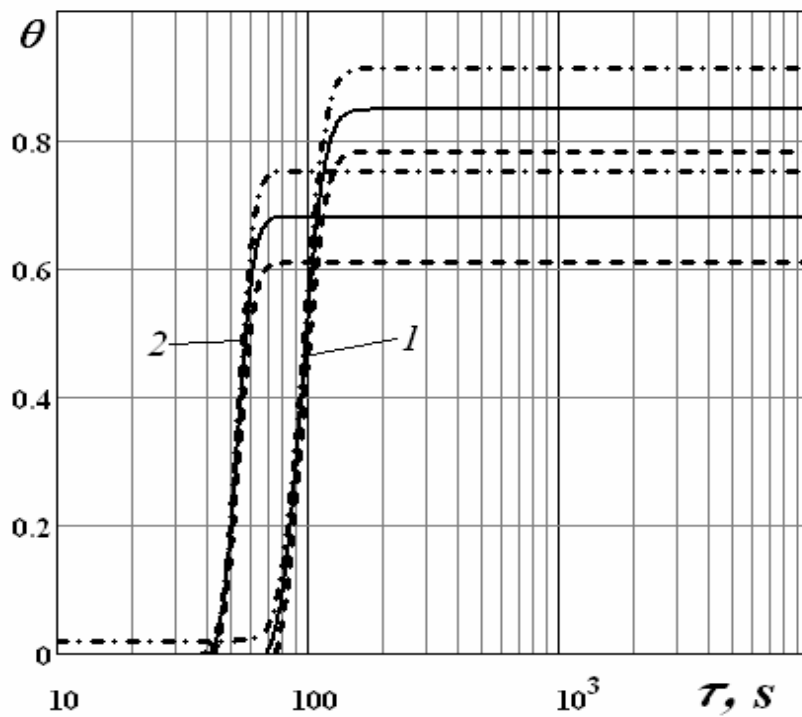
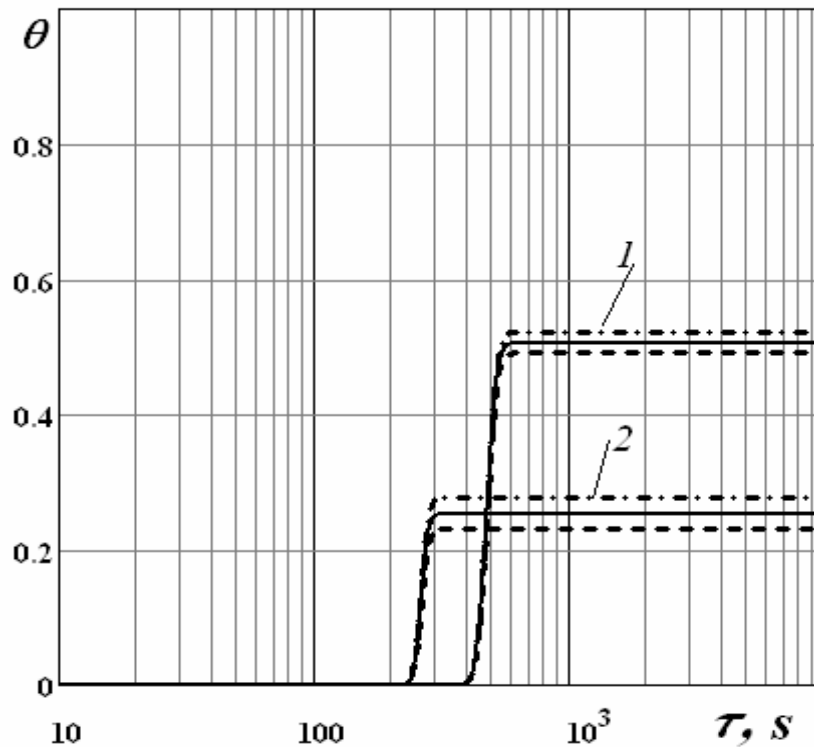


Рис. 4.15. Розподіл температури по товщині стінки циліндричної оболонки
на різній відстані від торця
(штрихова – $z/h_0 = 1$; суцільна лінія – $z/h_0 = 3$; штрих-пунктирна –
 $z/h_0 = 5$):

1 – для оболонки без урахування покриття; 2 – з урахуванням покриття



a)



б)

Рис. 4.16. Зміна температури з часом в різних точках вздовж циліндричної оболонки на відстані $z/h_0 = 1$ (а) і $z/h_0 = 5$ (б) від торця (суцільна лінія – $r = 0$; штрихова – $r = -h_0/2$; штрих-пунктирна – $r = h_0/2$) : 1 – для пластини без урахування покриття; 2 – з урахуванням покриття

4.4. Висновки до розділу

1. Проведено апробацію отриманих у третьому розділі розв'язків задач теплопровідності для круглої пластини з двосторонніми тонкими багат шаровими покриттями та циліндричної оболонки з односторонніми багат шаровими покриттями з різними теплофізичними властивостями.
2. Апробація отриманих результатів з експериментальними та числовими даними показала, що максимальне значення величини відносної похибки експериментального, числового та модельного розподілу температури відповідних елементів не перевищує 3-5%. Це дає підстави рекомендувати для інженерної практики отримані у роботі прості аналітичні співвідношення для аналізу розподілу температурних полів в оболонкових елементах конструкцій з багат шаровими покриттями.

3. Проведено кількісний аналіз впливу протикорозійного двошарового покриття на термопружність суцільного диска газової турбіни.
4. Проведено кількісний аналіз впливу протикорозійного двошарового покриття на розподіл температури у корпусі промислового автоклава.
5. Встановлено, що не врахування покриття в елементах конструкцій при аналізі температурних полів веде до завищеної на 25% оцінки температури. Тому при дослідженнях елементів конструкцій з протикорозійними покриттями на міцність і довговічність цей аспект необхідно враховувати.

Основні результати розділу опубліковано у працях [128, 129, 131].

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розв'язано наукову задачу математичного моделювання стаціонарних та нестаціонарних процесів теплопровідності в оболонках та пластинах з багат шаровими покриттями в умовах нерівномірного нагріву.

Основні результати полягають у наступному:

5. Побудовано математичні моделі теплопровідності для оболонок з одно- та двосторонніми багат шаровими тонкими покриттями за умов конвективного теплообміну з їх поверхонь, у яких враховано теплофізичні характеристики усіх шарів покриття, що дозволяє підвищити точність розрахунків теплових режимів тонкостінних конструкцій з багат шаровими покриттями.
6. На основі побудованих вихідних співвідношень сформульовано відповідні крайові задачі теплопровідності для плоских та циліндричних оболонок із одно- та двосторонніми захисними покриттями.
7. З використанням методу розділення змінних, інтегрального перетворення Лапласа та Фур'є одержано у замкнутому вигляді аналітичні розв'язки модельних задач стаціонарного та нестаціонарного процесів теплопровідності для плоских та циліндричних оболонок різної конструкції із одно- та двосторонніми захисними покриттями (суцільна кругла пластина, суцільна кругла пластина з центральним вирізом, нескінченна циліндрична оболонка з двосторонніми покриттями, напівобмежена циліндрична оболонка з одностороннім багат шаровим покриттям, циліндрична оболонка скінченних розмірів з одностороннім багат шаровим покриттям).
8. Апробація отриманих результатів з експериментальними та числовими даними показала, що максимальне значення величини відносної похибки експериментального, числового та модельного розподілу температури відповідних елементів не перевищує 3–5%. Це дає підстави рекомендувати для інженерної практики отримані у роботі прості аналітичні співвідношення для аналізу розподілу температурних полів в оболонкових елементах конструкцій з багат шаровими покриттями.
9. Проведено кількісний аналіз впливу протикорозійного покриття на термопружність суцільного диска газової турбіни та на розподіл температури у корпусі промислового

автоклава. Встановлено, що не врахування покриття в елементах конструкцій при аналізі температурних полів веде до завищеної на 25% оцінки температури.

10. Результати роботи використано при розробці «Рекомендацій із вимірювання характеристик напружено-деформованого стану елементів мостів при змінних температурах», які виконані на замовлення Філії Державного дорожнього інституту ім. М.П. Шульгіна «Львівського регіонального науково-технічного центру»; при дослідженнях водневої стійкості корпусів реакторів гідрокрекінгу нафти, виконаних ТзОВ «Дослідний завод «Промкотлосервіс» на замовлення ВАТ «Іжорські заводи» (Росія) в рамках договору № IZ/04100/K19-01. На основі результатів роботи розроблено «Рекомендації з визначення температури в оболонках та пластинах з багатошаровими покриттями».

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Карслоу Г. Теплопроводность твердых тел / Г. Карслоу, Д. Егер. – М.: Наука, 1964. – 488 с.
2. Лыков А.В. Теория теплопроводности / А.В. Лыков. – М.: Высш. шк., 1967. – 600 с.
3. Бокштейн Б.С. Термодинамика и кинетика диффузии в твердых телах / Б.С. Бокштейн, С.З. Бокштейн, А.А. Жуховицкий. – М.: Metallurgiya, 1974. – 280 с.
4. Підстригач Я.С. Вибрані праці / Я.С. Підстригач. – К.: Наук. думка, 1995. – 460 с.
5. Підстригач Я.С. Температурні напруження в оболонках / Я.С. Підстригач, С.Я. Ярема. – К.: Вид-во АН УРСР, 1961. – 212 с.
6. Подстригач Я.С. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках / Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно. – К.: Наук. думка, 1972. – 308 с.
7. Подстригач Я.С. Обобщенная термомеханика / Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно. – К.: Наук. думка, 1976. – 310 с.
8. Подстригач Я.С. Термоупругость тел при переменных коэффициентах теплоотдачи / Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно, В.И. Громовык, В.Л. Лозбень. – К.: Наук. думка, 1977. – 158 с.
9. Подстригач Я.С. Термоупругость тонких оболочек / Я.С. Подстригач, Р.Н. Швец. – К.: Наук. думка, 1978. – 343 с.
10. Григолюк Э.И. Оптимизация нагрева оболочек и пластин / Э.И. Григолюк, Я.С. Подстригач, Я.И. Бурак. – К.: Наук. думка, 1979. – 364 с.
11. Подстригач Я.С. Термоупругость тел неоднородной структуры / Я.С. Подстригач, В.А. Ломакин, Ю.М. Коляно. – М.: Наука, 1984. – 368 с.
12. Duhamel J. Second memoire sur les phenomens thermomechanique / J. Duhamel // - J. I. Ecole Polytechn. –1837. № 15. – P. 1–15.
13. Берман Р. Теплопроводность твердых тел / Р. Берман // – М.: Мир,

1979. – 286 с.

14. Вейник А.И. Приближенный расчет процессов теплопроводности / А. И. Вейник // – М.: Госэнергоиздат, 1959. – 184 с.
15. Шнейдер П. Инженерные проблемы теплопроводности / П. Шнейдер // – М.: ИЛ, 1960. – 478 с.
16. Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена / С. С.Кутателадзе // – Новосибирск: Наука, СО АН СССР, 1970. – 659 с.
17. Коздоба Л.А. Методы решения нелинейных задач теплопроводности / Л. А. Коздоба // – М.: Наука, 1975. – 227 с.
18. Боли Б.А. Теория температурных напряжений / Б.А. Боли, Дж.Х. Уэйнер // – М.: Мир, 1964. – 517 с.
19. Коваленко А.Д. Основы термоупругости / А. Д. Коваленко. – К.: Наук. думка. – 1970. – 306 с.
20. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости / В. Новацкий. – М.: Мир, 1970. – 256 с.
21. Мелан Э. Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями / Э. Мелан, Г. Паркус. – М.: Физматиз, – 1958. – 167 с.
22. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения / Г.Паркус // –М.: Физматгиз, 1963. – 252 с.
23. Крэйт Ф. Основы теплопередачи / Ф. Крэйт, У. Блек. – М.: Мир, 1983. – 512 с.
24. Chadwick P. Thermoelasticity. The dynamical theory Thermoelasticity / P. Chadwick // Progress in Solid Mechanics. – Amsterdam: North-Holland Publishing Company. – 1962. – V. 1.ch. 6. – P. 263–328.
25. Biot M.A. Thermoelasticity and irreversible thermodynamics// J. Appl. Phys. –1956. Vol. 27. – №3. – P. 240–253.
26. Nowaski W. Some dynamic problems of thermoelasticity// Arch, mech. stosow. – 1959. – V. 11. – № 2. – P. 259–283.
27. Zorski H. On certain property of thermoelastic media// Bull. Acad, pol. sci.

Ser. sci. techn. –1958. –V. 6. –№ 6. – P. 331–339.

28. Zorski H. Singular solutions for of thermoelastic media // Bull. Acad, pol. sci. Ser. sci. techn. –1958. –V. 6. – № 6. – P. 327–330.

29. Ionescu-Cazimir V. Theoreme de reciprocitate pentru problema dinamica a termo-elasticitii// An. Univ. Bucuresti. Ser. stiint. natur. – 1963. –V. 12. – № 39. – P. 93–100.

30. Новацкий В. Обзор работ по динамическим проблемам термоупругости // Механика: Сб. переводов. М., 1966. – № 6 (100). – С. 101–142.

31. Швец Р.Н. Вариационная теорема для взаимосвязанной задачи термоупругости тонких оболочек // Матем. физика. – 1980. – № 28. – С. 104–108.

32. Малкин Я.Ф. К задачам распределения температуры в плоских пластинках // Прикл. математика и механика. – 1939. – Т.2. –№3. – С. 317–330.

33. Болотин В.В. Уравнения нестационарных температурных полей в тонких оболочках при наличии источников тепла // Прикл. мат. и мех. – 1960. – Т.24. – № 2. – С. 361–363.

34. Даниловская В.И. Приближенное решение задачи о стационарном температурном поле в тонкой оболочке произвольной формы // Изв. АН СССР. Отд. технических наук. – 1957. –№ 9. – С. 157–158.

35. Cukic R. Coupled thermoelastic vibrations of plates // Arch. mech. stosow. – 1973. – V.25. –№3. – P. 513–525.

36. Cukic R. Tansversal vibrations of the thin shell of revolution produced by the thermal shock // Bui. Acad. pol. sci. Ser. sci. techn. – 1972. V.20. – № 10. – P. 771–781.

37. Cukic R. The thermal shock on the shell of revolution-coupled and uncoupled theory// Bui. Acad. pol. sci. Ser. sci. techn. – 1972. V.20. – № 10. – P. 763–770.

38. Швец Р.Н. Некоторые вопросы теории термоупругости ортотропных оболочек с учетом инерции поворота и поперечного сдвига / Р.Н Швец .,

Е.И. Лунь // Прикл. мех. – 1971. – 1.1. – № 10. – С. 121–125.

39. Швец Р.Н. Некоторые теоремы теории термоупругости анизотропных оболочек / Швец Р.Н., Флячок В.М. // Докл. АН УССР. – 1977. – Сер. А. – № 6. – 526–530.

40. Флячок В.М. Вариационная форма уравнений термоупругости анизотропных оболочек с учетом термомеханического взаимодействия / Флячок В.М., Швец Р.Н. // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1980. – № 11. – С. 67–71.

41. Флячок В.М. Некоторые теоремы механотермодиффузии анизотропных оболочек / Флячок В. М., Швец Р. Н. // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1985. – № 21. – С. 32–37.

42. Швец Р.Н. Уравнения механотермодиффузии анизотропных оболочек с учетом поперечных деформаций / Швец Р.Н., Флячок В.М. // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1984. – №20. – С. 54–61.

43. Мотовиловец И.А. Термоупругость / И.А. Мотовиловец, В.И. Козлов. – К.: Наук. думка. – 1987. – 263 с. – (Механика связанных полей в элементах конструкций: в 5 т. – Т. 1).

44. Подстригач Я.С. Об уравнениях теплопроводности для тонкостенных элементов конструкций / Подстригач Я.С., Чернуха Ю.А. // Теория пластин и оболочек: Тр. IX Всесоюзной конф. по теории оболочек и пластин. – Л.: – 1975. – С. 82–85.

45. Карнаухов В.Г. Связанные задачи теории термовязкоупругости. – К.: Наук. Думка, – 1982. – 258 с.

46. Карнаухов В.Г. Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек / Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф. // К.: Наук. думка, – 1986. – 220 с.

47. Тепловые напряжения в элементах конструкций / Республиканский межведомственный сборник // К.: Наук. думка, – 1974. – Вып. 14. – 160 с.

48. Козлов В.И. Термоупругие колебания прямоугольной пластины // Прикладная механика. – 1972. – Т.8. – № 4. –С. 123–127.

49. Жигалко Ю.П. Вынужденные колебания оболочек и пластин. Казань:

Изд-во КГУ, – 1990. – 102 с.

50. Жигалко Ю.П. Напряженное состояние тонкостенных элементов конструкций, нагреваемых локализованными потоками лучистой энергии / Жигалко Ю.П., Конюхов А.В. // Изв. вузов "Авиационная техника", – 1997. – №2. – С. 19–25.
51. Горшков А.Г. Импульсный нагрев подкрепленной цилиндрической оболочки / Горшков А.Г., Горюнов А.В. // Исследования по теории пластин и оболочек. Вып. 24. – Изд-во Казанского университета, – 1992. – С. 62–66.
52. Sternberg E. On inertia effects in transient thermoelastic problems / Sternberg E., Chakravorty J.G. // Transactions ASME. Ser. E, – 1959. – V.26. № 4. – P. 503–509.
53. Sternberg E. Thermal shock in elastic body with a spherical cavity / Sternberg E., Chakravorty J.G. // Quart. Appl. Math. – 1959. V. 17. – № 2. – P. 205–208.
54. Zaker T.A. Stress waves generated by heat addition in an elastic solid // Transactions ASME. Ser. E, – 1965. – V.32. № 1. – P. 143–150.
55. Wenk H.U. On coupled thermoelasticity vibration of geometrically nonlinear thin plates satisfying generalized mechanical and thermal conditions on the boundary and the surface // Apl. mat. – 1982. – Sv. 27. – Cis. 6. – P. 393–416.
56. Wilms E.V. On coupling effects in transient thermoelastic problems // Transactions ASME. Ser. E, – 1964. – V.31. – № 4. – P. 719–722.
57. Wilms E.V. Temperature induced in a medium due to suddenly applied pressure inside a spherical cavity // Transactions ASME. Ser. E, – 1966. – V.33. – № 4. – P. 941–943.
58. Коляно Ю.М. Температурные напряжения от объемных источников / Коляно Ю.М., Кулик А.Н. // К.: Наук. думка, – 1983. – 288с.
59. Подстригач Я.С. Общее решение нестационарной задачи термоупругости // Прикл. мех. 1960. – Т.6. – № 2. – С. 215–219.
60. Подстригач Я.С. Температурные поля в элементах электровакуумных

приборов // Я. С. Подстригач, Ю. М. Коляно, М. М. Семерак // – К.: Наук. думка, – 1970. – 307 с.

61. Нерубайло Б.В. Локальные задачи прочности цилиндрических оболочек / М.: Машиностроение, – 1983. – 248 с.

62. Eason G. The dynamic stresses produced in elastic body by uneven heating / Eason G., Sneddon I. N. // Proc. Roy. Soc. Edin., – 1959. – Section A, – V. 65. – P. 143–176.

63. Григолюк Э.И. Уравнения поля температур для трехслойных оболочек / Григолюк Э.И., Чулков П.П. // Известия СО АН СССР. Серия технических наук, – 1964. - № 6. Вып. 2. – С. 88–92.

64. Борисюк А.И. О температурном поле оболочки переменной толщины / Борисюк А.И., Мотовиловец И.А. // Прикл. мат. и мех. – 1967. – Т.3. – №12. – С. 84–89.

65. Мотовиловец И.А. Механика связанных полей в элементах конструкций / Мотовиловец И.А., Козлов В.И. // К.: Наук. думка, – 1987. – Т.1. – 264 с.

66. Мотовиловец И.А. О температурном поле многослойного цилиндра с учетом неидеального термоконтакта / Мотовиловец И.А., Новиков А.М., Шевченко С.И. // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1979. – Вып. 19. – С. 47–49.

67. Гольцев А.С. Термоупругость оболочек с термоизолированным разрезом при наличии теплообмена / Гольцев А.С., Шевченко В.П. // Прикладная механика. – 1985. – №2. – С. 73–78.

68. Осадчук В.А. Напряженное состояние и предельное равновесие оболочек с трещинами / Осадчук В.А., Подстригач Я.С. // Итоги науки и техники. ВИНТИ. Серия "Механика деф. тв. тела". – М., – 1986. –Т. 18. – С. 3–52.

69. Аттетков А.В. Температурное поле неограниченного твердого тела, содержащего цилиндрический канал с термически тонким покрытием его поверхности / А.В. Аттетков, Н.С. Беляков // Теплофизика высоких

температур. – 2006. – 44, № 1. – С. 136–140.

Te same: Attetkov A. V. The temperature field of an infinite solid containing a cylindrical channel with a thermally thin surface coating / A.V. Attetkov, N.S. Belyakov // High Temperature. – 2006. – 44, No. 1. – P. 139–143.

70. Аттетков А.В. Температурное поле твердого тела, содержащего цилиндрический канал с многослойным покрытием его поверхности, в условиях нестационарного теплообмена / А.В. Аттетков, Н.С. Беляков, И.К. Волков // Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия: Машиностроение. – 2006. – № 3. – С. 37–50.

71. Аттетков А.В. Температурное поле полупространства с термически тонким покрытием в импульсных режимах теплообмена с внешней средой / А.В. Аттетков, П.А. Власов, И.К. Волков // Инж.-физ. журнал. – 2001. – 74, № 3. – С. 81–86.

Te same: Attetkov A.V. The temperature field of a half-space with a thermally thin coating in pulse modes of heat exchange with the environment / A.V. Attetkov, P.A. Vlasov, I. K. Volkov // J. Eng. Phys. Thermophys. – 2001. – 74, No. 3. – P. 647–655.

72. Бартенев Г.М. Температурные напряжения в стеклянном покрытии на металлических трубах / Г.М. Бартенев, А.И. Жорник // Физика и химия обработки материалов. – 1972. – № 3. – С. 100–108.

73. Вендин С.В. О расчете нестационарной теплопроводности в многослойных объектах при граничных условиях третьего рода / С.В. Вендин // Инж.-физ. журнал. – 1993. – 65, № 2. – С. 249–251.

Te same: Vendin S.V. Calculation of nonstationary heat conduction in multi-layer objects with boundary conditions of the third kind / S.V. Vendin // J. Eng. Phys. Thermophys. – 1993. – 65, No. 2. – P. 823–825.

74. Веселовский В.Б. Методы расчета и исследования теплофизических процессов в промышленных аппаратах и технологиях / В. Б. Веселовский // Днепропетровск: Вид-во Дніпро-петр. ун-ту, – 2002. – 436 с.

75. Шевчук В. Нелінійна крайова задача радіаційно-конвективного

- теплообміну тіл з багатошаровим покриттям / В. Шевчук, О. Гаврись, П. Шевчук // *Машинознавство*, – 2010. – №5 (155). – С. 21–25.
76. Дяконюк Л.М. Моделювання і дослідження тепломасоперенесення у багатошарових середовищах з тонкими включеннями / Л.М. Дяконюк, І.С. Муха, Я.Г. Савула // *Доп. НАН України*. – 1998. – № 12. – С. 101–107.
77. Евдокимов Д.В. Анализ теплопроводности в неасимптотически тонком слое / Д.В. Евдокимов, Д.Я. Ивасишина, А.А. Кочубей, Я.В. Поляков // *Дифференціальні рівняння та їх застосування*. – Дніпропетровськ: Дніпропетр. нац. ун-т., – 2006. – С. 141–156.
78. Шевчук В.А. Нестационарна одновимірна задача теплопровідності для циліндра з тонким багатошаровим покриттям / В.А. Шевчук // *Матем. методи та фіз.-мех. поля*. – 2011. – 54, №2. – С. 179–185.
79. Коляно Ю.М. О приближенном определении температурных полей в сферических телах с тонкими покрытиями / Ю.М. Коляно, И.Я. Махоркин // *Термомеханические процессы в кусочно-однородных элементах конструкций*. – К.: Наук. думка, – 1978. – С. 117–123.
80. Коляно Ю.М. Граничные условия для определения обобщенных динамических температурных напряжений в телах с покрытиями / Ю.М. Коляно, Е.П. Хомякевич // *Термомеханические процессы в кусочно-однородных элементах конструкций*. – К.: Наук. думка, – 1978. – С. 43-50.
81. Комаров Г.М. Умови спряження через термічно тонкий шар в задачах теплопровідності / Г.М. Комаров // *Доп. НАН України*. – 1996. – № 7. – С. 26–31.
82. Кушнір Р.М. Температурні напруження та переміщення в багатошаровій пластині з нелінійними умовами теплообміну / Р. М. Кушнір, Б.В. Процюк, В.М. Синюта // *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. – 2002. – 38, № 6. – С. 31–38.

Te same: Kushnir R. M. Temperature stresses and displacements in a multilayer plate with nonlinear conditions of heat exchange / R. M. Kushnir, B. V. Protsyuk, V. M. Synyuta // *Mater. Sci.* – 2002. – 38, No. 6. – P. 798–808.

83. Ляшенко Б.А. Распределение температур в пластине с однослойным покрытием при интенсивном нагреве / Б.А. Ляшенко, В.А. Терлецкий, Я.А. Долгов, Е.Б. Сорока // Проблемы прочности. – 1998. – № 3. – С. 128–133.

Te same: Lyashenko B.A. Distribution of temperature in a plate with a single layer coating subjected to intense heating / B.A. Lyashenko, V.A. Terletskiy, N.A. Dolgov, E.B. Soroka // Strength of Mater. – 1998. – 30, No. 3. – P. 787–792.

84. Максимук О. Вплив захисного покриття на тепловий режим обмежених об'ємів / О. Максимук, Я. Щербина // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 2002. – Вип. 4. – С. 126–130.

85. Подстригач Я.С. Исследование напряженного состояния материала при диффузионном насыщении цилиндра с тонким покрытием / Я.С. Подстригач, П.Р. Шевчук, Д.В. Иващук // Проблемы прочности. – 1974. – 6, № 7. – С. 3–8.

Te same: Podstrigach Ya. S. Stressed state of the material in diffusion saturation of a cylinder with a thin coating / Ya.S. Podstrigach, P.R. Shevchuk, D.V. Ivashchuk // Strength of Mater. – 1974. – 6, No. 7. – P. 787–792.

86. Подстригач Я.С. Температурные поля и напряжения в телах с тонкими покрытиями / Я.С. Подстригач, П.Р. Шевчук // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1967. – Вып. 7. – С. 227–233.

87. Попович В.С. Нестационарна задача теплопровідності для термочутливого циліндра з покриттям / В.С. Попович, Г.Ю. Гарматій, К.С. Іванків // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1997. – Вип. 45. – С. 83–88.

88. Пудовкин М.А. Краевые задачи математической теории теплопроводности в приложении к расчетам температурных полей в нефтяных пластах при заводнении / М.А. Пудовкин, И.К. Волков. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, – 1978. – 186 с.

89. Раввин В.С. Об эффективных граничных условиях в задачах

стационарной теплопроводности / В.С. Равин // Инж.-физ. журн. – 1967. – 12, № 4. – С. 540–541.

Te same: Ravin V.S. Effective boundary conditions in stationary heat conduction problems / V.S. Ravin // J. Eng. Phys. Thermophys. – 1967. – 12, No. 4. – P. 290–291.

90. Третьяченко Г.Я. Тепловое и напряженное состояние многослойных покрытий / Г. Я. Третьяченко, В. Г. Барило // Проблемы прочности. – 1993. – № 1. – С. 41–49.

Te same: Tret'yachenko G.N. Thermal and stressed states of multi-layered coatings / G.N. Tret'yachenko, V.G. Barylo // Strength of Mater. – 1993. – 25, No. 1. – P. 34–41.

91. Флейшман Н.П. Математичні моделі теплового спряження середовищ із тонкими чужорідними прошарками або покриттями / Н.П. Флейшман // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1993. – Вип. 39. – С. 30–34.

92. Шевчук В.А. Обобщенные граничные условия теплообмена тела со средой через многослойное тонкое покрытие / В.А. Шевчук // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1995. – Вип. 38. – С. 116–120.

Te same: Shevchuk V.A. Generalized boundary conditions for heat transfer between a body and the surrounding medium through a multilayer thin coating / V.A. Shevchuk // J. Soviet Math. – 1996. – 81, No. 6. – P. 3099–3102.

93. Яцків О.І. Деякі підходи до розв'язання задачі нагріву суцільного пружного циліндра за нестационарної граничної умови / О.І. Яцків, Р. М. Швець, Б. Я. Бобик // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2007. – Вип. 5. – С. 186–194.

94. Лучко Й.Й. Моделі розрахунку напружено-деформованого стану інженерних конструкцій за умов локального термомеханічного навантаження / Й.Й. Лучко, І.М. Добрянський, Є.І. Іваник. – Львів: Каменяр, – 2012. – 311 с.

95. Du F. Boundary element method analysis of temperature fields in coated cutting tools / Du F., Lovell M. R., Wu T. W. // Int. J. Solids and Struct. – 2001. – 38, No. 26–27. – P. 4557–4570.

96. Elperin T. Temperature field in multilayer assembly affected by a local laser heating / T. Elperin, G. Rudin // *Int. J. Heat and Mass Transfer.* – 1995. – 38, No. 17. – P. 3143–3147.
97. Grzesik W. Finite difference analysis of the thermal behaviour of coated tools in orthogonal cutting of steels / W. Grzesik, M. Bartoszuk, P. Nieslony // *Int. J. Machine Tools & Manufacture.* – 2004. – 44. – P. 1451–1462.
98. Heijnen L.M. Model description and experiments on carbon diffusion through protective layers / L. M. Heijnen, T. W. Kuijpers, J. A. Klostermann // *High Temperature-High Pressures.* – 1988. - 20, No. 3. – P. 305–313.
99. Mezin A. An analytical solution for non-steady-state diffusion through thin films / A. Mezin, J. Lepage, P. B. Abel // *Thin Solid Films.* – 1996. - 272. – P. 124–131.
100. Sarikaya O. Finite element modeling of the effect of the ceramic coatings on heat transfer characteristics in thermal barrier applications / O. Sarikaya, Y. Islamoglu, E.C. Celik // *Mater. and Design.* – 2005. – 26. – P. 357–362.
101. Savula Y. H. Heterogeneous mathematical models in numerical analysis of structures / Y. H. Savula, I. I. Dyyak, V. V. Krevs // *Comput. & Math. Appl.* – 2001. – 42. – P. 1201–1216.
102. Shevchuk V.A. Calculation of thermal state of bodies with multilayer coatings / V. A. Shevchuk // *Lect. Notes in Computer Sci.* – 2002. – P. 500–509.
103. Shevchuk V.A. Modeling and computation of heat transfer in a system «body-multilayer coating» / V. A. Shevchuk // *Heat Transfer Research.* – 2006. – No. 5. – P. 412–423.
104. Shiah Y.C. Heat conduction across thermal barrier coatings of anisotropic substrates / Y. C. Shiah, Y.-X. Shi // *Int. Commun. Heat Mass Transfer.* – 2006. – 33. – P. 827–835.
105. Zhang S. An analytical model for transient temperature distributions in coated carbide cutting tools / S. Zhang S., Z. Liu // *Int. Commun. Heat Mass Transfer.* – 2008. – 35. – P. 1311–1315.
106. Zhao J. Analysis of transient thermal stress in sandwich plate with

functionally graded coatings / Zhao J., Li Y., Ai X. // *Thin Solid Films.* – 2008. – 516. – P. 7581–7587.

107. Бе́ляев Н.М. Математические методы теплопроводности / Н.М. Бе́ляев, А.А. Рядно. – К.: Вища школа. – 1993. – 415 с.

108. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / Ю. М. Коляно. – К.: Наук.думка, 1992. – 280 с.

109. Попович В.С. Аналітично-чисельні методи побудови розв'язків задач теплопровідності термочутливих тіл при конвективному теплообміні / В.С. Попович, Г.Ю. Гарматій. – Львів. – 1993. – 66 с. – (Препр. АН України, Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача; № 13–93).

110. Попович В.С. Про розв'язування задач теплопровідності термочутливих тіл / В.С. Попович, І. М. Махоркін // *Мат.методи і фіз.-мех. поля.* – 1997. – Т. 40, № 1. – С. 36–44.

111. Попович В.С. Осесиметрична задача термопружності багатошарової термочутливої труби / В.С. Попович, Б.М. Федай // *Мат. методи і фіз.-мех. поля.* – 1966. – Т. 39, № 1. – С. 97–102.

112. Лучко Й.Й. Моделювання температурного поля в елементах тонких плит, які з'єднані стиковим швом / Й.Й. Лучко, В.М. Гембара, Н.О. Гембара // *Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій. Збірник наукових праць.* – 2002. – Вип.5. – С.349–351.

113. Гембара В.М. Моделювання теплопровідності та термопружності тонких плит з багатошаровим покриттям / В.М. Гембара, Н.О. Гембара // 6-й Міжнародний симпозиум українських інженерів-механіків у Львові: Тези доповідей. – 2003. – С.65.

114. Лучко Й.Й. Моделювання теплопровідності тонких плит з багатошаровим покриттям / Й.Й. Лучко, В.М. Гембара, Н.О. Гембара // *Діагностика, довговічність та реконструкція мостів і будівельних конструкцій: Збірник наукових праць.* – 2004. – Вип.6. – С.65-70.

115. Лучко Й.Й. Механіка руйнування мостових конструкцій та методи прогнозування їх залишкової довговічності / Й.Й. Лучко, Г.Т. Сулим,

В.І. Кир'ян // Механіка руйнування і міцність матеріалів: Довід. посіб. Т.6. – Львів: Каменяр. – 2004. – 887 с.

116. Лучко Й.Й. Теплопровідність тонких плит з покриттям / Й. Й. Лучко, Н.О. Гембара // Сучасні проблеми проектування будівництва та експлуатації споруд на шляхах сполучення. Науково-технічний збірник. – 2004. – Вип. 69. – С. 144–149.

117. Лучко Й.Й. Моделювання теплопровідності тонких оболонок з одностороннім багат шаровим покриттям / Й.Й. Лучко, В.М. Гембара, Н.О. Гембара // Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій. Збірник наукових праць. – 2005. – Вип.6. – С.60–66.

118. Гембара В.М. Моделювання теплопровідності та термопружності тонких оболонок з багат шаровим покриттям / В.М. Гембара, Н.О. Гембара // 7-й міжнародний симпозиум українських інженерів-механіків у Львові: Тези доповідей. – 2005. – С. 52.

119. Гембара Н.О. Оптимізація теплопровідності циліндричної оболонки з покриттям / Н.О. Гембара // Діагностика, довговічність та реконструкція мостів і будівельних конструкцій. Збірник наукових праць. – 2006. – Вип.8. – С.13–16.

120. Лучко Й.Й. Оптимізація теплопровідності пластин з багат шаровим покриттям / Й. Й. Лучко, Н. О. Гембара, В. М. Гембара // Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій. Збірник наукових праць. – 2007. – Вип.7. – С.52–56.

121. Гембара Н.О. Вплив кривини поверхні покриття оболонки на теплопередачу / Н.О. Гембара // Тези доповідей наук.-техн. конф. проф.-викл. складу, науков. працівн. і аспір.: [3– 6 лютого 2009 р.]. – Львів : УАД, 2009. – С.15.

122. Гембара Н.О. Оптимізація теплопередачі конічної оболонки з покриттям. Тези доповідей наук.-техн. конф. проф.-викл. складу, науков. працівн. і аспір.: [2 – 5 лютого 2010 р.]. – Львів : УАД, 2010. – С.17.

123. Гембара Н.О. Оптимізація теплопередачі оболонками з покриттям/ Н.О.

- Гембара // Тези доповідей наук.-техн. конф. проф.-викл. складу, науков. працівн. і аспір. : [1–4 лютого 2011р.]. – Львів : УАД, 2011. – С.20.
124. Лучко Й.Й. Оптимізація теплопередачі тонких оболонок з одностороннім багат шаровим покриттям / Й.Й. Лучко, Н.О. Гембара, В.М. Гембара // Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій. Збірник наукових праць. – 2012. – Вип.9. – С.43–49.
125. Гембара Н.О. Моделювання теплопередачі оболонок з двостороннім багат шаровим покриттям. Тези доповідей наук.-техн. конф. проф.-викл. складу, науков. працівн. і аспір. : [5– 8 лютого 2013р.]. – Львів : УАД, 2013. – С.15.
126. Гембара Н.О. Моделювання теплопровідності оболонок з двостороннім багат шаровим покриттям / Н.О. Гембара, Й.Й. Лучко // Вісник Тернопільського національного технічного університету. Науковий журнал. – 2013. – № 1. – С. 222–230.
127. Гембара Н. О. Моделювання теплопровідності пластин і оболонок з багат шаровим покриттям / Н.О. Гембара, В.М. Гембара // 11-й Міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові: Тези доповідей. – Львів: КІНПАТРИ, – 15–17 травня 2013. – С. 30–31.
128. Гембара Н.О. Розподіл температури в корпусі автоклава з внутрішнім двошаровим захисним покриттям / Н.О. Гембара // Науковий вісник НЛТУ України: Збірник науково-технічних праць.– Львів: РВВ НЛТУ України, – 2013. –Вип. 23.12. – С. 373–378.
129. Гембара Н.О. Вплив протикорозійного багат шарового покриття на термопружність круглих пластин / Н.О. Гембара // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – №6. – 2013. – С.50–54.
130. Лучко Й.Й. Стаціонарне температурне поле в оболонках з одностороннім багат шаровим покриттям / Й.Й. Лучко, Н.О. Гембара // Вісник Тернопільського національного технічного університету. Науковий журнал. – 2013. – № 4. – С.266–273.
131. Лучко Й.Й. Рекомендації з визначення температури в оболонках та

- пластинах з багат шаровими покриттями / Й.Й. Лучко, Н.О. Гембара. – Львів: Каменяр, 2014. – 30 с.
132. Андрейків О.Є., Гембара О.В. Механіка руйнування та довговічність металічних матеріалів у водневмісних середовищах / О.Є. Андрейків, О.В. Гембара. – К.: Наук. думка, 2008. – 344с.
133. Гембара О.В. Скінченно-елементне моделювання масопереносу в структурно-неоднорідних матеріалах / О.В. Гембара // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – №5. – 2003. – С.89–95.
134. Андрейків О.Є. Метод оцінки високотемпературного водневого руйнування біметалевих елементів конструкцій / О.Є. Андрейків, В.Р. Скальський, О.В. Гембара // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2000. – № 4. – С. 15–22.
135. Мелехов Р.К. Конструкційні матеріали енергетичного обладнання / Р.К. Мелехов, В.І. Похмурський. – К.: Наукова думка, – 2003. – 384 с.
136. Гецов Л.Б. Механизм деформирования и разрушения многослойных покрытий при термоциклировании / Л.Б. Гецов, А.И. Рыбников // Физико-хим. механика материалов. – 1993. – №6. – С.48–55.
137. Хисматуллин Е.Р. Сосуды и трубопроводы высокого давления: Справочник / Е.Р. Хисматуллин, Е.М. Королев, В.И. Лившиц и др. – М.: Машиностроение, 1990. – 384с.
138. Балицький О.І. Міцність матеріалів і довговічність елементів конструкцій атомних електростанцій / О.І. Балицький, О.В. Махненко, О.О. Балицький, В.А. Грабовський, Д.М. Завербний // Механіка руйнування і міцність матеріалів: Довід. посіб. Т.8. – Львів: Вид. дім «Академперіодика». – 2005. – 541 с.