

УДК 519.63.4.001.57+517.54

**В. Гаврилюк**

*Рівненський державний гуманітарний університет*

## **МЕТОД ФІКТИВНИХ ОБЛАСТЕЙ ТА ОПТИМІЗАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ У КРИВОЛІНІЙНИХ ОБЛАСТЯХ З НЕВИЗНАЧЕНИМИ ДІЛЯНКАМИ МЕЖ**

*Резюме.* Запропоновано варіант поєднання методу фіктивних областей і методології розв'язання крайових задач на конформні відображення для розрахунку фільтраційного процесу в горизонтальному симетричному дренажу за наявності вільної поверхні ґрунтових вод. Запропоновано новий тип постановок такого виду задач, коли замість однієї з традиційних умов на цій вільній ділянці межі області задаються умови, що характеризують процес на певній фіктивній примежовій області (території). Побудовано гідродинамічну сітку, знайдено мінімальну глибину закладання дренажу (для забезпечення встановлення положення вільної кривої нижче наперед заданого рівня) та інші характеристики процесу.

*Ключові слова:* метод „фіктивних областей”, вільні межі, нелінійні крайові задачі, квазіконформні відображення, пористі середовища, фільтрація, сіткові методи, блочна ітерація.

**V. Gavrilyuk**

## **THE „FICTITIOUS REGIONS" METHOD AND OPTIMIZATION OF FILTRATION PROCESSES PARAMETERS IN CURVILINEAR AREAS WITH UNCERTAIN SITES OF BORDERS**

*The summary.* The variant of combination of the “fictitious regions” method and methodology of boundary-value problems on conformal mappings solution for the calculation of filtration processes in horizontal symmetric drainage at presence of free form of subsoil waters. The new type of the raising of such problems is offered when instead of any traditional condition on this free border of area the conditions which are characterizing a process on certain fictitious area are set. As an example a hydrodynamic grid, minimum depth of drainage gobbing (for a free curve position establishment providing below than the set level) and other descriptions of process were found.

*Key words:* the „fictitious regions” method, free borders, nonlinear boundary value problems, quasiconformal mappings, porous mediums, filtration, grid methods, block iteration.

**Вступ.** Захист територій і населених пунктів від затоплення і підтоплення ґрунтовими водами в результаті їх різкого підйому, водозабір і регулювання рівня підземних вод та інші практичні завдання пов'язані з необхідністю обґрунтування конструктивних параметрів і режимів роботи дренажних споруд. Особливо важливою є ця проблема для гідромеліоративних систем, де дренаж є основним елементом. У даний час при числових дослідженнях відповідних крайових задач найефективнішим є метод обернених крайових задач (конформних і квазіконформних відображень). У роботі [1, 2] розглянуто випадок поєднання методів фіктивних областей та квазіконформних відображень розв'язання нелінійних крайових задач для розрахунку фільтраційних режимів у середовищах з вільними ділянками границь (кривими депресії) та проміжками на взірць „височування”, а в [3] запропоновано алгоритм числового розв'язання модельних нелінійних крайових задач на квазіконформні відображення в областях, обмежених двома екіпотенціальними лініями та двома лініями течії, коли однією з ділянок границі є невідома (вільна) крива із закріпленим та вільним кінцями. В [4] розглянуто стаціонарну задачу плоско-вертикальної безнапірної стаціонарної фільтрації рідини до горизонтального симетричного дренажу за наявності вільної поверхні (кривої депресії) ґрунтових вод. У даній роботі запропоновано варіант

поєднання методу фіктивних областей і методології розв'язання крайових задач на конформні відображення для випадку областей з вільними кривими, які не є ні лініями течії, ні еквіпотенціальними лініями, коли замість однієї із традиційних умов на цій вільній ділянці межі області [4] задаються умови, що характеризують процес на певній фіктивній області (території), яка прилягає до заданої ділянки області, а також відшукування мінімальної глибини закладання дренажу (при заданих інших конструктивних параметрах та характеристиках процесу) для забезпечення встановлення положення вільної кривої нижче наперед заданого рівня.

**1. Постановка задачі.** Розглянемо процес фільтрації до горизонтального дренажу. В міру симетрії картини руху розглядаємо лише один фрагмент такої системи – однозв'язну шестикутну криволінійну область (пористий пласт)  $G_z^*(z = x + iy, \partial G_z^* = A'B'C_*C_*CD, G_z^* \in G_z, \partial G_z = ABC_*C_*CD)$  (див. рисунок 1), обмежений двома лініями течії  $A'D = \{z: x = 0, -h_1 + r \leq y \leq 0\}$  та  $B'C_* = \{z: x = l, -h_1 - r - h_2 \leq y \leq 0\}$ ,  $C_*C_* = \{z: y = -h_1 - r - h_2, 0 \leq x \leq l\}$ ,  $CC_* = \{z: x = 0, -h_1 - r - h_2 \leq y \leq -h_1 - r\}$ , еквіпотенціальною лінією  $CD = \{z: x - \sqrt{r^2 - (y + h_1)^2} = 0, -h_1 - r \leq y \leq -h_1 + r\}$  та вільною (невідомою) кривою  $A'B'$ , що знаходиться в процесі розв'язку задачі (невідома точка  $A'$  належить кривій  $AD = \{z: x = 0, -h_1 + r \leq y \leq 0\}$ , а точка  $B'$  – кривій  $BC_* = \{z: x = l, -h_1 - r - h_2 \leq y \leq 0\}$ ). Аналогічно до [1-4, 8] описуватимемо його рівнянням течії фільтрату  $\dot{v} = \kappa \text{grad } \phi$  (закон Дарсі) та рівнянням нерозривності  $\text{div } \dot{v} = 0$ , де  $\dot{v} = (v_x(x, y) + i \cdot v_y(x, y))$  – швидкість фільтрації (руху фільтрату),  $\kappa = \kappa(x, y, \phi_x, \phi_y)$  – коефіцієнт фільтрації,  $\phi = \phi(x, y)$  – потенціал у точці  $(x, y)$ , такий, що  $\phi|_{CD} = \phi^*(h_1) = h_1$ ,  $\frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{B'C_*C_*C} = \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{A'D} = 0$ ,  $\phi|_{A'B'} = g(y)$ ,  $\hat{n}$  – зовнішня нормаль до відповідної ділянки границі даної області,  $g(y)$  – обмежена неперервно-диференціальна функція. Крім цього, розглядаємо випадок встановлення мінімальної глибини  $h_1$  залягання дрени, для виконання умови  $y_{By} = -H$ . Для простоти викладок покладемо  $\kappa = \text{const}$ .

Замість другої з (однієї із традиційних, див., напр., [4, 5]) умов на вільній кривій пропонуємо задати певні умови на деякій фіктивній області, що прилягає до даної ділянки межі. А саме: вважатимемо, що на ділянці  $G_z \setminus G_z^*$  також має місце деякий процес (який є певним “продовженням” (розширенням) вихідного процесу), наприклад, вважатимемо, що рух в даній області відбувається за законом  $\dot{v} = \mathbb{K} \text{grad } \phi$ , де  $\mathbb{K}$  – деякий фіктивний тензор фільтрації, зокрема  $\mathbb{K} = \kappa$ . Отже, відповідну задачу розв'язуємо у визначеній області  $G_z$  за “незмінної” умови  $\phi|_{CD} = h_1$ , “продовжених” умов  $\frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{B'C_*C_*C} = \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_{A'D} = 0$  та додаткової умови  $\phi|_{A'B'} = \phi_*$ , яка задається, виходячи із змісту задачі (див., напр., нижче). При цьому вільну криву  $A'B'$  шукаємо як деяку внутрішню криву за умови  $\phi|_{A'B'} = g(y)$ .

Відповідна задача на конформне відображення  $\omega = \omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$  розглядуваної області  $G_z$ , яку розглядаємо, на відповідну область комплексного потенціалу  $G_\omega = \{\omega: \phi_* < \phi < h_1, 0 < \psi < Q\}$  ( $Q$  – задана повна питома витрата) з відомим параметром  $\phi_*$  має вигляд [1-3]

$$\kappa \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \kappa \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\varphi|_{AB} = \varphi_*, \quad \varphi|_{CD} = h_1, \quad h|_{A'B'} = g(y), \quad \psi|_{AD} = 0, \quad \psi|_{BC^*C_*C} = Q. \quad (2)$$

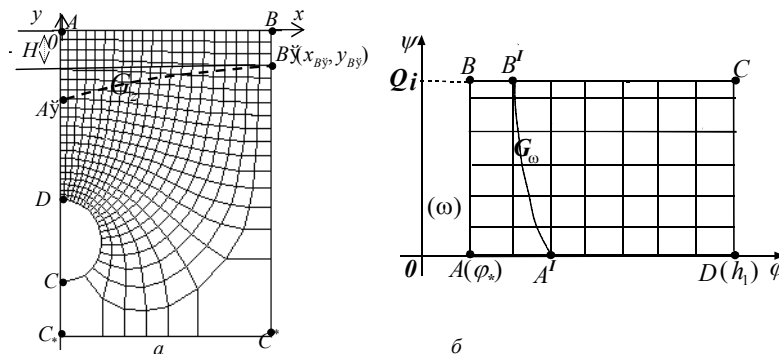


Рисунок 1 – Область фільтрації  $G_z$  з вільною кривою  $A'B'$  ((а) та відповідна їй область комплексного потенціалу  $G_\omega$  ((б))

Обернувши до (1) – (2) задачу на конформне відображення  $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$  області  $G_\omega$  на  $G_z$  при невідомому  $\varphi_*$  представимо у вигляді

$$\begin{cases} \kappa \frac{\partial y}{\partial \psi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \\ \kappa \frac{\partial x}{\partial \psi} = -\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \end{cases} \quad (\varphi, \psi) \in G_\omega; \quad (3)$$

$$\begin{cases} y(\varphi_*, \psi) = 0, & 0 \leq \psi \leq Q, \\ x(h_1, \psi) - \sqrt{r^2 - (y(h_1, \psi) + h_1)^2} = 0, & 0 \leq \psi \leq Q, \\ x(\varphi, Q) = l, & \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi_1, \\ y(\varphi, Q) = -h_1 - r - h_2, & \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, \\ x(\varphi, Q) = 0, & \varphi_2 \leq \varphi \leq h_1, \\ x(\varphi, 0) = 0, & \varphi_* \leq \varphi \leq h_1, \\ g(y(\varphi, \psi)) = \varphi, & 0 \leq \psi \leq Q, \varphi_* \leq \varphi \leq h_1. \end{cases} \quad (4)$$

Відповідні рівняння другого порядку для знаходження функцій  $x = x(\varphi, \psi)$  та  $y = y(\varphi, \psi)$  у дивергентній формі мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \kappa \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \kappa \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

**2. Алгоритм числового розв'язання задачі.** Різницевий аналог рівнянь (5), крайових умов (4), приграничних умов ортогональності та умов "конформної подібності в малому" відповідних чотирикутників у відповідній рівномірній сітковій

області  $G_{\omega}^{\gamma} = \{(\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \Delta\varphi \cdot i, \quad i=\overline{0, m+1}; \quad \psi_j = \Delta\psi \cdot j, \quad j=\overline{0, n+1}; \quad \Delta\varphi = (h_1 - \varphi_*)/(m+1),$   
 $\Delta\psi = Q/(n+1), \quad \varphi_* = h_1 - (m+1) \cdot \gamma \cdot \Delta\psi, \quad m, m_1, m_2, n \in \mathbf{N}\}$  запишемо у вигляді [1-3, 6, 7]

$$\left\{ \begin{aligned} & \sigma(a_{i+1, j+1}x_{i+1, j+1} - (a_{i+1, j+1} + a_{i, j+1})x_{i, j+1} + a_{i, j+1}x_{i-1, j+1}) + \\ & + (1-2\sigma)(a_{i+1, j}x_{i+1, j} - (a_{i+1, j} + a_{i, j})x_{i, j} + a_{i, j}x_{i-1, j}) + \\ & + \sigma(a_{i+1, j-1}x_{i+1, j-1} - (a_{i+1, j-1} + a_{i, j-1})x_{i, j-1} + a_{i, j-1}x_{i-1, j-1}) + \\ & + \gamma^2(\sigma(b_{i+1, j+1}x_{i+1, j+1} - (b_{i+1, j+1} + b_{i+1, j})x_{i+1, j} + b_{i+1, j}x_{i+1, j-1}) + \\ & + (1-2\sigma)(b_{i, j+1}x_{i, j+1} - (b_{i, j+1} + b_{i, j})x_{i, j} + b_{i, j}x_{i, j-1}) + \\ & + \sigma(b_{i-1, j+1}x_{i-1, j+1} - (b_{i-1, j+1} + b_{i-1, j})x_{i-1, j} + b_{i-1, j}x_{i-1, j-1})) = 0, \\ & \sigma(a_{i+1, j+1}y_{i+1, j+1} - (a_{i+1, j+1} + a_{i, j+1})y_{i, j+1} + a_{i, j+1}y_{i-1, j+1}) + \\ & + (1-2\sigma)(a_{i+1, j}y_{i+1, j} - (a_{i+1, j} + a_{i, j})y_{i, j} + a_{i, j}y_{i-1, j}) + \\ & + \sigma(a_{i+1, j-1}y_{i+1, j-1} - (a_{i+1, j-1} + a_{i, j-1})y_{i, j-1} + a_{i, j-1}y_{i-1, j-1}) + \\ & + \gamma^2(\sigma(b_{i+1, j+1}y_{i+1, j+1} - (b_{i+1, j+1} + b_{i+1, j})y_{i+1, j} + b_{i+1, j}y_{i+1, j-1}) + \\ & + (1-2\sigma)(b_{i, j+1}y_{i, j+1} - (b_{i, j+1} + b_{i, j})y_{i, j} + b_{i, j}y_{i, j-1}) + \\ & + \sigma(b_{i-1, j+1}y_{i-1, j+1} - (b_{i-1, j+1} + b_{i-1, j})y_{i-1, j} + b_{i-1, j}y_{i-1, j-1})) = 0, \end{aligned} \right. \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & y_{0, j} = 0, \quad j=\overline{0, n+1}, \\ & x_{m+1, j} - \sqrt{r^2 - (y_{m+1, j} + h_1)} = 0, \quad j=\overline{0, n+1}, \\ & x_{i, n+1} = l, \quad i=\overline{0, m_1}, \\ & y_{i, n+1} = -h_1 - r - h_2, \quad i=\overline{m_1, m_2}, \\ & x_{i, n+1} = 0, \quad i=\overline{m_2, m+1}, \\ & x_{i, 0} = 0, \quad i=\overline{0, m+1}, \\ & g(x_{i, j}, y_{i, j}) = \varphi_i, \quad j=\overline{0, n+1}, \quad i=\overline{0, m+1}. \end{aligned} \right. \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & (x_{1, j} - x_{0, j}) = 0, \quad j=\overline{0, n+1}, \\ & \sqrt{r^2 - (y_{m+1, j} + h_1)}(y_{m, j} - y_{m+1, j}) - (y_{m+1, j} + h_1)(x_{m, j} - x_{m+1, j}) = 0, \quad j=\overline{0, n+1}, \\ & (y_{i, n} - y_{i, n+1}) = 0, \quad i=\overline{0, m_1}, \\ & (x_{i, n} - x_{i, n+1}) = 0, \quad i=\overline{m_1, m_2}, \\ & (y_{i, n} - y_{i, n+1}) = 0, \quad i=\overline{m_2, m+1}, \\ & (y_{i, 1} - y_{i, 0}) = 0, \quad i=\overline{0, m+1}. \end{aligned} \right. \quad (8)$$

$$\gamma = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i, j=0}^{m, n} \frac{1}{\kappa_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}} \gamma_{i, j}, \quad (9)$$

$$\gamma_{i,j} = \frac{\sqrt{(x_{i+1,j}-x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j}-y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1}-x_{i,j+1})^2 + (y_{i+1,j+1}-y_{i,j+1})^2}}{\sqrt{(x_{i,j+1}-x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1}-y_{i,j})^2} + \sqrt{(x_{i+1,j+1}-x_{i+1,j})^2 + (y_{i+1,j+1}-y_{i+1,j})^2}},$$

де  $a_{i,j} = 2/(\kappa_{i,j} + \kappa_{i-1,j})$ ,  $b_{i,j} = (\kappa_{i,j-1} + \kappa_{i,j})/2$ ,  $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$ ,  $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$ ,  
 $\kappa_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = (\kappa_{i,j} + \kappa_{i+1,j} + \kappa_{i,j+1} + \kappa_{i+1,j+1})/4$ ,  $\sigma \in [0, 0.5]$  – ваговий коефіцієнт.

Розв’язок різницевої задачі (6) – (9) будемо так [1-3]. Задаємо кількості  $m$  та  $n$  вузлів розбиття сіткової області  $G_\omega$ , параметр  $\varepsilon$ , що характеризує точність наближення розв’язку відповідної різницевої задачі. Задаємо початкові наближення ряду величин: початкові наближення координат граничних вузлів  $x_{0,j}^{(0)}$ ,  $y_{0,j}^{(0)}$ ,  $x_{m+1,j}^{(0)}$ ,  $y_{m+1,j}^{(0)}$ ,  $x_{i,n+1}^{(0)}$ ,  $y_{i,n+1}^{(0)}$ ,  $x_{i,0}^{(0)}$ ,  $y_{i,0}^{(0)}$  (так, щоб виконувались рівності (7)) та початкові наближення координат внутрішніх вузлів  $(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$ . Задавання початкового наближення конформного інваріанта  $\gamma$  проведемо за формулою (9), в якій використаємо щойно задані початкові значення координат внутрішніх вузлів, тобто  $\gamma^{(0)} = \gamma(x_{i,j}^{(0)}, y_{i,j}^{(0)})$ . Далі проведемо уточнення: внутрішніх вузлів  $(x_{i,j}^{(k+1)}, y_{i,j}^{(k+1)})$  ( $k = 0, 1, K$  – номер кроку ітерації) з допомогою ітераційного методу Зейделя [6] за формулами, отриманими шляхом розв’язання (6) відносно  $x_{i,j}$  та  $y_{i,j}$ ; величини  $\gamma$  за формулою (9) та потенціалу  $\varphi_*$  за формулою  $\varphi_* = h_1 - (m+1) \cdot \gamma \cdot \Delta\psi$ ; координат граничних вузлів, наприклад, шляхом розв’язання системи нелінійних рівнянь (7), (8). Далі перевіримо виконання умов закінчення обчислювального процесу, наприклад, за формулами

$$\max_{x_{i,j}, y_{i,j} \in \partial G_z} \left( |x_{i,j}^{(k+1)} - x_{i,j}^{(k)}|, |y_{i,j}^{(k+1)} - y_{i,j}^{(k)}| \right) < \varepsilon, \tag{10}$$

$$|\varphi_*^{(k+1)} - \varphi_*^{(k)}| < \varepsilon, \quad |D^{(k+1)} - D^{(k)}| < \varepsilon,$$

де  $D = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=0}^{m,n} \frac{\sqrt{(x_{i+1,j+1}-x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j+1}-y_{i,j})^2}}{\sqrt{(x_{i,j+1}-x_{i+1,j})^2 + (y_{i,j+1}-y_{i+1,j})^2}}$  – усереднене значення

відношення довжин діагоналей криволінійних чотирикутників сіткової області  $G_z^\gamma$ , та

$$|y_{B\bar{y}} - H| \leq e. \tag{11}$$

Якщо умови (10) не справджуються, то повертаємося до уточнення координат внутрішніх вузлів і т.д. У разі невиконання умови (11) зменшуємо  $h_1 = h_1 - 0.02$  (при  $|y_{B\bar{y}}| > H + e$ ) або збільшуємо  $h_1 = h_1 + 1/30$  (при  $|y_{B\bar{y}}| < H + e$ ) глибину залягання дрени, та розв’язуємо різницеву задачу (6) – (9) заново. У протилежному випадку обчислюємо нев’язку комфортності отриманої сітки за формулою  $\varepsilon_* = |1 - D|$ . Її величина характеризує відхилення отриманих криволінійних чотирикутників від відповідних прямокутників (оскільки відношення довжин діагоналей у прямокутнику дорівнює одиниці, а існування прямих кутів забезпечується умовами ортогональності).

У випадку, якщо не виконується, наприклад, лише одна із умов (10), то узгоджуємо співвідношення між точністю  $\varepsilon_*$  та заданою кількістю кроків розбиття  $m, n$  (в першу чергу, шляхом збільшення останніх). Якщо ж потрібно збільшити ступінь точності наближеного розв’язку (зменшити нев’язку  $\varepsilon_*$ ), то збільшуємо параметри розбиття  $m$  і  $n$  та розв’язуємо різницеву задачу (6)–(9) заново. Оптимальність співвідношення між  $m$  і  $n$  досягається аналогічно до [1-3] шляхом оптимізації аналогів функціоналів (наприклад, Рімана). Обґрунтування побудованого алгоритму “почергової фіксації характеристик процесу та середовища, параметра конформності, внутрішніх і

граничних вузлів криволінійної області” проводимо аналогічно до [1-3] з використанням ідей методів блочних ітерацій [7].

**3. Результати числових розрахунків.** Провівши розрахунки за описаним алгоритмом при  $g(y) = -y \cdot k$ ,  $h_2 = 1$  м,  $H = 0.89$  м,  $r = 0.8$  м,  $l = 4$  м,  $Q = 3,4$  м<sup>3</sup>/добу, розбитті  $m \times n = 30 \times 16$  області  $G_z$ , точності наближення  $\varepsilon = 10^{-5}$ , коефіцієнті провідності середовища  $k = 2$  м/добу за  $k = 2847$  кроків, отримано гідродинамічну сітку руху (див. рисунок 1), знайдено мінімальну глибину залягання дрени  $h_1 = 3.99833$  м, потенціал  $\varphi_* = 0.71501$  за максимальної нев'язки  $\varepsilon_* = 2,4E-3$ , встановлено положення вільної кривої  $A'B'$  для відповідної фільтраційної схеми в системі кругового горизонтального дренажу.

**Висновки і зауваження.** У роботі запропоновано варіант поєднання методу „фіктивних областей” і методології розв’язання крайових задач на конформні відображення для випадку областей з вільними кривим, які не є ні лініями течії, ні еквіпотенціальними лініями, коли замість однієї з традиційних умов на цій вільній ділянці межі області задаються умови, що характеризують процес на певній „фіктивній” області (території), яка прилягає до заданої ділянки області. Знайдено мінімальну глибину закладання дренажу для забезпечення встановлення положення вільної кривої нижче наперед заданого рівня.

При обґрунтуванні (а також побудові) відповідного алгоритму, що ґрунтується на почерговому „замороженні” шуканих параметра конформності, внутрішніх і граничних вузлів криволінійної області тощо, використовували ідеї методу блочної ітерації [7].

Для випадку, коли потенціал на дрені визначали традиційно за формулою  $\varphi^* = -k \left( \frac{p}{\rho g} - h_1 \right)$ , де  $\rho$  – густина рідини,  $g$  – прискорення вільного падіння,  $p$  – тиск у дрені, мали можливість із допомогою параметра  $p$  керувати процесом (регулювати положення вільної кривої). Наприклад, залежно від кількості опадів (що характеризується величиною  $Q$ ) маємо можливість розраховувати таке (оптимальне) зі значень  $p$  (що реалізується на практиці, наприклад, шляхом прикриття зазору у вихідному регулюючому пристрої), щоб вільна крива (крива депресії) не виходила із певних меж.

Проведені числові розрахунки є підтвердженням того, що запропоновані в роботі постановки задач та алгоритми їх числового розв’язання можна застосовувати при моделюванні нелінійних фільтраційних процесів, що виникають у системах горизонтального дренажу, а також при проектуванні дренажних споруд та оптимізації інших гідросистем.

#### Література

1. Бомба А.Я. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки / А.Я. Бомба, В. М. Булавацький, В.В. Скопечкий . – К.: Наукова думка, 2007. – 308 с.
2. Бомба А. Я. Новая методика решения нелинейных краевых задач со свободными границами и включениями / А.Я. Бомба, В.И. Гаврилюк, В.В. Скопечкий // Компьютерная математика.– 2007. – № 1. – С.31 – 39.
3. Бомба А.Я. Модифікація алгоритму числового розв’язання обернених задач на квазіконформні відображення для випадку областей з вільними межами / А. Я. Бомба, В. І. Гаврилюк // Вісник Харківського національного університету. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління», №833. – 2008р. – С. 39 – 46.
4. Капранов Ю. И. Краевая задача о дренаже в инфильтрационной кайме пресных грунтовых вод над солеными / Ю. И. Капранов, В. Н. Эмих // ПМТФ. Т.45., № 4.– 2004. – С. 79 – 93.
5. Полубаринова-Кочина П.Я. Некоторые задачи плоского движения грунтовых вод /П. Я. Полубаринова-Кочина. – М.-Л.: Изд.-во АН СССР, 1948. – 144 с.
6. Самарский А.А. Теория разностных схем /А. А. Самарский. – Москва: Наука, 1977. – 656 с.

7. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики / Г. И. Марчук. – Киев: Наукова думка, 1980. – 334 с.
8. Monaghan J.J. Smoothed Particle Hydrodynamics / J. J. Monaghan // Reports on Progress in Physics. – 2005. – № 68. – P. 1703 – 1759.

*Одержано 05.11.2009 р.*