Ленюк М. Моделювання дифузійних процесів у неоднорідних середовищах із м'якими межами методом гібридного диференціального оператора лежандра –фур'є – лежандра на полярній ос / М. Ленюк, Б. Шелестовський // Вісник ТДТУ. — 2009. — Том 14. — № 3. — С. 151-157. — (математичне моделювання.математика. фізика).

УДК 517.946

М. Ленюк[1], докт. фіз.-мат. наук;
Б. Шелестовський[2], канд. фіз.-мат. наук

[1]Чернівецький факультет Національного технічного університету „Харківський політехнічний інститут”;
[2]Тернопільський державний технічний університет ім. І. Пулюя

МОДЕЛЮВАННЯ ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ У НЕОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩАХ ІЗ М'ЯКИМИ МЕЖАМИ МЕТОДОМ ГІБРИДНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЛЕЖАНДРА – ФУР'Є – ЛЕЖАНДРА НА ПОЛЯРНІЙ ОСІ

Застосувавши операційний метод, отримано інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку задачі про дифузійні процеси в неоднорідних середовищах із м'якими межами у випадку, коли дифузійні процеси змодельовані методом гібридного диференціального оператора Лежандра – Фур'є – Лежандра на полярній осі.

***Ключові слова:** моделювання, дифузійні процеси, неоднорідне середовище, гібридний диференціальний оператор.*

M. Lenyuk, B. Shelestovsky

MODELING OF THE DIFFUSION PROCESSES IN HETEROGENEOUS SOFT BORDER MEDIA USING THE METHOD OF HYBRID DIFFERENTIAL LEGENDRE-FURIER-LEGENDRE OPERATOR ON THE POLAR AXIS

Integral picture of the precise analytical solution of the task on the diffusion processes in heterogeneous soft border media in the case, when modeling of the diffusion processes is carried out using the method of the hybrid differential Legendre-Furier-Legendre operator on the polar axis, has been obtained by the operational method.

***Key words:** modeling, diffusion processes, heterogeneous medium, hybrid differential operator.*

Постановка проблеми та її аналіз. Процеси дифузії, які постійно відбуваються у навколишньому середовищі, протягом усієї історії людства привертали до себе увагу. Найпростішою моделлю такого процесу є диференціальне рівняння дифузії (теплопровідності) параболічного типу [1]

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = f(t,r) \tag{1}$$

з відповідними початковою та крайовими умовами. Практичні потреби зумовили різні узагальнення рівняння (1). Було створено фундаментальний метод розв'язання задачі Коші та лінійних крайових задач для рівняння (1) – метод розділення змінних (метод Фур'є). При цьому завжди припускали, що межа області є жорсткою щодо відбиття хвиль: у крайових операторах немає диференціального оператора $\frac{\partial}{\partial t}$. На особливу увагу заслуговує поширений у другій половині XX-го століття метод кусково-сталих фізико-технічних характеристик, запропонований для вивчення напруженого стану композитних матеріалів. Це зумовило виникнення (навіть у випадку жорсткості межі області) диференціального рівняння із сингулярними коефіцієнтами типу дельта-функції та її похідних [2]. Та інтегральне зображення у точній аналітичній формі розв'язку задачі дифузії у цьому випадку отримати майже неможливо. Цих труднощів можна уникнути, якщо дифузійні процеси у неоднорідному середовищі моделювати методом гібридних диференціальних операторів – з добре вивченою фундаментальною системою розв'язків. Дана робота присвячена вивченню нестаціонарних дифузійних процесів у неоднорідному середовищі, моделювання властивостей якого здійснено гібридним диференціальним оператором Лежандра – Фур'є – Лежандра на полярній осі.

Основна частина. Розглянемо задачу про побудову обмеженого в області $D_2 = \{(t, r): t \in (0, \infty), r \in I_2^+ = (0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, \infty)\}$ розв'язку сепаратної системи класичних рівнянь теплопровідності параболічного типу [1]:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u_1}{\partial t} + \gamma_1^2 u_1 - a_1^2 \Lambda_{(\mu)_1}[u_1] = f_1(t, r),\ r \in (0, R_1),\\
&\frac{\partial u_1}{\partial t} + \gamma_2^2 u_2 - a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} = f_2(t, r),\ r \in (R_1, R_2), \qquad (2)\\
&\frac{\partial u_3}{\partial t} + \gamma_3^2 u_3 - a_3^2 \Lambda_{(\mu)_2}[u_3] = f_3(t, r),\ r \in (R_2, \infty),
\end{aligned}
$$

з нульовими початковими умовами та умовами спряження

$$
\left(L_{j1}^k[u_k(t,r)] - L_{j2}^k[u_{k+1}(t,r)]\right)\Big|_{r=R_k} = \omega_{jk}(t),\ j, k = 1, 2. \qquad (3)
$$

У рівностях (2), (3) беруть участь диференціальні оператори Лежандра [3] $\Lambda_{(\mu)_j} = \frac{d^2}{dr^2} + \mathrm{cth}r\frac{d}{dr} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_{1j}^2}{1-\mathrm{ch}r} + \frac{\mu_{2j}^2}{1+\mathrm{ch}r}\right)$ та диференціальні оператори

$$
L_{jm}^k = \left(\alpha_{jm}^k + \delta_{jm}^k \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{jm}^k + \gamma_{jm}^k \frac{\partial}{\partial t},\ j, m, k = 1,2. \qquad (4)
$$

Вважатимемо, що виконані умови на коефіцієнти: $\gamma_j^2 \ge 0$, $a_j > 0$, $\mu_{1j} \ge \mu_{2j} \ge 0; c_{11,k}c_{21,k}>0$, $c_{m1,k} \equiv \alpha_{2m}^k\beta_{1m}^k - \alpha_{1m}^k\beta_{2m}^k;\ c_{j1,j2}^{12,k} = c_{j1,j2}^{21,k}, c_{j1,j2}^{12,k} = \gamma_{2j}^k\alpha_{1j}^k - \gamma_{1j}^k\alpha_{2j}^k$, $c_{j1,j2}^{21,k} = \delta_{2j}^k\beta_{1j}^k - \delta_{1j}^k\beta_{2j}^k,\ j, k, m = 1, 2; (\mu)_j = (\mu_{1j}, \mu_{2j})$.

Припустимо, що задані та шукані функції є оригіналами Лапласа стосовно змінної t [4]. У зображенні за Лапласом задачі (2), (3) відповідає крайова задача: побудувати обмежений на множині I_2^+ розв'язок сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь Лежандра та Фур'є для модифікованих функцій

$$
\begin{aligned}
&\left(\Lambda_{(\mu)_1} - q_1^2\right)u_1^*(p,r) = -a_1^{-2} f_1^*(p,r),\ r \in (0, R_1),\\
&\left(\frac{d^2}{dr^2} - q_2^2\right)u_2^*(p,r) = -a_2^{-2} f_2^*(p,r),\ r \in (R_1, R_2), \qquad (5)\\
&\left(\Lambda_{(\mu)_2} - q_3^2\right)u_3^*(p,r) = -a_3^{-2} f_3^*(p,r),\ r \in (R_2, \infty),
\end{aligned}
$$

за умовами спряження

$$
[\left(\overline{\alpha}_{j1}^k \frac{d}{dr} + \overline{\beta}_{j1}^k\right)u_k^*(p,r) - \left(\overline{\alpha}_{j2}^k \frac{d}{dr} + \overline{\beta}_{j2}^k\right)u_{k+1}^*(p,r)\Big|_{r=R_k} = \omega_{jk}^*(p);\ j,k = 1,2. \qquad (6)
$$

У рівностях (5),(6) прийняті позначення:

$$
u_j^*(p,r) = \int_0^\infty u_j(t,r)e^{-pt}dt,\ f_j^*(p,r) = \int_0^\infty f_j(t,r)e^{-pt}dt,
$$

$$
q_j = a_j^{-1}(p+\gamma_j^2)^{1/2}, \overline{\alpha}_{jm}^k = \alpha_{jm}^k + \delta_{jm}^k p,\ \overline{\beta}_{jk}^m = \beta_{jk}^m + \gamma_{jk}^m p, p=\sigma+is, i^2=-1.
$$

Для $j = \overline{1,3}$ зафіксуємо ту вітку двозначної функції q_j, на якій $\mathrm{Re}q_j>0$.

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Лежандра $\left(\Lambda_{(\mu)_j} - q_j^2\right)\ v = 0$ утворюють узагальнені приєднані функції Лежандра першого роду $v_1 = P^{(\mu)_j}_{-1/2+q_j}(\text{ch}r)$ та другого роду $v_2 = L^{(\mu)_j}_{-1/2+q_j}(\text{ch}r)$ [3]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $(d^2/dr^2 - q_2^2)v=0$ утворюють функції $v_1 = chq_2r$ та $v_2 = shq_2r$ [5].

Наявність фундаментальної системи розв'язків дозволяє будувати загальний розв'язок крайової задачі (5),(6) методом функцій Коші [5, 6]:

$$u_1^*(p,r) = A_1 P^{(\mu)_j}_{\nu_1}(\text{ch}r) + \int_0^{R_1} E_1^*(p,r,\rho) a_1^{-2} f_1^*(p,\rho)\text{sh}\rho d\rho,\ r \in (0, R_1),$$

$$u_2^*(p,r) = A_2 \text{ch}q_2r + B_2 \text{sh}q_2r + \int_{R_1}^{R_2} E_2^*(p,r,\rho) a_2^{-2} f_2^*(p,\rho) d\rho,\ r \in (R_1, R_2), \tag{7}$$

$$u_3^*(p,r) = B_3 L^{(\mu)_2}_{\nu_3}(\text{ch}r) + \int_{R_2}^{\infty} E_3^*(p,r,\rho) a_3^{-2} f_3^*(p,\rho) sh\rho d\rho,\ r \in (R, \infty),$$

$$\nu_1 = -1/2 + q_1,\ \nu_3 = -1/2 + q_3 .$$

У рівностях (7) $E_j^*(p,r,\rho)$ – функції Коші [5, 6]:

$$E_j^*(p,r,\rho)\Big|_{r=\rho+0} - E_j^*(p,r,\rho)\Big|_{r=\rho-0} = 0,\ j = \overline{1,3}$$

$$\frac{dE_j^*(p,r,\rho)}{dr}\Bigg|_{r=\rho+0} - \frac{dE_j^*(p,r,\rho)}{dr}\Bigg|_{r=\rho-0} = -\frac{1}{\varphi_j(\rho)}, \tag{8}$$

де $\varphi_1(r)=\text{sh}r$, $\varphi_2(r)=1$, $\varphi_3(r)= shr$.

Припустимо, що функція Коші:

$$E_1^*(p,r,\rho) = \begin{cases} \overset{-}{E}{}_1^* \equiv C_1 P^{(\mu)_j}_{\nu_1}(chr), & 0 < r < \rho < R_1 \\ \overset{+}{E}{}_1^* \equiv C_2 P^{(\mu)_j}_{\nu_1}(chr) + D_2 L^{(\mu)_1}_{\nu_1}(chr), & 0 < \rho < r < R_1 \end{cases}.$$

Властивості (8) функції Коші дають алгебраїчну систему:

$$(C_2 - C_1) P^{(\mu)_1}_{\nu_1}(ch\rho) + D_2 L^{(\mu)_1}_{\nu_1}(ch\rho) = 0,$$

$$(C_2 - C_1) P^{(\mu)_1 /}_{\nu_1}(ch\rho) + D_2 L^{(\mu)_1 /}_{\nu_1}(ch\rho) = -\frac{1}{sh^2\rho}.$$

Звідси отримуємо співвідношення:

$$C_2 - C_1 = -B_{(\mu)_1}(q_1) L^{(\mu)_1}_{\nu_1}(ch\rho), D_2 = -B_{(\mu)_1}(q_1) P^{(\mu)_1}_{\nu_1}(ch\rho) . \tag{9}$$

Доповнимо систему рівностей (6) алгебраїчними рівняннями:

$$(\overline{\alpha}_{j1}^k \, d/dr + \overline{\beta}_{j1}^k) \overset{+}{E}{}_1^*\Big|_{r=R_0} = 0 : Z^{(\mu)_1,11}_{\nu_1,11}(chR_1) C_2 + Z^{(\mu)_1,02}_{\nu_1,11}(chR_1) D_2 = 0 . \tag{10}$$

Із алгебраїчної системи (9),(10) знаходимо, що

$$C_1 = B_{(\mu)_1}(q_1)[Z^{(\mu)_1,11}_{\nu_1,11}(chR_1)]^{-1} F^{(\mu)_1,1}_{\nu_1,11}(chR_1, ch\rho) .$$

Цим функція Коші $E_1^*(p,r,\rho)$ визначена й унаслідок симетрії відносно діагоналі $r = \rho$ має структуру:

$$E_1^*(p,r,\rho) = \frac{B_{(\mu)_1}(q_1)}{Z^{(\mu)_1,11}_{\nu_1,11}(chR_1)} \begin{cases} P^{(\mu)_1}_{\nu_1}(chr) F^{(\mu)_1;1}_{\nu_1;11}(\text{ch}R_1, \text{ch}\rho), & 0 < r < \rho < R_1, \\ P^{(\mu)_1}_{\nu_1}(ch\rho) F^{(\mu)_1;1}_{\nu_1;11}(\text{ch}R_1, \text{ch}r), & 0 < \rho < r < R_1. \end{cases} \tag{11}$$

У рівностях (9)-(11) беруть участь функції:

$$Z^{(\mu)_s;m1}_{\nu_n,jk}(\mathrm{ch}R_m)=\overline{\alpha}^m_{jk}shR_mP^{(\mu)_s/}_{\nu_n}(\mathrm{ch}R_\mathrm{m})+\overline{\beta}^m_{jk}P^{(\mu)_s}_{\nu_n}(\mathrm{ch}R_\mathrm{m}),$$

$$Z^{(\mu)_s;m2}_{\nu_n,jk}(\mathrm{ch}R_m)=\overline{\alpha}^m_{jk}shR_mL^{(\mu)_s/}_{\nu_n}(\mathrm{ch}R_\mathrm{m})+\overline{\beta}^m_{jk}L^{(\mu)_s}_{\nu_n}(\mathrm{ch}R_\mathrm{m}),$$

$$F^{(\mu)_s;m}_{\nu_1,j1}(\mathrm{ch}R_m,\mathrm{ch}r)=Z^{(\mu)_s;m1}_{\nu_n;jk}(\mathrm{ch}R_m)L^{(\mu)_s}_{\nu_n}(\mathrm{ch}r)-Z^{(\mu)_s;m2}_{\nu_n;jk}(\mathrm{ch}R_m)P^{(\mu)_s}_{\nu_n}(\mathrm{ch}r),$$

$$B_{(\mu)_j}(q_n)=\frac{\pi}{2}\frac{2^{\mu_{1j}}}{2^{\mu_{2j}}}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+q_n-\nu^+_{1j})\Gamma(\frac{1}{2}+q_n-\nu^-_{1j})}{\Gamma(\frac{1}{2}+q_n+\nu^+_{1j})\Gamma(\frac{1}{2}+q_n+\nu^-_{1j})},\ \nu^{\pm}_{1j}=\frac{1}{2}(\mu_{1j}\pm\mu_{2j}).$$

Уведемо до розгляду функції:

$$V^{m1}_{jk}(q_sR_m)=\overline{\alpha}^m_{jk}q_sshR_m+\overline{\beta}^m_{jk}q_schq_sR_m\equiv(\overline{\alpha}^m_{jk}\tfrac{d}{dr}+\overline{\beta}^m_{jk})chq_sr\Big|_{r=R_m},$$

$$V^{m2}_{jk}(q_sR_m)=\overline{\alpha}^m_{jk}q_schR_m+\overline{\beta}^m_{jk}q_sshq_sR_m\equiv(\overline{\alpha}^m_{jk}\tfrac{d}{dr}+\overline{\beta}^m_{jk})shq_sr\Big|_{r=R_m},$$

$$\Phi^m_{jk}(q_iR_mq_sr)=V^{m2}_{jk}(q_sR_m)chq_sr-V^{m1}_{jk}(q_sR_m)shq_sr,$$

$$\Delta_{jk}(q_2R_1,q_2R_2)=V^{11}_{j2}(q_2,R_1)V^{22}_{k1}(q_2R_2)-V^{11}_{j2}(q_2R_1)V^{21}_{k1}(q_2R_2),\ j,k=1,2.$$

Безпосередньо перевіримо, що функція Коші

$$E^*_2(p,r,\rho)=-\frac{1}{q_2\Delta_{11}(q_2R_1,q_2R_2)}\begin{cases}\Phi^1_{12}(q_2R_1,q_2r)\Phi^2_{11}(q_2R_2,q_2\rho), & R_1<r<\rho<R_2,\\ \Phi^1_{12}(q_2R_1,q_2\rho)\Phi^2_{11}(q_2R_2,q_2r), & R_1<\rho<r<R_2.\end{cases}\tag{12}$$

Нехай функція Коші

$$E^*_3(p,r,\rho)=\begin{cases}\overset{-}{E}{}^*_3\equiv C_1P^{(\mu)_2}_{\nu_3}(chr)+D_1L^{(\mu)_2}_{\nu_3}(chr) & R_2<r<\rho<\infty\\ \overset{+}{E}{}^*_3\equiv D_2L^{(\mu)_2}_{\nu_3}(chr), & R_2<\rho<r<\infty\end{cases}.$$

Властивості (8) функції Коші дають алгебраїчну систему:

$$-C_1P^{(\mu)_2}_{\nu_3}(ch\rho)+(D_2-D_1)L^{(\mu)_2}_{\nu_3}(ch\rho)=0,$$

$$-C_1P^{(\mu)_2/}_{\nu_3}(ch\rho)+(D_2-D_1)L^{(\mu)_2/}_{\nu_3}(ch\rho)=-\frac{1}{sh^2\rho}.$$

Звідси отримуємо співвідношення:

$$C_1=-B_{(\mu)_2}(q_3)L^{(\mu)_2}_{\nu_3}(ch\rho),D_2-D_1=B_{(\mu)_2}(q_3)P^{(\mu)_2}_{\nu_3}(ch\rho).\tag{13}$$

Доповнимо рівності (13) алгебраїчним рівнянням:

$$(\overline{\alpha}^2_{12}\tfrac{d}{dr}+\overline{\beta}^2_{12})\overset{+}{E}{}^*_3\Big|_{r=R_2}=0:Z^{(\mu)_2,21}_{\nu_3,12}(chR_2)C_1+Z^{(\mu)_2,22}_{\nu_3,12}(chR_2)D_1=0.\tag{14}$$

Із алгебраїчної системи (13),(14) знаходимо, що

$$D_2=-B_{(\mu)_2}(q_3)[Z^{(\mu)_2,22}_{\nu_3,12}(chR_2)]^{-1}F^{(\mu)_2,2}_{\nu_3,12}(chR_3,ch\rho).$$

Цим функція Коші $E^*_3(p,r,\rho)$ визначена й унаслідок симетрії відносно діагоналі $r=\rho$ має структуру:

$$E^*_3(p,r,\rho)=-\frac{B_{(\mu)_2}(q_3)}{Z^{(\mu)_2,22}_{\nu_3,12}(chR_2)}\begin{cases}F^{(\mu)_2;2}_{\nu_3;12}(\mathrm{ch}R_2,\mathrm{ch}r)L^{(\mu)_2}_{\nu_3}(\mathrm{ch}\rho), & R_2<r<\rho<\infty,\\ F^{(\mu)_2;2}_{\nu_3;12}(\mathrm{ch}R_2,\mathrm{ch}\rho)L^{(\mu)_2}_{\nu_3}(\mathrm{ch}r), & R_2<\rho<r<\infty.\end{cases}\tag{15}$$

Звернемося до формул (7). Умови спряження (6) для визначення величин A_1,A_2 та B_2,B_3 дають алгебраїчну систему з чотирьох рівнянь:

$$Z^{(\mu)_1,11}_{\nu_1,j2}(chR_1)A_1-V^{11}_{j2}(q_2R_1)A_2-V^{12}_{j2}(q_2R_1)B_2=\omega^*_{j1}(p)+G^*_{12}\delta_{j2},$$

$$V^{21}_{j1}(q_2R_2)A_2+V^{22}_{j1}(q_2R_2)B_2-Z^{(\mu)_2,22}_{\nu_3,j2}(chR_2)B_3=\omega^*_{j2}+G^*_{23}\delta_{j2},\ j=1,2.\tag{16}$$

У системі (16) беруть участь символ Кронекера $\delta_{j2}(\delta_{12}=0,\delta_{22}=1)$, а також функції

$$G_{12}^{*}=\frac{c_{11}^{*}}{\mathrm{sh}R_1}\int_0^{R_1}\frac{P_{\nu_1}^{(\mu)_1}(ch\rho)}{Z_{\nu_1,11}^{(\mu)_1,11}(chR_1)}a_1^{-2}f_1^{*}(p,\rho)\mathrm{sh}\rho d\rho+c_{21}^{*}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\Phi_{11}^{2}(q_2R_2,q_2\rho)}{\Delta_{11}(q_2R_1,q_2R_2)}a_2^{-2}f_2^{*}(p,\rho)d\rho,$$

$$G_{23}^{*}=-c_{12}^{*}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\Phi_{12}^{1}(q_2R_1,q_2\rho)}{\Delta_{11}(q_2R_1,q_2R_2)}a_2^{-2}f_2^{*}(p,\rho)d\rho+\frac{c_{22}^{*}}{shR_2}\int_{R_2}^{\infty}\frac{L_{\nu_3}^{(\mu)_2}(\mathrm{ch}\rho)}{Z_{\nu_3,12}^{(\mu)_2,22}(chR_2)}a_3^{-2}f_3^{*}(p,\rho)sh\rho d\rho\,.$$

Уведемо до розгляду функції:

$$A_{(\mu)_1;j}(p)=Z_{\nu_1,11}^{(\mu)_1,11}(chR_1)\,\Delta_{2j}(q_2R_1,q_2R_2)-Z_{\nu_1,21}^{(\mu)_1,11}(chR_1)\,\Delta_{1j}(q_2R_1,q_2R_2),$$

$$B_{(\mu)_2;j}(p)=Z_{\nu_3,22}^{(\mu)_2,22}(chR_2)\,\Delta_{j1}(q_2R_1,q_2R_2)-Z_{\nu_3,12}^{(\mu)_2,22}(chR_2)\,\Delta_{j2}(q_2R_1,q_2R_2),\ j=1,2;$$

$$\theta_{(\mu)_1,1}^{*}(p,r)=Z_{\nu_1,11}^{(\mu)_1,11}(chR_1)\Phi_{22}^{1}(q_2R_1,q_2r)-Z_{\nu_1,21}^{(\mu)_1,11}(chR_1)\Phi_{12}^{1}(q_2R_1,q_2r),$$

$$\theta_{(\mu)_2,2}^{*}(p,r)=Z_{\nu_3,12}^{(\mu)_2,22}(chR_2)\Phi_{21}^{2}(q_2R_2,q_2r)-Z_{\nu_3,22}^{(\mu)_2,22}(chR_2)\Phi_{11}^{2}(q_2R_1,q_2r)\,.$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв'язності крайової задачі (5),(6): для $p=\sigma+is$ із $\mathrm{Re}p=\sigma>\sigma_0$, де σ_0 – абсциса збіжності інтеграла Лапласа, та $\mathrm{Im}p=s\in(-\infty,\infty)$ визначник алгебраїчної системи (16):

$$\Delta_{(\mu)}(p)\equiv A_{(\mu)_1;1}(p)Z_{\nu_3,22}^{(\mu)_2,22}(chR_2)-A_{(\mu)_1;2}(p)Z_{\nu_3,12}^{(\mu)_2,22}(chR_2)=$$
$$=B_{(\mu)_2;2}(p)Z_{\nu_1,11}^{(\mu)_1,11}(chR_1)-B_{(\mu)_2;1}(p)Z_{\nu_1,21}^{(\mu)_1,11}(chR_1)\neq 0\,. \qquad (17)$$

Визначимо головні розв'язки крайової задачі (5) – (6):

1) породжені неоднорідністю крайової умови в точці $r=R_0$ функції Гріна:

$$R_{(\mu);11}^{1*}(p,r)=\frac{B_{(\mu)_2;2}(p)}{\Delta_{\mu}(p)}P_{\nu_1}^{(\mu)_1}(chr),\ R_{(\mu);21}^{1*}(p,r)=-\frac{B_{(\mu)_2;1}(p)}{\Delta_{(\mu)}(p)}P_{\nu_1}^{(\mu)_1}(chr),$$

$$R_{(\mu);12}^{1*}(p,r)=-\frac{c_{21}^{*}q_2}{\Delta_{(\mu)}(p)}Z_{\nu_3,22}^{(\mu)_2,22}(chR_2)P_{\nu_1}^{(\mu)_1}(chr),$$

$$R_{(\mu);22}^{1*}(p,r)=\frac{c_{21}^{*}q_2}{\Delta_{(\mu)}(p)}Z_{\nu_3,12}^{(\mu)_2,22}(chR_2)P_{\nu_1}^{(\mu)_1}(chr),\ R_{(\mu);11}^{2*}(p,r)=-\frac{Z_{\nu_1,21}^{(\mu)_1,11}(chR_1)}{\Delta_{(\mu)}(p)}\theta_{(\mu)_2;2}^{*}(p,r);$$

$$R_{(\mu);21}^{2*}(p,r)=\frac{Z_{\nu_1,11}^{(\mu)_1,11}(chR_1)}{\Delta_{(\mu)}(p)}\theta_{(\mu)_2;2}^{*}(p,r); \qquad (18)$$

$$R_{(\mu);12}^{2*}(p,r)=-\frac{1}{\Delta_{(\mu)}(p)}Z_{\nu_3,22}^{(\mu)_2,22}(chR_2)\theta_{(\mu)_1;1}^{*}(p,r);\ R_{(\mu);22}^{2*}(p,r)=\frac{Z_{\nu_3,12}^{(\mu)_2,22}(chR_2)}{\Delta_{(\mu)}(p)}\theta_{(\mu)_1;1}^{*}(p,r);$$

$$R_{(\mu);11}^{3*}(p,r)=-\frac{c_{12}^{*}q_2}{\Delta_{(\mu)}(p)}Z_{\nu_1,21}^{(\mu)_1,11}(chR_1)L_{\nu_3}^{(\mu)_2}(chr),\ R_{(\mu);21}^{3*}(p,r)=\frac{c_{12}^{*}q_2}{\Delta_{(\mu)}(p)}Z_{\nu_1,11}^{(\mu)_1,11}(chR_1)L_{\nu_3}^{(\mu)_2}(chr),$$

$$R_{(\mu);12}^{3*}(p,r)=\frac{A_{(\mu)_1;2}(p)}{\Delta_{(\mu)}(p)}L_{\nu_3}^{(\mu)_2}(chr),\ R_{(\mu);22}^{3*}(p,r)=-\frac{A_{(\mu)_1;1}(p)}{\Delta_{(\mu)}(p)}L_{\nu_3}^{(\mu)_2}(chr).$$

2) породжені неоднорідністю системи (5) функції впливу:

$$\mathcal{H}_{(\mu);11}^{*}(r,\rho,q)=\frac{B_{(\mu)_1}(q_1)}{\Delta_{(\mu)}(q)}\begin{cases}P_{\nu_1}^{(\mu)_1}(chr)[B_{(\mu)_2;2}(p)F_{\nu_1;11}^{(\mu)_1;1}(\mathrm{ch}R_1,\mathrm{ch}\rho)-\\ P_{\nu_1}^{(\mu)_1}(ch\rho)[B_{(\mu)_2;2}(p)F_{\nu_1;11}^{(\mu)_1;1}(\mathrm{ch}R_1,\mathrm{ch}r)-\end{cases}$$

$$-B_{(\mu)_2;1}(p)F_{\nu_1;21}^{(\mu)_1;1}(\mathrm{ch}R_1,\mathrm{ch}\rho)],0<r<\rho<R_1$$

$$-B_{(\mu)_2;1}(p)F_{\nu_1;21}^{(\mu)_1;1}(\mathrm{ch}R_1,\mathrm{ch}r)],0<r<\rho<R_1$$

$$\mathcal{H}^*_{(\mu);12}(r,\rho,q) = \frac{c^*_{21}}{\Delta_{(\mu)}(q)} Q^*_{(\mu)_2;2}(p,\rho) P^{(\mu)_1}_{\nu_1}(chr),$$

$$\mathcal{H}^*_{(\mu);13}(r,\rho,q) = \frac{c^*_{21} q_2}{\Delta_{(\mu)}(q)} \frac{c^*_{22}}{shR_2} L^{(\mu)_2}_{\nu_3}(ch\rho) P^{(\mu)_1}_{\nu_1}(chr), \tag{19}$$

$$\mathcal{H}^*_{(\mu);23}(r,\rho,q) = \frac{c^*_{22}}{shR_2} \frac{1}{\Delta_{(\mu)}(q)} L^{(\mu)_2}_{\nu_3}(ch\rho) Q^*_{(\mu)_1;1}(p,r),$$

$$\mathcal{H}^*_{(\mu);31}(r,\rho,q) = \frac{c^*_{12} q_2}{shR_1} \frac{c^*_{11}}{\Delta_{(\mu)}(q)} L^{(\mu)_2}_{\nu_3}(chr) P^{(\mu)_1}_{\nu_1}(ch\rho),$$

$$\mathcal{H}^*_{(\mu);32}(r,\rho,q) = \frac{c^*_{12}}{\Delta_{(\mu)}(q)} L^{(\mu)_2}_{\nu_3}(chr) Q^*_{(\mu)_1;1}(p,\rho),$$

$$\mathcal{H}^*_{(\mu);33}(r,\rho,q) = \frac{B_{(\mu)_2}(q_3)}{\Delta_{(\mu)}(p)} \begin{cases} L^{(\mu)_2}_{\nu_3}(ch\rho)[A_{(\mu)_1;2}(p) F^{(\mu)_2;2}_{\nu_3;12}(\mathrm{ch}R_2, \mathrm{ch}r) - \\ L^{(\mu)_2}_{\nu_3}(ch\rho)[A_{(\mu)_1;2}(p) F^{(\mu)_2;2}_{\nu_3;12}(\mathrm{ch}R_2, \mathrm{ch}\rho) - \end{cases}$$

$$- A_{(\mu)_1;1}(p) F^{(\mu)_2;2}_{\nu_3;22}(\mathrm{ch}R_2, \mathrm{ch}r)],\, R_2 < \rho < r < \infty$$

$$- A_{(\mu)_1;1}(p) F^{(\mu)_2;2}_{\nu_3;22}(\mathrm{ch}R_2, \mathrm{ch}\rho)],\, R_2 < r < \rho < \infty .$$

У результаті однозначної розв’язності алгебраїчної системи (16), підставивши отримані значення A_1, A_2, B_2, B_3 у рівності (7), а також унаслідок низки елементарних перетворень маємо єдиний розв’язок крайової задачі (5),(6):

$$u^*_j(p,r) = \sum_{k,m=1}^{2} \mathcal{R}^{j*}_{\mu,km}(p,r)\omega^*_{km}(p) + \int_0^{R_1} \mathcal{H}^*_{(\mu);j1}(p,r,\rho) a_1^{-2} f_1^*(p,\rho)\mathrm{sh}\rho d\rho +$$

$$+ \int_{R_1}^{R_2} \mathcal{H}^*_{(\mu);j2}(p,r,\rho) a_2^{-2} f_2^*(p,\rho) d\rho + \int_{R_2}^{\infty} \mathcal{H}^*_{(\mu);j3}(p,r,\rho) a_3^{-2} f_3^*(p,\rho) sh\rho d\rho,\ j = \overline{1,3}. \tag{20}$$

Повернувшись у формулах (20) до оригіналу, отримаємо єдиний розв’язок параболічної задачі (2),(3):

$$u_j(t,r) = \sum_{k,m=1}^{2} \int_0^t R^j_{(\mu);km}(t-\tau,r)\omega_{km}(\tau)d\tau + \int_0^t \int_0^{R_1} \mathcal{H}_{(\mu);j1}(t-\tau,r,\rho) a_1^{-2} f_1^*(\tau,\rho)\mathrm{sh}\rho d\rho d\tau +$$

$$+ \int_0^t \int_{R_1}^{R_2} \mathcal{H}_{(\mu);j2}(t-\tau,r,\rho) a_2^{-2} f_2^*(\tau,\rho) d\rho d\tau + \int_0^t \int_{R_1}^{\infty} \mathcal{H}_{(\mu);j3}(t-\tau,r,\rho) a_3^{-2} f_3^*(\tau,\rho) sh\rho d\rho d\tau,\ j = \overline{1,3}. \tag{21}$$

У рівностях (21) за означенням [4]

$$R^j_{(\mu);km}(t,r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} R^{j*}_{(\mu);km}(p,r) e^{pt} dp,\ k,m = 1,2;\ j = \overline{1,3}; \tag{22}$$

породжені неоднорідністю умов спряження та функції впливу

$$\mathcal{H}_{(\mu);jk}(t,r,\rho) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \mathcal{H}^{j*}_{(\mu);km}(p,r) e^{pt} dp,\ k,m = 1,2;\ j = \overline{1,3}, \tag{23}$$

породжені неоднорідністю системи (2).

Особливими точками функцій Гріна $\mathcal{R}^{j*}_{(\mu);km}(p,r)$ та функцій впливу $\mathcal{H}^{j*}_{(\mu);km}(p,r)$ є точки галуження $p = -\gamma_1^2$, $p = -\gamma_2^2$, $p = -\gamma_3^2$ та $p = \infty$. Оскільки ці точки містяться на від’ємній піввісі дійсної осі в $p-$комплексній площині, то у формулах (22) та (23) можна „сісти на уявну вісь”:

$$R^j_{(\mu);km}(t,r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \mathrm{Re}[R^{j*}_{(\mu);km}(is,r) e^{ist}] ds,\ k,m = 1,2;\ j = \overline{1,3}, \tag{24}$$

$$\mathcal{H}_{(\mu);jk}(t,r,\rho) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Re}[\mathcal{H}^*_{(\mu);jk}(is,r,\rho)e^{ist}]ds\,, \; j,k=\overline{1,3}. \qquad (25)$$

Тут Re(...) означає дійсну частину виразу (...).

Зауваження 1. Без залучення нових ідей можна отримати розв’язок задачі (2),(3) у випадку, коли початкові умови неоднорідні [7].

Зауваження 2. Вибравши параметри, які беруть участь у формулюванні даної задачі дифузії, можна із загальних структур виділити безпосередньо у рамках даної моделі будь-який частковий (практично важливий) випадок.

Висновок. Вектор-функція $u(t,r) = \{u_1(t,r), u_2(t,r), u_3(t,r)\}$, де функції $u_j(t,r)$ визначені формулами (21), описує у точній аналітичній формі дифузійні процеси в неоднорідних середовищах із м’якими межами при моделюванні їх методом гібридного диференціального оператора Лежандра – Фур’є – Лежандра.

Література

1. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1972. – 735 с.
2. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / Коляно Ю.М. – К.: Наук. думка, 1992. – 280 с.
3. Конет І.М. Інтегральні перетворення типу Мелера – Фока / І.М.Конет, М.П.Ленюк. – Чернівці: Прут, 2002. – 248с.
4. Лаврентьев М.А. Методы теории функций комплексного переменного / М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат. – М.: Наука, 1987. – 688 с.
5. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений / Степанов В.В. – М.: Физматгиз, 1959. – 468 с.
6. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Шилов Г.Е. – М.: Наука, 1965. – 328с.
7. Тупкало І. С. Моделювання нестаціонарних температурних полів у неоднорідних середовищах з м’якими межами методом гібридного диференціального оператора Фур’є – Фур’є-Лежандра на декартовій вісі / І.С. Тупкало // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: зб. наук. пр. – Чернівці: Прут, 2008. – Вип.16. – С. 242 – 249.

Одержано 08.06.2009 р.