Омельченко А. Оцінювання параметрів поліноміальної регресії у випадку корельованих помилок спостереження / А. Омельченко // Вісник ТДТУ. — 2009. — Том 14. — № 3. — С. 124-133. — (математичне моделювання.математика. фізика).

УДК 519.233.5

А. Омельченко, канд. техн. наук

Харківський національний університет радіоелектроніки

ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ ПОЛІНОМІАЛЬНОЇ РЕГРЕСІЇ У ВИПАДКУ КОРЕЛЬОВАНИХ ПОМИЛОК СПОСТЕРЕЖЕННЯ

Розглянуто задачу оцінювання коефіцієнтів поліноміальної регресії для випадку корельованих помилок спостереження. Запропоновано алгоритм визначення вагових коефіцієнтів для лінійних незміщених оцінок коефіцієнтів регресії з мінімальними дисперсіями. Досліджено властивості вагових функцій регресійного аналізу, що характеризують вплив гармонійних складових похідної завади на оцінки коефіцієнтів поліноміальної регресії. Розроблено метод синтезу оцінювання старших коефіцієнтів поліноміальної регресії, заснований на поданні вагових функцій у вигляді лінійної комбінації B-сплайнів.

Ключові слова: *вагова функція, лінійна незміщена оцінка, поліноміальна регресія, сплайн, узагальнений метод найменших квадратів, частотна характеристика, шум спостереження.*

A. Omelchenko

POLYNOMIAL REGRESSION PARAMETERS ESTIMATION IN A CASE OF CORRELATED ERRORS OF OBSERVATION

The problem of polynomial regression coefficients estimation in a case of correlated errors of observation has been considered. The algorithm for defining the weight coefficients for linear unbiased estimates of regression coefficients with minimal variance has been suggested. The properties of weight functions of regression analysis, which describe the harmonic component of derivative noise influence on the polynomial regression coefficients estimation, have been researched. We have devised a method of polynomial regression leading coefficients synthesis, based on representation of weight functions as a linear combination of B-splines.

Key words: *weight function, linear unbiased estimate, polynomial regression, spline, generic least squares method, frequency characteristics, observational noise.*

Вступ. Регресійний аналіз – один із найпоширеніших статистичних методів, який використовують при побудові математичних залежностей на основі експериментальних даних. При цьому функції регресії часто будують у класі поліноміальних функцій, а коефіцієнти поліномів визначають за методом найменших квадратів (МНК) [1-3]. Однак у тих випадках, коли помилки спостереження корельовані, МНК не забезпечує мінімально можливих дисперсій оцінок коефіцієнтів полінома, що апроксимує функцію регресії.

У багатьох прикладних задачах регресійного аналізу (РА) потрібно оцінювати коефіцієнти поліноміальної регресії з найменшим розкидом щодо істинних значень. Такі задачі виникають, наприклад, при визначенні параметрів руху тіл за експериментальними даними. Якщо спектральні характеристики помилок спостереження відомі, то існує можливість побудувати оптимальні оцінки параметрів регресії, які мають мінімально можливі дисперсії у класі лінійних незміщених оцінок [2,4,5]. Такі оцінки можна отримати, використовуючи узагальнений метод найменших квадратів (УМНК) [2, 5, 6]. Однак у випадку великого числа відліків у спостережуваних послідовностях реалізація УМНК пов'язана з великими обчислювальними витратами, а отримані оцінки мають низьку чисельну стійкість. Крім того, у ряді випадків кореляційна функція шуму спостереження задана не повністю, що ускладнює використання оцінок УМНК. Тому актуальними є задачі побудови оптимальних лінійних незміщених оцінок для різних моделей помилок спостереження і дослідження властивостей цих оцінок.

Мета роботи – створити ефективні алгоритми оцінювання параметрів поліноміальної регресії у випадку корельованих помилок спостереження. Для досягнення сформульованої мети необхідно вирішити такі завдання:

1. Обґрунтувати алгоритми визначення вагових коефіцієнтів в оптимальних лінійних незміщених оцінках параметрів поліноміальної регресії.
2. Дослідити властивості вагових функцій РА і їхніх частотних характеристик.
3. Розробити метод синтезу оцінок коефіцієнтів поліноміальної регресії для випадку, коли кореляційна функція шуму спостереження не повністю задана, а відомий лише діапазон частот, у якому зосереджена основна доля потужності цього шуму.

1. Постановка задачі

Будемо вважати, що в моменти часу $t_k,\ k=\overline{0,K-1}$ $(t_0=0,\ t_{K-1}=T)$ спостерігається сукупність даних, які є сумою детермінованої складової у вигляді полінома степеня n з коефіцієнтами $a_i,\ i=\overline{0,n}$ і випадкової помилки (шуму) спостереження $\zeta(t)$

$$z(t_k)=\sum_{i=0}^{n} a_i\cdot t_k^i+\zeta(t_k). \tag{1}$$

Шум $\zeta(t)$ вважається стаціонарним (у вузькому розумінні) випадковим процесом з нульовим математичним сподіванням.

Потрібно знайти незміщені оцінки $\hat{a}_i$ коефіцієнтів a_i, що мають мінімальні середні квадратичні відхилення щодо істинних значень

$$M[\hat{a}_i-a_i]^2,\qquad i=\overline{0,n}. \tag{2}$$

2. Оптимальні лінійні незміщені оцінки коефіцієнтів регресії

Якщо кореляційна функція шуму спостереження $\zeta(t)$ в (1) відома, то задача побудови лінійних незміщених оцінок коефіцієнтів регресії з мінімальними дисперсіями має єдиний розв’язок, який випливає із узагальненого методу найменших квадратів (УМНК). Метод УМНК [2,5] дозволяє знайти оцінку $\hat{\vec{a}}$ вектора коефіцієнтів регресії $\vec{a}=(a_0,...,a_n)$, координати якої $\hat{a}_i,\ i=\overline{0,n}$ є найкращими незміщеними оцінками відповідних координат вектора $\vec{a}$. При цьому $\hat{\vec{a}}$ називають марківською оцінкою для вектора $\vec{a}$ [6].

Пряме застосування УМНК припускає обернення матриць розмірності $K\times K$. При великих K такий підхід не прийнятний на практиці через дуже низьку обчислювальну ефективність і недостатню стійкість рішень. У зв'язку з цим доведемо таке твердження.

Твердження 1. Якщо виконуються умови, зазначені в сформульованій вище постановці задачі, і відомі значення кореляційної функції $R(k,q)=M[\zeta(t_k)\cdot\zeta(t_q)]$ шуму спостереження $\zeta(t)$, то оптимальні лінійні незміщені оцінки коефіцієнтів регресії, що забезпечують мінімуми показників (2), мають вигляд

$$\hat{a}_i=\sum_{k=0}^{K-1} z(t_k)\cdot w_i(k),\qquad i=\overline{0,n}, \tag{3}$$

де ваги

$$w_i(k)=\sum_{j=0}^{n} b_{ij}\cdot\psi_j(k),\qquad k=\overline{0,K-1},\ i=\overline{0,n}, \tag{4}$$

функції $\psi_j(k),\ j=\overline{0,n}$ визначимо із системи рівнянь

$$\sum_{q=0}^{K-1} R(k,q)\cdot\psi_j(q)=t_k^j,\qquad k=\overline{0,K-1}, \tag{5}$$

а $b_{ij},\ i,j=\overline{0,n}$ – елементи матриці D^{-1}, оберненої до матриці,

$$D = [\,d_{ij}\,]\,, \tag{6}$$

де

$$d_{ij} = \sum_{k=0}^{K-1}\sum_{q=0}^{K-1} R(k,q)\cdot\psi_j(k)\cdot\psi_i(q)\,, \qquad i,j=\overline{0,n}\,. \tag{7}$$

Доведення. Спочатку доведемо незміщеність оцінки (3) з вагами (4). Згідно з (3, 4) маємо

$$M[\hat{a}_i] = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\sum_{k=0}^{K-1} M[z(t_k)]\cdot\psi_j(k)\ . \tag{8}$$

Підставивши у (8) значення спостереження (1), отримаємо

$$M[\hat{a}_i] = \sum_{s=0}^{n} a_s \sum_{j=1}^{n} b_{ij}\cdot d_{js} = a_i\ .$$

Доведемо справедливість умови

$$M[(\hat{a}_i - a_i)(\tilde{a}_i - \hat{a}_i] = 0\,, \tag{9}$$

де $\tilde{a}_i$ – довільна лінійна незміщена оцінка виду

$$\tilde{a}_i = \sum_{k=0}^{K-1} z(t_k)\cdot\varphi_i(k)\,,$$

виконання якої забезпечує оптимальність ваг (4) у класі лінійних незміщених оцінок [8].

Через незміщеність оцінок $\tilde{a}_i$ функції $\varphi_i(k)$ повинні задовольняти умову

$$\sum_{k=0}^{K-1} t_k^{\,j}\cdot\varphi_i(k) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } j = i, \\ 0, & \text{якщо } j \neq i. \end{cases}$$

Тоді

$$M[(\hat{a}_i - a_i)(\tilde{a}_i - \hat{a}_i] = M[(\sum_{k=0}^{K-1} z(t_k)\cdot w_i(k) - a_i)(\sum_{k=0}^{K-1} z(t_k)\cdot(\varphi_i(k) - w_i(k)))]\,. \tag{10}$$

Після перетворень у (10) прийдемо до (9). Таким чином, доведення твердження закінчено.

Для стаціонарного шуму спостереження дисперсії оцінок

$$M[\hat{a}_i - a_i]^2 = \sum_{k=0}^{K-1}\sum_{s=0}^{K-1} R(t_k - t_s)\cdot w_i(k) w_i(s)\,, \qquad i=\overline{0,n}\,, \tag{11}$$

де $R(\tau)$ – кореляційна функція шуму спостереження $\zeta(t)$.

При певних видах шуму спостереження застосування оптимальних лінійних незміщених оцінок параметрів регресії може забезпечити істотний виграш за дисперсією оцінювання порівняно з оцінкою МНК. До таких видів шуму належать вузькосмугові стаціонарні процеси з кореляційною функцією

$$R(\tau) = C\cdot exp(-\alpha|\tau|)\cdot cos(2\cdot\pi\cdot f_0)\,, \tag{12}$$

де $C > 0$; $\alpha > 0$; $f_0 > 0$.

Рис. 1 ілюструє виграш за дисперсією оцінки параметра a_2 регресії другого порядку при використанні оптимальних лінійних незміщених оцінок щодо оцінок МНК. Зображені на рис. 1 залежності розраховані відповідно до формули (11) для випадку шуму спостереження з кореляційною функцією (12) і частотою $f_0 = 45$ Гц, часом спостереження $T = 0{,}1\ c$, числом часових відліків $K = 128$ і рівномірної за часом дискретизації. По осі абсцис тут відкладені значення параметра α, а по осі ординат – відношення дисперсії оцінки МНК $D_{2МНК}$ до дисперсії оптимальної оцінки D_{2opt}.

Перевагою запропонованого алгоритму оцінювання коефіцієнтів регресії, що задається співвідношеннями (3-7), порівняно з алгоритмом оцінювання УМНК, що використовує операцію обернення кореляційних матриць, є вища обчислювальна ефективність і стійкість рішень. Замість обернення кореляційної матриці R розмірності $K \times K$ тут потрібно розв'язати систему лінійних рівнянь (5), для цього можна використовувати ефективні обчислювальні методи. Для моделі стаціонарного шуму спостереження із врахуванням тепліцевості матриці R для розв'язку системи рівнянь (5) можна використати метод Левінсона, для якого кількість необхідних обчислювальних операцій пропорційна K^2 і має високу чисельну стійкість [9].

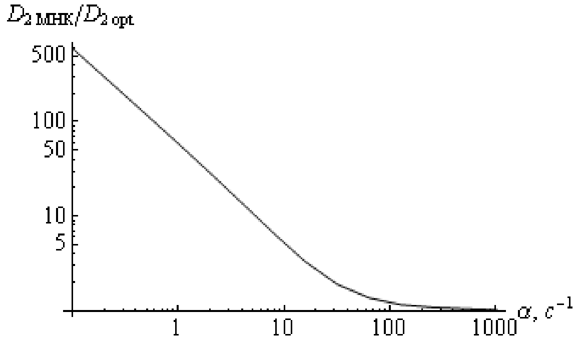

Рисунок 1 − Виграш від використання оптимальної лінійної незміщеної оцінки відносно оцінки МНК

3. Вагові функції регресійного аналізу і їхнє застосування для синтезу оцінок коефіцієнтів поліноміальної регресії

Будемо вважати, що шум $\zeta(t)$ має неперервні похідні порядку $i=\overline{1,n}$. Таке припущення не є обтяжним, тому що відповідно до сформульованої постановки задачі спостерігаються лише значення даних у кінцевій множині моментів часу $t_k,\ k=\overline{0,K-1}$. Тому шум спостереження можна розглядати як деякий процес із диференційованими реалізаціями. Припущення про диференційованість реалізацій шуму спостереження дозволяє використати для синтезу оцінок коефіцієнтів регресії апарат вагових функцій РА [10].

Поняття вагових функцій РА запроваджено в статті [10] на основі ідей, наведених в [11]. Згідно з [10] оцінку (3) можна зобразити так:

$$\hat{a}_i=\int_0^T z^{(i)}(t)V_i(t)dt\ , \tag{13}$$

де $z^{(i)}(t)$ − i-а похідна процесу $z(t)$;

$$V_i(t)=\frac{(-1)^i}{(i-1)!}\sum_{\substack{k=0\\ t_k<t}}^{K-1} w_i(k)\cdot(t-t_k)^{i-1}. \tag{14}$$

Функції $V_i(t)$, що беруть участь в інтегралі (13) як співмножник при i-ій похідній від спостережуваного процесу, називають ваговими функціями РА [10]. Згідно з (14) вагові функції – це сплайни порядку $(i-1)$ дефекту 1 й

$$V_i(t)=0\ ,\ \forall t\neq[0,T). \tag{15}$$

Якщо i-а похідна шуму $\zeta(t)$, а значить і процесу $z(t)$ неперервна, то замість (14) як вагову функцію у виразі (13) можна використовувати сплайн

$$V_i(t)=\frac{(-1)^i}{(i-1)!}\sum_{k=0}^{K-1} w_i(k)\cdot(t-t_k)_+^{i-1}, \tag{16}$$

де усічена степенева функція [12]

$$(t-t_k)_+^{i-1}=\begin{cases}(t-t_k)^{i-1},\ t\geq t_k,\\ 0,\ t<t_k\end{cases} \tag{17}$$

є сплайном степеня $(i-1)$ дефекту 1 з одним вузлом t_k.

Формула (16) задає подання вагової функції у вигляді суми усічених поліноміальних функцій. Оскільки в (16) вагові коефіцієнти $w_i(k)$ задовольняють $(n+1)$-у додаткову умову,

$$\sum_{k=0}^{K-1} w_i(k)\cdot t_k^j=\begin{cases}1,\ якщо\ j=i,\\ 0,\ якщо\ j\neq i,\end{cases} \tag{18}$$

то розмірність лінійного простору сплайнів, якому належать вагові функції РА, дорівнює $K-n-1$.

Сплайни виду (16) допускають подання через В-сплайни степеня $(i-1)$ дефекту 1 [12]

$$V_i(t)=\sum_{k=0}^{K-i-1} b_i(k)\cdot B_{i-1}^k(t), \qquad (19)$$

де

$$B_{i-1}^k(t)=(-1)^i\cdot i\cdot\sum_{s=k}^{k+i}(t-t_s)_+^{i-1}\prod_{q=k,q\neq s}^{k+i}\frac{1}{(t_s-t_q)}. \qquad (20)$$

Сплайни виду (20) називають базисними або В-сплайнами [12]. Вони мають важливі властивості: невід'ємні на інтервалі $[t_k,t_{k+i})$ й дорівнюють нулю поза ним.

Між послідовністю вагових коефіцієнтів $w_i(k)$, $k=\overline{0,K-1}$ і ваговими функціями $V_i(t)$ існує взаємно однозначна відповідність. Однак у ряді задач використання вагових функцій дозволяє більш обґрунтовано судити про властивості алгоритмів регресійного аналізу, бо вони мають основні властивості вікон, що використовують у спектральному аналізі сигналів.

Дискретне перетворення Фур'є послідовності вагових коефіцієнтів характеризує вплив гармонійних складових шуму спостереження на оцінку i-го коефіцієнта регресійної моделі

$$h_i(f)=\sum_{k=0}^{K-1} w_i(k)exp(-j2\pi f t_k), \qquad (21)$$

а перетворення Фур'є відповідних вагових функцій

$$H_i(f)=\int_0^T V_i(t)exp(-j2\pi f t)dt \qquad (22)$$

характеризує вплив гармонійних складових i-ої похідної шуму [10].

Максимальне значення модуля частотної характеристики (22) досягається, як правило, на нульовій частоті й для незміщених оцінок [10]

$$H_i(0)=\int_0^T V_i(t)dt=\frac{1}{i!},\ i=\overline{1,n}. \qquad (23)$$

Знання вагової функції $V_i(t)$, $i\geq 2$ і множини точок спостереження t_k, $k=\overline{0,K-1}$ ($t_{k-1}<t_k$) дозволяє визначити ваги опрацювання

$$w_i(0)=(-1)^i(i-1)!V_i(t_1)/(t_1-t_0)^{i-1},$$

$$w_i(k)=[(-1)^i(i-1)!V_i(t_{k+1})-\sum_{\nu=0}^{k-1}w_i(\nu)\cdot(t_{k+1}-t_\nu)^{i-1}]/(t_{k+1}-t_k)^{i-1},\qquad k=\overline{1,K-1}, \qquad (24)$$

де $V_i(t_K)=0$. У випадку ж $i=1$ перехід від вагової функції до послідовності вагових коефіцієнтів можна здійснити відповідно до наступних формул

$$w_1(0)=-V_1(t_0);\qquad w_1(k)=V_1(t_{k-1})-V_1(t_k),\qquad k=\overline{1,K-1}.$$

Застосування виразів (16) і (24) дозволяє будувати лінійні незміщені оцінки параметрів регресії, яким відповідають вагові функції $V_i(t)$ необхідного виду. При побудові вагових функцій для старшого коефіцієнта у моделі (1) будемо використовувати таке твердження.

Твердження 2. Нехай задана множина моментів часу t_k, $k=\overline{0,K-1}$, де $t_0=0$, $t_{K-1}=T$, і для спостережуваних даних справедлива модель (1). Сплайну $V_n(t)$ з вузлами в точках t_k, $k=\overline{0,K-1}$ взаємно однозначно відповідає послідовність вагових коефіцієнтів $w_n(k)$, застосування якої у виразі (3) забезпечує незміщену оцінку коефіцієнта a_n, тоді й тільки тоді, коли він допускає подання у вигляді

$$V_n(t)=\sum_{k=0}^{K-n-1} c_k \cdot B_{n-1}^k(t) \tag{25}$$

і задовольняє умову нормування

$$\int_0^T V_n(t)dt=\frac{1}{n!}. \tag{26}$$

Доведення. Спочатку доведемо, що виконання співвідношень (25,26) забезпечує незміщеність оцінки a_n.

Для функції $V_n(t)$ вигляду (25) виконується умова $V_n(t)=0$ для $\forall t \geq T$. Після переходу від подання сплайна (25) через B-сплайни до його подання у вигляді суми усічених степеневих функцій отримаємо

$$\sum_{k=0}^{K-1} w_n(k)\cdot(t-t_k)_+^{n-1}=0, \quad \forall t \geq T. \tag{27}$$

З (27) випливає, що для коефіцієнтів $w_n(k)$ виконуються умови ортогональності

$$\sum_{k=0}^{K-1} w_n(k)\cdot t_k^j=0, \qquad j=\overline{0,n-1}. \tag{28}$$

Крім того, згідно з (26)

$$\int_0^T V_n(t)dt=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{K-1} w_n(k)\cdot(T-t_k)^n=\frac{1}{n!},$$

звідки з урахуванням (28) отримаємо

$$\sum_{k=0}^{K-1} w_n(k)\cdot t_k^n=1. \tag{29}$$

Із сукупності умов (28, 29) випливає, що ваговій функції (25) відповідають вагові коефіцієнти $w_n(k)$, застосування яких у (3) забезпечує незміщену оцінку $\hat{a}_n$.

Тепер доведемо необхідність виконання умов (25, 26) для незміщених оцінок.

Нехай послідовності вагових коефіцієнтів $w_n(k),\ k=\overline{0,K-1}$ відповідає вагова функція

$$V_n(t)=\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{K-1} w_n(k)\cdot(t-t_k)_+^{n-1}. \tag{30}$$

Оскільки на вагові коефіцієнти накладаються $n+1$ умов, які описуються рівняннями (28, 29) і забезпечують незміщеність оцінки $\hat{a}_n$, то розмірність лінійного простору, якому належать сплайни (30), дорівнює $K-n-1$. Вибравши в цьому просторі базис зі $K-n-1$ сплайнів $B_{n-1}^k(t)$, $k=\overline{0,K-n-1}$, отримаємо подання сплайна (30) у вигляді (25). Для незміщених оцінок також слід виконувати умову (26) [10]. Таким чином, доведення твердження 2 закінчено.

Розглянемо важливий випадок рівномірно розміщених часових відліків, коли $t_k-t_{k-1}=\Delta$, $k=\overline{1,K-1}$. У цьому випадку згідно з (19)

$$V_i(t)=\sum_{k=0}^{K-i-1} b_i(k)\cdot B_{i-1}(t-k\Delta), \tag{31}$$

де

$$B_{i-1}(t)=(-1)^i\frac{i}{\Delta^i}\cdot\sum_{s=0}^{i}(t-s\Delta)_+^{i-1}\prod_{q=0,q\neq s}^{i}\frac{1}{(s-q)}.$$

Вираз для частотної характеристики РА отримаємо, підставивши (31) в (22),

$$H_i(f) = H_{Bi}(f) \cdot H_{Ai}(f), \tag{32}$$

де

$$H_{Ai}(f) = \sum_{k=0}^{K-i-1} b_i(k) exp(-j2\pi f\Delta k); \qquad H_{Bi}(f) = \int_0^T B_{i-1}(t) exp(-j2\pi ft)dt .$$

Згідно з (32) частотна характеристика РА $H_i(f)$ допускає подання у вигляді добутку спектральної характеристики В-сплайна $H_{Bi}(f)$ і спектральної характеристики $H_{Ai}(f)$ послідовності коефіцієнтів $b_i(k),\ k = \overline{0, K-i-1}$.

Для шуму спостереження $\zeta(t)$ із заданою кореляційною функцією оптимальні лінійні незміщені оцінки параметрів регресії $\hat{a}_i,\ i = \overline{0,n}$ визначаються сукупністю виразів (3-7). Однак при великому числі відліків K важко розв'язати систему рівнянь (5). Крім того, часто кореляційна функція шуму спостереження не повністю задана, а відомий лише діапазон частот, у якому зосереджена основна доля потужності цього шуму. У таких випадках ваги опрацювання $w_n(k)$, що визначають оцінку старшого коефіцієнта полінома a_n, можна знайти таким способом: 1) згідно з (25) задати вагову функцію РА у вигляді лінійної комбінації В-сплайнів; 2) згідно з (24) визначити вагові коефіцієнти опрацювання. Якщо в моделі (1) часові відліки розміщені з однаковим інтервалом, то на першому етапі процедури коефіцієнти $b_i(k),\ k = \overline{0, K-n-1}$ можна отримати як відліки вагового вікна, що має необхідну частотну характеристику.

4. Синтез оцінок старшого коефіцієнта поліноміальної регресії для моделі другого порядку із застосуванням сплайнів

Для моделі другого порядку вирази (16) і (24) відповідно такі:

$$V_2(t) = \sum_{k=0}^{K-1} w_2(k) \cdot (t - t_k)_+ ; \tag{33}$$

$$w_2(k) = \frac{V_2(t_{k+1}) - V_2(t_k)}{t_{k+1} - t_k} - \frac{V_2(t_k) - V_2(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}},\ \ k = \overline{0, K-1}, \tag{34}$$

де вважається $t_{k-1} < t_k$ й $V_2(t_{-1}) = V_2(t_0) = V_2(t_{K-1}) = V_2(t_K) = 0$.

Згідно з (25) для даного випадку вагова функція допускає подання

$$V_2(t) = \sum_{k=0}^{K-3} b_2(k) \cdot B_1^k(t), \tag{35}$$

де базисні сплайни мають трикутний вигляд

$$B_1^k(t) = \begin{cases} 2(t - t_k)(t_{k+1} - t_k)^{-1}(t_{k+2} - t_k)^{-1}, & t \in [t_k, t_{k+1}), \\ 2(t_{k+2} - t)(t_{k+2} - t_{k+1})^{-1}(t_{k+2} - t_k)^{-1}, & t \in [t_{k+1}, t_{k+2}), \\ 0, \quad t \notin [t_k, t_{k+2}). & \end{cases} \tag{36}$$

З виразів (35, 36) випливає, що будь-яку неперервну кусково-лінійну функцію $V(t)$, яка дорівнює нулю всюди поза інтервалом $(0,T)$ і задовольняє умову нормування $\int_0^T V(t)dt = 1/2$, можна використовувати як вагову функцію регресійного аналізу $V_2(t)$.

Проілюструємо застосування викладеного вище методу синтезу оцінок у просторі сплайнів для випадку рівномірно розміщених часових відліків.

Припустимо, що шум спостереження є низькочастотним і потрібно побудувати оцінку параметра a_2 в моделі (1). Для даного випадку скористаємося поданням вагової функції (31), що має вигляд

$$V_2(t) = \sum_{k=0}^{K-3} b_2(k) \cdot B_1(t - k\Delta), \tag{37}$$

де базисний сплайн – це кусково-лінійна функція трикутного вигляду

$$B_1(t) = \begin{cases} t/\Delta^2, \ t \in [0,\Delta), \\ (2\Delta - t)/\Delta^2, \ t \in [\Delta, 2\Delta), \\ 0, \ t \notin [0, 2\Delta). \end{cases} \tag{38}$$

Послідовність коефіцієнтів $b_2(k), k = \overline{0, K-3}$ для даного випадку раціонально вибрати так, щоб її частотна характеристика мала вузький головний пелюсток. Побудуємо таку послідовність на основі вагових коефіцієнтів вікна Кайзера [13]

$$b_2(k) = \frac{1}{S} \cdot I_0\left(\beta\sqrt{1 - \left(\frac{2k - J + 1}{J - 1}\right)^2}\right), \qquad k = \overline{0, J-1}, \tag{39}$$

де $J = K - 2$, а параметр S вибирається з умови нормування

$$\sum_{k=0}^{J-1} b_2(k) = 1/2. \tag{40}$$

Сукупність вагових коефіцієнтів $w_2(k)$ для оцінки параметра a_2 визначимо згідно з (34) за значеннями сплайна (37) у вузлах.

На рис. 2 і 3 зображені результати синтезу вагових коефіцієнтів $w_2(k)$ для таких умов: час спостереження $T = 1$с, а відліки функції (1) спостерігаються з рівномірним часовим інтервалом $\Delta = T/(K-1)$, де $K = 32$.

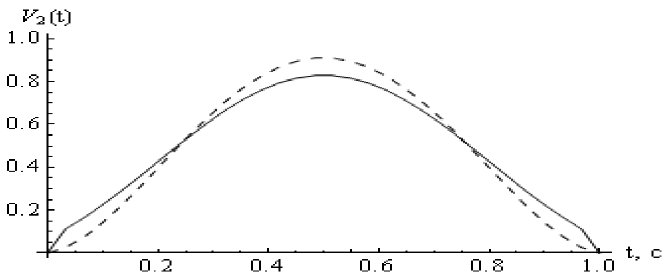

Рисунок 2 – Вагова функція РА, синтезована на основі вікна Кайзера

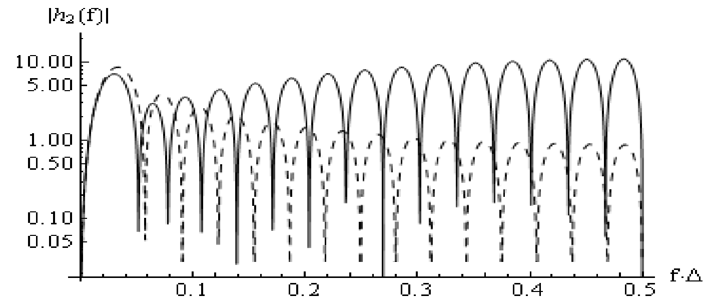

Рисунок 3 – АЧХ послідовності ваг опрацювання, синтезованих на основі вікна Кайзера

На рис. 2 суцільною кривою зображено вагову функцію, синтезовану згідно з (37-40) зі значенням параметра вікна Кайзера $\beta = 3{,}5$, а пунктирною – вагову функцію оцінки МНК. АЧХ РА, розраховані згідно з (21), зображені на рис. 3: суцільною кривою для синтезованих ваг опрацювання, а пунктирною кривою – для ваг оцінки МНК. Із наведених характеристик випливає, що АЧХ ваг опрацювання, синтезованих на основі вікна Кайзера, має вужчі й менші за рівнем перші два пелюстки, ніж АЧХ ваг опрацювання МНК. Тому у випадку низькочастотного шуму спостереження використання синтезованих ваг опрацювання у виразі (3) для оцінки коефіцієнта регресії a_2 може забезпечити виграш за показником ефективності (2) відносно оцінки МНК.

Припустимо тепер, що в шумі спостереження переважають високочастотні спектральні складові. Послідовність коефіцієнтів $b_2(k)$ у виразі (37) у цьому випадку раціонально вибрати так, щоб частотна характеристика РА мала високу швидкість спадання. Побудуємо таку послідовність на основі вагових коефіцієнтів вікна Блекмана [13]

$$b_2(k) = \frac{1}{S} \cdot [\,0{,}42 - 0{,}5 \cdot cos(2\pi \frac{k+1}{K-1}) + 0{,}08 \cdot cos(4\pi \cdot \frac{k+1}{K-1})] \ , \quad k = \overline{0, J-1}, \qquad (41)$$

де $J = K - 2$, а параметр S вибираємо з умови нормування (40).

Сукупність вагових коефіцієнтів $w_2(k)$ для оцінювання параметра a_2 визначимо аналогічно розглянутому раніше випадку за формулами (34, 37, 41).

На рис. 4 і 5 зображено результати синтезу вагових коефіцієнтів $w_2(k)$ з використанням вікна Блекмана для обговорених раніше умов: $T = 1$с; $K = 32$. Тут на рис. 4 суцільною кривою зображено вагову функцію, синтезовану згідно з (37) з вікном Блекмана (41), а пунктирною – вагову функцію оцінки МНК. АЧХ РА зображені на рис.5: суцільною кривою для синтезованої послідовності ваг опрацювання, а пунктирною – для ваг оцінки МНК.

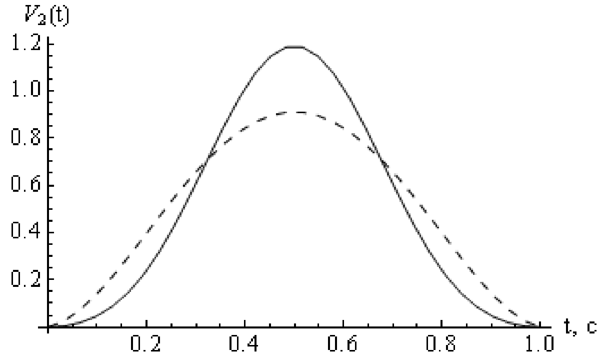

Рисунок 4 – Вагова функція РА, синтезована на основі вікна Блекмана

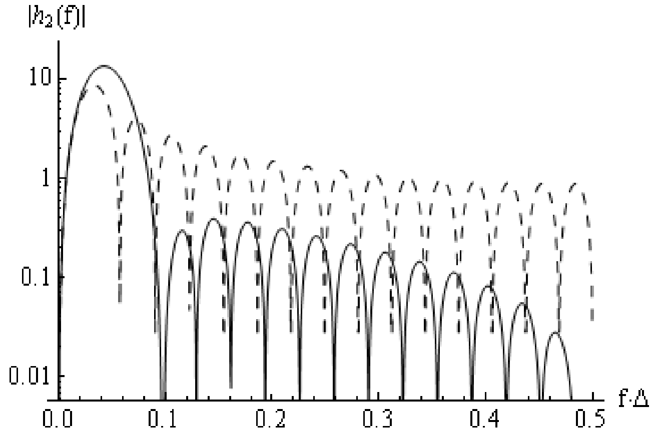

Рисунок 5 – АЧХ послідовності ваг опрацювання, синтезованих на основі вікна Блекмана

Із наведених характеристик випливає, що АЧХ ваг опрацювання, синтезованих на основі вікна Блекмана, має нижчий рівень бічних пелюстків відносно АЧХ ваг опрацювання МНК. Тому їх застосування в алгоритмі оцінювання (3) дозволяє придушити високочастотні складові шуму спостереження.

Висновки

У даній роботі обґрунтовано методи синтезу лінійних незміщених оцінок параметрів поліноміальної регресії для випадку корельованих помилок спостереження.

У результаті виконаних досліджень зроблено такі висновки.

1. У випадку, коли аналізують дані для отримання незміщених оцінок коефіцієнтів регресії з мінімальним середнім квадратичним відхиленням від істинних значень, а помилки спостереження є корельованими, варто замість оцінок найменших квадратів використовувати оптимальні лінійні незміщені оцінки. Їхнє використання може забезпечити істотний виграш у точності оцінювання відносно методу найменших квадратів.

2. При оцінюванні коефіцієнтів поліноміальної регресії у випадку корельованих помилок спостереження зручно користуватися поняттями вагової функції й АЧХ РА. Подання вагових функцій у вигляді лінійної комбінації В-сплайнів дозволяє синтезувати оцінки, що мають необхідні властивості.

3. Розроблено метод синтезу оцінок старших коефіцієнтів поліноміальної регресії, який заснований на поданні вагових функцій у вигляді лінійної комбінації В-сплайнів і використовує відомі вікна спектрального аналізу часових рядів.

4. Із застосуванням вікон Кайзера й Блекмана синтезовано оцінки старшого коефіцієнта поліноміальної регресії другого порядку. Показано, що використання оцінки, синтезованої на основі вікна Кайзера, замість оцінки МНК доцільно при дії низькочастотного шуму спостереження. Використання ж оцінки, синтезованої на основі вікна Блекмана, дозволяє більше придушити високочастотні складові шуму спостереження, ніж це досягається при використанні оцінки МНК.

Подальші дослідження заплановано присвятити розв'язанню прикладних задач регресійного аналізу на основі розроблених методів.

Література

1. Дрейпер Н. Прикладной регрессионный анализ / Н. Дрейпер, Г. Смит. – М. : Издательский дом «Вильямс», 2007. – 912 с.
2. Большаков А. А. Методы обработки многомерных данных и временных рядов / А. А. Большаков, Р. Н. Каримов. – М. : Горячая линия. – Телеком, 2007. – 522 с.
3. Румшиский Л. З. Математическая обработка результатов эксперимента / Румшиский Л.З. – М. : Наука, 1971. – 192 с.
4. Справочник по теории вероятностей и математической статистике / В. С. Королюк, Н. И. Портенко, А. В. Скороход, А. Ф. Турбин. – М. : Наука, 1985. – 640 с.
5. Себер Дж. Линейный регрессионный анализ / Себер Дж. – М. : Мир, 1980. – 456 с.
6. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов / Андерсон Т. – М. : Мир, 1976. – 755 с.
7. Яглом А. М. Корреляционная теория стационарных случайных функций / Яглом А. М. – Л. : Гидрометеоиздат, 1981. – 280 с.
8. Розанов Ю. А. Случайные процессы (краткий курс) / Розанов Ю. А. – М. : Наука, 1971. – 286 с.
9. Марпл-мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения / Марпл-мл. С. Л. – М. : Мир, 1990. – 584 с.
10. Омельченко А.В. Весовые функции полиномиального регрессионного анализа / А. В. Омельченко, А. В. Федоров // Вісник Харк. нац. ун-ту. Сер. «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». – 2008. – № 833, вип. 10. – С. 193–205.
11. Кравченко В.Ф. Среднеквадратичное приближение как оператор линейной системы / В. Ф. Кравченко, В. Д. Нагорный // Электромагнитные волны и электронные системы. – 1997. – Т. 2, № 4. – С. 10–15.
12. Завьялов Ю. С. Методы сплайн-функций / Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. – М. : Наука, 1980. – 350 с.
13. Хэррис Ф. Дж. Использование окон при гармоническом анализе методом дискретного преобразования Фурье / Ф. Дж. Хэррис // ТИИЭР. – 1978. – Т. 66, № 1. – С. 60–96.

Одержано 25.03.2009 р.